PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MICHEL CHEIN

MICHEL RIVIERE

Indice de P-recouvrement d'un graphe

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 3
« Informatique », , exp. n° 2, p. 1-70
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___3_A2_0>

Indice de P-recouvrement

d'un graphe

Michel CHEIN

Michel RIVIERE

INDICE DE P - RECOUVREMENT D'UN GRAPHE

Michel CHEIN,

Département de mathématiques - Faculté des Sciences du Mans *

Michel RIVIERE,

Département de mathématiques - Faculté des Sciences du Mans *

* Route de Laval - 72. Le Mans.

INTRODUCTION

BEINEKE énonce dans [1] le problème qu'il appelle "the general covering problem" et qui consiste à déterminer le nombre minimum de sous-graphes partiels d'un graphe G qui vérifient une propriété P et dont l'union est égale à G.

CHEIN [4] a commencé l'étude générale de ce problème en mettant en évidence la généralité de la notion de "graphe critique".

Dans cet article, nous nous intéressons à un problème de couverture encore plus général et qui consiste à déterminer le nombre minimum de sous-graphes partiels d'un graphe G, qui sont non seulement élément d'un ensemble donné P de graphes mais, qui vérifient également avec G une relation α et dont l'union est non plus nécessairement égale à G mais contient une partie $\pi(G)$ de G. Nous appelons indice de P_{α}^{π} - recouvrement de G ce nombre (notation $r_{P_{\alpha}^{\pi}}(G)$).

Ces dernieres années de nombreux résultats ont été obtenus concernant des classes d'invariants particuliers qui sont des indices de P_{α}^{π} - recouvrements.

Citons quelques articles qui contiennent des idées qui nous ont aidé dans ce travail.

LICK [9], à partir de la similarité de certains résultats concernant le nombre chromatique et l'arboricité d'un graphe étudie une classe d'invariants plus généraux et qu'il appelle "point partition number".

HEDETNIEMI [7] et [8], s'intéresse à des généralisations du nombre chromatique et CHARTRAND, GELLER, HEDETNIEMI [3] étudient des indices obtenus en prenant pour P un ensemble de graphes qui ne contiennent pas certaines cliques et graphes bipartis complets.

...

Mais, il est possible de trouver des propriétés communes à des invariants comme le nombre chromatique, l'indice chromatique, l'arboricité, l'épaisseur, ... par exemple tous ces nombres n'augmentent pas lorsqu'on enlève des arêtes à un graphe donné (par contre, le nombre de composantes connexes, lui, ne diminue pas), on est ainsi amené à étudier des indices de P_α^π - recouvrement qui sont monotones.

Plus précisémment, après avoir donné nos notations, définitions et quelques exemples, nous étudions dans la partie II les indices r_{P_α}, c'est-à-dire ceux pour lesquels on recouvre tout le graphe.

L'étude des indices r_{P_α} monotones fait l'objet de la partie III, alors que dans la partie IV nous donnons des résultats concernant les graphes critiques relativement à un invariant quelconque que nous appliquons ensuite au cas des indices de recouvrement.

Enfin, la partie V est un début d'étude de $r_{P_\alpha^\pi}$.

Dans cet article, nous nous sommes volontairement limités aux résultats qui utilisent essentiellement des arguments de théorie des ensembles et peu de théorie des graphes. Ce que, dans chaque partie, nous appelons "étude des cas usuels" (la relation α étant l'inclusion, ou le fait d'être sous-graphe... et π (G) étant l'ensemble des sommets de G, ou celui des arêtes, ...) doit être comprise comme une application des résultats généraux obtenus beaucoup plus que comme une étude approfondie de ces questions. Nous indiquons enfin en conclusion les points qui nous semblent particulièrement intéressant de travailler pour faire avancer cette étude.

NOTATIONS

Les notations non rappelées ici et qui concernent les graphes et les hypergraphes sont celles de BERGE [2].

Un graphe G simple, non orienté et fini est défini par

(X (G), E (G)) X (G) étant un ensemble fini (les sommets) et

E (G) un ensemble de parties à 2 éléments de X (G)

(les arêtes).

Le degré d'un sommet x d'un graphe G, $d_G(x)$, est égal au nombre d'arêtes de G qui contiennent x.

I (G) est l'ensemble des sommets isolés de G (i.e. des sommets dont le degré est 0).

A (G) est l'ensemble des arêtes isolées de G (i.e. des arêtes dont les sommets sont de degré 1).

On posera également $|X(G)| = n$, $|E(G)| = m$, $|I(G)| = k$. Un couplage est un graphe dont tous les sommets sont de degré ≤ 1.

Un graphe G' est appelé : sous-graphe partiel de G, noté $G' \subset G$, si $X(G') \subset X(G)$ et $E(G') \subset E(G)$

Un sous-graphe partiel strict de G sera noté $G' \subsetneq G$

sous-graphe de G, noté G sg G, si

$X(G') \subset X(G)$ et $E(G')$ est l'ensemble des arêtes de G dont les sommets sont éléments de X (G').

graphe partiel de G, noté G' gp G, si

$X(G') = X(G)$ et $E(G') \subset E(G)$.

graphe dense de G, noté G' gd G, si

$E(G') = E(G)$ et $X(G') \subset X(G)$.

...

$\subset$, sg, gp, gd sont des relations d'ordre sur la classe des graphes et les implications entre eux sont les suivantes :

$$\begin{tikzcd} & \subset & \\ gp \arrow[ur, Rightarrow] & & sg \arrow[ul, Rightarrow] \\ & & gd \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Si x est un sommet d'un graphe G, $\{x\}$ représentera le sous-graphe de G ayant x pour sommet et aucune arête, si e est une arête de G $\{e\}$ représentera le sous-graphe de G ayant pour sommets les éléments de e et pour seule arête e.

G_1 et G_2 étant deux graphes, f est un isomorphisme de G_1 sur G_2 si f est une application bijective de X $(G_1$ sur X (G_2) telle que :

$$\{x_1, x_2\} \in E(G_1) \Leftrightarrow \{f(x_1), f(x_2)\} \in E(G_2)$$

(on note alors $G_1 \cong G_2$). Un invariant φ est une application de la classe des graphes dans $\mathbb{N}$ telle que $G \cong G' \Rightarrow \varphi(G) = \varphi(G')$.

$G_1 \cup G_2 = (X(G_1) \cup X(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$

$G_1 \cap G_2 = (X(G_1) \cap X(G_2), E(G_1) \cap E(G_2))$

$G_1 + G_2$ utilisé quand $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ signifie $G_1 \cup G_2$

$G_1 - G_2 = (X(G_1), E(G_1) - E(G_2))$

Un hypergraphe est un couple (X, ξ) constitué d'un ensemble fini X et d'un ensemble ξ de parties de X dont l'union est égale à X.

I - Définitions et exemples.

I. - Définitions.

E étant un ensemble dénombrable, on notera $\mathcal{G}$ l'ensemble des graphes finis, simples, dont les sommets appartiennent à E. Tous les graphes considérés dans cet article sont des éléments de $\mathcal{G}$.

Sauf mention contraire, toutes lesparties P considérées de $\mathcal{G}$ seront supposées stables pour l'isomorphisme (i.e. $\forall G \in P$, $\forall G' \in \mathcal{G}$ $G' \cong G \Rightarrow G' \in P$).

Si P est une partie de $\mathcal{G}$ ne contenant pas de graphe vide (et stable pour l'isomorphisme), si α est une relation binaire dans $\mathcal{G}$ impliquant l'inclusion (i.e. $\forall G, G' : G \alpha G' \Rightarrow G \subset G'$) et si π est une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ vérifiant $\forall G : \pi(G) \subset G$ alors nous poserons :

Définition 1.

$$P_\alpha(G) = \{H \mid H \in P \quad \text{et} \quad H \alpha G\}$$

Définition 2.

On appellera P_α^π - recouvrement de G tout ensemble $\{G_1, \ldots, G_i, \ldots, G_r\}$ de graphes vérifiant :

(1) $\quad \forall i \quad G_i \in P_\alpha(G)$

(2) $\quad \pi(G) \subset \bigcup_i G_i$

$R_{P_\alpha^\pi}(G)$ désignera l'ensemble des P_α^π - recouvrements de G.

L'union de deux P_α^π - recouvrements d'un graphe G est un P_α^π - recouvrement de G donc :

...

Proposition 1.

$R_{P_\alpha^\pi}$ <u>(G) est un $\cup$ - demi - treillis ayant</u> P_α (G) <u>pour maximum</u>.

Définition 3.

Si $R_{P_\alpha^\pi}$ (G) n'est pas vide, on appellera <u>indice de P_α^π - recouvrement de G</u>, noté <u>$r_{P_\alpha^\pi}$</u> (G), le cardinal minimum d'un élément de $R_{P_\alpha^\pi}$ (G).

I.2.- Exemples et notations.

n étant un entier positif, K_n représente une n-clique arbitraire de $\mathcal{G}$, $\overline{K_n}$ représente une n - coclique de $\mathcal{G}$.

Les relations α usuelles seront $\subset$, sg, gp, gd. Les applications π usuelles seront :

π (G)	G	X (G)	E (G)	I (G)	A (G)
notation de π		X	E	I	A

Lorsque π = identité ou $\alpha = \subset$, nous ne les écrirons pas dans P_α, $R_{P_\alpha^\pi}$, $r_{P_\alpha^\pi}$ ...

...

P	α	π	Valeur ou notation classique	Nom de l'invariant
$\{ K_1 \mid K_1 \in \mathcal{G} \}$	$\subset$	X	n	nombre de sommets
	sg	X		
$\{ \overline{K_n} \mid \overline{K_n} \in \mathcal{G} \}$	sg	X	$\gamma(G)$	nombre chromatique
$\{ K_2 \mid K_2 \in \mathcal{G} \}$	$\subset$	E	m	nombre d'arêtes
	sg	E		
	$\subset$	X-I	r (G)	indice de recouvrement ([2] p.124)
	sg	X-I		
$\{ K_1, K_2 \mid K_1, K_2 \in \mathcal{G} \}$	$\subset$	X	r (G) + k	
	sg	X		
	$\subset$	$E\mathcal{G}$	m + k	
	sg	$E\mathcal{G}$		
	$\subset$	E	m	
	sg	E		
{ graphes connexes }	$\subset$		p (G)	nombre de composantes connexes
	sg			

{forêts}	$\subset$ gp	$\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ $\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$	$\gamma(G)$	arboricité ([5] p.90)
{couplages}	$\subset$ gp $\subset$ gp	$\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ $\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ E E	$q(G)$	indice chromatique
{cliques}	$\subset$ sg	$\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ $\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$	$\alpha_K(G)$	([6] p. 15)
{planaires}	$\subset$ sg	$\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ $\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$	$ep(G)$	épaisseur
$\{K_1, K_2 \mid K_1, K_2 \in \mathcal{G}\} \cup \{$2-connexes$\}$	$\subset$ sg	$\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ $\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$		nombre de blocs

I. 3. Propriétés élémentaires.

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques propriétés élémentaires permettant de comparer certains indices en supposant que les ensembles de recouvrements considérés sont non vides (l'étude de l'existence des indices est faite en II.2 et V.1).

Proposition 2.

$$\underline{R_{P_\alpha^\pi}(G) \subset R_{Q_\beta^\eta}(G) \Rightarrow r_{P_\alpha^\pi}(G) \geq r_{Q_\beta^\eta}(G)}$$

Proposition 3.

<u>Si α et β sont deux relations dans $\mathcal{G}$ telles que $\alpha \Rightarrow \beta$</u>

<u>alors</u> :

(1) $\underline{\forall G \quad P_\alpha(G) \subset P_\beta(G)}$

(2) $\underline{\forall G \quad \forall \pi \quad R_{P_\alpha^\pi}(G) \subset R_{P_\beta^\pi}(G)}$

(3) $\underline{\forall G \quad \forall \pi \quad r_{P_\alpha^\pi}(G) \geq r_{P_\beta^\pi}(G)}$

Démonstration.

(1) $H \in P_\alpha(G) \Rightarrow H \,\alpha\, G$ et $H \in P \Rightarrow H \,\beta\, G$ et $H \in P \Rightarrow H \in P_\beta(G)$

(2) Si $\{G_1, \ldots, G_i, \ldots, G_r\}$ est un P_α^π - recouvrement de G :

$G_i \in P_\alpha(G)$ et $\bigcup_i G_i \supset \pi(G) \Rightarrow G_i \in P_\beta(G)$ et $\bigcup_i G_i \supset \pi(G) \Rightarrow \{G_1, \ldots, G_i, \ldots, G_r\}$ est un P_β^π - recouvrement de G.

(3) Immédiat avec la proposition 2. /

Etudions maintenant quelles conditions doivent vérifier α, β et P pour que l'inclusion de (1) soit remplacée par une égalité. On notera C_1 la condition suivante :

$$C_1(G) : \forall H \; : \; (H \,\alpha\, G \text{ et } H \in P) \Leftrightarrow (H \,\beta\, G \text{ et } H \in P)$$

...

Nous avons alors :

Proposition 4.

$$\underline{R_{P_\alpha^\pi}(G)=R_{P_\beta^\pi}(G) \Leftrightarrow P_\alpha(G) = P_\beta(G) \Leftrightarrow \alpha\ ,\beta \text{ et } P \text{ vérifient } C_1(G)}$$

Démonstration.

Pour tout graphe G,

$P_\alpha(G) = P_\beta(G) \Leftrightarrow [\ \forall H : H \in P_\alpha(G) \Leftrightarrow H \in P_\beta(G)\ ] \Leftrightarrow C_1(G)$

$R_{P_\alpha^\pi}(G) = R_{P_\beta^\pi}(G) \Leftrightarrow [\ \{G_1,\dots,G_i,\dots,G_r\} \in R_{P_\alpha^\pi}(G) \Leftrightarrow$ $\{G_1,\dots,G_i,\dots,G_r\} \in R_{P_\beta^\pi}(G)\ ] \Leftrightarrow P_\alpha(G) = P_\beta(G)$ car $P_\alpha(G)$ est un P_α^π- recouvrement de G. /

Si l'on regarde les <u>cas usuels</u> on constate qu'il y a un seul cas où C_1 (G) est vérifié pour tout G , celui où $\alpha = \subset$ et $\beta = sg$: la condition étant que P ne contienne que des cliques.

Laissant α fixe et faisant varier π , nous obtenons :

Proposition 5.

<u>Si π et η sont deux applications de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ telles que $\forall G : \pi(G) \subset \eta(G)$ alors :</u>

(1) $\quad \underline{\forall G \quad R_{P_\alpha^\pi}(G) \supset R_{P_\alpha^\eta}(G)}$

(2) $\quad \underline{\forall G \quad r_{P_\alpha^\pi}(G) \leq r_{P_\alpha^\eta}(G)}$

Démonstration.

Si $\{G_1,\dots,G_i,\dots,G_r\}$ est un P_α^η - recouvrement de G alors $\forall i : G_i \in P_\alpha(G)$ et $\bigcup_i G_i \supset \eta(G) \supset \pi(G)$, c'est donc un P_α^π - recouvrement de G. /

...

En prenant $\alpha = \subset$ ou $\pi =$ identité , les indices sont ordonnés de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
& {}^{r}P_{\alpha} & \\
{}^{r}P^{\pi}_{\alpha} \arrow[ur] & & {}^{r}P \arrow[ul] \\
& {}^{r}P^{\pi} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Proposition 6.

<u>Si P et P' sont deux parties de $\mathcal{G}$ telles que $P' \subset P$ alors</u> :

(1) $\forall G \quad \underline{R_{P'^{\pi}_{\alpha}}(G) \subset R_{P^{\pi}_{\alpha}}(G)}$

(2) $\forall G \quad \underline{r_{P'^{\pi}_{\alpha}}(G) \geq r_{P^{\pi}_{\alpha}}(G)}$

(évident).

