MICHEL MÉTIVIER

Intégrale stochastique par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 2
« Probabilités », , p. 99-157
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___2_99_0>

INTEGRALE STOCHASTIQUE PAR RAPPORT A DES PROCESSUS A VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH REFLEXIF

par Michel METIVIER *

Dans cet article, nous exposons une extension de la théorie de l'intégrale stochastique en définissant l'intégrale par rapport à une classe de processus, incluant les martingales à valeurs dans un espace de Hilbert, continues à droite, de carré intégrable.

Les résultats exposés (y compris la " formule de Ito ") généralisent immédiatement les résultats principaux du cas réel. Ils généralisent également les extensions récentes de l'intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien à valeur dans un espace de Hilbert. (cf. [2]). Grâce à la notion de processus naturel associé à la martingale vectorielle ($M_t^{\otimes 2}$), la théorie ici exposée montre également que l'intégrale déjà définie par S. KUNITA (cf. [9]) se prête à un " calcul différentiel stochastique " qui est formellement le même que dans le cas réel, en remplaçant le produit tensoriel ordinaire par le produit tensoriel.

La méthode utilisée ici pour définir l'intégrale stochastique reprend celle utilisée par J. Pellaumail [17] (cf. également [12]) dans le cas des processus réels. Cette méthode consiste d'abord à associer une mesure m, à valeurs vectorielles,

* Laboratoire de Probabilités - ERA n° 250 du C.N.R.S. - Université de Rennes - B.P. 25 A - 35031 Rennes Cedex

définie sur une tribu convenable $\mathcal{T}$ de parties de $(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ (suivant le cas : tribu des prévisibles ou tribu des ensembles bien mesurables), à chaque processus par rapport auquel on intègre. Si X est un processus prévisible (ou dans certains cas bien mesurable) à valeur dans $\mathcal{L}(H;G)$ on peut définir l'intégrale vectorielle $\int X\, dm$. Le processus à trajectoires continues à droite $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$ $Y_t = \int_{]0,t] \times \Omega} X\, dm$ p.s. est appelé le processus intégral de X par rapport à Z. C'est une martingale continue à droite (resp. continue) si Z est une martingale continue à droite (resp. continue).

Après avoir précisé nos notations et rappelé quelques propriétés indispensables des mesures vectorielles, et de l'intégrale par rapport à celles-ci, dans le cas très simple des mesures de puissance $p^{\text{ième}}$ majorée par une mesure positive, nous abordons au § 3 l'étude de la correspondance entre mesures stochastiques définies sur la tribu des ensembles prévisibles et processus générateurs. On montre essentiellement qu'à toute mesure stochastique est associé de façon unique (à l'indistingabilité près) un processus générateur à trajectoires faiblement continues à droite (théorème 2). On montre ensuite (théorème 3) que, si $E \circ m$ est une mesure vectorielle à variation bornée, X est nécessairement la somme d'une martingale et d'un processus continu à droite dont les trajectoires sont les " fonctions de répartition " de mesures vectorielles à valeurs dans $\mathbb{H}$.

Ce théorème utilise la notion de processus naturel d'une mesure à variation bornée, $d\Omega$, dans le cas vectoriel, à J. Pellaumail. Le théorème de J. Pellaumail, (cf. [17]), modifié pour nos besoins est le théorème 1.

Après avoir prouvé quelques résultats techniques à la fin du § 3, nous étudions dans le § 4 la réciproque du théorème 2 : étant donné un processus dont les trajectoires engendrent des mesures vectorielles (non nécessairement à variation finie), ou étant donné une martingale, ces processus engendrent-ils des mesures stochastiques sur la tribu des prévisibles éventuellement des ensembles bien mesurables) ?
Dans le premier cas, la réponse est très facile. Dans le second, la réponse est donnée par le théorème 5 qui généralise bien le cas réel.

Le § 5 donne les propriétés de l'intégrale stochastique dans les deux cas précédents.

Le § 6 donne l'extension de la théorie précédente au cas où l'on intègre par rapport à une martingale locale. La généralisation correspondante dans notre cadre est celle de mesure stochastique locale.

Enfin, le § 7 étend la formule sans aucune difficulté dans le cas des martingales locales à trajectoires continues.

1 - Cadre de l'étude - Notations.

Nous nous placerons toujours sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de tribus continues à droite (ie : $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$) complètes pour P. On note $\mathcal{F}_\infty$ la tribu engendrée par $\bigcup_t \mathcal{F}_t$.

1.1 Processus stochastiques.

Un processus stochastique à valeurs dans l'espace de Banach E, sera toujours une application X de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ dans E, adaptée à $(\mathcal{F}_t)$ (i.e telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, l'application $\omega \rightsquigarrow X(t,\omega)$ soit fortement mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ dans $\mathbb{E}$).

Deux processus X et X' sont dits <u>indistingables</u> si, avec une probabilité 1, les applications $t \rightsquigarrow X(t,\omega)$ et $t \rightsquigarrow X'(t,\omega)$ sur $\mathbb{R}^+$ sont identiques.

Un processus sera dit, en abrégé, continu à droite (resp. à gauche, resp. à variation bornée, resp. réel croissant...) si à l'exception d'un ensemble de probabilité nulle, ses trajectoires sont continues à droite (resp. à gauche, resp. à variation bornée, resp. des fonctions réelles croissantes...).

1.2 Algèbres de Parties de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.

Nous noterons $\mathcal{R}$ l'ensemble des rectangles élémentaires de la forme $]s,t] \times F$ où $s<t$ et $F \in \mathcal{F}_s$

$\mathcal{R}$ est un semi-anneau et nous noterons $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{O}$) l'anneau (resp. le δ-anneau : i.e anneau stable pour intersection dénombrable) engendré par $\mathcal{A}$.

D'une façon générale $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ dirigera la tribu ou r-algèbre de parties engendrées par l'ensemble $\mathcal{P}$ de parties de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.
$\mathcal{T}(\mathcal{Ol})$ est connu pour être la tribu des <u>ensembles prévisibles</u> (Cf [3] et [14] . Cette tribu est également engendrée par la famille des <u>intervalles stochastiques</u> $]S,T] =$
$\{(t,\omega) : S(\omega) < t \leq T(\omega)\}$ où S et T sont deux temps d'arrêt quelconques de la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$. Cette tribu est également engendrée par la famille des processus réels, adaptés à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ et dont les trajectoires sont continues à gauche.

La tribu $\mathcal{B}$ engendrée par les intervalles stochastiques $[S,T[=$ $\{(t,) : S(\omega) \leq t < T(\omega)\}$ est d'ordinaire appelée la tribu des ensembles bien mesurables. Les processus adaptés à trajectoires continues à droite sont mesurables pour cette tribu.

1.3. <u>Remarque.</u>

Notons que si X est continu à droite, X est égal, à l'indistingabilité près à un processus prenant ses valeurs dans une partie séparable de $\mathbb{E}$.

2 - <u>Rappels sur les mesures vectorielles et l'intégration.</u>

Nous envisagerons sur les δ-anneaux $\mathcal{Ol}$ ou $\mathcal{B}$ des mesures à valeurs dans un espace de Banach E (i.e. des fonctions d'ensembles à valeurs dans $\mathbb{E}$, σ-additives). On rappelle qu'un théorème de Pettis (cf. [19] et [6] chap. IV) exprime que, pour une fonction additive sur $\mathcal{X}$, la propriété de σ-additivité pour la topologie faible de $\mathbb{E}$, et la propriété de σ-additivité forte sont équivalentes.

2.1. Variation Semi-variation Mesure dominante.

On rappelle également qu'on définit la variation $|m|$ et la semi-variation $||m||$ de m par

$$|m|(A) = \sup \{ \sum_{i=1}^{n} ||m(A_i)|| : (A_i)_{i=1\ldots n} \ \mathcal{A}\text{ partition de } A\}$$

$$||m||(A) = \sup\{ ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m(A_i) : (A_i)_{i=1\ldots n} \ \mathcal{A}\text{ partition de } A, \ \alpha_i \in [0,1] \}$$

La semi-variation est toujours finie, alors qu'il n'en est pas de même de la variation. Si la variation est finie, c'est une mesure réelle positive. On rappelle, que, suivant un résultat de [1] bis Cf. également [6] chap. IV) il existe une mesure positive, telle que $\lambda \leq ||m||$ et telle que pour tout δ existe ε tel que $\lambda(A)<\varepsilon \Longrightarrow ||m||(A) < \delta$
On déduit aisément de là en particulier, que pour la métrique $(A_1,A_2) \longrightarrow ||m||(A_1 \Delta A_2)$, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}$

2.2. Mesures de puissance $p^{\text{ième}}$ majorée. Intégration.

Nous envisagerons dans la suite un ensemble particulier de mesures vectorielles, par rapport auxquelles la théorie de l'intégration est tréviale, et ne nécessite pas la théorie développée par Bartle dans [1]

Définition 1.

