JOSÉ BERTIN

Anneaux cohérents de dimension homologique finie

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. nº 16, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___4_A16_0>

ANNEAUX COHERENTS DE DIMENSION HOMOLOGIQUE FINIE

José BERTIN

INTRODUCTION

On se propose dans cet exposé de démontrer certains résultats sur les anneaux cohérents de dimension homologique finie.

Certains résultats sont annoncés dans (3).

Pour quelques compléments, on pourra regarder l'article (n) à paraître.

I - Anneaux autoassociés

Nous utilisons la dimension homologique faible telle qu'elle est introduite dans (4) par exemple. Si A est un anneau commutatif unitaire, M un A-module, W $dh_A(M)$ ou Tor $\dim_A(M)$ désigne le plus petit entier n tel qu'il existe une résolution plate :

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-I} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

On a le résultat bien connu suivant :

Proposition I.I : Sous les hypothèses précédentes, il y a équivalence entre :

I) Tor $\dim_A(M) \leq n$

2) $\mathrm{Tor}_i^A(M,.) = 0$ pour $i > n$

3) $\mathrm{Tor}_{n+I}^A(M,.) = 0$

4) Si dans une suite exacte $0 \longrightarrow X \longrightarrow P_{n-I} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ les modules $P_0, \dots, P_{n-I}$ sont plats, alors X est plat.

I.2 : Un module M est dit d'infinie présentation finie, si pour tout entier $n > 0$, il existe une n-présentation finie.

$$L_n \longrightarrow \dots \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$L_0, \longrightarrow, L_n$ étant des modules libres de type fini.

Donnons un lemme qui sera très utile par la suite.

On considère des suites exactes courtes :

$$0 \to P \xrightarrow{u} Q \xrightarrow{v} M \to 0 \ , \quad 0 \to P' \xrightarrow{u'} Q' \xrightarrow{v'} M' \to 0$$

On a :

Lemme I.3 (Schanuel) : Si Q et Q' sont projectifs, $P \oplus Q'' \simeq P' \oplus Q$.

Donnons en une démonstration :

Soit $\Gamma = Q \times_M Q'$ le produit fibré de Q et Q' sur M ; Q' étant projectif, il existe un homomorphisme

$$\theta : Q' \longrightarrow Q \text{ tel que } v\theta = v'.$$

On considère alors les deux sous-modules de Γ :

$$\Gamma_I = \{(\theta(y'), y') \mid y' \in Q'\}.$$

$$\Gamma_2 = \{(u(x), Q/x \in P\}$$

il est évident que Γ est somme directe de Γ_I et Γ_2, comme $\Gamma_I \simeq Q'$ et $\Gamma_2 \simeq P$, on a $\Gamma \simeq P \oplus Q'$, de même $\Gamma \simeq P' \oplus Q$. Ce qu'il faut démontrer.

Il n'y a d'ailleurs aucun mal à généraliser ce lemme pour des suites exactes de longueur quelconque :

On a donc : pour deux suites exactes :

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow P_{n-I} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow Q_{n-I} \longrightarrow Q_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow Q_0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

où les P_i et Q_j sont des modules projectis.

$$X \oplus Q_{n-I} \oplus P_{n-2} \oplus \dots \simeq Y + P_{n-I} \oplus Q_{n-2} \oplus \dots$$

On peut déduire de ce dernier résultat la remarque suivante :

I.4 : Considérons une suite exacte

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow L_{n-I} \longrightarrow \dots \longrightarrow L_0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

où E est d'infinie présentation finie ; $L_0, \dots, L_{n-I}$ des modules libres de type fini ; alors le module X est de type fini.

Cette propriété caractérise d'ailleurs les modules d'infinie présentation finie.

Prenons une n-présentation finie de E : (I.2)

$$F_n \longrightarrow F_{n-I} \longrightarrow \dots \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

soit $R = I_m(F_n)$

Le lemme de Schanuel donne :

$$X \oplus F_{n-I} \oplus L_{n-I} \oplus \ldots \simeq R \oplus L_{n-I} \oplus F_{n-2} \oplus \ldots$$

R étant de type fini, on en déduit que X est de type fini.

On peut même prouver que X est de présentation finie.

I.5 : Soit A un anneau commutatif unitaire, on pose $W\ dh(A) = \sup W\ dh_A(M)$.
C'est donc un entier fini (ou infini).
On peut bien sûr se limiter aux modules qui sont de présentation finie.