Nous étudierons dans les parties II et V à quelles conditions P et P' définissent les mêmes indices.

II - ETUDE DE r_{P_α}

II.1 - Indice et transversalité.

Définition 1. G étant un graphe, P un ensemble de graphes et α une relation sur $\mathcal{G}$ on notera $\underline{\mathcal{H}(G,P,\alpha)}$ l'hypergraphe ayant $X(G) \cup E(G)$ pour ensemble de sommets et $P_\alpha(G)$ pour ensemble d'arêtes.

Considérons un P_α- recouvrement de G : $\{G_1, \dots G_i, \dots, G_r\}$ chaque G_i est une arête de $\mathcal{H}$ et $\cup G_i = X(G) \cup E(G)$ donc $G_1, \dots, G_i, \dots, G_r$ est une couverture de l'hypergraphe $\mathcal{H}$. Et réciproquement, toute couverture de $\mathcal{H}$ peut être considérée comme un P_α - recouvrement de G, il y a ainsi une bijection entre les P_α- recouvrements de G et les couvertures de $\mathcal{H}$. Donc, si $\rho(\mathcal{H})$ est le cardinal minimum d'une couverture de $\mathcal{H}$ et $\tau(\mathcal{H})$ le cardinal minimum d'un transversal de $\mathcal{H}$,[2] p.402, nous avons

Théorème 1. - $\underline{r_{P_\alpha}(G) = \rho(\mathcal{H}(G,P,\alpha)) = \tau(\mathcal{H}^*(G,P,\alpha))}$.

II.2 - Existence de l'indice.

L'indice $r_{P_\alpha}(G)$ sera dit toujours défini s'il l'est pour tout graphe $G \neq \emptyset$.

Définition 2. Nous dirons que la relation α est <u>couvrante</u> si :

$$\forall G \quad \bigcup_{H \alpha G} H = G \quad .$$

Toute relation réflexive est donc couvrante .

Définition 3. $\mathcal{P}_\alpha = \{ G \mid \bigcup_{\substack{H\alpha G \\ H \neq G}} H \neq G \text{ et } G \neq \emptyset \}$

Il s'agit donc de l'ensemble des graphes G qui ne peuvent être entièrement recouverts par leurs sous-graphes partiels stricts en relation α avec eux.

Pour toute relation α on a donc $\forall K_1, K_2 \quad K_1 \in \mathcal{P}_\alpha$, $K_2 \in \mathcal{P}_\alpha$

et si α est couvrante alors $\forall G \in \mathcal{P}_\alpha \quad G \,\alpha\, G$.

Proposition 1. Pour que l'indice $r_{P_\alpha}(G)$ soit défini pour tout G il faut que α soit couvrante et que $\mathcal{P}_\alpha \subset P$.

Démonstration.

Si $r_{P_\alpha}(G)$ est défini, le graphe G possède un P_α- recouvrement $\{ G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_r \}$ et l'on a :

$$G = \bigcup_i G_i \subset \bigcup_{H\alpha G} H \quad \text{donc} \quad \bigcup_{H\alpha G} H = G$$

Il en résulte bien que α est couvrante.

Supposons, en outre, que le graphe G défini ci-dessus appartient à $\mathcal{P}_\alpha$ alors, nécessairement il existe i tel que $G_i = G$.(Sinon, l'on aurait :

$$\bigcup_i G_i \subset \bigcup_{\begin{cases} H\alpha G \\ H \neq G \end{cases}} H \quad \text{donc} \quad \bigcup G_i \neq G \quad ,$$

contradiction).

Par suite, $G \in P$ et $\mathcal{P}_\alpha \subset P$. /

Théorème 2.

(1) Si la relation α est transitive

$$(r_{P_\alpha}(G) \text{ toujours défini}) \Leftrightarrow (\alpha \text{ couvrante et } \mathcal{P}_\alpha \subset P)$$

(2) Si α est une relation d'ordre

$$(r_{P_\alpha}(G) \text{ toujours défini}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_\alpha \subset P).$$

Démonstration.

Les implications de gauche à droite résultent de la proposition 1.

(1) Supposons α transitive et couvrante et $\mathcal{P}_\alpha \subset P$.

...

Soit G un graphe et t un sommet isolé ou une arête de G. Posons :

$$\mathcal{C} = \{H \mid H \;\alpha\; G \quad \text{et} \; \{t\} \subset H\}$$

L'ensemble $\mathcal{C}$ n'est pas vide car $\{t\}$ n'est pas couvert par ses parties strictes or α est couvrante.

En outre, $\mathcal{C}$ est fini car α implique l'inclusion.

Soit H_t l'un des graphes minimaux de $\mathcal{C}$ pour la relation $\subset$.

Montrons par l'absurde que $H_t \in \mathcal{P}_\alpha$

Si ce n'était pas réalisé, on aurait puisque $\{t\} \subset H_t$:

$$\exists K \quad \{t\} \subset K \quad \text{et} \quad K \;\alpha\; H_t \quad \text{et} \quad K \subsetneq H_t$$

Or la relation α est transitive : $K \;\alpha\; H_t$ et $H_t \;\alpha\; G \Rightarrow K \;\alpha\; G$.

Le graphe K inclus strictement dans H_t appartiendrait à $\mathcal{C}$, c'est impossible.

Conclusion $H_t \in \mathcal{P}_\alpha$ donc $H_t \in P$.

L'ensemble fini des graphes H_t quand t décrit G est un P_α-recouvrement de G, $R_{P_\alpha}(G)$ est non vide, $r_{P_\alpha}(G)$ est toujours défini.

(2) La relation α est antisymétrique, ajoutons à la transitivité du (1) la réflexivité, α devient un ordre et α est alors couvrante ; on a bien :

$$r_{P_\alpha}(G) \text{ toujours défini} \Leftrightarrow \mathcal{P}_\alpha \subset P \;. /$$

Proposition 2. <u>Si α est transitive les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(1) <u>$\mathcal{P}_\alpha = \{ K_1, K_2 \mid K_1 \in \mathcal{G}, K_2 \in \mathcal{G} \}$</u>

(2) <u>$\forall G \quad \forall \{t\} \subsetneq G$ sommet isolé ou arête de G : $\{t\} \;\alpha\; G$</u>

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Supposons que $\mathcal{P}_\alpha = \{ K_1, K_2 \mid K_1, K_2 \in \mathcal{G} \}$

...

Soit un graphe G $\notin \mathcal{P}_\alpha$, bien que α ne soit pas supposée couvrante la famille :

$$\mathcal{C} = \{ H \mid H \alpha G \quad \text{et} \ \{t\} \subset H \ \}$$

vérifie les propriétés utilisées dans le théorème 2 car :

$$G \notin \mathcal{P}_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\substack{H\alpha G \\ H \neq G}} H = G$$

Dès lors, pour tout t sommet isolé ou arête de G,

$$(\{t\} \in \mathcal{P}_\alpha \ \text{et} \ \{t\} \subset H_t \quad \text{et} \quad H_t \in \mathcal{P}_\alpha) \Rightarrow H_t = \{t\}$$

ce qui prouve bien que l'on a $\{t\} \alpha$ G.

(2) $\Rightarrow$ (1)

La condition (2) implique que tout graphe G autre que K_1, K_2 peut être recouvert par l'ensemble de ses sommets isolés et de ses arêtes qui constituent des parties strictes de G , un tel graphe G $\notin \mathcal{P}_\alpha$.
Or, $\forall \alpha$, $\forall K_1, K_2 \quad K_1 \in \mathcal{P}_\alpha$ et $K_2 \in \mathcal{P}_\alpha$
Conclusion :

$$\mathcal{P}_\alpha = \{ K_1, K_2 \mid K_1 \in \mathcal{G}, K_2 \in \mathcal{G} \} ./$$

Proposition 3. <u>Si pour tout graphe G et pour tout $\{t\} \subset$ G, t sommet isolé ou arête de G l'on a $\{t\} \alpha$ G alors</u> :

(1) <u>α est couvrante</u>

(2) <u>$\mathcal{P}_\alpha = \{K_1, K_2 \mid K_1 \in \mathcal{G}$ et $K_2 \in \mathcal{G}\}$</u>

(3) <u>r_{P_α} (G) toujours défini $\Leftrightarrow \{K_1, K_2 \mid K_1 \in \mathcal{G}$ et $K_2 \in \mathcal{G}\} \subset P$.</u>

Démonstration.

Cette proposition ne suppose pas α transitive.

...

Soit un graphe G et R (G) $= \{\{t\} \mid \{t\} \subset G$, t sommet isolé ou arête de G$\}$.

Chaque $\{t\}$ est en relation α avec G et $\bigcup_{\{t\} \in R(G)} \{t\} = G$.

Donc α est couvrante et $\mathcal{P}_\alpha = \{K_1, K_2 \mid K_1 \in \mathcal{G}, K_2 \in \mathcal{G}\}$

Enfin si $\{K_1, K_2 \mid K_1 \in \mathcal{G}, K_2 \in \mathcal{G}\} \subset P$, R (G) est un P_α- recouvrement de G et $r_{P_\alpha}(G)$ est toujours défini. /

<u>Convention importante</u>.

Dans toute la suite on supposera que l'indice $r_{P_\alpha}(G)$ est toujours défini, donc :

α couvrante et $\{K_1, K_2 \mid K_1 \in \mathcal{G}$ et $K_2 \in \mathcal{G}\} \subset \mathcal{P}_\alpha \subset P$

$\forall G \in \mathcal{P}_\alpha : G \ \alpha \ G$

$\forall G \ r_{P_\alpha}(G) \geq 1$.

Notons en outre que si α , β sont deux relations :

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (r_{P_\alpha} \text{ toujours défini} \Rightarrow r_{P_\beta} \text{ toujours défini})$$

en particulier :

$$r_{P_\alpha} \text{ toujours défini} \Rightarrow r_P \text{ toujours défini.}$$

En effet, si $\alpha \Rightarrow \beta$ tout P_α- recouvrement de G est un P_β- recouvrement de G.

II.3. - Existence de l'indice dans les cas usuels.

Les relations usuelles sont des relations d'ordre, il suffit donc de trouver $\mathcal{P}_\alpha$.

Proposition 4.

(1) $\underline{\mathcal{P}_{\subset} = \{K_1, K_2 \mid K_1 \in \mathcal{G}, K_2 \in \mathcal{G}\}}$

(2) $\underline{\mathcal{P}_{sg} = \{K_1, K_2 \mid K_1 \in \mathcal{G}, K_2 \in \mathcal{G}\}}$

...

(3) $\mathcal{P}_{gp}$ = { graphes ayant au plus une arête}

(4) $\mathcal{P}_{gd}$ = { graphes ayant au plus un sommet isolé}

Dans ces quatre cas : $r_{P_\alpha}(G)$ toujours défini $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}_\alpha \subset P$.

Démonstration.

(1), (2) résultent de la proposition 3.

(3) Si un graphe a au plus une arête, ses graphes partiels stricts ne le couvrent pas. Si un graphe G a plus d'une arête, on peut couvrir ses arêtes une par une à l'aide des graphes partiels de G obtenus en supprimant toutes les autres arêtes.

(4) Tout à fait analogue à (3). /

II.4. - Graphes d'indice un.

Proposition 5.

(1) $\forall G \; r_{P_\alpha}(G) = 1 \Leftrightarrow G \in P$ et $G \alpha G$

(2) $\forall G \in \mathcal{P}_\alpha \quad r_{P_\alpha}(G) = 1$

(3) Si α est réflexive, P est l'ensemble des graphes d'indice 1.

Démonstration.

(1) Par définition de l'indice.

(2) Résulte de $\mathcal{P}_\alpha \subset P$ et $\forall G \in \mathcal{P}_\alpha \; G \alpha G$.

(3) Evident d'après 1. /

Dans les cas usuels, P est l'ensemble des graphes d'indice un.

Corollaire.

Si α est une relation réflexive et si P, P' sont deux ensembles de graphes pour les quels $r_{P_\alpha}(G)$ et $r_{P'_\alpha}(G)$ sont toujours définis alors :

$$r_{P_\alpha}(G) = r_{P'_\alpha}(G) \Leftrightarrow P = P' .$$

(P est caractéristique de l'indice.).

...

II. 5. - Invariants et indices de P_α-recouvrement.

Définition 4. Une relation α sera dite <u>compatible</u> avec l'isomorphisme des graphes si elle vérifie :

(1) pour tout isomorphisme f de G sur G' , $\forall$ H, $H \alpha G \Rightarrow f(H) \alpha f(G)$

Remarque : Les relations usuelles $\subset$, sg, gp, gd vérifient (1).

Théorème 3. <u>Pour toute relation α qui vérifie (1), l'application $r_{P_\alpha} : \mathcal{G} \to \mathbb{N}^*$ est un invariant de graphe.</u>

Démonstration.

Soit $\{G_1, G_2 \dots G_i \dots G_r\}$ un P_α- recouvrement de G,

$\forall i\ G_i \in P$ et $G_i\ \alpha\ G$, $\bigcup_i G_i = G$

Soit f un isomorphisme de G sur G' , on aura $\forall i$ $f(G_i)$ isomorphe à G_i donc $f(G_i) \in P$ puisque P est stable pour l'isomorphisme des graphes.

$\forall i\ G_i\ \alpha\ G \Rightarrow f(G_i)\ \alpha\ f(G)$ car α vérifie (1) .

Enfin, $f(\bigcup_i G_i) = \bigcup_i f(G_i) = f(G) = G'$

Donc $\{f(G_1), f(G_2), \dots, f(G_i) \dots f(G_r)\}$ est un P_α recouvrement de G'.

Conclusion : $r_{P_\alpha}(G) \geq r_{P_\alpha}(G')$

On obtiendrait symétriquement l'inégalité contraire et finalement

$$r_{P_\alpha}(G) = r_{P_\alpha}(G') \ . /$$

Réciproquement, on peut se demander, étant donné un invariant φ, si c'est un indice de P_α- recouvrement. Notons d'abord que si l'invariant peut prendre la valeur zéro, ce ne sera pas un indice. Mais, on peut en ce cas, tenter d'écarter cette situation en restreignant $\mathcal{G}$. Si α est réflexive l'ensemble P est facile à caractériser, c'est l'ensemble des graphes d'indice un , donc c'est $\varphi^{-1}(1)$.

Théorème 4. Si α est une relation réflexive vérifiant (1), un invariant φ est un indice de P_α- recouvrement si et seulement si $P = \varphi^{-1}(1)$ et si $r_{\varphi^{-1}(1)_\alpha}$ est toujours défini et coïncide avec φ :

i.e. $\forall G \quad \varphi(G) = r_{\varphi^{-1}(1)_\alpha}(G)$

Donnons un exemple d'invariant classique qui n'est pas un indice.

Corollaire.

Quelle que soit la relation réflexive α et un ensemble P, le degré maximum d'un graphe n'est pas un indice de P_α-recouvrement.

Démonstration.

Posons $\varphi(G) = \text{deg. Max. }(G)$. Il est toujours défini et $P = \varphi^{-1}(1) = \{\text{couplages}\}$.

Soit une relation α réflexive pour laquelle r_{P_α} soit toujours défini , r_P le sera aussi et on aura :

$$\forall G \quad r_{P_\alpha}(G) \geq r_P(G) = q(G) \geq \text{deg. max. }(G)$$

En effet, $\alpha \Rightarrow \subset$ et $r_P(G) = q(G)$, indice chromatique de G qui est minoré par le degré maximum.

Or, il existe des graphes G tels que $q(G) > \text{deg. max. } G$.

Conclusion pour tous ces graphes :

$$r_{P_\alpha}(G) > \text{deg. max. }(G) \quad . \quad /$$

II.6.- Partitions.