Soit m (resp. α) une mesure définie sur le δ-anneau $\mathcal{A}$ à valeurs dans l'espace de Banach $\mathbb{B}_1$ (resp. dans $\mathbb{R}^+$).

Soit $\mathbb{B}_3$ un espace de Banach et $\mathbb{B}_2$ un sous-espace de l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1;\mathbb{B}_3)$ des applications linéaires continues de $\mathbb{B}_1$, dans $\mathbb{B}_3$.

On dira que m est de puissance $p^{\text{ième}}$ majorée par α, relativement à $\mathbb{B}_2$, s'il existe un anneau $\mathcal{A}_0$ engendrant $\mathcal{O}$, tel que pour tout $A \in \mathcal{A}_0$, toute partition finie $(A_i)_{i=1\ldots n}$ de A, extraite de $\mathcal{A}_0$, et toute suite $(u_i)_{i=1\ldots n}$ extraite de $\mathbb{B}_2$ on ait :

$$\text{(i)} \quad \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \,(m(A_i)) \right\|^p \leq \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^p \quad \alpha(A_i)$$

Il est évident que toute mesure à variation bornée est de puissance 1 dominée par sa variation relativement à tout $\mathbb{B}_2$.

Les mesures stochastiques que nous envisagerons seront toutes de puissance $p^{\text{ième}}$ dominée, pour les espaces de Banach envisagés.

Il est alors immédiat que, si m est de puissance positive majorée par α, relativement à $\mathbb{B}_2$, l'application $f \to \int f \, dm$ définie sur l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathbb{B}_2}(A)$ des fonctions étagées sur $\mathcal{A}_0$, à valeur dans $\mathbb{B}_2$, par

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} \cdot a_i \right) dm = \sum_{i=1}^{n} a_i \,(m\,(A_i))$$

se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $L^p_{\mathbb{B}_1}(\Omega, \mathcal{C}(\mathcal{O})\,x)$ dans $\mathbb{B}_3$. Ce prolongement sera appelé l'intégrale en moyenne l'ordre p de f par rapport à m. (Intégrale forte classique [4] si p=1)

Il est immédiat également que pour une telle intégrale on a le théorème de la convergence dominée.

<u>Notation</u> -

L'application bilinéaire $(f,u) \rightsquigarrow u\,(f)$ de $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ dans $\mathbb{B}_3$ sera au § 5 souvent notée $(f\,|u)$

2.3. <u>Rappel sur les produits tensoriels d'espaces de Banach</u>. (cf. [20])

Nous rappelons que le produit tensoriel projectif, que nous noterons $\mathbb{E}_1 \hat{\otimes}_T \mathbb{E}_2$, de deux espaces de Banach est le complété de l'espace $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ muni de la norme "trace" caractérisée par la propriété suivante : L'application bilinéaire canonique π :

$(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2) \longrightarrow (\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2)$ est continue et toute application bilinéaire continue b de $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ dans un espace de Banach $\mathbb{G}$ se factorise

$$\begin{tikzcd} E_1 \times E_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "b"'] & \mathbb{E}_1 \hat{\otimes}_T \mathbb{E}_2 \arrow[d, "u"] \\ & \mathbb{G} \end{tikzcd}$$

au moyen d'une application linéaire u, continue, la correspondance $b \rightsquigarrow u$ étant d'ailleurs une isométrie de l'espace des applications bilinéaires continues muni de la norme usuelle, sur $\mathcal{L}(\mathbb{E}_1 \hat{\otimes}_T \mathbb{E}_2 \ ; \mathbb{G})$.

Lorsque $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert réel, la forme bilinéaire canonique $(x,y) \longrightarrow (x|y)$ du produit scalaire, se factorise, en particulier, au moyen d'une forme linéaire sur $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ appelée <u>forme trace</u> et que <u>nous noterons T_r</u>.

Rappelons également que $||x \otimes x||_{\mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}} = (||x||_{\mathbb{H}})^2 = T_r\,(x \otimes x)$

3 - Mesures stochastiques et processus associés.

3.1. Definition 2.

Une mesure stochastique sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, adaptée aux $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable, est une mesure m sur le δ-anneau $\mathcal{A}$, à valeurs dans $L^p_{\mathbb{E}}(\Omega, \widetilde{\mathcal{F}}, P)$, où $\mathbb{E}$ est un espace de Banach, telle que

(S) $\forall\ (\,]s,t] \times F) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \qquad m\,(]s,t] \times F) = 1_F m\,(]s,t] \times \Omega) \in L^p_{\mathbb{E}}(\Omega, \widetilde{\mathcal{F}}_t, P)$

Dans toute la suite nous supposerons $\mathbb{E}$ réflexif séparable, (cf. remarque 1.3) de telle sorte que les martingales fortes à valeurs dans $\mathbb{E}$ possèdent les mêmes propriétés de convergence et régularité que les martingales à valeurs réelles.

3.2. Exemples : 1° Mesure aléatoire vectorielle.

Supposons que V soit un processus à valeurs dans $\mathbb{E}$, adapté aux $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, continu à droite, tel que pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction d'intervalles $]s,t] \rightsquigarrow V(t,\omega) - V(s,\omega)$ se prolonge en une mesure $v(\omega)$ sur le δ-anneau des boréliens bornés de $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{E}$. (Remarquons, que les trajectoires $t \rightsquigarrow V(t,\omega)$ n'ont aucune raison d'être à variation bornée !). Supposons en outre que pour tout t,

$$||v||\,(t,\omega) \text{ soit dans } L^p_{\mathbb{E}}(\Omega, \widetilde{\mathcal{F}}, P) .$$

On vérifie immédiatement que, si on pose :

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad m\,(A)\,(\omega) = \int_0^\infty 1_A\,(\cdot,\omega)\, d\, v\,(\omega)$$

on définit une mesure stochastique de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable.

2° - Nous donnons un deuxième exemple de nature un peu plus complexe.

Soit (T_n) une suite quelconque de temps d'arrêt et (Z_n) une suite de variables aléatoires, à valeurs dans $\mathbb{E}$, fortement $\mathcal{F}_{T_n}$ - mesurables et telles que la série $\sum_n Z_n 1_{[T_n \leq t]}$ converge absolument dans $L^p_E(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Considérons les mesures stochastiques m_n associées, comme dans l'exemple précédent, au processus $Z_n 1_{(T_n \leq t)}$ On a, pour tout $A \subset [0,t] \times \Omega$, en notant $||m_n||$ les semi-variations, (cf. 2.1)

$$||m_n|| (A) \leq 2 \sup_{B \subset A} \sqrt[p]{\int |1_B(T_n(\omega),\omega)| \quad ||Z_n(\omega)||^p P(d\omega)}$$

$$\leq 2 \quad ||1_{[T_n \leq t]} \quad Z_n ||_p$$

Comme l'espace des mesures vectorielles sur $\mathcal{C}$ (à valeurs ici dans $L^p_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F},P)$) est complet pour les semi - normes de la semi-variation, la série $\sum_n m_n$ est, d'après l'inégalité précédente, normalement convergente pour ces semi-normes. Il existe donc une mesure stochastique m telle que, pour tout $]s,t] \times F \in \mathcal{R}$, on ait :

$$m (]s,t] \times F) = 1_F \sum_n 1_{[s<T_n \leq t]} Z_n \quad \text{p.s.}$$

la série de droite convergeant absolument dans $L^p_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Par contre, si pour tout $A \in \mathcal{C}$, la suite $\sum_n m_n(A)$ converge simplement dans $L^p_{\mathbb{E}}$, d'après le théorème classique de Nikodym. sa somme est une mesure m. On a encore :

$$m (]s,t] \times F) = 1_F \sum_n 1_{[s<T_n \leq t]} Z_n \quad \text{p.s.}$$

la série de droite convergeant dans $L^p_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F},P)$.