I.6 : Rappelons quelques définitions sur les anneaux cohérents.

I.6.I : Un anneau A est dit "cohérent" s'il possède l'une des propriétés équivalentes.

(i) Tout produit de modules plats est plat ;

(ii) La sous catégorie pleine de Mod(A), composée des A-modules de présentation finie, est abélienne ;

(iii) Tout idéal de type fini est de présentation finie ;

(iv) L'intersection de deux idéaux de type fini est de type fini, et l'annulation de tout élément est de type fini.

Pour les démonstrations, on lira l'article de Chase (4).

I.6.2 : Un module de présentation finie sur un anneau cohérent, est d'infinie présentation ; il est facile de voir que pour un tel module, les notions de dimension plate et projective coïncident.
On a donc $W\ dh(A) = \sup \dim \operatorname{proj}(M)$, M de présentation finie.

I.6.3 : Tout localisé d'un anneau cohérent est cohérent.
Plus généralement, si $A \longrightarrow B$ est un épimorphisme plat et A cohérent, alors B

est cohérent. Nous arrivons enfin aux anneaux auto associés.

Cette notion a été introduite par D. Lazard dans (3).

I.7 (Définition) : Un anneau est dit "auto associé" s'il est local (d'idéal maximal m) et si $m \in \mathrm{Ass}(A)$.

Ce sont essentiellement les anneaux de "profondeur" zéro, signalons une tentative de D. Ferrand pour définir une notion de profondeur en algèbre non noethérienne.

I.8 (Proposition) : Soit A un anneau auto associé : tout quotient d'un A module plat par un sous module libre et plat. Pour une démonstration voir (3).

Comme conséquence, on a :

I.9 (Proposition) : Soit A un anneau auto associé, M un A module d'infinie présentation finie.

M est de dimension faible finie, si et seulement si il est libre.

Preuve : Il suffit de prouver que dim proj(M) $\leq$ n implique dim proj(M) $\leq$ n-I.

Soit $0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-I} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ une résolution projective finie par des modules projectifs de type fini (donc libres). Si Q désigne l'image de P_{n-I} dans P_{n-2}, Q est plat en vertu de I.8 et de présentation finie (I.4), donc libre.

On pourra voir (IO) pour une autre démonstration.

II - Caractéristique d'Euler-Poincaré

Ici M désigne un A-module d'infinie présentation finie, qui de plus admet une résolution finie par des modules projectifs de type fini.

(A n'est plus supposé local).

Pour un idéal premier p de A, posons :

2.I

$$\chi_p(M) = \sum_{i=0}^{n} (-I)^i \operatorname{rang}_p (P_i)$$

$\chi_p(M)$ ne dépend pas de la résolution choisie ; ceci peut se voir en utilisant le lemme de Schanuel. De plus, $\chi_p(M)$ se calcule "ponctuellement" : il suffit d'avoir une résolution projective finie de M_p. Nous appellerons caractéristique d'Euler-Poincaré de M la fonction localement constante sur

$$\operatorname{Spec}(A) : p \longrightarrow \chi_p(M).$$

2.2 Supposons l'anneau A cohérent :
si l'on forme le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{C}$ des A-modules de présentation finie, relativement à la classe des sous-objets, admettant une résolution projective finie ; χ apparaît comme un homomorphisme de groupes : $K(\mathcal{C}) \xrightarrow{\chi} Z$, de plus χ est positive ie : $\chi([M] | \geq 0$; en effet, soit M, comme dans 2.I ; on a $\chi_p(M) = \chi_{p} A_p(M_p)$.
Si M_p n'est pas nul, soit $q \subset p$ tel que $q A_q$ soit dans l'assassin de A_q par I.9 $\chi_p(M) = \dim_{Aq}(Mq) \geq 0$.

2.3 (Théorème) : Soit M un module admettant une résolution finie par des projectifs de type fini ; il y a équivalence entre :

(i) $\operatorname{Ann}_A(M) = 0$

(ii) Pour tout idéal premier p associé à A, $\chi_p(M)$ est strictement positif.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) si p est un élément de Ass(A), M_p est libre (I.9), donc $\chi_p(M)$ coïncide avec le rang de M_p.