Si $\{G_1, G_2, \ldots, G_r\}$ est un P_α-recouvrement d'un graphe G, les ensembles $\{X(G_1), \ldots, X(G_r)\}$ et $\{E(G_1), \ldots, E(G_r)\}$ sont des recouvrements, au sens ensembliste, de X (G) et E (G).

...

On peut alors associer à un P_α-recouvrement R un couple d'entiers $(\sigma_X(R), \sigma_E(R))$, σ_X et σ_E étant les ordres de recouvrements de X (G) et E (G) induits par R (l'ordre d'un recouvrement est égal au plus grand entier σ tel qu'il existe $\sigma + 1$ éléments ayant une intersection non vide).

Pour les ordres d'un P_α-recouvrement d'un graphe, on pourrait avoir, à priori, les situations suivantes :

(1)	$\sigma_X(R) > 0$	$\sigma_E(R) > 0$
(2)	$\sigma_X(R) > 0$	$\sigma_E(R) = 0$
(3)	$\sigma_X(R) = 0$	$\sigma_E(R) = 0$
(4)	$\sigma_X(R) = 0$	$\sigma_E(R) > 0$

Le cas (4) est impossible. En effet $\sigma_X(R) = 0 \Rightarrow X(G_i) \cap X(G_j) = \emptyset$ si $i \neq j \Rightarrow E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset \Rightarrow \sigma_E(R) = 0$.

Le cas (3) est peu intéressant car un P_α- recouvrement d'un graphe G vérifiant (3) est une partition de l'ensemble des composantes connexes.

Le cas (2) nous amène à nous intéresser à de nouveaux problèmes.
D'une part à l'étude des P_α^π - partitions d'un graphe G (une P_α^π - partition étant simplement un P_α^π - recouvrement vérifiant (2)) et plus précisémment à l'étude de l'indice de P_α^π - partition, p_α^π (G) qui est égal au cardinal minimum d'une P_α^π - partition de G.
D'autre part, si la recherche d'un P_α^π- recouvrement ayant un cardinal maximum n'est pas, à proprement parler, un problème de recouvrement, car il existe un seul tel recouvrement et c'est $P_\alpha(G)$, par contre la recherche des P_α^π - partitions ayant un cardinal maximum (et de l'indice associé p'^π_α (G)) est un problème de recouvrement.

...

Les conditions d'existence d'une P_α^π - partition étant plus restrictives que celles d'un P_α^π - recouvrement, on est souvent amené à étudier un nouvel indice de partition :

Définition.

$\underline{\Omega_{P_\alpha^\pi}(G)}$ = cardinal maximum d'un ensemble $\{G_1, \dots, G_i, \dots G_r\}$ de graphes tel que :

(1) $G_i \in P_\alpha(G)$

(2) $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$ si $i \neq j$

(3) $\cup G_i \subset \pi(G)$

(Si α est égale à l'inclusion et π à l'identité c'est ce que BEINEKE [1] appelle le problème de "packing").

Sous réserve de l'existence des différents indices nous aurons les inégalités suivantes :

$$r_{P_\alpha^\pi} \leq p_{P_\alpha^\pi} \leq p'_{P_\alpha^\pi} = \Omega_{P_\alpha^\pi} \leq |P_\alpha|$$

Nous ne referons pas ici une étude de ces indices comparable à l'étude faite pour r_{P_α} dans cette partie ou $r_{P_\alpha^\pi}$ dans la partie V.

Il est notamment immédiat de véridier que pour $\alpha = \subset$ ou gp ou sg $p_{P_\alpha^\pi}$ est partout défini si et seulement si $P \supset \{K_1, K_2\}$.

Nous donnerons simplement quelques résultats partiels fréquemment utilisés sur les rapports entre r_P et p_P, en supposant que ces indices sont définis.

Théorème.

<u>Une condition nécessaire et suffisante pour que tout P - recouvrement de G soit une P- partition est que P soit stable pour l'union de graphes non disjoints par les arêtes.</u>

...

Démonstration.

La condition est nécessaire en effet, soit $G = G_1 \cup G_2$ avec $E(G_1 \cap E(G_2) \neq \emptyset$ et $G_1, G_2 \in P$. $\{G_1, G_2\}$ est un P- recouvrement de G qui n'est pas une P-partition, il n'est donc pas minimum donc $G \in P$.

La condition est suffisante car si $R = \{G_1, G_2, \ldots, G_r\}$ est un P-recouvrement minimum de G qui ne partitionne pas les arêtes. On a par exemple $E(G_i) \cap E(G_j) \neq \emptyset$ avec $i \neq j$ mais alors $G_i \cup G_j$ est un graphe de P donc R n'est pas minimum ce qui est absurde. /

Si $P = \{K_1, K_2\}$ alors P vérifie la condition du théorème précédent. Un autre exemple simple est constitué par $P = \{K_1, K_2\} \cup \{$ graphes dont l'une des composantes connexes a au moins k sommets $\}$.

Théorème.

<u>Si P est gp-héréditaire et si α vérifie $\forall G_1, G_2 \in P$, $\forall G : G_1 \alpha G$ et $G_2 \alpha G \Rightarrow G_1 - G_2 \alpha G$ alors $r_{P^\pi_\alpha} = p_{P^\pi_\alpha}$.</u>

Démonstration.

Soit $\{G_1, \ldots, G_i, \ldots G_r\}$ un P^π_α - recouvrement minimum de G, remplaçons G_i par $G'_i = G_i - \bigcup_{j<i} G_j$

$G'_i \in P$ puisque P est gp-héréditaire et $G'_i \alpha G$ du fait de l'hypothèse sur α donc $G'_i \in P_\alpha(G)$ et $\bigcup_i G_i = \bigcup_i G'_i$ donc $\{G_1, G'_2, \ldots, G'_i, \ldots, G'_r\}$ est une P^π_α - partition de G. Ceci entraîne que $p_{P^\pi_\alpha} \leq r_{P^\pi_\alpha}$ or $p_{P^\pi_\alpha} \geq r_{P^\pi_\alpha}$ donc $p_{P^\pi_\alpha} = r_{P^\pi_\alpha}$. /

Ceci permet de retrouver un certain nombre de résultats connus.

Si nous considérons la liste donnée en I.2. nous voyons que ce théorème s'applique pour le nombre chromatique, l'arboricité, l'indice chromatique et l'épaisseur.

III. - Indices r_{P_α} monotones.

III. 1 - Définition de la monotonie.

r_{P_α} est une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{N}^*$, on peut chercher à caractériser P et α pour que r_{P_α} soit isotone pour un ordre β de $\mathcal{G}$ et l'ordre naturel de $\mathbb{N}$.

Désignons par β une relation d'ordre sur $\mathcal{G}$ qui implique l'inclusion.

Définition 1.

Un indice r_{P_α} sera dit <u>β - croissant</u> si :

$$\forall G, G' \in \mathcal{G} \qquad G' \beta G \Rightarrow r_{P_\alpha}(G') \leq r_{P_\alpha}(G)$$

Définition 2.

Un indice r_{P_α} sera dit <u>β - décroissant</u> si :

$$\forall G, G' \in \mathcal{G} \qquad G' \beta G \Rightarrow r_{P_\alpha}(G') \geq r_{P_\alpha}(G)$$

Exemples.

1. $P = \{$graphes planaires$\}$, $\alpha = \subset$, r_{P_α} = épaisseur

   Pour $\beta = \subset$ $\qquad G \subset G' \Rightarrow ep(G) \leq ep\ G'$

   L'épaisseur est un indice $\subset$ - croissant.

2. $P = \{$ graphes connexes $\}$, $\alpha = \subset$, r_{P_α} = nombre de composantes connexes.

   Pour $\beta = g\,p$ $\qquad G\ g\,p\ G' \Rightarrow p(G) \geq p(G')$

   Le nombre de composantes connexes est $g\,p$ - décroissant.

Remarque: Si r_{P_α} est β- croissant (resp.décroissant) et si γ est un ordre plus fin que β alors r_{P_α} est γ- croissant (resp.décroissant).

...

III.2 - Indices β - croissants.

Définition 3.

L'ensemble P sera dit <u>β - héréditaire</u> si

$\forall H, H' \in \mathcal{G} \quad H \in P$ et $H' \beta H \Rightarrow H' \in P$

Si P est β-héréditaire et si γ est un ordre plus fin que β alors **P** est γ-héréditaire.

Théorème 1. <u>Supposons α réflexive</u>

a) <u>Pour que r_{P_α} soit β - croissant il faut que P soit β - héréditaire</u>

b) <u>Si α, β vérifient la condition suivante T (α, β) :</u>

<u>$\forall G\ \forall U\ \forall V\ (U\ \alpha G$ et $V\ \beta\ G \Rightarrow [(U \cap V)\ \alpha\ V$ et $(U \cap V)\ \beta\ U\ ])$</u>

<u>r_{P_α} est β - croissant $\Leftrightarrow$ P est β - héréditaire.</u>

Démonstration.

a) Supposons que r_{P_α} soit β - croissant.

Soit $H \in P$ et K tel que $K\ \beta\ H$, on a :

$$1 \leq r_{P_\alpha}(K) \leq r_{P_\alpha}(H) = 1$$

car, étant réflexive $H \in P \Rightarrow r_{P_\alpha}(H) = 1$.

Conclusion $r_{P_\alpha}(K) = 1$ donc $K \in$ **P et P est β - héréditaire.**

b) Supposons que α soit réflexive, que T (α, β) soit vérifiée et que P soit β - héréditaire.

Soit $\{G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots, G_r\}$ un P_α- recouvrement de G :

$$\forall i\ G_i\ \alpha\ G \quad \text{et} \quad G_i \in P\ , \quad \bigcup_i G_i = G$$

Soit alors G' vérifiant $G'\ \beta\ G$.

Posons $\quad \forall i \quad G'_i = G_i \cap G'$.

...

On obtient :

$$G' \beta G \Rightarrow G' \subset G$$

donc :

$$\bigcup_i G'_i = \bigcup_i (G_i \cap G') = (\bigcup_i G_i) \cap G' = G \cap G' = G'$$

En outre, $G_i \alpha G$ et $G' \beta G$ est vérifiée et

(1) $\quad G_i \alpha G$ et $G' \beta G \Rightarrow (G_i \cap G') \alpha G' \Rightarrow G'_i \alpha G'$

(2) $\quad G_i \alpha G$ et $G' \beta G \Rightarrow (G_i \cap G') \beta G_i \Rightarrow G'_i \beta G_i$.

Or, $G_i \in P$ et P est β - héréditaire donc $G'_i \in P$.

Conclusion $\{G'_1, G'_2, \ldots, G'_i, \ldots, G'_r\}$ est un P_α - recouvrement de G' et il en résulte que :

$$r_{P_\alpha}(G') \leq r_{P_\alpha}(G)$$

et que r_{P_α} est β - croissant. /

Remarque. Pour les besoins de la démonstration la condition $T(\alpha, \beta)$ est trop forte, on pourrait la relativiser à P sous la forme $T_P(\alpha, \beta)$:

$$\forall G \; \forall U \in P \; \forall V \; [U \alpha G \text{ et } V \beta G \Rightarrow (U \cap V \alpha V \text{ et } U \cap V \beta U)]$$

Notons alors que $T(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \forall P \; T_P(\alpha, \beta)$.

En fait, $T(\alpha, \beta)$ est vérifiée dans les cas usuels, comme le montre l'étude suivante :

Etude de $T(\alpha, \beta)$.

a) Cette relation est symétrique en α, β :

$$T(\alpha, \beta) \Leftrightarrow T(\beta, \alpha)$$

b) $T(\alpha, \subset)$ se réduit à :

$$\forall G \; \forall U \; \forall V \; (U \alpha G \text{ et } V \subset G \Rightarrow (U \cap V) \alpha V)$$

c) $T(\alpha, \alpha)$ se réduit à :

$$\forall G \; \forall U \; \forall V \; (U \alpha G \text{ et } V \alpha G \Rightarrow (U \cap V) \alpha V)$$

...

d) Si $T(\alpha, \subset)$ est vérifié, $T(\alpha, \beta)$ se réduit à :

$$\forall G \ \forall U \ \forall V \ (U \alpha G \text{ et } V \beta G \Rightarrow (U \cap V) \ \beta \ U)$$

Démonstration.

a, b, c évident

d) puisque $\beta \Rightarrow \subset$ on a :

$$U \alpha G \text{ et } V \beta G \Rightarrow U \alpha G \text{ et } V \subset G \Rightarrow (U \cap V) \ \alpha \ V$$

puisque $T(\alpha, \subset)$ est vérifié, la réduction de la condition est donc obtenue. /

Proposition 1.

$\underline{T(\alpha, \subset) \text{ et } T(\beta, \subset) \Rightarrow T(\alpha, \beta)}$.

Démonstration.

On utilise les hypothèses $\alpha \Rightarrow \subset$ et $\beta \Rightarrow \subset$. $T(\alpha, \subset)$ est vérifiée donc

$$U \ \alpha G \text{ et } V \beta \ G \Rightarrow U \alpha V \text{ et } V \subset G \Rightarrow (U \cap V) \ \alpha \ V$$

$T(\beta, \subset)$ est vérifiée, $T(\subset, \beta)$ l'est aussi donc :

$$U \ \alpha G \text{ et } V \beta \ G \Rightarrow U \subset V \text{ et } V \beta G \Rightarrow (U \cap V) \ \beta \ U$$

ce qui montre globalement que $T(\alpha, \beta)$ est vérifiée. /

Proposition 2. Cas usuels.

Si α, β sont deux quelconques des relations usuelles : $\subset$, sg, gp, gd, alors $T(\alpha, \beta)$ est vérifiée et donc (r_{P_α} est β - croissant $\Leftrightarrow$ P est β - héréditaire).

Démonstration.

Rappelons que $G' \ gp \ G \Leftrightarrow X(G') = X(G)$

$G' \ gd \ G \Leftrightarrow G' \subset G \text{ et } E(G') = E(G)$

...

Les résultats suivants sont classiques ou évidents :

$$U \subset G \text{ et } V \subset G \Rightarrow U \cap V \subset V$$
$$U \text{ sg } G \text{ et } V \subset G \Rightarrow U \cap V \text{ sg } V$$
$$U \text{ gp } G \text{ et } V \subset G \Rightarrow U \cap V \text{ gp } V$$
$$U \text{ gd } G \text{ et } V \subset G \Rightarrow U \cap V \text{ gd } V$$

Ce qui signifie que l'on a :

$T(\subset,\subset)$, $T(\text{sg},\subset)$, $T(\text{gp},\subset)$, $T(\text{gd},\subset)$

et par suite $T(\alpha , \beta)$ pour $\alpha ,\beta \in (\subset , \text{sg}, \text{gp}, \text{gd})$ en vertu de la proposition 1. /

Exemples.

L'ensemble des graphes planaires est $\subset$ - héréditaire (donc sg-héréditaire, g p -héréditaire, gd-héréditaire) il en résulte que l'épaisseur est $\subset$ - croissante (et sg-croissante, g p -croissante, g d - croissante).

III. 3. - Indices β - décroissants.

Définition 4.

L'ensemble P sera dit <u>β - héréditaire supérieurement</u> , en abrégé β - $\overline{\text{her}}$,

Si $\forall$ H, H' $\in \mathcal{G}$ H $\in$ P et H β H' $\Rightarrow$ H' $\in$ P. Si P est β - $\overline{\text{her}}$ et si γ est un ordre plus fin que β alors P est γ -$\overline{\text{her}}$.

Proposition 3.

<u>Supposons α réflexive</u>.

<u>Pour que t_{P_α} soit β - décroissant il faut que P soit β - héréditaire supérieurement .</u>

...