(Non nécessairement presque sûrement).

3.3. Processus naturel d'une mesure à variation bornée.

La première partie du théorème suivant qui est essentiellement un théorème de décomposition du type "Doob-Meyer", se trouve démontré dans ([17] cf. aussi [18]). Nous y apportons une précision supplémentaire en montrant que le processus "naturel" de la mesure α engendre sur chaque trajectoire une mesure vectorielle. Pour la commodité du lecteur nous donnons une démonstration autonome du théorème, et adaptée à notre objet.

Théorème 1.

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach réflexif séparable. Soit α une mesure sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{E}$, à variation finie telle que :

$(A \in \mathcal{A})\ 1_A$ indistingable de zéro $\Rightarrow \alpha(A) = 0$

Alors :

1°) il existe un processus V, continu à droite, nul en 0, à valeurs dans $\mathbb{E}$, unique à l'indistingabilité près, tel que pour tout t $V_t \in L^1_{\mathbb{E}}(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ et tel en outre que :

(i) Pour tout $\omega \in \Omega$ la fonction d'intervalle $]s,t] \rightarrow V_t - V_s$ se prolonge en une mesure à valeurs dans $\mathbb{E}$, définie sur le δ-anneau des boréliens bornés de $\mathbb{R}^+$

(i.i) Si on note $E(1_F | \mathcal{F}_{u^-})$ une version continue à gauche, donc prévisible de la martingale $(E(1_F | \mathcal{F}_u))_{u \leq t}$

$\forall\ s \leq t \quad \forall\ F \in \mathcal{F}_t$

$$E\left[1_F.(V_t-V_s)\right] = \int_{]s,t]\times\Omega} E(1_F|\mathcal{F}^{\mu}_{u-})\, d\alpha$$

2°) On définit une mesure stochastique m, à valeur dans $L^1_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F},P)$ en posant $m(A) = \int 1_A(s,.)dV_s(.)$, et cette mesure a pour variation $|\alpha|$.

3°) Pour tout processus prévisible Y réel borné

$$E\left(\int Y\, dm\right) = \int Y\, d\alpha$$

Remarques sur l'énoncé du théorème.

Les intégrales qui interviennent dans l'énoncé par rapport à m et α existent au sens de l'intégrale forte (Cf. § 2 ci-dessus) puisque les mesures considérées sont à variation bornée.

Démonstration.

1°) L'unicité du processus V, à l'indistingabilité près est triviale, puisque V est supposé continu à droite (fortement), et que pour tout t, V_t est entièrement défini, à une équivalence près. par :

(3.3.1) $\forall F \in \mathcal{F}^{\mu}_t \quad E(1_F.V_t) = \int_{]o,t]\times\Omega} E(1_F|\mathcal{F}^{\mu}_{u-})\, d\alpha$

Pour prouver l'existence, construisons d'abord un processus $(\tilde{V}_t)$ adapté quelconque, à valeurs dans $\mathbb{E}$, vérifiant (3.3.1). Montrons ensuite qu'il admet une modification $(V_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, (i.e. $\forall\, t\in\mathbb{R}^+,\ V_t = \tilde{V}_t$ p.s.) continue à droite.

Pour chaque t considérons l'application définie sur $\mathcal{F}_t$ par :

$$\alpha_t : F \longrightarrow \int_{]o,t]\times\Omega} E(1_F|\mathcal{F}^{\mu}_{u-})\, d\alpha$$

Pour toute suite (g_n) de fonctions réelles bornées décroissant vers zéro, en appliquant l'inégalité des martingales aux martingales $(E(g_n \mid \mathcal{F}_u))_{u \leq t}$ et le lemme de Borel Cantelli, on voit immédiatement que, pour une sous suite convenable extraite

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{0 \leq u \leq t} |E(g_{n_k} \mid \mathcal{F}_u)| = 0$$

L'hypothèse sur α implique donc immédiatement la σ-additivité des mesures α_t.

De l'inégalité :

$$\| \alpha_t (F) \| \leq \int_{]0,t] \times \Omega} E(1_F \mid \mathcal{F}_u) \, d|\alpha|$$

résulte immédiatement le fait que α_t soit à variation bornée. Comme nous sommes dans le cas où $\mathbb{E}$ est réflexif et où α_t est à variation bornée nous pouvons appliquer le théorème de Radon Nikodym de la même façon que dans le cas réel. Il existe donc un processus $(\tilde{V}_t)$ tel que

$$\forall \; s < t \quad \forall \; f \in L^\infty (\Omega, \mathcal{F}_t, P)$$

$$\underline{(3.3.2.)} \quad E(f \cdot (\tilde{V}_t - \tilde{V}_s)) = \int_{]s,t] \times \Omega} E(f \mid \mathcal{F}_u) \, d\alpha$$

En considérant d'abord les fonctions étagées à valeurs dans $\mathbb{E}'$ et en passant par continuité à celles de $L^\infty_{\mathbb{E}'} (\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ on obtient, $\forall \; f \in L^\infty_{\mathbb{E}'} (\Omega, \mathcal{F}_t, P)$

$$\underline{(3.3.3.)} \quad E(\langle f, \tilde{V}_t - \tilde{V}_s \rangle) = \int_{]s,t] \times \Omega} E(f \mid \mathcal{F}_u) \, d\alpha$$

De cette dernière formule on déduit :

(3.3.4.) $\forall F \in \mathcal{F}_s \quad E(1_F \|\tilde{V}_t - \tilde{V}_s\|) \leq |\alpha| \; (]s,t] \times F)$

et la σ-additivité de α implique alors la continuité à droite en moyenne de $t \rightarrow \tilde{V}_t$.

Supposons d'abord que $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, et α positive, et montrons dans ce cas particulier l'existence d'une modification continue à droite (V_t) de $(\tilde{V}_t)$. De (3.3.2.) on déduit immédiatement que :

$$s \leq t \Longrightarrow \tilde{V}_s \leq \tilde{V}_t \qquad \text{p.s.}$$

Ceci montre que, si l'on exclut un ensemble négligeable de trajectoires $t \rightarrow \tilde{V}_t$ est, en restriction aux rationnels, croissante. En vertu de la continuité à droite de $t \rightarrow \tilde{V}_t$ sur $\mathbb{R}$, l'existence de $(V_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est immédiate.

Si maintenant α est réelle quelconque l'existence de (V_t) se déduit immédiatement de ce qui précède par la considération de α^+ et α^-.

Puisqu'on a supposé $\mathbb{E}$ séparable, soit $\mathbb{D}$ une partie dénombrable dense de la boule unité de $\mathbb{E}'$, et soit $\mathbb{E}'_0$ l'espace vectoriel engendré par $\mathbb{D}$. Appliquons ce qui précède à la mesure réelle $\langle\alpha, x'\rangle$ et au processus associé $\langle\tilde{V}_t, x'\rangle$. On obtient une modification continue à droite et à variation bornée du processus $(\langle\tilde{V}_t, x'\rangle)_{t \in \mathbb{R}^+}$ en posant pour tout $\omega \notin \Omega_{x'}$, avec $P(\Omega_{x'}) = 0$

$$V^{x'}_t = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} \langle\tilde{V}_s, x'\rangle$$

Soit $\Omega_o = \complement \left(\bigcup_{x' \in D} \Omega_{x'} \right)$.

$\forall \; \omega \in \Omega_o \quad \forall \; x' \in \mathbb{D} \quad \forall \; t \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} < \tilde{V} (s, \omega) \quad x' > \text{ existe.}$$

Si nous prouvons maintenant l'existence d'un ensemble $\Omega_1 \subset \Omega$, de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_1$ et tout $u \in \mathbb{R}^+$ $t \to \tilde{V}_t (\omega)$ est bornée sur $\mathbb{Q} \cap [o,u]$, nous déduirons aisément les conclusions du 1° du théorème. En effet, nous aurons alors :

$$\forall \; \omega \in \Omega_o \cap \Omega_1 \quad \forall \; x' \in \mathbb{E}' \quad \forall \; t \in \mathbb{R}^+ \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} < \tilde{V}(s, \omega), x' > \text{ existe} \quad .$$

La réfléxivité de $\mathbb{E}$ entraîne alors l'existence de $V (s, \omega) \in \mathbb{E}$ tel que :

$$\forall \; \omega \in \Omega_o \cap \Omega_1 \quad \forall \; x' \in \mathbb{E}' \quad \forall \; t \in \mathbb{R}^+ \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} <\tilde{V} (s, \omega), x' > = <V (t, \omega), x'>$$

Quitte à modifier V sur un ensemble de probabilité nulle, nous avons donc finalement construit un processus V à valeurs dans $\mathbb{E}$, tel que pour tout $x' \in \mathbb{E}'$,

$<V_t, x'>$ soit une modification du processus réel $<\tilde{V}_t, x'>$ ayant toutes ses trajectoires continues à droite, et à variation bornée.