$\chi_p(M) = 0$ équivaut donc à $M_p = 0$, et par suite à l'existence d'un élément s, n'appartenant pas à p tel que $sM = 0$, ce qui contredit la nullité de $\mathrm{Ann}_A(M)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Posons $I = \mathrm{Ann}_A(M)$. Pour un élément p de Ass(A), on a $\chi_p(M) > 0$, donc M_p est libre (non nul) sur A_p, par suite $\mathrm{Ann}_{A_p}(M_p) = 0$.
On a une injection $I \otimes_A A_p \hookrightarrow \mathrm{Ann}_{A_p}(M_p)$ (qui est une bijection si I est de type fini, par exemple si A est cohérent), donc $I \otimes_A A_p = 0$.
En utilisant l'injection canonique $I \hookrightarrow \prod_{p \in \mathrm{Ass}(I)} I \otimes_A A_p$

et le fait que $\mathrm{Ass}(I) \subset \mathrm{Ass}(A)$, on obtient $I = 0$.
Ceci généralise un résultat d'Auslander (6).

2.4 Question : Sous les hypothèses 2.3, $\mathrm{Ann}_A(M) \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{Ann}_A(M)$ contient un élément non diviseur de zéro ?

III - Application aux anneaux cohérents :

Dans ce paragraphe, nous allons entre autres, généraliser des résultats de Jensen.

3.I (Lemme) : Si A est un anneau local cohérent auto associé, tel que tout idéal de type fini soit de dimension projective finie, c'est un corps.
Si I est un idéal de type fini de A, A/I est de présentation finie, et de dimension projective finie, donc libre (I.9) ; ceci implique donc $I = 0$.

3.2 (Proposition) : Un anneau cohérent tel que tout idéal de type fini soit de dimension projective finie est réduit.
Il suffit en effet de plonger dans $\prod_{p \in \mathrm{Ass}(A)} A_p$, et d'utiliser le lemme précédent.

Nous allons maintenant nous occuper des diviseurs de zéro.

3.3 (Proposition) : Soit A un anneau cohérent de spectre connexe : si tout idéal de type fini est de dimension projective finie, A est intègre.

Preuve : Soit I un idéal de type fini non nul de A ; de la suite exacte

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

et de la propriété d'additivité de la fonction caractéristique d'Euler Poincaré, on a l'égalité $\chi_p(A/I) = I - \chi_p(I)$ pour tout idéal premier p de A. La fonction $\chi(A/I)$ est localement constante, sur spec A, donc en vertu de l'hypothèse constante ; comme elle prend la valeur zéro, en au moins un point de Ass(A) (Théorème 2.3), elle est identiquement nulle.
La fonction $\chi(I)$ est donc constante, égale à un sur Spec A.
Le même théorème 2.3 implique $\mathrm{Ann}_A(I) = 0$.

3.4 (Corollaire) : Soit A un anneau cohérent tel que tout idéal de type fini soit de dimension projective finie, alors l'anneau total des fractions de A est absolument plat.

Ceci résulte d'un travail antérieur de Quentel-Bkouche.
Introduisons une définition :

3.5 (Définition) : Un anneau est dit régulier s'il est local, cohérent et si tout idéal de type fini est de dimension projective finie.

On voit par récurrence sur le nombre des générateurs que tout module de présentation finie sur un anneau régulier est de dimension projective finie.
Il est clair aussi, que tout localisé d'un anneau régulier est régulier.
Pour un anneau cohérent (régulier ou non), notons $\delta(A)$ la borne supérieure

des dimensions homologiques des A-modules de présentation finie et de dimension homologique finie.
(C'est la "finistic dimension" de H. Bass : (2)).

3.6 (Proposition) (Quentel) : Si A est un anneau local cohérent, m son idéal maximal, $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini et de dimension projective finie, on a l'inégalité :

$$\delta(A) \leq \Delta(A/\mathfrak{a}) + dh_A(\mathfrak{a}) + I.$$

Preuve : Soit M un A-module de présentation finie et de dimension homologique finie ; considérons une suite exacte :

$$(S) : 0 \longrightarrow N \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-I} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

où les L_i sont libres de type fini, et où $n = dh_A(\mathfrak{a})$. La suite exacte des Tor montre que $\mathrm{Tor}_p^A(N, A/\mathfrak{a})$ est nul si $p > 0$, puisque $\mathrm{Tor}_p^A(M, A/\mathfrak{a}) = 0$ si $p > n+I$. La proposition VI, 4.I.I de (4) donne pour tout $q \geq 0$ un isomorphisme :