Supposons que r_{P_α} soit β - décroissant. Soient G,G' tels que $G \in P$ et $G \beta G'$, on a :

$$r_{P_\alpha}(G) = 1 \geq r_{P_\alpha}(G') \geq 1$$

donc :

$$r_{P_\alpha}(G') = 1 \quad \text{et} \quad G' \in P$$

P est β - héréditaire supérieurement. /

Nous n'avons trouvé aucune condition générale sur α , β assurant une condition nécessaire et suffisante de β- décroissance. La plupart des cas usuels conduisent toutefois à des résultats simples qui résultent de la proposition suivante.

Proposition 4.

<u>Supposons que α soit réflexive et que $\alpha \Rightarrow \beta$, les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(1) <u>r_{P_α} est β - décroissant</u>

(2) <u>$P = \mathcal{G}$</u>

(3) <u>r_{P_α} est constant et égal à 1.</u>

Démonstration.

(1) ⇒ (2) Soit $\{G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots, G_r\}$ un P_α- recouvrement d'un graphe G quelconque.

On a $\forall i \; G_i \; \alpha \; G$ donc aussi $\forall i \; G_i \; \beta \; G$ or, d'après la proposition 3, P est β - her. donc $G_i \in P$ et $G_i \; \beta \; G \Rightarrow G \in P$.

Conclusion ($\forall G \in \mathcal{G} \quad G \in P$) donc $P = \mathcal{G}$.

(2) ⇒ (3) Evident.

(3) ⇒ (1) Evident. /

...

Proposition 5. Cas usuels.

a) Si α est quelconque et $\beta \in \{ \subset , sg \}$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) r_{P_α} est β - décroissant.

(2) P est β - héréditaire supérieurement.

(3) $P = \mathcal{G}$

(4) r_{P_α} est constant et égal à un.

b) Si $\alpha \in \{\subset, sg, gp, gd\}$ et $\beta = gd$, r_{P_α} est β- décroissant $\Leftrightarrow$ P est gd - héréditaire supérieurement.

Démonstration.

a) (1) $\Rightarrow$ (2) Proposition 3.

(2) $\Rightarrow$ (3) résulte du fait que si r_{P_α} est toujours défini, $\{K_1, K_2\} \subset P$ dès lors si l'on suppose que P est $\subset$ - $\overline{\text{her}}$ ou sg -$\overline{\text{her}}$ P contient tous les graphes.

(3) $\Rightarrow$ (4) Evident.

(4) $\Rightarrow$ (1) Evident.

b) Supposons que P soit gd-héréditaire supérieurement. Soit un graphe G et un graphe G' vérifiant G' gd G.

Soit $\{G'_1, G'_2, \ldots, G'_i, \ldots, G'_r\}$ un P_α- recouvrement de G'

$$\bigcup_i G'_i = G' , \forall i \quad G'_i \in P \text{ et } G'_i \ \alpha \ G'$$

1) Si $\alpha = \subset$ ou sg posons $G_i = G'_i \cup I(G)$

Il vient $\bigcup_i G_i = \bigcup_i (G'_i \cup I(G)) = (\bigcup_i G'_i) \cup I(G)$

$$= G' \cup I(G) = G$$

...

En outre, G'_i gd G_i donc $G_i \in P$ et enfin $G_i \; \alpha \; G$.

Conclusion $\{G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots, G_r\}$ est un P_α-recouvrement de G et $r_{P_\alpha}(G) \leq r_{P_\alpha}(G')$.

2) Si $\alpha = g\,p$, posons $G_i = G'_i \cup X(G)$

Chaque G_i vérifie $G_i \; g\,p \; G$, le reste de la preuve est inchangé.

3) Si $\alpha = g\,d$, $\alpha \Rightarrow \beta$ l'indice est constant et égal à un (proposition 4). /

III.4.- Indices g p - décroissants.

Nous n'avons pas trouvé de condition nécessaire et suffisante mais toutefois une meilleure condition nécessaire.

Proposition 6.

<u>Si $\alpha \in \{\subset, sg, gp, gd\}$ et si r_{P_α} est g p - décroissant, alors P est gp -héréditaire supérieurement et contient toutes les cliques.</u>

Démonstration.

Supposons que r_{P_α} soit g p - décroissant, P sera g p -héréditaire supérieurement (Proposition 3) . Distinguons alors selon α .

a) $\alpha = g\,p$ en ce cas $P = \mathcal{G}$, r_{P_α} est constant et égal à un (Proposition 4) et P contient toutes les cliques.

b) $\alpha = g\,d$ en ce cas $\mathcal{S}_{gd}$ est l'ensemble des graphes ayant au plus un sommet isolé, il contient toutes les cliques et $\mathcal{S}_{gd} \subset P$.

c) Il reste les cas les plus difficiles $\alpha = \subset$ ou $\alpha = s\,g$, montrons que P contient toutes les cliques. On sait que $K_1 \in P$ et $K_2 \in P$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que les cliques $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ de $\mathcal{G}$ appartiennent à P et que $\exists\, K_n \notin P$.

...

En ce cas P ne contiendrait aucun graphe H de mêmes sommets que K_n sinon en ajoutant des arêtes à H on obtiendrait K_n et par g p - hérédité supérieure on aurait $K_n \in P$.

Choisissons une arête a de K_n d'extrémités x et y. Soit $K_n - \{a\}$ le graphe obtenu en enlevant l'arête a au graphe K_n tout en laissant ses extrémités.

1. Montrons que $r_P(K_n - \{a\}) = r_{P_{sg}}(K_n - \{a\}) = 2$

En effet, $X(K_n - \{a\}) = X(K_n)$ donc $K_n - \{a\} \notin P$ et $r_P(K_n - \{a\}) \geq 2$, $r_{P_{sg}}(K_n - \{a\}) \geq 2$.

Constatons alors que $K_n - \{x\}$ et $K_n - \{y\}$ sont des cliques d'ordre n-1 appartenant à P qui sont des sous-graphes de $K_n - \{a\}$ et qui couvrent $K_n - \{a\}$, ce qui montre que

$$r_P(K_n - \{a\}) \leq 2 \quad , \quad r_{P_{sg}}(K_n - \{a\}) \leq 2$$

ce qui fournit les égalités cherchées.

2. Montrons que $r_P(K_n) = r_{P_{sg}}(K_n) = 3$.

D'abord $K_n - \{x\}$, $K_n - \{y\}$ et $\{a\}$ couvrent K_n et $r_P(K_n) \leq 3$, $r_{P_{sg}}(K_n) \leq 3$

En outre, $K_n \notin P$ donc :

$$r_P(K_n) > 1 \qquad r_{P_{sg}}(K_n) > 1$$

Si l'on avait $r_{P_\alpha}(K_n) = 2$, K_n pourrait être couvert par deux graphes distincts $G_1 \subsetneq G$, $G_2 \subsetneq G$ et il existerait un sommet z, $z \in G_1$, $z \notin G_2$, G_1 serait un graphe d'ordre inférieur ou égal à n-1 et l'on aurait :

$$\deg(z) \text{ dans } K_n = n-1 = \deg(z) \text{ dans } G_1 \leq n-2$$

contradiction.

Conclusion $r_P(K_n) = r_{P_{sg}}(K_n) = 3$

...

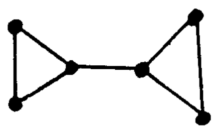
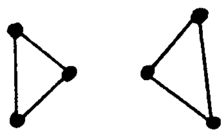
3. En comparant 1 et 2, on voit que r_{P_α} ne serait pas g p - décroissant, contradiction. /

Les conditions nécessaires données dans la proposition 6 ne suffisent pas ; donnons en deux contre exemples.

1. $\alpha = \subset$ ou sg

$P = \{$ cliques $\}$

P est gp -héréditaire supérieurement et contient toutes les ciiques.

Soit G :  G' : 

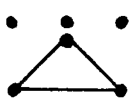
$r_P(G) = 3$ $r_P(G') = 2$ bien que G' g p G

$r_{P_{sg}}(G) = 3$ $r_{P_{sg}}(G') = 2$ bien que G' g p G

2. $\alpha =$ g d

$P = \{$ graphes ayant au plus un sommet isolé $\cup$ {  } }

P est g p-héréditaire supérieurement et contient toutes les cliques.

G =  G' = 

$r_{P_{gd}}(G) = 3$ $r_{P_{gd}}(G') = 2$ bien que G' gp G

Exemples d'indices g p - décroissants.

1) $P = \{$ graphes connexes $\}$

$\alpha \in \{\subset, sg\}$

2) $P = \{$ graphes ayant au plus k composantes connexes $\}$

$\alpha \in \{\subset, sg\}$

...

3) $P = \{$ graphes ayant au plus k sommets isolés $\}$

$\alpha \in \{\subset, sg, gd\}$

Majoration.

Si r_{P_α} est gp-décroissant on a :

$$\forall G \quad r_{P_\alpha}(G) \leq r(G) + k \leq n$$

Démonstration.

Soit en effet, un ensemble minimal d'arêtes de G couvrant tous les sommets non isolés : il y en a $r(G)$ elles forment avec les sommets isolés un graphe partiel G' de G. Alors :

$$r_{P_\alpha}(G) \leq r_{P_\alpha}(G')$$

or

$$r_{P_\alpha}(G') \leq r(G) + k$$

puisque couvrir G' c'est couvrir ses arêtes et ses sommets isolés. En fin, $r(G) + k \leq n$, car G' est une forêt partielle de G et n est le nombre de sommets de G. /

IV. - Graphes critiques.

IV.1.- Graphe critique relativement à un invariant β - croissant.

Définition 1.

β étant un ordre sur $\mathcal{G}$, un invariant φ sera dit β - croissant si : $\forall\, G, H : H \;\beta\; H \Rightarrow \varphi(G) \leq \varphi(H)$

En d'autres termes, φ est une application isotone de l'ordonné $(\mathcal{G}, \beta)$ dans l'ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$.

Proposition 1.

Si φ est un invariant β-croissant et si γ est un ordre sur $\mathcal{G}$ plus fin que β alors φ est γ - croissant.

Démonstration.

$\forall G, H : G \;\gamma\; H \Rightarrow G \;\beta\; H$ puisque γ est plus fin que β et $G \;\beta\; H \Rightarrow \varphi(G) \leq \varphi(H)$. /

En particulier, un invariant croissant est gp, sg et gd - croissant.

Définition 2.

φ étant un invariant β - croissant et γ un ordre sur $\mathcal{G}$ plus fin que β, considérons les propriétés suivantes :

(1) $\varphi(G) = \mathcal{T}$

(2) $\forall G' : G' \neq \emptyset, G' \neq G, G' \;\gamma\; G \Rightarrow \varphi(G') < \varphi(G)$

(3) $\forall G' : G' \neq \emptyset, G' \neq G, G \;\gamma\; G' \Rightarrow \varphi(G) < \varphi(G')$

un graphe G vérifiant (1) et (2) sera dit $\mathcal{T}(\varphi, \beta, \gamma)$-critique. et un graphe vérifiant (1) et (3) sera dit $\overline{\mathcal{T}}(\varphi, \beta, \gamma)$ - critique.

...

Pour simplifier les notations si $\beta = \gamma$ nous parlerons de graphes (φ, β) - critiques et si $\beta = \gamma = \subset$ de graphes $\mathcal{T}(\varphi)$-critiques. Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion nous parlerons de graphes $\mathcal{T}$ ou $\overline{\mathcal{T}}$ - critiques.

Proposition 2.

Quel que soit l'invariant φ β - croissant les graphes minimaux (resp. maximaux) relativement à un ordre γ plus fin que β sont $\mathcal{T}(\varphi, \beta, \gamma)$ - critiques (resp. $\overline{\mathcal{T}}$).

Evident.

Exemples.

(1) Si nous considérons un invariant gp-croissant quelconque et l'ordre gp , les cocliques sont $\mathcal{T}$ -critiques et les cliques $\overline{\mathcal{T}}$ - critiques.

(2) Si φ = degré maximum et si nous prenons pour ordre l'inclusion, φ est croissant. Un graphe $\mathcal{T}$ -critique est une étoile de degré $\mathcal{T}$ (c'est-à-dire un graphe dont tous les sommets sont de degré 1 sauf un de degré $\mathcal{T}$). Par contre, il n'existe pas de graphe $\overline{\mathcal{T}}$ - critique (puisqu'en ajoutant un sommet isolé, par exemple, on n'augmente pas le degré maximum d'un graphe).

(3) Si φ est une fonction strictement croissante du nombre de sommets et du nombre d'arêtes d'un graphe, tout graphe est à la fois $\mathcal{T}$ et $\overline{\mathcal{T}}$ -critique.

Si $\hat{\gamma}$ représente la relation de couverture associée à l'ordre γ (i.e. $H \hat{\gamma} G \Leftrightarrow H \gamma G$ et $\nexists H', H' \neq H, H' \neq G : H \gamma H' \gamma G$) on considère la propriété suivante.

...

P 1 : <u>Dans tout intervalle I il existe un élément couvert par le maximum de I.</u>

P 1 peut donc s'écrire :

$$\forall G , H : H \gamma G \Rightarrow (\exists H' : H \gamma H' \hat{\gamma} G)$$

De nombreuses propriétés usuelles sur les ensembles ordonnés entraînent P1. Par exemple, si tout intervalle est fini (ce qui est le cas pour les ordres usuels, $\subset$, sg, gp, gd) alors l'ordre vérifie P 1. (De même, si l'ordre vérifie la condition de maximalité, tout ensemble non vide admet un maximal). Dualement on considèrera la propriété :

P'1 : <u>Dans tout intervalle I il existe un élément qui couvre le minimum de I.</u>

Proposition 3.

<u>φ étant un invariant β - croissant, γ un ordre sur $\mathcal{G}$ vérifiant P 1 et plus fin que β et G un graphe non vide alors :</u>

$$G \text{ est } \tau\ (\varphi ,\beta, \gamma)\text{-critique} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\varphi (G) = \tau \quad \text{et}} \\ \underline{\forall H : H \hat{\gamma} G \Rightarrow \varphi(H) \leq \tau - 1} \end{cases}$$

Démonstration.

$\forall G', G' \neq \emptyset , G' \neq G$ et $G' \gamma G$ $\exists H$ tel que $G'\gamma H \hat{\gamma} G$

donc, puisque φ est β -croissant et γ plus fin que β :

$$\varphi (G') \leq \varphi (H) \leq \tau -1 < \tau = \varphi (G)$$

donc G est bien τ -critique.

Réciproquement, supposons G τ -critique. Cela entraîne tout d'abord que $\varphi (G) = \tau$ et que $\forall G' , G' \neq \emptyset , G' \neq G$ et $G' \gamma G$ $\varphi (G') < \varphi (G)$ et ceci est vrai notamment pour les graphes couverts par G. /

Nous obtenons de la même manière :

Proposition 3'.

φ étant un invariant β - croissant, γ un ordre sur $\mathcal{G}$ vérifiant P'1 et plus fin que β et G un graphe non vide :

$$\text{G est } \overline{\tau}(\varphi, \beta, \gamma)\text{-critique} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(G) = \tau \text{ et} \\ \forall H : G \hat{\gamma} H \Rightarrow \varphi(H) \geq \tau + 1 \end{cases}$$

Proposition 4.

φ étant un invariant β - croissant et γ, δ deux ordres sur $\mathcal{G}$ tels que $\delta \Rightarrow \gamma \Rightarrow \beta$ alors :

G τ (φ, β, γ) - critique $\Rightarrow$ G τ (φ, β, δ) - critique

G $\overline{\tau}$ (φ, β, γ) - critique $\Rightarrow$ G $\overline{\tau}$ (φ, β, δ) - critique

Démonstration.