Il n'est pas difficile de déduire alors de la réflexivité de $\mathbb{E}$ (cf. [10] par exemple chap. III) l'existence d'une mesure sur les boréliens bornés de $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{E}$, faiblement σ-additive donc fortement σ-additive d'après le théorème de Pettis (cf. 2 ci-dessus), prolongeant la fonction d'ensembles $]s,t] \rightsquigarrow V(t,\omega) - V(s,\omega)$. La continuité forte à droite, de $t \rightsquigarrow V(t,\omega)$ en résulte et le 1°) se trouve entièrement démontré moyennant le

Lemme 1.

Il existe un ensemble $\Omega_1 \subset \Omega$, de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_1$ et tout $u \in \mathbb{R}^+$, $t \rightsquigarrow \tilde{V}_t(\omega)$ est bornée sur $\mathbb{Q} \cap [o,u]$.

Démonstration du lemme.

Nous montrons d'abord une inégalité. Si σ est un temps d'arrêt étagé, borné par t,

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})\, 1_{[\sigma > t_{i-1}]} \quad o \leq t_o < t_1 \ldots < t_n \leq t \;,$$

on a :

(3.3.5.) $E(\|\tilde{V}_\sigma\|) \leq |\alpha|([o,t] \times \Omega)$

car, en vertu de la formule (3.3.4.), on a

$$E(\|\tilde{V}_\sigma\|) = E\left\|\sum_{i=1}^{n} 1_{[\sigma > t_{i-1}]} (\tilde{V}_{t_i} - \tilde{V}_{t_{i-1}})\right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha|(]t_{i-1},t_i] \times [(\sigma > t_{i-1})] \leq |\alpha|(]o,t] \times \Omega)$$

Considérons alors une suite croissante $\mathbb{Q}_n$ de parties finies de $\mathbb{Q}^+$ telle que $\bigcup_n \mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}^+$ et

$$\sigma_n^k = \inf \{t : \|\tilde{V}_t\| > K,\; t \in \mathbb{Q}_n\}$$

De (3.3.5.) on déduit :

$$K \,.\, P[\sigma_n^k \leq u] \leq E\, \|\tilde{V}_{\sigma_n^k \wedge u}\| \leq |\alpha|\;(]o,u] \times \Omega)$$

On a donc :

$$P\left[\sup_{s\in\mathbb{Q}^+\cap[o,u]} \|\tilde{V}_s\| > K\right] \leq \frac{1}{K} |\alpha| (]o,u] \times \Omega)$$

D'où le lemme 1, et par suite le théorème 1 - 1°.

<u>Preuve de 2°.</u>

Soit $(A_i) = (]s_i,t_i] \times F_i)$ une famille disjointe extraite de $\mathcal{R}$.

On a, d'après (3.3.4.)

$$\sum_i \| m(A_i)\|_1 = \sum_i \| \mathbb{E}[1_{F_i}\cdot(V_{t_i}-V_{si})] \|_{\mathbb{E}} \leq \sum_i |\alpha| (A_i)$$

D'une part la σ-additivité de m et la possibilité de prolonger m en une mesure sur $\mathcal{B}$ en résultent.

D'autre part, si pour évaluer la semi-variation de m on considère des partitions au moyen d'éléments de $\mathcal{R}$, la relation précédente montre que

$|m| \leq |\alpha|$

Enfin, pour une famille (A_i) du type ci-dessus, l'inégalité :

$$\sum_i \|m(A_i)\|_1 \geq \sum_i \|E|1_{F_i}(V_{t_i}-V_{s_i})|\|_{\mathbb{E}} = \sum_i \|\alpha(A_i\|_{\mathbb{E}}$$

montre que $|m| \geq \alpha$.

<u>Preuve de 3°.</u>

La vérification de 3°) est immédiate pour $Y = 1_A$, $A \in \mathcal{B}$
On passe à un Y prévisible quelconque par application du théorème de la convergence dominée.

Définition 3.

Un processus V à valeurs dans $\mathbb{E}$, vérifiant $V_o=o$, sera dit naturel si pour tout $t \in \mathbb{R}, V_t \in L^1_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ et si en outre

a) Pour tout ω : $t \rightsquigarrow V(t,\omega)$ engendre une mesure aléatoire $v(\omega)$ à valeurs dans $\mathbb{E}$, définie sur les boréliens bornés de $\mathbb{R}^+$, et si en outre l'application $A \rightsquigarrow E\left[\int 1_A(s,\omega)\ v(ds,\cdot)\right]$ définit une mesure vectorielle sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$, et à variation finie.

b) Pour tout $F \in \mathcal{F}_t$

$$E(1_F \cdot V_t) = \int_{]o,t] \times \Omega} E(1_F \mid \mathcal{F}_u)\ d\alpha$$

Proposition et définition 4.

Le processus V du théorème 1 est naturel et sera appelé le processus naturel de la mesure α.

Démonstration.

Il suffit évidemment de prouver que la mesure α du théorème vérifie

(3.3.6.) $$\alpha(A) = E\left[\int 1_A(s,\cdot)\ v(ds,\cdot)\right]$$

Or, cette relation est vraie par l'hypothèse pour $A = [s,t] \times F$, donc pour toute fonction étagée. La preuve du 2° du théorème 1 montre facilement que si f et g sont deux fonctions étagées sur $\mathcal{R}$, on a :

$$\left\|\int (f-g)\, dv\right\|_1 \leq \int \|f-g\|\ d|\alpha|$$

Ceci permet dans l'égalité (3.3.6.) de passer des fonctions étagées sur $\mathcal{R}$ à toutes les fonctions boréliennes bornées, nulles en-dehors d'un ensemble $]o,t] \times \Omega$. ■

3.4. Remarques sur la condition de "naturalité".

Il est facile de voir que la définition 3, dans le cas d'un processus réel croissant, redonne la définition d'un processus croissant naturel au sens de P.A. Meyer (cf. [14] chap. VII). Cette remarque a été faite par J. Pellaumail (cf. [17]). En effet de la condition a) et de la majoration $||\int f\, dv|| \leq \sup |f| \cdot ||v||(K)$ valable pour toute fonction borélienne bornée à support borné K et toute mesure vectorielle v, on déduit que pour tout processus prévisible Y réel

$$\int_{[0,t]\times\Omega} Y \, d\alpha = E\left(\int_{[0,t]} Y(s,\cdot)\, v(ds,\cdot)\right)$$

Si Y est alors une martingale positive bornée continue à droite on a, d'après cette égalité, et d'après b)

$$E\left(\int_{[0,t]} Y_{s-}\, dv_s\right) = \left(\int_{[0,t]\times\Omega} Y_{s-}\, d\,x = E(Y_t.V_t)\right.$$

Comme d'après Meyer ([14]chap. VIII), pour tout processus croissant V et toute martingale positive bornée continue à droite on a :

$$E(Y_t \cdot V_t) = E\int_{[0,t]} Y(s,\cdot)\, v(ds,\cdot)$$

la naturalité, i.e la condition

$$E\left(\int_{[0,t]} Y_s\, v(ds)\right) = E\left(\int_{[0,t]} Y_{s-}\, v(ds)\right),$$

en résulte. ∎

Nous aurons à utiliser le théorème d'arrêt important suivant :

Théorème 1 bis.

Si V est le processus naturel de la mesure à variation finie α sur $\mathcal{G}$, pour tout temps d'arrêt borné σ, et tout $F \in \widetilde{\mathcal{F}}$, on a

$$E\,(1_F . V_\sigma) = \int_{]0,\sigma]} E\,(1_F | \widetilde{\mathcal{F}}_{u-})\, d\,\alpha$$

Démonstration.