$$\mathrm{Tor}_q^A(N, A/m) \simeq \mathrm{Tor}_q^{A/\mathfrak{a}}(\frac{N}{\mathfrak{a}N}, A/m),$$

or $A/\mathfrak{a}$ est un anneau local cohérent ($\mathfrak{a}$ est de type fini !) ; la formule précédente montre d'abord que $dh_{A/\mathfrak{a}}(\frac{N}{\mathfrak{a}N})$ est finie, donc inférieure à $\delta(A/\mathfrak{a})$ puisque $dh_A(N)$ est finie, ensuite que $dh_A(N)$ est également inférieur à $\delta(A/\mathfrak{a})$: la suite exacte (S) donne alors l'inégalité :

$$dh_A(M) \leq \delta(A/\mathfrak{a}) + n+I.$$

3.7 (Corollaire) : Soit A un anneau local régulier tel que l'ouvert complémentaire du point fermé soit quasi-compact, alors la dimension homologique faible de A est finie.

Preuve : Il existe un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ tel que $A/\mathfrak{a}$ soit de dimension de Krull nulle.

Il suffit par la proposition précédente de prouver que $\delta(A/\mathfrak{a})$ est fini. Mais $A/\mathfrak{a}$ est auto-associé ; cela résulte donc de la proposition I.9.

§ 4 - Normalité des anneaux réguliers

Dans ce paragraphe, nous allons montrer qu'un anneau local régulier est intégralement fermé dans son corps des fractions.

Donnons quelques résultats préliminaires :

4.I (Lemme) : Soient A un anneau local, M un A-module de présentation finie. Si f est un élément A-régulier et M régulier continu dans l'idéal maximal de A. M/fM libre, implique que M est libre.

Preuve : Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & F/_{fm} & \longrightarrow & L/_{fL} & \longrightarrow & M/_{fM} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où l'on a écrit M comme quotient d'un module libre de type fini, L : (F est donc de type fini) en vertu des hypothèses de régularité sur f, la suite du bas est exacte.

Soit k une section de l'injection du bas.

Comme L est libre, on peut trouver $h : L \longrightarrow F$ tel que $\alpha h = k_\beta$.

Si $x \in F$, on a $\alpha(x) = k_\beta(x) = \alpha h(x)$ donc $\alpha(x-h(x)) = 0$, c'est-à-dire $x - h(x) \in f\,F$.

Donc $F = fF + h(F)$. Par Nakayama h/F est surjectif. h/F est un endomorphisme surjectif, donc bijectif.

En effet, Vasconcelos a prouvé que sur un module de type fini, on a pour un endomorphisme l'implication : surjectif $\Longrightarrow$ bijectif généralisant un résultat connu pour les modules de présentation finie.

Il faut dire que ce lemme est en fait un cas particulier d'un résultat de Strooker (I7).

<u>4.2</u> (<u>Théorème</u>) : <u>Soit A un anneau local régulier, m son idéal maximal s'il existe</u> $f \in m$ <u>tel que</u> $m \in \mathrm{Ass}(A/fA)$, <u>on a</u> $W\ dh(A) \leq I$.

Soit I un idéal de type fini de A, f est A-régulier donc I-régulier car A est intègre. Par régularité, I/fI admet une résolution projective finie sur A/fA, mais l'anneau local A/fA étant auto-associé, I/fI est libre (§ I) Via le lemme de Strooker, I est libre. On a donc W dh(A) = I.

<u>4.3</u> (<u>Corollaire</u>) : <u>Un anneau local régulier est normal (i.e : intégralement fermé dans son corps des fractions)</u>.

BIBLIOGRAPHIE

[I] J.P. OLIVIER Thèse sc. Maths. Toulouse I97I.

[2] RAYNAUD-GRUSON Platitude en géométrie algébrique (Inv. Math. I97I).

[3] J. BERTIN Comptes-rendus de l'Académie des Sciences I97I.

[4] QUENTEL-BERTIN Anneaux cohérents réguliers (à paraître).

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du I9 au 22 Janvier I972

Exposé n° I6 J. BERTIN
Université Sabatier
II6, route de Narbonne
3I - TOULOUSE