$\forall G', G' \neq \emptyset, G' \neq G$ et $G' \delta G \Rightarrow G' \gamma G \Rightarrow \varphi(G') < \varphi(G)$ dans le premier cas,

$\forall G', G' \neq \emptyset, G' \neq G$ et $G \delta G' \Rightarrow G \gamma G' \Rightarrow \varphi(G) < \varphi(G')$ dans le second cas. /

...

Cette propriété entraîne notamment que si un graphe est $\mathcal{T}(\varphi)$ - critique (ou $\overline{\mathcal{T}}$) il est alors $\mathcal{T}(\varphi, gp)$, $\mathcal{T}(\varphi, sg)$ et $\mathcal{T}(\varphi, gd)$ - critique (ou $\overline{\mathcal{T}}$).

Nous dirons que trois ordres γ, δ, ε vérifient la propriété P2 si

P2 : $\forall G', G : G' \gamma G \Leftrightarrow \exists G'' : G' \delta G'' \varepsilon G$ ou $G' \varepsilon G'' \delta G$.

Proposition 5.

φ étant un invariant β-croissant et γ, δ, ε trois ordres sur $\mathcal{G}$ plus fins que β vérifiant P 2 alors :
G $\mathcal{T}(\varphi, \beta, \gamma)$ - critique $\Leftrightarrow$ G $\mathcal{T}(\varphi, \beta, \delta)$ et $\mathcal{T}(\varphi, \beta, \varepsilon)$-critique.
G $\overline{\mathcal{T}}(\varphi, \beta, \gamma)$- critique $\Leftrightarrow$ G $\overline{\mathcal{T}}(\varphi, \beta, \delta)$ et $\overline{\mathcal{T}}(\varphi, \beta, \varepsilon)$-critique.

Démonstration.

Nous ne ferons la démonstration que dans le cas $\mathcal{T}$ -critique :

(1) la condition P 2 entre γ, δ et ε implique $\delta \Rightarrow \gamma$ et $\varepsilon \Rightarrow \gamma$ (il suffit de prendre $G'' = G$ ou $G'' = G'$). La proposition 4 permet donc d'affirmer que G $\mathcal{T}(\varphi, \beta, \gamma)$ - critique entraîne G $\mathcal{T}(\varphi, \beta, \delta)$-critique et $\mathcal{T}(\varphi, \beta, \varepsilon)$ - critique.

(2) Réciproquement, si G est $\mathcal{T}(\varphi, \beta, \delta)$ et $\mathcal{T}(\varphi, \beta, \varepsilon)$-critique considérons un graphe quelconque G' tel que : $G' \neq \emptyset$ et $G' \neq G$ et $G' \gamma G$. Supposons par exemple (P 2) qu'il existe $G'' : G' \delta G'' \varepsilon G$ si $G'' \neq G$ nous avons $\varphi(G') \leq \varphi(G'') < \varphi(G)$, si $G'' = G$ alors $G'' \neq G'$ et $\varphi(G') < \varphi(G'') \leq \varphi(G)$ dans tous les cas $\varphi(G') < \varphi(G)$ donc G est $\mathcal{T}(\varphi, \beta, \gamma)$ - critique. On a le même résultat en supposant que $G' \gamma G \Rightarrow \exists G'' : G' \varepsilon G'' \delta G$. /

Cette proposition implique pour les ordres usuels :

Corollaire : G est $\mathcal{T}(\varphi)$-critique (resp. $\overline{\mathcal{T}}$) si et seulement s'il est $\mathcal{T}(\varphi, gp)$ et $\mathcal{T}(\varphi, sg)$-critique (resp. $\overline{\mathcal{T}}$).

...

Démonstration.

Il est immédiat de vérifier que $\subset$, gp et sg vérifient bien la condition P2. On peut également voir que tout autre arrangement de 3 parmi les 4 ordres usuels (à l'exclusion de celui obtenu en échangeant gp et sg car δ et ε jouent un rôle symétrique dans P 2) ne vérifie pas cette condition. /

Théorème 1.

Si φ est un invariant β - croissant alors quel que soit l'ordre γ sur $\mathcal{G}$ plus fin que β et vérifiant la condition de minimalité (resp. maximalité) et si G est un graphe d'invariant τ alors il existe un graphe G', G' γ G (resp. G γ G') qui est $\tau(\varphi , \beta , \gamma)$-critique (resp. $\overline{\tau}$).

Démonstration.

Supposons que γ vérifie la condition de minimalité , la démonstration est identique dans l'autre cas.

Considérons $E = \{ G' \mid G' \gamma G \text{ et } \varphi(G') = \tau \}$, E est non vide, puisque G $\in$ E, donc E a un élément minimal (puisque γ vérifie la condition de minimalité), cet élément minimal est $\tau(\varphi , \beta, \gamma)$-critique d'après la proposition 2. /

L'inclusion sur $\mathcal{G}$ vérifie la condition de minimalité donc tout ordre plus fin la vérifiera donc en particulier gp, sg et gd. Par contre, parmi les 4 ordres usuels seul gp vérifie la condition de maximalité. Donc :

Corollaire :

Si φ est un invariant croissant, sg ou gd-croissant alors tout graphe d'invariant τ admet respectivement un sous-graphe partiel, un sous-graphe ou un graphe dense $\tau(\varphi)$-critique.

...

Si φ est gp-croissant, tout graphe d'invariant τ a un graphe partiel $\tau(\varphi)$-critique et est graphe partiel d'un $\overline{\tau}(\varphi)$-critique.

Considérons la propriété suivante, φ étant un invariant β-croissant et γ un ordre plus fin que β :

P 3. $\forall G, H \quad \{G \,\gamma\, H, \varphi(G) = \tau, \varphi(H) = \tau + h, \text{ h entier } \geq 1\} \Rightarrow$
$\{\exists H' ; H' \,\gamma\, H, \varphi(H') = \tau + 1\}$.

Le couple H',H de la propriété P 3 vérifie lui-même les hypothèses de P 3. Donc, si $h \geq 2$, on obtient un graphe H'' tel que $H'' \,\gamma\, H$ et $\varphi(H'') = \tau + 2$, nous pouvons ainsi appliquer successivement h-1 fois P 3. Nous aurons de même pour la propriété suivante :

P'3. $\{\forall G, H : G \,\gamma\, H, \varphi(G) = \tau, \varphi(H) = \tau + h, \text{ h entier } \geq 1\} \Rightarrow$
$\{\exists G' : G \,\gamma\, G', \varphi(G') = \tau + h - 1\}$

Il existe des conditions plus fortes que P 3 ou P'3, mais plus faciles à vérifier. Par exemple, la condition suivante :

P 4. $\forall G, \varphi(G) = \tau, \tau > 1 \Rightarrow \exists G' : G' \,\gamma\, G \text{ et } \varphi(G') = \tau - 1$

entraîne immédiatement P 3. (Nous verrons dans le § 3 que les indices de recouvrement croissants vérifient précisément cette condition P 4).

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème de structure qui met bien en évidence l'importance des graphes critiques :

Théorème 2.

φ étant un invariant β-croissant, γ un ordre sur $\mathcal{G}$ plus fin que β vérifiant la condition de minimalité et (φ, γ) vérifiant P 3, alors :

$$\varphi(G) = \tau \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\ \exists G' : G' \gamma\, G \text{ et } G'\ \tau(\varphi, \beta, \gamma)\text{-critique} \\ \text{et} \\ (2)\ \nexists G'' : G'' \gamma\, G \text{ et } G''\ (\tau + 1)(\varphi, \beta, \gamma)\text{-critique} \end{cases}$$

...

Démonstration.

Avec les hypothèses $\varphi(G) = \tau$ implique (1) par le théorème 1. Supposons que $\varphi(G) = \tau$ et qu'il existe un graphe G" tel que : $G'' \gamma G$ et G" $(\tau + 1)$-critique.

$$G'' \gamma G \Rightarrow G'' \beta G \Rightarrow \varphi(G'') = \tau + 1 \leq \varphi(G) = \tau$$

ce qui est absurde donc $\varphi(G) = \tau$ implique également (2).

Réciproquement, (1) entraîne $\varphi(G') = \tau \leq \varphi(G)$ Montrons que (2) entraîne $\varphi(G) \leq \tau$. En effet, supposons que $\varphi(G) = \tau + h$ avec h entier > 0. φ et γ vérifiant P 3, appliquons P 3 au couple (G',G) de la propriété (1). Ceci entraîne qu'il existe un graphe H tel que : $H \gamma G$ et $\varphi(H) = \tau + 1$. En utilisant le théorème 1, ce graphe H est supérieur à un graphe H' $(\tau + 1)$-critique donc $H' \gamma H \gamma G$ et H' $(\tau + 1)$-critique, ce qui contredit (2).

Nous pouvons obtenir d'une manière identique :

Théorème 2'.

<u>φ étant un invariant β-croissant, γ un ordre sur $\mathcal{G}$ plus fin que β vérifiant la condition de maximalité et (φ, γ) vérifiant P'3 alors</u> :

$$\varphi(G) = \tau \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{(1')\ \exists G' : G \gamma G' \quad G'\ \overline{\tau}(\varphi, \beta, \gamma)\text{-critique}} \\ \underline{\text{et}} \\ \underline{(2')\ \nexists G'' : G \gamma G'' \quad G''(\overline{\tau} - 1)(\varphi, \beta, \gamma)\text{-critique}} \end{cases}$$

Donnons un dernier théorème aux hypothèses plus restrictives que celles des théorèmes 2 et 2' pour γ mais n'utilisant la propriété P 3 :

Théorème 3.

<u>φ étant un invariant β-croissant et γ un ordre plus fin que β vérifiant les conditions de minimalité et de maximalité alors</u> :

...

$$\varphi(G) = \tau \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{(1)\ \exists G' : G'\ \gamma\ G \text{ et } G'\ \tau\ (\varphi,\beta,\gamma)\text{-critique}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\text{et}} \\ \underline{(3)\ \nexists G'' : \qquad \mathbf{G}\ \gamma\ G'' \text{ et } G''\ \bar{\tau}(\varphi,\beta,\gamma)\text{-critique}} \end{array} \right.$$

Démonstration.

Le théorème 1 montre que : $\varphi(G) = \tau \Rightarrow (1)$ et (3)

Réciproquement $(1) \Rightarrow \tau \leq \varphi(G)$ et $(2) \Rightarrow \varphi(G) \leq \tau$ ./

Nous pouvons remarquer que $\beta = \subset$ et γ = gp vérifient les hypothèses du théorème 3.

IV.2. - Graphe critique relativement à un invariant β - décroissant.

Définition 3.

β étant un ordre sur $\mathcal{G}$, un invariant φ sera dit β-décroissant si : $\forall G,H : G\ \beta\ H \Rightarrow \varphi(G) \geq \varphi(H)$.

Le nombre de composantes connexes est un exemple d'invariant gp-décroissant.

Nous n'allons pas refaire une étude comparable au paragraphe IV.1., car nous allons pouvoir utiliser le principe de dualité. Si $\breve{\beta}$ représente l'ordre opposé à β, les propriétés non connues parmi les propriétés suivantes sont immédiates à établir :

Proposition 6.

<u>φ étant un invariant, β et γ deux ordres sur $\mathcal{G}$ nous avons</u> :

(1) <u>φ β - croissant $\Leftrightarrow$ φ $\breve{\beta}$ - décroissant.</u>

(2) <u>$(\gamma \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\breve{\gamma} \Rightarrow \breve{\beta})$.</u>

(3) <u>β vérifie la condition de minimalité (resp.maximalité) $\Leftrightarrow$ $\breve{\beta}$ vérifie la condition de maximalité (resp. minimalité).</u>

...

(4) β vérifie P 1 (resp. P'1) $\Leftrightarrow \breve{\beta}$ vérifie P'1 (resp. P 1).

(5) $\gamma, \delta, \varepsilon$ vérifient P 2 $\Leftrightarrow \breve{\gamma}, \breve{\delta}, \breve{\varepsilon}$ vérifient P 2.

Pour un invariant décroissant nous considérerons la définition suivante d'un graphe critique :

Définition 4.

φ étant un invariant β-décroissant et γ un ordre sur plus fin que β, on considère les propriétés suivantes :

(1) $\varphi(G) = \tau$

(2) $\forall G' : G' \neq \emptyset, G' \neq G, G' \gamma G \Rightarrow \varphi(G') > \varphi(G)$

(3) $\forall G' : G' \neq \emptyset, G' \neq G, G \gamma G' \Rightarrow \varphi(G) > \varphi(G')$

Si un graphe G vérifie (1) et (2) il sera dit $\tau(\varphi, \beta, \gamma)$-critique et s'il vérifie (1) et (3) il sera dit $\bar{\tau}(\varphi, \beta, \gamma)$-critique.

Exemple.

Si φ = nombre de composantes connexes et $\beta = \gamma = gp$, les graphes $\tau(\varphi, gp)$ - critiques sont les forêts de τ arbres et les graphes $\bar{\tau}(\varphi, gp)$ - critiques sont les graphes composés de cliques disjointes au sens des sommets.

Théorème 4.

φ étant un invariant β-croissant et γ un ordre plus fin que β :

G $\tau(\varphi, \beta, \gamma)$-critique (resp. $\bar{\tau}$) $\Leftrightarrow$ G $\bar{\tau}(\varphi, \breve{\beta}, \breve{\gamma})$ - critique (resp. τ)

Démonstration.

Il suffit d'écrire les définitions correspondantes :

G $\tau(\varphi, \beta, \gamma)$-critique $\Leftrightarrow \{\varphi(G) = \tau$ et $(\forall G' : G' \neq \emptyset, G' \neq G, G' \gamma G \Rightarrow \varphi(G') < \varphi(G))\} \Leftrightarrow \{\varphi(G) = \tau$ et $(\forall G' : G' \neq \emptyset, G' \neq G, G \breve{\gamma} G' \Rightarrow \varphi(G) > \varphi(G'))\} \Leftrightarrow$ G $\bar{\tau}(\varphi, \breve{\beta}, \breve{\gamma})$ - critique.

(Idem dans l'autre cas). /

...

La proposition 6 ainsi que le théorème ci-dessus permettent d'obtenir à partir des théorèmes du paragraphe IV.1. (à l'exclusion des propositions 3 et 3' et des thèorèmes 2 et 2'), de nouveaux théorèmes concernant un invariant β - décroissant en considérant les ordres opposés.

Pour obtenir un théorème équivalent au théorème 2(ou à 2') de IV.1. il suffit de remplacer P 3 par :

$$\breve{P}\ 3\ \{\forall G,H:\ H\ \gamma\ G, \varphi(G) = \tau\ , \varphi(H) = \tau + h,\ h \geq 1\ \} \Rightarrow \exists\ H' : H\ \gamma\ H',\ \varphi(H') = \tau + 1\}$$

De même, on obtient une proposition pour un invariant β-décroissant en remplaçant dans l'énoncé de la proposition 3 (resp.3') " $\varphi(H) \leq \tau - 1$ " (resp. " $\varphi(H) \geq \tau + 1$") par "$\varphi(H) \geq \tau + 1$" (resp. " $\varphi(H) \leq \tau - 1$").

Exemple.

Considérons à nouveau l'exemple ci-dessus et le théorème 3 de IV.1. L'ordre gp vérifie les conditions de minimalité et de maximalité, nous retrouvons donc le résultat bien connu : un graphe a p composantes connexes si et seulement s'il contient une forêt de p arbres et est contenu dans un graphe constitué de p cliques disjointes (au sens des sommets).

IV.3. - Indices de P_α - recouvrement.

Les résultats des paragraphes IV.1 et 2 restent naturellement valables pour les indices de P_α - recouvrement, qui sont des invariants. Cependant, pour éviter toute confusion, nous parlerons maintenant

...

de graphes $r\,(P_\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overline{r}\,(P_\alpha, \beta, \gamma)$ - critiques.