Considérons un temps d'arrêt étagé :

$$\sigma = \sum_i (\sigma_i - \sigma_{i-1})\, 1_{G_i} \qquad G_i = [\sigma > \sigma_{i-1}] \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\sigma_{i-1}}$$

$$E\,(1_F . V_\sigma) = \sum_i E\,[1_{F \cap G_i} (V_{\sigma_i} - V_{\sigma_{i-1}})]$$

$$= \sum_i \int_{]\sigma_{i-1}, \sigma_i] \times G_i} E\,(1_F | \widetilde{\mathcal{F}}_{u-})\, d\,\alpha$$

$$= \int_{]0,\sigma]} E\,(1_F | \widetilde{\mathcal{F}}_{u-})\, d\,\alpha$$

On passe évidemment au cas d'un temps d'arrêt quelconque en utilisant une suite décroissante de temps d'arrêts étagés convergeant vers σ, la σ-additivité de α, et la σ-additivité de la mesure stochastique associée à V (théorème 1 - 2°). ∎

3.5 Processus associé à une mesure stochastique.-

L'objet principal du présent paragraphe est d'étudier la correspondance $m \rightsquigarrow X_m$ entre les mesures stochastiques à valeurs dans $L^p_{\mathbb{E}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une certaine classe de processus à valeurs dans $\mathbb{E}$, définie par

$$(3.5.1) \qquad \forall\ ]s,t] \times F \in \mathcal{R} \qquad m(]s,t] \times F) = 1_F.(X_t - X_s)$$

Si m est donnée , le processus X est clairement défini, de façon unique à une constante et une modification près par

$$X_t = m \quad (]0,t] \times \Omega).$$

Si nous prouvons (théorème 2 ci après) que ce processus a certaines propriétés de régularité, il sera défini de façon unique à l'indistingabilité près.

Des propriétés du processus (X_t) seront données au théorème 3. En 3.2, nous avons donné un exemple de processus et mesure stochastique associés. Nous prouverons au théorème 4 que toute martingale de carré intégrable est associée à une mesure stochastique. Nous définissons :

Définition 4. -

Un processus X et une mesure m reliés par la relation (3.5.1) seront dits associés. On dira aussi que X engendre m.

Théorème 2.-

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach réflexif séparable. Toute mesure stochastique m , à valeurs dans $L^p_{\mathbb{E}}(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ est engendrée par un processus stochastique X_m à valeurs dans $\mathbb{E}$, continu à droite pour la topologie faible de $\mathbb{E}$, nul en 0, unique à l'indistingabilité près.

Le processus X_m a presque sûrement des limites à gauche faibles.

Démonstration :

L'unicité à l'indistingabilité près est triviale en raison de la continuité faible à droite des trajectoires et de la séparabilité de $\mathbb{E}'$.

Choisissons alors une version $\tilde{X}$ du processus défini par

$$\tilde{X}_t = m\,(]0,t] \times \Omega) \qquad \text{p.s.}$$

La σ- additivité de m implique la continuité à droite de $t \rightsquigarrow \tilde{X}_t$ dans $L^p_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Pour $\mathbb{E}$ réel, il est montré dans [17] que, presque sûrement, les trajectoires de $\tilde{X}$ en restriction à $\mathbb{Q}$ admettent des limites à gauche et à droite en tout point.

Rappelons seulement que la démonstration en est obtenue en considérant une famille croissante de parties finies $\mathbb{Q}_n$ de l'ensemble des rationnels positifs, telle que $\bigcup_n \mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}^+ \cap [s,t]$. Pour tout $a < b$, a et b rationnels, et tout $\mathbb{Q}_n = \{t_1^n < \dots < t_{2p}^n\}$ on introduit les temps d'arrêts

$$\sigma_1^n = t_1^n \,, \dots \quad \sigma_{2k+1}^n = \inf\,\{t : t \in \mathbb{Q}_n,\ t > \sigma_{2k}^n, \tilde{X}(t) \geq b\}$$

$$\sigma_{2k}^n = \inf\,\{t : t \in \mathbb{Q}_n \quad t > \sigma_{2k-1}^n \quad \tilde{X}(t) \leq a\} \quad .$$

En utilisant le fait que toute mesure m est bornée sur $\mathcal{C} \cap\,]0,t] \times \Omega$ on obtient que pour une constante K et tout n

$$K \geq \int \sum_{k=1}^{p-1} |\,\tilde{X}\,(\sigma_{2k+1}^n) - \tilde{X}\,(\sigma_{2k}^n)|\, dP \quad .$$

D'où l'on déduit facilement que l'ensemble des trajectoires ayant une infinité de passages montants sur $[a,b]$, sur l'ensemble des rationnels, est de probabilité nulle. A partir de là, par des arguments standards, on obtient l'existence d'une modification de $\tilde{X}$, qui soit continue à droite.

Revenons maintenant au cas où $\mathbb{E}$ est réflexif séparable. Si $\mathbb{D}$ est un ensemble dénombrable partout dense dans $\mathbb{E}'$, il résulte immédiatement du résultat qu'on vient de rappeler que, sauf sur un sous - ensemble de Ω de probabilité nulle :

$$\forall x' \in \mathbb{D} , \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} < \tilde{X}(s,\omega) , x' > \text{ et } \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} < \tilde{X}(s,\omega), x' >$$

existent.

Nous prouvons alors un lemme :

Lemme 2.-

Il existe un ensemble $\Omega_1 \subset \Omega$, de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_1$, et tout $u \in \mathbb{R}^+$, $t \rightsquigarrow \tilde{X}_t(\omega)$ est bornée sur $\mathbb{Q} \cap [0,u]$.

Démonstration du lemme.-

Cette démonstration ressemble à celle du lemme 1 : nous introduisons la même suite $(\mathbb{Q}_n)$ de parties de $\mathbb{Q}^+$ et posons pour tout $K > 0$:

$$\sigma_n^K = \inf \{ t : ||\tilde{X}_t|| \geq K , t \in \mathbb{Q}_n \}$$

On a :

$$\sigma_n^K \wedge u = \sum_{i=1}^{p} (t_i - t_{i-1}) \, 1_{[\sigma_n^k \wedge u > t_{i-1}]} , 0 \leq t_o < t_1 < \dots < t_p \leq u.$$

D'où :

$$K.P\,[\sigma_n^K \leq u] \leq E\,(\|\tilde{X}_{\sigma_n^K \wedge u}\|_{\mathbb{E}}) \leq$$

$$\leq E\,\Big\|\sum_{i=1}^{p} 1_{[\sigma_n^K \wedge u > t_{i-1}]} \cdot (\tilde{X}_{t_i} - \tilde{X}_{t_{i-1}})\Big\|_{\mathbb{E}}$$

$$\leq E\,\|\textstyle\sum m\,(]t_{i-1},t_i] \times [\sigma_n^K \wedge u > t_{i-1}])\|_{\mathbb{E}}$$

$$\leq \|\textstyle\sum m\,(]t_{i-1},t_i] \times [\sigma_n^K \wedge u > t_{i-1}])\|_p$$

Si on se reporte à la définition de $\|m\|$ en 2.1 ci dessus, on a, pour tout K ,

$$K\,P\,[\sigma_n^K \leq u] \leq \|m\|\,(]0,u] \times \Omega).$$

Le lemme en résulte immédiatement.

Il résulte alors du lemme 2 et de ce qui précède et de la réflexivité de $\mathbb{E}$ que, sauf sur un ensemble de probabilité nulle

$$\forall x' \in \mathbb{E}' \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ , \; \exists X\,(t,\omega) \in \mathbb{E} \text{ et } X_-(t,\omega) \in \mathbb{E}$$

tels que

$$X\,(t,\omega) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} .\text{ faible } \tilde{X}\,(s,\omega)$$

$$X_-\,(t,\omega) = \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s \in \mathbb{Q}}}.\text{faible } \tilde{X}\,(t,\omega)$$

Comme $t \rightsquigarrow \tilde{X}_t$ est continue à droite en moyenne d'ordre p,

X est une modification de $\tilde{X}$. D'où le théorème. ∎

<u>Théorème 3</u>.- (Théorème de décomposition)

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach réflexif séparable. Si m est une mesure stochastique sur $\mathcal{C}$, à valeurs dans $L^p_{\mathbb{E}}\,(\Omega,\mathcal{F},P)$, $p \geq 1$, telle que $A \rightsquigarrow E\,(m(A))$ soit une mesure vectorielle à valeurs dans $\mathbb{E}$, à variation bornée, et si X est le processus faiblement continu à droite engendrant m , on a

$$X = M + V$$

où V est le processus naturel de la mesure $\nu : A \rightsquigarrow E(m(A))$, et M une martingale à valeurs dans $\mathbb{E}$, adaptée aux $\mathcal{F}_t$, faiblement continue à droite.