<u>Conventions</u> :

Tous les ordres considérés dans ce paragraphe seront supposés plus fins que l'inclusion (ce qui est naturel étant donné la définition d'un recouvrement), r_{P_α} est supposé partout défini et β - croissant.

Le fait que les ordres soient plus fins que l'inclusion entraîne qu'ils vérifient la condition de minimalité ainsi que les propriétés P 1 et P' 1 , qui interviennent dans les propositions 3 et 3' de IV.1. Le lemme suivant va nous permettre d'obtenir des résultats plus forts que ces dernières propositions.

Lemme. <u>Si un graphe G est tel que pour tout graphe H, γ couvert par G ($H \hat{\gamma} G$) pour un ordre γ plus fin que β , G - H est</u> P_α<u>-couvrable par une partie de G alors :</u>

$$\underline{G \quad r(P_\alpha, \beta, \gamma)\text{-critique}} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{r_{P_\alpha}(G) = r} \\ \quad \underline{\text{et}} \\ \underline{\forall H : H \hat{\gamma} G \Rightarrow r_{P_\alpha}(H) = r - 1} \end{cases}$$

Démonstration.

Nous pouvons appliquer la proposition 3 de IV.1. L'hypothèse supplémentaire, G - H P_α- couvrable par une partie de G, entraîne qu'un P_α- recouvrement de G peut être obtenu à partir d'un P_α- recouvrement de H en ajoutant un seul graphe donc $r_{P_\alpha}(H) = r - 1$. / Avec les ordres usuels nous obtenons :

Théorème 5.

<u>Si $r_{P_\alpha}(G) = r$, $r > 1$, alors :</u>

...

(1) G r $(P_\alpha, \subset)$-critique $\Leftrightarrow$ $\forall t \in I(G) \cup E(G)$: $r_{P_\alpha}(G-\{t\}) = r-1$

(2) G r (P_α, gp)-critique $\Leftrightarrow$ $\forall e \in E(G)$: $r_{P_\alpha}(G-\{e\}) = r-1$

(3) G r (P_α, gd)-critique $\Leftrightarrow$ $\forall i \in I(G)$: $r_{P_\alpha}(G-\{i\}) = r-1$

(4) G r (P_α, sg)-critique $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X(G)$: $r_{P_\alpha}(G-\{x\}) \leq r-1$

Démonstration.

$G-\{t\}$, $G-\{e\}$, $G-\{i\}$, $G-\{x\}$ sont les graphes γ - couverts par G lorsque $\gamma = \subsetneq$, gp, gd, sg. Pour (1), (2) et (3), $G-H$ se réduit à K_1 ou K_2, on peut donc appliquer le lemme. Par contre, avec l'ordre sg, si l'on enlève un sommet de degré d, $G-H$ est une étoile de degré d qui n'est pas nécessairement P_α-couvrable par une partie de G. /

A partir de la proposition 3' de IV.1. nous obtenons des résultats analogues, que nous donnons sans démonstration, pour caractériser des graphes $\bar{r}$- critiques.

Lemme. Si un graphe G est tel que pour tout graphe H γ - couvrant G (i.e. $G \hat{\gamma} H$), γ étant un ordre plus fin que β, H-G est P_α-couvrable par une partie de H alors :

$$G \ \bar{r}\ (P_\alpha, \beta, \gamma)\text{-critique} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ r_{P_\alpha}(G) = r \quad \text{et} \\ (2)\ \forall H : G \hat{\gamma} H = r_{P_\alpha}(H) = r+1 \end{cases}$$

Théorème 5'.

Si $r_{P_\alpha}(G) = r$, $r \geq 1$ alors :

(1) G $\bar{r}$ $(P_\alpha, \subset)$-critique $\Leftrightarrow$ $\forall K_1, K_2 \not\subset G$ $r_{P_\alpha}(G \cup K_1) = r_{P_\alpha}(G \cup K_2) = r+1$

(2) G $\bar{r}$ (P_α, gp)-critique $\Leftrightarrow$ $\forall e \in E(\bar{G})$: $r_{P_\alpha}(G \cup \{e\}) = r+1$

(3) G $\bar{r}$ (P_α, sg)-critique $\Leftrightarrow$ G $\bar{r}$ (P_α, gd)-critique $\Leftrightarrow$ $\forall K_1 \not\subset G$ $r_{P_\alpha}(G \cup K_1) = r+1$

...

En utilisant la dualité mise en évidence au paragraphe précédent, nous ne pouvons pas étendre ces résultats au cas d'un indice r_{P_α} décroissant, car si un graphe G d'indice r vérifie la condition suivante :

$$\forall H \quad H \hat{\gamma} G \Rightarrow r_{P_\alpha}(H) \geq r+1$$

il n'existe pas de condition simple permettant d'affirmer que $r_{P_\alpha}(H)=r+1$. Nous pouvons cependant obtenir des conditions suffisantes comme : "Si r_{P_α} est gp - décroissant et si $\forall e \in E(G)$, (resp. $E(\bar{G})$), $r_{P_\alpha}(G-\{e\}) = r+1$ (resp. $r_{P_\alpha}(G \cup \{e\} = r-1)$ alors G est r (P_α, gp)-critique (resp. $\bar{r}$)".

La propriété P4 de IV.1. est vérifiée pour les couples (P_α, α) lorsque α est l'un des 4 ordres usuels $\subset$, sg, gp, gd.

(P_α étant β-croissant et $\alpha \Rightarrow \beta$), Montrons-le par exemple dans le cas où $\alpha =$ gd. On considère un P_{gd}-recouvrement minimum de G soit $\{G_1, G_2, \ldots, G_r\}$, $r>1$, $\{G_1, G_2, \ldots, G_{r-1}\}$ est un P_{gd}-recouvrement minimum de $G' = \bigcup_{i \leq r-1} G_i$, en effet G_i gd $G \Rightarrow E(G_i) = E(G) = E(G')$ donc G' gd G et G_i gd G', de plus s'il existait un Pgd-recouvrement de G' ayant moins de r-1 éléments, en lui ajoutant G_r on obtiendrait un P_{gd}-recouvrement de G ayant moins de r éléments, ce qui est absurde.

Comme P 4 $\Rightarrow$ P 3 et que tous les ordres plus fins que $\subset$ vérifient la condition de minimalité on peut appliquer le théorème 2 de IV.1. qui donne :

Corollaire. <u>α étant l'un des quatre ordres usuels sur $\mathcal{G}$ et r_{P_α} un indice β-croissant avec $\alpha \Rightarrow \beta$, alors</u> :

$$\underline{r_{P_\alpha}(G) = r} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \ \underline{\exists G' : G' \alpha G \text{ et } G' \quad r(P_\alpha, \beta)\text{-critique}} \\ \qquad\qquad\qquad \underline{\text{et}} \\ (2) \ \underline{\nexists G'' : G'' \alpha G \text{ et } G'' \quad (r+1)(P_\alpha, \beta)\text{-critique}} \end{array} \right.$$

...

Pour obtenir un corollaire du théorème 2' de IV.1., nous ne pouvons considérer que l'ordre gp qui est le seul vérifiant la condition de maximalité parmi les ordres usuels. On peut vérifier facilement que (P_{gp}, gp) satisfait à P'3 (si P_{gp} est β-croissant et gp $\Rightarrow \beta$).

Le théorème 3 de IV.1. s'applique immédiatmeent pour l'ordre gp.

L'application des résultats de IV.2 aux indices décroissants ne présente pas plus de difficulté que ce que nous venons de voir pour les indices croissants.

IV.4. Graphe critique et hypergraphe critique.

BERGE ([2] p.406) définit un <u>hypergraphe τ -critique</u> comme étant un hypergraphe $\mathcal{H}(X,\mathcal{E})$ ayant τ pour transversalité et tel que tout hypergraphe partiel a une transversalité $< \tau$.

Nous avions vu en II.1. les rapports étroits entre indice de P_α-recouvrement et transversalité. Nous allons montrer ici qu'il y a équivalence entre le fait qu'un graphe soit critique et que le dual de son hypergraphe associé le soit, mais seulement dans le cas où $\alpha = \beta = \gamma = \subset$.

Théorème 6.

<u>r_P étant un indice croissant, G r (P)-critique $\Leftrightarrow \mathcal{H}^*(G,P)$ r-critique.</u>

Démonstration.

Soit $a_i \in X(G) \cup E(G)$ on pose $G' = G - \{a_i\}$.

Si $H = (P(G), \mathcal{E})$ est le dual de l'hypergraphe associé à G et $H' = (P(G'), \mathcal{E}')$ le dual de l'hypergraphe associé à G', enfin $H'' = (P'(G), \mathcal{E} - P^{a_i}(G))$, $P^{a_i}(G)$ étant l'ensemble des

...

éléments de P (G) contenant a_i et pour que H" soit l'hypergraphe partiel de H engendré par $\mathcal{E} - P^{a_i}(G)$, il faut prendre $P'(G)=P(G)-\{a_i\}$

Nous allons tout d'abord montrer que les transversalités de H' et H" sont égales.

(1) un transversal T" de H" est un ensemble de graphes inclus dans G contenant un élément au moins de chaque $P^{a_j}(G)$, $j \neq i$. Or $K \in T''$, et $K \in P^{a_j}(G)$, $j \neq i \Rightarrow K - a_i \in P^{a_j}(G')$ donc $K - \{a_i\} \in \mathcal{E}'$

En effet, P est héréditaire. Alors l'ensemble $\{K - \{a_i\} \mid K \in T''\}$ est un transversal de H' donc $\tau(H'') \geq \tau(H')$.

(2) réciproquement considérons un transversal T' de H' si : $K \in T'$ $K \in P^{a_j}(G') \Rightarrow K \in P^{a_j}(G)$ car $K \subset G' \subset G$, $K \in P$, $\{a_j\} \subset K$, donc $\tau(H') \geq \tau(H'')$.

Supposons maintenant que G soit r-critique cela entraîne que $r_P(G - \{a_i\}) < r$ donc $\tau(H') < r = \tau(H'')$, donc $\tau(H'') < \tau(H)$ et ceci pour tout $a_i \in X(G) \cup E(G)$.

Réciproquement, si H est r-critique, $\tau(H'') < \tau(H)$ donc $\tau(H') < \tau(H)$ or $\tau(H') = r_P(G - \{a_i\})$ donc G est r-critique. /

V. - Etude de $r_{P^{\pi}_{\alpha}}$

V.1. - Existence de l'indice.

$r_{P^{\pi}_{\alpha}}$ sera dit toujours défini pourvu qu'il le soit pour tout graphe G vérifiant $\pi(G) \neq \emptyset$.

Proposition 1.

Soient α, β deux relations, π, η deux applications vérifiant $\alpha \Rightarrow \beta$ et $\forall G \; \pi(G) \subset \eta(G)$. En ce cas

(1) $r_{P^{\pi}_{\alpha}}$ toujours défini $\Rightarrow$ $r_{P^{\pi}_{\beta}}$ toujours défini.

(2) $r_{P^{\eta}_{\alpha}}$ toujours défini $\Rightarrow$ $r_{P^{\pi}_{\alpha}}$ toujours défini.

Démonstration.

Tout P^{π}_{α} - recouvrement de G est un P^{π}_{β} - recouvrement de G.

Tout P^{η}_{α} - recouvrement de G est un P^{π}_{α} - recouvrement de G. /

Définition 1.

La relation α sera dite π - couvrante si

$$\forall G \bigcup_{H \alpha G} H \supset \pi(G).$$

Définition 2.

Posons $\wp^{\pi}_{\alpha} = \{ G \mid \bigcup_{\substack{H \alpha G \\ H \neq G}} H \not\supset \pi(G) \text{ et } \pi(G) \neq \emptyset \}$

Remarquons que toute relation couvrante (en particulier toute relation réflexive) est π - couvrante quel que soit π.

...

Proposition 2.

Pour que $r_{P^{\pi}_{\alpha}}(G)$ soit défini pour tout G, il faut que α soit π - couvrante et que $\mathcal{S}^{\pi}_{\alpha} \subset P$.

Démonstration.

Analogue à celle de la proposition 1 du II.2. /

Théorème 1.

Supposons que α, π vérifiant la condition $S(\alpha, \pi)$:
$\forall G\ \forall H \quad H\, \alpha\, G \Rightarrow [\pi(G) \cap H \subset \pi(H)]$

a) Si α est transitive

$r_{P^{\pi}_{\alpha}}(G)$ toujours défini $\Leftrightarrow$ α π - couvrante et $\mathcal{S}^{\pi}_{\alpha} \subset P$

b) Si α est une relation d'ordre

$r_{P^{\pi}_{\alpha}}(G)$ toujours défini $\Leftrightarrow \mathcal{S}^{\pi}_{\alpha} \subset P$.

Démonstration.

Une partie figure dans la proposition 1.

a) Supposons que α est π - couvrante et que $\mathcal{S}^{\pi}_{\alpha} \subset P$.

Soit un graphe G et t un sommet isolé ou une arête de $\pi(G)$.

Posons :
$$\mathcal{C} = \{ H \mid H\ \alpha\ G \quad \text{et } \{t\} \subset H \}$$

L'ensemble $\mathcal{C}$ est non vide puisque α est π-couvrante , de plus $\mathcal{C}$ est fini car G est fini et $\alpha \Rightarrow \subset$.

Soit H_t l'un des minimaux de $\mathcal{C}$ pour l'inclusion. Montrons par l'absurde que $H_t \in \mathcal{S}^{\pi}_{\alpha}$.

...

En effet, si H_t n'appartenait pas à $\mathcal{S}_\alpha^\pi$ on aurait

$$\bigcup_{\substack{K \alpha H_t \\ K \neq H_t}} K \supset \pi(H_t) \supset \pi(G) \cap H_t \supset \{t\}$$

c'est-à-dire qu'il existerait un graphe K vérifiant $K \subsetneq H_t$ et $K \alpha H_t$ $\{t\} \subset K$ et par suite, puisque α est transitive :

$$K \subsetneq H_t \quad \text{et} \quad K \alpha G \quad \text{et} \quad \{t\} \subset H$$

soit $\qquad K \subsetneq H_t \quad \text{et} \quad K \in \mathcal{C} \qquad$ contradiction.

Conclusion : $H_t \in \mathcal{S}_\alpha^\pi$ donc $H_t \in P$, et l'ensemble des graphes H_t quand t décrit $\pi(G)$ constitue un P_α^π - recouvrement de G $r_{P_\alpha^\pi}(G)$ est toujours défini.

b) Si α est un ordre α est réflexive et donc α est π couvrante la C.N.S. en résulte. /

Etude de $S(\alpha, \pi)$: $H \alpha G \Rightarrow \pi(G) \cap H \subset \pi(H)$

Proposition 3.

(1) $\underline{\forall \alpha \quad S(\alpha, \mathbb{1}_{\mathcal{G}})}$

(2) $\underline{\forall \alpha, \beta, \pi \quad (\alpha \Rightarrow \beta \text{ et } S(\beta, \pi) \Rightarrow S(\alpha, \pi))}$

Démonstration.

1) $\forall H$ si $H \alpha G$ alors $H \subset G$, donc $G \cap H \subset H$

Le théorème 1 de II est un cas particulier du théorème 1 de V.

2) $\alpha \Rightarrow \beta$ i.e. $H \alpha G \Rightarrow H \beta G$

$S(\beta, \pi)$ i.e. $H \beta G \Rightarrow \pi(G) \cap H \subset \pi(H)$

Conclusion : $\qquad H \alpha G \Rightarrow \pi(G) \cap H \subset \pi(H)$ ./

...

V.2.- Existence de $r_{P_\alpha^\pi}$ dans les cas usuels.

Définition 3.