Démonstration.-

V étant le processus naturel de ν , il résulte immédiatement de la définition de V que , si on pose $M = X - V$, :

$$\forall\, s < t \ , \ \forall\, F \in \mathcal{F}_s$$

$$E\,(1_F.(M_t - M_s)) = E\,(1_F.(X_t - X_s)) - \int_{]s,t] \times \Omega} 1_F \, d\,\nu$$

$$= 0$$

ce qui exprime la propriété de martingale pour M. ∎

Proposition 1.-

Si le processus X , faiblement continu à droite, engendre la mesure stochastique m, pour tout intervalle stochastique $]S,T]$, S et T bornés, on a

$$m\,(]S,T]) = X_T - X_S \ .$$

Démonstration.-

La propriété est facile pour les temps d'arrêt étagés. On passe au cas de temps d'arrêt quelconques en les approchant par des suites décroissantes de temps d'arrêt étagés et en utilisant la σ - additivité de m et la continuité faible à droite des trajectoires. ∎

3.6 Convergence de mesures stochastiques.

Convergence des trajectoires des processus associés.

Le théorème suivant nous sera utile.

Théorème 4.-

Soit (m_n) une suite de mesures stochastiques sur $\mathcal{B}$, à valeurs dans $L^p_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F},P)$, convergeant vers m, pour les semi-normes définies par la semi-variation.

Alors m est une mesure stochastique et il existe une sous-suite (m_{n_k}) telle que la sous-suite correspondante $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ des processus associés possède la propriété suivante :

p.s. les trajectoires $(X_{n_k}(\omega))$ convergent uniformément sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}^+$, vers les trajectoires du processus X engendrant m.

Démonstration.-

Le fait que m soit une mesure est un résultat très simple de théorie de la mesure.

Comme, par hypothèse, pour $]s,t] \times F \in \mathcal{R}$,

$$m(]s,t] \times F) = 1_F \lim_n m_n(]s,t] \times \Omega) \quad \text{dans } L^p_{\mathbb{E}}$$

$$= 1_F\, m(]s,t] \times \Omega)$$

m est une mesure stochastique.

Soit n_k tel que

$$n \geq n_k \Longrightarrow \forall\, B \subset]0,t] \times \Omega\ ,\ B \in \mathcal{C}$$

$$||(m - m_{n_k})(B)||_p \leq \frac{1}{k^4}$$

Soit Y le processus faiblement continu à droite associé à $m - m_n$. Soit σ_k le temps de sortie de Y de la boule ouverte de rayon $\frac{1}{k^2}$. Comme

$$\sigma_k(\omega) = \inf \{t : \sup_{x' \in \mathbb{D}'} | < Y_t , x' > | > \frac{1}{k^2} \}$$

$\mathbb{D}'$ désignant un ensemble dénombrable dense convenable de la boule unité de $\mathbb{E}'$, σ_k est un temps d'arrêt. Soit

$$\Omega_k = [\sigma_k \leq t] \supset [\sup_{0 \leq s \leq t} | Y_s | > \frac{1}{k^2}] .$$

Pour $B =]0, \sigma_k \wedge t] \in \mathcal{O}$, on a, d'après la proposition 1,

$$(m - m_n)(B) = Y_{\sigma_k \wedge t} ,$$

d'où

$$\frac{1}{k^{4p}} \geq \int || Y_{\sigma_k \wedge t} ||^p \, dP \geq \frac{1}{k^{2p}} P(\Omega_k) .$$

Donc

$$P(\Omega_k) \leq \frac{1}{k^{2p}} .$$

Finalement, $\forall k$

$$P [\sup_{0 \leq s \leq t} || X_m(s) - X_{n_k}(s) ||_{\mathbb{E}} \geq \frac{1}{k^2}] \leq \frac{1}{k^{2p}} .$$

On applique Borel Cantelli pour obtenir le théorème. ∎

3.7 Mesures stochastiques sur la tribu des ensembles bien mesurables. -

Théorème 5. -

Si le processus X, associé à la mesure stochastique m est continu, la mesure m se prolonge de façon unique en une mesure sur le δ - anneau $\mathcal{B}$ des ensembles bien mesurables, ne chargeant aucun graphe de temps d'arrêt.

Démonstration.-

La proposition 1 montre que, si X est continu, le graphe de tout temps d'arrêt prévisible est de mesure nulle. On voit également que la variation de m sur tout graphe de temps d'arrêt prévisible est nulle : prendre un intervalle prévisible $]S,T]$; si Γ est le graphe de σ prévisible borné et (σ_n) une suite croissante annonçant σ (i.e. $\sigma_n < \sigma(\omega)$ pour tout ω et $\lim_n \sigma_n(\omega) = \sigma(\omega)$), on a

$$m\,(]S,T] \cap \Gamma) = \lim_n \; m\,(]S,T] \cap]\sigma_n,\sigma])$$

$$= \lim_n \; m\,(](S \vee \sigma_n) \wedge T \wedge \sigma \;,\; \sigma \wedge T]).$$

La continuité à gauche montre que :

$$m\,(]S,T] \cap \Gamma\,) = 0$$

On prolonge donc m de façon σ - additive à l'anneau des intervalles stochastiques $[S,T[$, engendrant $\mathcal{B}$ en posant $m\,[S,T[= m\,]S,\,T]$ (i.e. : en donnant une masse nulle à tout graphe de temps d'arrêt prévisible ou non ; ce qui est possible (cf. [3] chap. II § 3)). Si λ est une mesure positive associée à m sur $\mathcal{Q}$ (cf. 2.1), avec $\lambda \leq \|m\|$, cette mesure admet un prolongement sur $\mathcal{B}$, ne chargeant aucun graphe de temps d'arrêt. En effet, soit $[S_n,T_n[$ une suite décroissant vers $\emptyset$. On a $\lim_n \lambda\, [S_n,T_n[\, = \lim_n \lambda\,]S_n,T_n] = \lambda\,(\bigcap_n\,]S_n,T_n]\,)$. Or $\bigcap_n\,]S_n,T_n]$ est un prévisible inclus dans l'intersection d'une famille dénombrable de graphes $[T_{n_k}]$. Si ces graphes $[T_{n_k}]$ sont prévisibles, on a $\lambda\,([T_{n_k}]) = 0$. Sinon, un ensemble prévisible inclus dans un graphe de totalement inaccessible est vide. On prolonge alors la mesure m de $\mathcal{Q}$ à $\mathcal{B}$ par continuité, en mettant sur $\mathcal{B}$ la métrique $(B_1,B_2) \rightsquigarrow \lambda\,(B_1 \Delta B_2)$.■

4. Mesures stochastiques engendrées par les martingales.-

Le théorème principal de ce § 4 est une réciproque partielle au théorème 3. On a déjà vu au § 3.2 quelle était la mesure stochastique engendrée par un processus dont les trajectoires définissent une mesure aléatoire sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$, à valeurs vectorielles.

Le théorème 5 montre en particulier l'existence d'une mesure stochastique associée à une martingale M fortement continue à droite et à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. (Qu'on peut supposer séparable, puisque les variables aléatoires M_t, $t \in \mathbb{Q}$ sont fortement mesurables par hypothèse et prennent donc leurs valeurs dans une partie séparable de $\mathbb{H}$).

4.1 Lemme préliminaire (J. Pellaumail)

Soit λ une fonction positive, simplement additive sur $\mathcal{A}$, possédant les propriétés :

(j) $\forall F \in \mathcal{F}_s$, $s < t$

$$\lim_{t' \downarrow t} \lambda(]s,t'] \times F) = \lambda(]s,t] \times F)$$

(jj) $\forall F_n \in \mathcal{F}_\infty$, si $F_n \downarrow \emptyset$ on a

$$\lim_{n \to \infty} \sup \{\lambda(A) : A \in \mathcal{A}, A \subset]0,t] \times F_n\} = 0$$

Alors λ se prolonge en une mesure σ - additive sur $\mathcal{G}$. Nous renvoyons pour la démonstration à [17] ou [18].

4.2 Théorème 5.-

Soit M une martingale à valeurs dans un Hilbert séparable $\mathbb{H}$, continue à droite, telle que, pour tout t, $\|M_t\|^2$ soit intégrable.

Soit $\mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}$ l'espace de Banach complété de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ pour la norme trace, notée $\| \, \|_T$. Posons

$$\forall F \in \mathcal{F}_s \;,\; s < t \qquad m(]s,t] \times F) = 1_F \,.\, (M_t - M_s) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{H}}(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$$

$$\alpha(]s,t] \times F) = \int_F (M_t - M_s)^{\otimes 2} \, dP \in \mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}$$

$$\lambda = Tr \,.\, \alpha$$

1° - Alors m se prolonge en une mesure stochastique telle que $\forall A \in \mathcal{A}$ $m(A) \otimes m(A) \in L^1_{\mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$; α se prolonge en une mesure sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}$, à variation bornée $|\alpha| \leq \lambda$, et λ se prolonge en une mesure positive sur $\mathcal{A}$.

2° - Tout processus X de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ est intégrable par rapport à m et $X \rightsquigarrow \int X \, dm$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathcal{A}), \lambda)$ dans $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega, \mathcal{B}(\mathcal{A}), P)$.

3° - Le processus naturel V de la mesure α possède la propriété :

$$(M_t^{\otimes 2} - V_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \quad \text{est une martingale}$$

<u>Démonstration</u>.-

1° et 2° -

D'après la propriété de martingale

(4.2.1) $\alpha(]s,t] \times F) = E\left[1_F \,.\, (M_t^{\otimes 2} - M_s^{\otimes 2})\right]$

Comme $\|M_t\|^2 = \|M_t^{\otimes 2}\|_T$, l'hypothèse d'intégrabilité sur $\|M_t\|^2$ implique $\alpha(]s,t] \times F) \in \mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}$, cet élément de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}$ étant en outre de type positif.

La continuité à droite de M entraîne immédiatement la propriété (j) du lemme 4.1.

De (4.2.1) résulte facilement l'additivité de λ .

Montrons que λ possède la propriété (jj) du lemme . Soit

$$A_n = \sum_{k\leq p}]s_k^n , u_k^n] \times F'_{n,k} \subset]0,t] \times F_n,$$

avec

$$F'_{n,k} \in \mathcal{F}_{s_k^n} \quad .$$

On peut, dans l'expression de A_n comme réunion finie de rectangles de $\mathcal{R}$, supposer que les intervalles $]s_k^n , u_k^n]$ sont disjoints avec $u_k^n \leq s_{k+1}^n$ pour tout $k \leq p$.

Posons

$$F_{n,k} = \bigcup_{r\leq k} F'_{n,r} \in \mathcal{F}_{s_k^n} \quad .$$

On a, d'après la propriété de sous martingale de $(\mathrm{Tr} . M_t^{\otimes 2})_{t\in\mathbb{R}^+}$,

$$\lambda (A_n) = \mathrm{Tr}. \alpha(A_n) \leq E\, \mathrm{Tr} \{ \sum_{1\leq k\leq p} 1_{F_{n,k}} . (M_{u_k^n}^{\otimes 2} - M_{s_k^n}^{\otimes 2})\} .$$

En posant

$$G_{n,k} = F_{n,k} - F_{n,k-1} \qquad (F_{n,0} = \emptyset) ,$$

on a

$$\lambda (A_n) \leq E \sum_{1\leq k\leq p} \mathrm{Tr} . \{1_{G_{n,k}} (M_{u_p^n}^{\otimes 2} - M_{s_k^n}^{\otimes 2})\}$$

$$\leq \int_{F_n} \mathrm{Tr} . M_t^{\otimes 2} \, d P.$$

$$\leq E \sum_{1\leq k\leq p} \mathrm{Tr} . (1_{G_{n,k}} . M_t^{\otimes 2}) \quad .$$

D'où la propriété (jj) pour λ .

Si $A = \sum_{k\leq p}]s_k, u_k] \times F_k$

en supposant encore les $]s_k,u_k]$ disjoints et $u_k \leq s_{k+1}$ on a, en utilisant la propriété de martingale,

$$(\| m(A)\|_2)^2 = \sum_{k\leq p} E\,(1_{F_k} . \|M_{u_k} - M_{s_k}\|^2_{\mathbb{H}})$$

$$= \sum_{k\leq p} E\Big(1_{F_k}\ \mathrm{Tr}\ (M_{u_k} - M_{s_k})^{\otimes 2}\Big)$$

$$= \mathrm{Tr} \sum_{k\leq p} E\Big(1_{F_k} (M_{u_k}^{\otimes 2} - M_{s_k}^{\otimes 2})$$

$$= \lambda\ (A)\ .$$

Cette égalité montre que l'application additive $A \rightsquigarrow m(A)$ se prolonge linéairement en une isométrie de $L^2(\Omega,\mathcal{T}(\mathcal{C}),\lambda)$ dans $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega,\mathcal{T}(\mathcal{C}),P)$. Que le prolongement à $\mathcal{C}$ soit une mesure stochastique (i.e vérifie la condition (S)) est évident.

3°) Pour tout $]s,t] \times F \in \mathcal{C}$, on a, par définition de V,

$$0 = \alpha\ (]s,t] \times F) - E(1_F.(V_t - V_s))$$

$$= E\ \{1_F\ .\ [(M_t^{\otimes 2} - M_s^{\otimes 2}) - (V_t - V_s)]\},$$

$$= E\ \{1_F\ .\ [(M_t^{\otimes 2} - V_t) - (M_s^{\otimes 2} - V_s)]\},$$

ce qui exprime la propriété de martingale pour $(M_t^{\otimes 2} - V_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

4.3 Remarque et notation.-

Par analogie avec le cas réel, on notera $< M,M >$ le processus naturel de la mesure α du théorème.

On définit également de même le processus naturel $\ll N,N \gg$ de la mesure β prolongeant la fonction additive définie sur $\mathcal{R}$ par $\beta(]s,t] \times F) = E\,[1_F.(M_t \otimes N_t - N_s \otimes N_s)] = E[1_F.(M_t - M_s) \otimes (N_t - N_s)]$.

Il suffit de remarquer que la symétrie de la forme linéaire $(x,y) \rightsquigarrow Tr(x \otimes y)$ permet d'écrire :

$Tr\,.\beta\,(]0,t] \times F) = \frac{1}{4}\,Tr\,[(M_t + N_t)^{\otimes 2} - (M_t - N_t)^{\otimes 2}]$, et de raisonner comme dans le théorème 5.

4.4 Définition 5.-

La mesure α du théorème 5 sera appelée variation quadratique de m.

On notera $< m,n >$ la mesure stochastique dans $L^1_{\mathbb{H}\,\hat{\otimes}_T\,\mathbb{H}}(\Omega,\mathcal{F},P)$ associée au processus $< M,N >$ et $\ll m,n \gg = E\circ <m,n>$

On a évidemment pour tout $]s,t] \times F \in \mathcal{R}$

$$E\;[< m,n > (]s,t] \times F)] = \int_F (M_t - M_s) \otimes (N_t - N_s)\;dP$$
$$= \int_F (M_t \otimes N_t - N_s \otimes N_s)\;dP.$$

Pour abréger, on notera souvent $< M >$ au lieu de $<M,M>$, $<m>$ au lieu de $<m,m>$ etc...

Définition 6.-

La mesure $\lambda = Tr\,\alpha$ du théorème 5 sera appelée mesure trace de M(ou de m).

On vérifie facilement que

$$Tr \circ \ll m_1,m_2 \gg \;\le \frac{1}{2}\;[Tr\,.\ll m_1 \gg + Tr \circ \ll m_2 \gg]$$

5. Intégration par rapport à une mesure stochastique.-

m étant une mesure stochastique à valeurs dans $B_1 = L^p_{\mathbb{H}}(\Omega,\mathcal{F},P)$, p = 1 ou 2, associée à un processus $Z = V + M$, fortement continu à droite, où V est le processus naturel de la mesure $E \circ m$ (supposée à variation finie) et où M est une martingale fortement continue à droite, de carré intégrable, nous allons définir l'intégrale par rapport à m d'une classe de processus à valeurs dans $\mathbb{B}_2 = \mathcal{L}(\mathbb{H} ; \mathbb{G})$, où $\mathbb{G}$ est un autre espace de Hilbert. L'espace $\mathbb{B}_3$ (cf. § 2.2) est ici $L^p_{\mathbb{G}}(\Omega,\mathcal{F},P)$, (p = 1 ou 2) et l'application bilinéaire $(.|.)$ de $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ dans $\mathbb{B}_3$ est $(f,u) \rightsquigarrow u \circ f$.