On convient de noter :

$X - I$ l'application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$: $(X - I)(G) = X(G) - I(G)$

$E - A$ l'application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$: $(E - A)(G) = E(G) - A(G)$

Proposition 4.

(1) $\forall \alpha \in \{\subset, sg, gp, gd\}$ $\forall \pi \in \{\mathbb{1}_{\mathcal{G}}, X, E, I, A\}$: $S(\alpha, \pi)$

(2) $S(gd, X\text{-}I)$, $S(gd, E - A)$.

Démonstration.

(1) $\pi = \mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ Proposition 3.

$S(\subset, X)$ $H \subset G \Rightarrow X(G) \cap H = X(H)$

$S(\subset, E)$ $H \subset G \Rightarrow E(G) \cap H = E(H)$

$S(\subset, I)$ $H \subset G \Rightarrow I(G) \cap H \subset I(H)$

$S(\subset, A)$ $H \subset G \Rightarrow A(G) \cap H \subset A(H)$

Les autres cas résultent de $\alpha \Rightarrow \subset$.

(2) $S(gd, X\text{-}I)$ $H \text{ gd } G \Rightarrow (X(G) - I(G)) \cap H = X(H) - I(H)$

En effet, H contient toutes les arêtes de G, donc les sommets non isolés de G sont les sommets non isolés de H. De même, les arêtes non isolées de G sont les arêtes non isolées de H donc :

$S(gd, E - A)$ $H \text{ gd } G \Rightarrow (E(G) - A(G) \cap H = E(H) - A(H)$. /

Notons que pour $X - I$ et $E - A$ ce sont les inclusions contraires qui sont vérifiées , en effet :

$H \alpha G \Rightarrow H \subset G \Rightarrow X(H) - I(H) \subset (X(G) - I(G)) \cap H$

$H \alpha G \Rightarrow H \subset G \Rightarrow E(H) - A(H) \subset (E(G) - A(G)) \cap H$

En effet, si un sommet, une arête sont non isolés dans H, ils le sont dans G.

...

Proposition 5.

<u>Caractérisons $\mathcal{P}_{\alpha}^{\pi}$ dans les cas usuels.</u>

a) $\pi = \mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ déjà étudié en II : $\mathcal{P}_{\alpha}$

b) $\pi = X$ ou $\pi = I$

$$\mathcal{P}^{X} = \mathcal{P}^{I} = \{K_1 \mid K_1 \in \mathcal{G}\}$$

$$\mathcal{P}^{X}_{sg} = \mathcal{P}^{I}_{sg} = \{K_1 \mid K_1 \in \mathcal{G}\}$$

$$\mathcal{P}^{X}_{gp} = \mathcal{P}^{I}_{gp} = \{\overline{K_n} \mid n \in \mathbb{N}^{*} \text{ et } \overline{K_n} \in \mathcal{G}\}$$

$$\mathcal{P}^{X}_{gd} = \mathcal{P}^{I}_{gd} = \mathcal{P}_{gd} = \{\text{graphes ayant au plus un sommet isolé}\}$$

c) $\pi = E$ ou $\pi = A$

$$\mathcal{P}^{E} = \mathcal{P}^{A} = \{K_2 \mid K_2 \in \mathcal{G}\}$$

$$\mathcal{P}^{E}_{sg} = \mathcal{P}^{A}_{sg} = \{K_2 \mid K_2 \in \mathcal{G}\}$$

$$\mathcal{P}^{E}_{gp} = \mathcal{P}^{A}_{gp} = \{\text{graphes ayant au plus une arête}\}$$

$$\mathcal{P}^{E}_{gd} = \mathcal{P}^{A}_{gd} = \{\text{graphes sans sommets isolés}\}$$

d) $\pi = X - I$ ou $\pi = E - A$

$$\mathcal{P}^{X-I}_{gd} = \mathcal{P}^{E-A}_{gd} = \{\text{graphes sans sommets isolés}\}$$

* Dans ces cas a,b,c,d : $r_{P_{\alpha}^{\pi}}$ toujours défini $\Leftrightarrow \mathcal{P}_{\alpha}^{\pi} \subset P$

...

e) Autres cas. $\alpha \in \{\subset, sg, gp\}$

$$\wp_{\alpha}^{X-I} = \wp_{\alpha}^{E-A} = \emptyset$$

$r_{P^{X-I}}(G)$ toujours défini $\Leftrightarrow \forall K_1 \in \mathcal{G}\ K_1 \in P$ ou $\forall K_2 \in \mathcal{G}\ K_2 \in P$ ou $\forall \overline{K}_2 \in \mathcal{G}\ \overline{K}_2 \in P$

En effet, faute de l'un de ces trois graphes on ne peut recouvrir les sommets de K_2, mais l'un quelconque d'entre eux permet de couvrir les sommets non isolés de tout graphe.

$r_{P^{X-I}_{sg}}$	toujours défini	$\Leftrightarrow$	$\forall K_1 \in \mathcal{G}\ K_1 \in P$ ou $\forall K_2 \in \mathcal{G}\ K_2 \in P$
$r_{P^{X-I}_{gp}}$	-	$\Leftrightarrow$	$\forall n \geq \ell\ \{\overline{K}_n \in P$ ou $K_2 + \overline{K}_{n-2} \in P\}$
$r_{P^{E-A}}$	-	$\Leftrightarrow$	$K_2 \in P$ ou $K_2 + K_1 \in P$ ou (toute chaîne élémentaire de longueur deux, appartient à P)
$r_{P^{E-A}_{sg}}$	-	$\Leftrightarrow$	$K_2 \in P$ ou (toute chaîne élémentaire de longueur deux appartient à P et $K_3 \in P$)
$r_{P^{E-A}_{gp}}$	-	$\Leftrightarrow$	$\forall n \geq 1\ \{K_2 + \overline{K}_n \in P$ ou (toute chaîne élémentaire de longueur deux $+ \overline{K}_{n-1}$) $\in P\}$

V.3. - Graphes d'indice un.

D'après la définition on a :

$$r_{P_{\alpha}^{\pi}}(G) = 1 \Leftrightarrow \exists H \in P\ \ \pi(G) \subset H \text{ et } H\, \alpha\, G$$

...

Si α est réflexive, $\forall G \in P \quad r_{P^{\pi}_{\alpha}}(G) = 1$.

Il est fructueux d'introduire la relation entre H et G : "$\pi(G) \subset H$ et $H \alpha G$" qui sous des conditions déjà rencontrées est un ordre.

Définition 4.

Introduisons la relation binaire ν^{π}_{α} dans $\mathcal{G}$, notée ν en abrégé :

$$\forall H, G \quad H \nu G \Leftrightarrow \pi(G) \subset H \text{ et } H \alpha G$$

Proposition 6.

1. $$\forall G \quad r_{P^{\pi}_{\alpha}}(G) = 1 \Leftrightarrow \exists H \in P \quad H \nu G$$

2. Si α est une relation d'ordre et si la condition $S(\alpha,\pi)$ est vérifiée ($H \alpha G \Rightarrow \pi(G) \cap H \subset H$) alors ν est une relation d'ordre qui vérifie

$$H \nu G \Rightarrow \pi(G) \subset \pi(H) \subset H \subset G$$

Démonstration.

1. Evident.

2. Réflexivité

$$G \nu G \Rightarrow \pi(G) \subset G \quad \text{et} \quad G \alpha G$$

Or, ces conditions sont imposées à π, α.

Antisymétrie

$$H \nu G \Rightarrow H \alpha G \Rightarrow H \subset G$$

ν est donc antisymétrique et vérifie la condition de minimalité : Tout graphe G contient un graphe minimal au sens de ν.

...

Transitivité

Notons d'abord que :

$H \, \nu \, G \;\Rightarrow\; \pi(G) \subset H$ et $H \, \alpha \, G$

$H \, \nu \, G \;\Rightarrow\; \pi(G) \subset H$ et $\pi(G) \cap H \subset \pi(H)$ et $H \subset G$

$H \, \nu \, G \;\Rightarrow\; \pi(G) \subset \pi(H) \subset H \subset G$

Alors :

$$\begin{aligned}
H \, \nu \, G \text{ et } G \, \nu \, L \;&\Rightarrow\; H \, \alpha \, G \text{ et } G \, \alpha \, L \text{ et } \pi(G) \subset H \text{ et } \pi(L) \subset G \\
&\Rightarrow\; H \, \alpha \, L \text{ et } \pi(G) \subset \pi(H) \subset H \subset G \\
&\qquad\quad \text{ et } \pi(L) \subset \pi(G) \subset G \subset L \\
&\Rightarrow\; H \, \alpha \, L \text{ et } \pi(L) \subset \pi(H)
\end{aligned}$$

$H \, \nu \, G$ et $G \, \nu \, L \Rightarrow H \, \nu \, L$. /

Les cas usuels seront étudiés à la fin de V.4.

V.4.- Ensemble P de graphes définissant le même indice.

<u>Dans toute cette partie nous supposerons que</u> :

α est un ordre et que $S(\alpha, \pi)$ est vérifiée.

On s'intéresse aux ensembles P vérifiant $\mathcal{P}^{\pi}_{\alpha} \subset P$ pour lesquels l'indice $r_{P^{\pi}_{\alpha}}$ est toujours défini, et on cherche à quelles conditions deux tels ensembles définissent le même indice.

Définition 5.

<u>Notons $\underline{P}$ (s'il y a ambiguïté $\underline{P}_{\nu}$) l'ensemble des graphes appartenant à P, minimaux au sens de la relation d'ordre ν.</u>

Proposition 7.

1. <u>Tout graphe $G \in \mathcal{P}^{\pi}_{\alpha}$ est minimal dans $\mathcal{G}$ pour ν</u>

...

2. $\underline{\mathcal{S}_\alpha^\pi \subset P \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha^\pi \subset \underline{P}}$

3. $\underline{\forall G \quad r_{P_\alpha^\pi}(G) = r_{\underline{P}_\alpha^\pi}(G)}$.

Démonstration.

1. Soit $G \in \mathcal{S}_\alpha^\pi$, s'il n'était pas minimal dans $\mathcal{G}$, il existerait $H \in \mathcal{G}$ tel que $H \, \nu \, G$ et $H \neq G$

Donc $\pi(G) \subset H$ et $H \, \alpha \, G$ et $H \neq G$

Par suite H appartiendrait à l'ensemble $\{K \mid K \, \alpha \, G \text{ et } K \neq G\}$

Conclusion $\bigcup_{\substack{K \alpha G \\ K \neq G}} K \supset H \supset \pi(G)$ et G n'appartiendrait pas à $\mathcal{S}_\alpha^\pi$, contradiction.

2. Résulte directement de 1.

3. En vertu de 2 $r_{P_\alpha^\pi}$ et $r_{\underline{P}_\alpha^\pi}$ sont toujours définis.

$$\underline{P} \subset P \Rightarrow r_{P_\alpha^\pi} \leq r_{\underline{P}_\alpha^\pi}$$

Il reste à montrer l'inégalité contraire :

Soit $\{G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots, G_r\}$ un P_α^π - recouvrement de G

$G_i \in P$, $G_i \, \alpha \, G$, $\cup G_i \supset \pi(G)$.

Considérons $G'_i \in P$, inclus dans G_i et minimal dans P pour la relation ν . On aura :

$$\forall i \quad G'_i \, \nu \, G_i \text{ donc } \pi(G_i) \subset G'_i \text{ et } G'_i \, \alpha \, G_i$$

a) α étant transitive $G'_i \, \alpha \, G_i$ et $G_i \, \alpha \, G \Rightarrow G'_i \, \alpha \, G$

b) $G'_i \in \underline{P}$

c) Enfin, $G_i \, \alpha \, G \Rightarrow \pi(G) \cap G_i \subset \pi(G_i)$

donc $\bigcup_i G'_i \supset \bigcup_i \pi(G_i) \supset \bigcup_i (\pi(G) \cap G_i)$

$$\bigcup_i G'_i \supset \pi(G) \cap \bigcup_i G_i \supset \pi(G) \cap \pi(G)$$

$$\cup G'_i \supset \pi(G)$$

Conclusion $\{G'_1, G'_2, \dots, G'_i, \dots, G'_r\}$ est un $\underline{P}^{\pi}_{\alpha}$ - recouvrement de G et $r_{\underline{P}^{\pi}_{\alpha}}(G) \leq r_{P^{\pi}_{\alpha}}(G)$.

Conclusion P et $\underline{P}$ définissent le même indice. /

La caractérisation cherchée dépend du lemme 2 suivant.

Lemme 1. Soit $(B, \leq)$ un ensemble ordonné satisfaisant la condition de minimalité, quels que soient deux sous-ensembles P, P' de B :
Si $\underline{P}$ désigne l'ensemble des minimaux de P pour $\leq$

$$\underline{P} \subset P' \quad \text{et} \quad \underline{P'} \subset P \Rightarrow \underline{P} = \underline{P'} \quad .$$

Démonstration.

Par hypothèse $\underline{P} \subset P'$ et $\underline{P'} \subset P$

Tout G appartenant à $\underline{P}$ appartient aussi à P' donc contient un minimal G' de P' au sens de $\leq$ qui vérifie $G' \leq G$ et $G' \in \underline{P'}$ donc $G' \in P$.
En conclusion, G étant minimal dans P pour $\leq$, on obtient $G' = G$, $G \in \underline{P'}$, enfin $\underline{P} \subset \underline{P'}$.
On montrerait de même que $\underline{P'} \subset \underline{P}$. /

Lemme 2. Les conventions sont celles du lemme 1 ; quels que soient deux ensembles P, P' de B :

$$(P \subset P' \text{ et } \forall H' \in P' \; \exists \; H \in P \quad H \leq H') \Rightarrow \underline{P} = \underline{P'} \quad .$$

Démonstration.

a) D'une part $P \subset P' \Rightarrow \underline{P} \subset P'$

b) Soit $H' \in \underline{P'}$, H' appartient à P' donc il existe $H \in P$ tel que $H \leq H'$, alors $H \in P'$ et H' étant minimal dans P' pour $\leq$ il vient $H = H'$.

Conclusion $\underline{P'} \subset P$.

En vertu du lemme 1, on obtient $\underline{P} = \underline{P'}$. /

...

Théorème 2. Ensembles de graphes définissant le même indice.

Soit P un ensemble de graphes. Posons : $\mathcal{E} = \{K \mid K \in \mathcal{G}$ et $r_{P^{\pi}_{\alpha}}(K) = 1\}$

1) $\underline{\mathcal{E}} = \underline{P} \subset P \subset \mathcal{E}$

2) $\forall G \quad r_{\underline{\mathcal{E}}^{\pi}_{\alpha}}(G) = r_{\underline{P}^{\pi}_{\alpha}}(G) = r_{P^{\pi}_{\alpha}}(G) = r_{\mathcal{E}^{\pi}_{\alpha}}(G)$

3) Si P' est un autre ensemble de graphes :

$[\forall G \quad r_{P^{\pi}_{\alpha}}(G) = r_{P'^{\pi}_{\alpha}}(G)] \Leftrightarrow \underline{P} = \underline{P}'$

4) Les ensembles de graphes qui définissent un même indice forment un $(\cup, \cap)$- treillis avec maximum $\mathcal{E}$ (l'ensemble des graphes d'indice un) et minimum $\underline{\mathcal{E}}$.

Démonstration.

1) $\forall H \in P \quad r_{P^{\pi}_{\alpha}}(H) = 1$ donc $P \subset \mathcal{E}$

En outre, $\forall K \in \mathcal{E} \quad r_{P^{\pi}_{\alpha}}(K) = 1$ donc $\exists H \in P \quad H \vee K$

ce qui prouve globalement à l'aide du lemme 2 que :

$$\underline{P} = \underline{\mathcal{E}} \subset P \subset \mathcal{E}$$

2) En vertu de la proposition 7 :

$$r_{P^{\pi}_{\alpha}} = r_{\underline{P}^{\pi}_{\alpha}} = r_{\underline{\mathcal{E}}^{\pi}_{\alpha}} = r_{\mathcal{E}^{\pi}_{\alpha}}$$

3) Si $\underline{P} = \underline{P}'$ alors $r_{P^{\pi}_{\alpha}} = r_{\underline{P}^{\pi}_{\alpha}} = r_{\underline{P}'^{\pi}_{\alpha}} = r_{P'^{\pi}_{\alpha}}$

Réciproquement, si P,P' définissent le même indice, les ensembles de graphes d'indice un ($\mathcal{E}$ pour P, $\mathcal{E}'$ pour P') sont les mêmes pour les deux. $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ or $\underline{\mathcal{E}} = \underline{P}$ et $\underline{\mathcal{E}}' = \underline{P}'$ donc $\underline{P} = \underline{P}'$

...

4) Si P,P' définissent le même indice $\underline{P} = \underline{P}'$ mais alors

$$\underline{P \cup P'} = \underline{P} = \underline{P}'$$

et

$$\underline{P \cap P'} = \underline{P} = \underline{P}'$$

enfin, $\forall P \quad \underline{\mathcal{E}} \subset P \subset \mathcal{E}$

et $\mathcal{E}$, $\underline{\mathcal{E}}$ définissent le même indice que P, ce sont donc respectivement le maximum et le minimum du treillis des ensembles de graphes définissant le même indice que P.

Cas usuels. $H \nu_\alpha^\pi G \Leftrightarrow \pi(G) \subset H$ et $H \alpha G$

Pour $\alpha \in \{\subset, sg, gp, gd\}$, $\pi \in \{\mathbb{1}, X, E, I, A, X\text{-}I, E\text{-}A\}$

Le tableau suivant donne le nom de la relation ν_α^π quand c'est une relation usuelle et les propriétés dans les autres cas

$\alpha \backslash \pi$	$\mathbb{1}$	X	E	I	A	X - I	E - A
$\subset$	=	gp	gd	ordre	ordre	Ref. Anti. sym	ordre
sg	=	=	gd	ordre	ordre	gd	ordre
gp	=	gp	=	gp	ordre	gp	ordre
gd	=	=	gd	=	gd	gd	gd

* Les cinq premières colonnes du tableau correspondent à des relations α , π auquelles s'appliquent les propositions 6,7 et le théorème 2. Pour chaque case contenant le signe égal ($H \nu_\alpha^\pi G \Leftrightarrow H = G$) on a dans les notations du théorème 2 :

$$\underline{\mathcal{E}} = \underline{P} = P = \mathcal{E}$$

et $r_{P_\alpha^\pi}(G) = 1 \Leftrightarrow G \in P$ Par exemple, $r_{P_{gp}^E}(G) = 1 \Leftrightarrow G \in P$

...

* Enfin les deux dernières colonnes révèlent que les relations α , π ne vérifiant pas $S(\alpha, \pi)$, la relation ν_{α}^{π} est malgré tout un ordre sauf dans un seul cas.

V.5. - Indices $r_{P_{\alpha}^{\pi}}$ et invariants.

Théorème 3.

Si α , π sont telles que pour tout couple de graphes isomorphes G, G' et tout isomorphisme $f : G \to G'$:

$$\forall H \quad H \alpha G \Rightarrow f(H) \; \alpha \; f(G) \quad \text{et} \quad f(\pi(G)) = \pi(f(G))$$

alors l'application $r_{P_{\alpha}^{\pi}} : \mathcal{G}' \to \mathbb{N}^{*}$ est un invariant de graphes.

$= \{ G \mid \pi(G) \neq \emptyset \}^{\alpha}$

Démonstration.

Soit $G \cong G'$ et $f : G \to G'$ un isomorphisme ; soit $\{G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots, G_r\}$ un P_{α}^{π} - recouvrement de G. Posons $G'_i = f(G_i)$:

1) $\pi(G) \subset \bigcup_i G_i$ et $f(\bigcup_i (G_i)) = \bigcup_i (G'_i)$

donc $\pi(G') = \pi(f(G)) = f(\pi(G)) \subset f(\bigcup_i G_i) = \bigcup_i G'_i$

enfin $\pi(G') \subset \bigcup_i G'_i$

2) $G_i \in P$ et P est stable par isomorphisme donc $f(G_i) = G'_i \in P$

3) $G_i \, \alpha \, G \Rightarrow f(G_i) \; \alpha \; f(G) \Rightarrow G'_i \; \alpha \; G'$.

Conclusion $\{G'_1, \ldots, G'_i, \ldots, G'_r\}$ est un P_{α}^{π} - recouvrement de G et $r_{P_{\alpha}^{\pi}}(G) \geq r_{P_{\alpha}^{\pi}}(G')$.

On montrerait de même l'inégalité contraire en utilisant f^{-1}.

Remarque. On aurait pu se contenter pour la démonstration d'une condition apparamment plus large sur π : $f(\pi(G)) \subset \pi(f(G))$ (*)

...

mais f étant une bijection cette condition (*) implique celle posée plus haut, en effet en utilisant f^{-1} la condition (*) s'écrit :

$$f^{-1}(\pi \subset G')) \subset \pi(f^{-1}(G'))$$

c'est-à-dire

$$f^{-1}(\pi(f(G))) \subset \pi(G)$$

soit en appliquant f des deux côtés

$$\pi(f(G)) \subset f(\pi(G))$$

et enfin $(*) \Rightarrow f(\pi(G)) = \pi(f(G))$.

Théorème 4 :

Si un invariant de graphes $\varphi : \mathcal{G} \to \mathbb{N}$ est un indice de P^{π}_{α} - recouvrement, il en résulte nécessairement que :

$$\underline{P} = \underline{\varphi^{-1}(1)} \quad .$$

On pourra prendre pour P l'ensemble $\varphi^{-1}(1)$ ou plus avantageusement $\underline{\varphi^{-1}(1)}_{\flat}$.

Donc les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) φ est un indice de recouvrement.

(2) $\exists\, \alpha, \pi \quad \forall G \quad \varphi(G) = r_{\varphi^{-1}(1)^{\pi}_{\alpha}}(G)$

(3) $\exists\, \alpha, \pi \quad \forall G \quad \varphi(G) = r_{\underline{\varphi^{-1}(1)^{\pi}_{\alpha}}_{\flat}}(G)$

Nature de P	Indices définis	Comparaisons, majorants : $\rightarrow$ signifie $\leq$
$P = \{K_1\}$	r_{P^X} , $r_{P^X_{sg}}$	$0 \rightarrow r_{P^X}(G) = r_{P^X_{sg}}(G) = n$
$P \supset \{K_1\}$	r_{P^X} , $r_{P^X_{sg}}$	$0 \rightarrow r_{P^X}(G) \rightarrow r_{P^X_{sg}}(G) \rightarrow n$
$P = \{\overline{K}_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$	r_{P^X} , $r_{P^X_{sg}}$, $r_{P^X_{gp}}$	$]\frac{n}{n+1}[= r_{P^X}(G) = r_{P^X_{gp}}(G) \rightarrow r_{P^X_{sg}}(G) = \gamma(G) \rightarrow n$
$P \supset \{\overline{K}_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$	r_{P^X} , $r_{P^X_{sg}}$, $r_{P^X_{gp}}$	$]\frac{n}{n+1}[= r_{P^X}(G) = r_{P^X_{gp}}(G) \rightarrow r_{P^X_{sg}}(G) \rightarrow \gamma(G) \rightarrow n$
$P = \{K_2\}$	r_{P^E} , $r_{P^E_{sg}}$	$0 \rightarrow r_{P^E}(G) = r_{P^E_{sg}}(G) = m$
$P \supset \{K_2\}$	r_{P^E} , $r_{P^E_{sg}}$	$0 \rightarrow r_{P^E}(G) \rightarrow r_{P^E_{sg}}(G) \rightarrow m$
$P = \{K_1, K_2\}$	r_{P^X} , $r_{P^X_{sg}}$, r_P , $r_{P_{sg}}$, r_{P^E} , $r_{P^E_{sg}}$	$r_{P^X}(G) = r_{P^X_{sg}}(G) = r(G) + k \rightarrow n$ $r_P(G) = r_{P_{sg}}(G) = m + k$ $r_{P^E}(G) = r_{P^E_{sg}}(G) = m$

$P \supset \{K_1, K_2\}$	r_{P^X} , $r_{P^X_{sg}}$ r_P , $r_{P_{sg}}$ r_{P^E} , $r_{P^E_{sg}}$	$\begin{tikzcd} & r_{P^X}(G) \arrow[rr] \arrow[dr] & & r_{P^X_{sg}}(G) \arrow[rr] \arrow[dr] & & r(G)+k \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & r_P(G) \arrow[rr] & & r_{P_{sg}}(G) \arrow[rr] & & m+k \\ & r_{P^E}(G) \arrow[rr] \arrow[ur] & & r_{P^E_{sg}}(G) \arrow[rr] \arrow[ur] & & m \arrow[ur] & \end{tikzcd}$
$P = \{\overline{K}_n, K_2 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$	r_{P^X} , $r_{P^X_{sg}}$, $r_{P^X_{gp}}$ r_P , $r_{P_{sg}}$ r_{P^E} , $r_{P^E_{sg}}$	$\begin{tikzcd} & \frac{\gamma(G)}{2} \arrow[d] & \gamma(G) \\ ]\frac{n}{n+1}[= r_{P^X}(G) = r_{P^X_{gp}}(G) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & r_{P^X_{sg}}(G) = \gamma'(G) \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[d] & r(G) +]\frac{k}{k+1}[\\ r_P(G) = r_{P_{sg}}(G) \arrow[r, phantom, "="] & m +]\frac{k}{k+1}[& \\ r_{P^E}(G) = r_{P^E_{sg}}(G) = m \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$
$P \supset \{\overline{K}_n, K_2 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$	r_{P^X} , $r_{P^X_{sg}}$, $r_{P^X_{gp}}$, r_P , $r_{P_{sg}}$ r_{P^E} , $r_{P^E_{sg}}$	$\begin{tikzcd} & & & & \gamma'(G) \to \gamma(G) \\ ]\frac{n}{n+1}[= r_{P^X}(G) = r_{P^X_{gp}}(G) \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & r_{P^X_{sg}} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dl] & r(G) +]\frac{k}{k+1}[\arrow[d] \\ & r_P(G) \arrow[r] & r_{P_{sg}}(G) \arrow[rr] & & m +]\frac{k}{k+1}[\\ & r_{P^E}(G) \arrow[r] \arrow[u] & r_{P^E_{sg}}(G) \arrow[rr] \arrow[u] & & m \arrow[u] \end{tikzcd}$

<table>
<tr>
<td>$P = \{K_2, K_n, K_2 \cup K_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$</td>
<td>r_{P^X} , $r_{P^X_{sg}}$, $r_{P^X_{gp}}$,
r_P , $r_{P_{sg}}$, $r_{P_{gp}}$,
r_{P^E} , $r_{P^E_{sg}}$, $r_{P^E_{gp}}$</td>
<td>

$$
\begin{tikzcd}
 & & \frac{\gamma(G)}{2} \arrow[dr] & & \gamma'(G) \arrow[r] & \gamma(G) \\
 & {]\frac{n}{n+1}[= r_{P^X}(G) = r_{P^X_{gp}}(G)} \arrow[rr] \arrow[dr] & & {r_{P^X_{sg}}(G) = \gamma''(G)} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dl] & {\sup(r(G),]\frac{n}{n+1}[)} \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & {r_P(G) = r_{P_{sg}}(G) = r_{P_{gp}}(G) = \sup(m,]\frac{n}{n+1}[)} \\
 & {r_{P^E}(G) = r_{P^E_{sg}}(G) = r_{P^E_{gp}}(G) = m} \arrow[ur]
\end{tikzcd}
$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>$P \supseteq \{K_2, K_n, K_2 \cup K_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$</td>
<td>r_{P^X} , $r_{P^X_{sg}}$, $r_{P^X_{gp}}$,
r_P , $r_{P_{sg}}$, $r_{P_{gp}}$,
r_{P^E} , $r_{P^E_{sg}}$, r_{P^E}</td>
<td>

$$
\begin{tikzcd}
 & & \frac{\gamma(G)}{2} \arrow[r] & \gamma''(G) \arrow[r] \arrow[dr] & \gamma'(G) \arrow[r] & \gamma(G) \\
 & {]\frac{n}{n+1}[= r_P(G) = r_{P^X_{gp}}(G)} \arrow[rr] \arrow[dr] & & r_{P^X_{sg}}(G) \arrow[u] \arrow[d] & {\sup(r(G),]\frac{n}{n+1}[)} \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & r_P(G) \arrow[r] \arrow[ddr] & r_{P_{sg}}(G) \arrow[r] & {\sup(m,]\frac{n}{n+1}[)} \\
 & r_{P^E}(G) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & r_{P^E_{sg}}(G) \arrow[r] & m \arrow[ur] \\
 & & r_{P^E_{gp}}(G) \arrow[r] & {r_{P_{gp}}(G) = r_{P^E_{gp}}(G) +]\frac{n}{n+1}[(1 -]\frac{m}{m+1}[)} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

</td>
</tr>
</table>

CONCLUSION

Cette introduction à l'étude des indices de recouvrement nous a permis d'une part, d'unifier des résultats épars (concernant notamment les indices monotones et les graphes critiques) en mettant en évidence les propriétés fondamentales qui sont souvent de nature ensembliste (par exemple l'hérédité d'un ensemble de graphes) et d'autre part, d'obtenir un certain nombre de résultats nouveaux. Nous pensons également que, face à l'inflation des invariants étudiés, les notions introduites ici permettent de simplifier l'étude de ceux qui sont des indices de recouvrement.

Parmi les questions soulevées par cet article et qu'il nous semble intéressant d'étudier, citons : l'étude du nouvel invariant $\gamma'(G)$ mis en évidence d'une manière naturelle comme indice de recouvrement et qui est très proche du nombre chromatique (il est lié au recouvrement d'un graphe à l'aide de graphes de la forme $\overline{K}_n$ ou K_2), l'approfondissement de l'étude des rapports entre indice de recouvrement et de partition et plus particulièrement entre $r_P(G)$ et $\Omega_{\overline{P}}(G)$, enfin, l'étude des indices de recouvrement lorsque l'ensemble P a des propriétés simples (stabilité pour certaines opérations etc...).

BIBLIOGRAPHIE

[1] L.W.BEINEKE, A survey of packings and coverings of graphs, in "the many facets of graph theory", Springer Verlag (1969) 45-53.

[2] C.BERGE, Graphes et Hypergraphes, Dunod, Paris, 1970.

[3] G.CHARTRAND, D.GELLER, S.HEDETNIEMI, Graphs with forbidden subgraphs, Journal of comb.theory, 10 (1971), 12-41.

[4] M.CHEIN, Indice de P-recouvrement d'un graphe, C.R.Acad.Sc. Paris, t.272, p. 772-775.

[5] F.HARARY, Graph theory, Addison-Wesley, 1969.

[6] F.HARARY, The greek alphabet of "graph theory", in "recent progress in combinatorics", Academic Press (1969), 13-20.

[7] S.HEDETNIEMI, Disconnected-colorings of graphs, in "combinatorial structures and their applications", Gordon Breach (1970), 163- 167.

[8] S.HEDETNIEMI, On partitionning planar graphs, Cand.Math. Bull., vol.11, n°2, 1968, p.203-211.

[9] D.R.LICK, A class of point partition numbers, in "the many fucets of graph theory", Springer-Verlag (1969) 185-190.

[10] W.TAYLOR, Generalized chromatic numbers, in combinatorial structures and their applications, Gordon Breach (1970) 421-422.