5.1 Cas où X = V.

Il résulte immédiatement du théorème 1, 2°) et de la remarque suivant la définition 1 du § 3-2 que, lorsque $Z = V$, $\mathbb{B}_1 = L^1_{B_2}(\Omega,\mathcal{F},P)$, la mesure m est de puissance 1 majorée par $|m| = |E \circ m|$. On sait donc intégrer tous les processus X prévisibles à valeurs dans $\mathbb{B}_2$ tels que

$$\int ||X||_{\mathbb{B}_2} \, d \, |m| < \infty$$

Soit donc un processus X prévisible tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ $X \in L^1_{\mathbb{B}_2}([0,t] \times \Omega , [0,t] \times \Omega \cap \mathcal{C} , |m|)$. A la mesure stochastique à variation finie , $A \rightsquigarrow \int_A X \, d \, m$ correspond un processus continu à droite Y, unique à l'indistingabilité près, que nous noterons $(\int X \, d \, m)$ ou $(\int X \, d \, V)$, appelé processus intégral de X par rapport à m.

5.2 Cas où $X = M$

Théorème 6.-

Soit M une martingale à valeurs dans $\mathbb{H}$, continue à droite, de carré intégrable, et soit m la mesure stochastique à valeurs dans $\mathbb{B}_1 = L^2_{\mathbb{H}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ associée , α et λ les mesures du théorème 5. Alors :

1°) Pour tout hilbert $\mathbb{G}$ et tout $\mathbb{B}_2 = \mathcal{L}(\mathbb{H}; \mathbb{G})$, m est de puissance 2 majorée par λ

2°) Tout processus $X \in L^2_{\mathbb{B}_2}(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{T}(\mathfrak{C}), \lambda)$ est intégrable en moyenne quadratique par rapport à m. Si, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $1_{[0,t] \times \Omega} X \in L^2_{\mathbb{B}_2}(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{T}(\mathfrak{C}), \lambda)$, le processus Y, unique à l'indistingabilité près, associé à la mesure stochastique $A \rightsquigarrow \int_A X \, d\, m$ est une martingale fortement continue à droite, de carré intégrable.

3°) Si M_1 et M_2 sont deux martingales de carré intégrable, m_1 et m_2 les mesures stochastiques associées,

$\lambda_1 = \mathrm{Tr} \ll m_1 \gg$, $\lambda_2 = \mathrm{Tr} \ll m_2 \gg$

soit $X_i \in L^2_{\mathbb{B}_2}(\mathcal{T}(\mathfrak{C}) ; \lambda_1 + \lambda_2)$ $i = 1,2$.

On a $X_1 \otimes X_2 \in L^1_{\mathbb{B}_2 \hat{\otimes}_T \mathbb{B}_2}(\mathcal{T}(\mathfrak{C}), \lambda_1 + \lambda_2)$.

Si Y_i, $i = 1,2$, est la martingale associée à la mesure stochastique $A \rightsquigarrow n_i(A) = \int_A X_i \, dm_i$ on a les formules :

(5.2.1) $\langle n_1, n_2 \rangle (A) = \int_A X_1 \otimes X_2 \, d \langle m_1, m_2 \rangle$

(5.2.2) $\ll n_1, n_2 \gg (A) = \int_A X_1 \otimes X_2 \, d \ll m_1, m_2 \gg$

En particulier, la variation quadratique de $\int X \, dm$ est

$$A \rightsquigarrow \int_A X \otimes X \, d\, \alpha$$

$$\langle Y^1, Y^2 \rangle (t) = \int_{]0,t] \times \Omega} X_1 \otimes X_2 \quad d \quad \langle m_1, m_2 \rangle$$

4°) La mesure trace μ du processus Y est majorée par $\mathcal{C} \ni A \rightsquigarrow \int_A \mathrm{Tr} (X \otimes X) \, d\, \lambda$

5°) Si M est fortement continue, et si m est l'extension unique aux ensembles bien mesurables, ne changeant pas les graphes de temps d'arrêt, de la mesure stochastique associée, ce qui précède peut être étendu au cas où $1_{[0,t]\times\Omega} X \in L^2_{\mathbb{B}_2}(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{T}(\mathbb{B}), \lambda)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Le processus Y est alors en outre fortement continu.

<u>Démonstration</u>.-

1°) Soit $A_k =]s_k,t_k] \times F_k$, $F_k \in \mathcal{F}_{s_k}$, les A_k étant disjoints et les intervalles $]s_k,t_k]$ étant également supposés disjoints. Pour toute fonction étagée à valeurs dans $\mathbb{B}_2$ on peut trouver une représentation $\sum\limits_k 1_{A_k} \cdot a_k$, $a_k \in \mathbb{B}_2$ avec une famille (A_k) du type considéré, $k = 1 \dots p$. Evaluons

$$||\sum_{k\leq p} (a_k|m(A_k))||^2 = E\,(||\sum_{k\leq p} 1_{F_k}.(a_k|M_{t_k} - M_{s_k})||^2_{\mathbb{G}}).$$

Soit $k < j$

$$E\,\{1_{F_k}.1_{F_j} <(a_k|M_{t_k} - M_{s_k})\ ,\ (a_j|M_{t_k} - M_{s_j})>\} =$$

$$= E\,\{<(a_j|E(1_{F_j}(M_{t_j} - M_{s_j})|\mathcal{F}_{s_j})),1_{F_k}(a_k|M_{t_k} - M_{s_k})>\}$$

$$= 0.$$

D'où

$$||\sum_{k\leq p} (a_k|m(A_k))||^2 = E\,\{\sum_{k\leq p} 1_{F_k}||(a_k|M_{t_k} - M_{s_k})||^2_{\mathbb{G}}\}$$

$$\leq \sum_{k\leq p} E\,\{1_{F_k}.||a_k||^2_{B_2}\ ||M_{t_k} - M_{s_k}||^2_{\mathbb{H}}$$

$$\leq \sum_{k\leq p} ||a_k||^2\ E\,\{1_{F_k}.\ T_r(M^{\otimes 2}_{t_k} - M^{\otimes 2}_{s_k})\}$$

$$\leq \sum_{k\leq p} ||a_k||^2\ \lambda\,(A_k)$$

2°) Nous utilisons les définitions et propriétés élémentaires du § 1-2, d'où résulte l'intégrabilité en moyenne quadratique de X.

Il est immédiat que lorsque $X = 1_{]s,t] \times F} . a$, $a \in \mathbb{B}_2$, $F \in \mathcal{F}_s$, $s < t$, le processus Y est à trajectoires continues à droite. Nous passons au cas d'un X général de la façon suivante :

On a évidemment la propriété de continuité à droite pour Y lorsque X est étagé. Soit alors un X répondant aux hypothèses générales du théorème, et soit (X_n) une suite de processus étagés à valeurs dans $\mathbb{B}_2$, tels que pour tout t, $1_{[0,t] \times \Omega} . X_n$ converge vers $1_{[0,t] \times \Omega} . X$ dans $L^2_{\mathbb{B}_2}(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{C}(\mathfrak{X}), \lambda)$. Les mesures stochastiques $A \rightsquigarrow \int_A X_n \, d m$ correspondantes convergent pour la norme de la semi - variation vers $A \rightsquigarrow \int_A X \, d m$, puisque

$$\sup_{B \subset A} \left|\left| \int_B X \, d m - \int_B X_n \, d m \right|\right|^2 \leq \sup_{B \subset A} \int_B ||X-X_n||^2_{\mathbb{B}_2} \, d \lambda \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

On peut utiliser le théorème 4 du § 3, montrant qu'on peut extraire une sous suite (X_{n_k}) telle que les trajectoires des processus intégraux Y_{n_k} convergent presque sûrement uniformément sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}^+$ vers les trajectoires de Y. D'où la continuité à droite de celles ci.

D'après la définition de Y.

$$\forall F \in \mathcal{F}_s, \; s < t \qquad E(1_F(Y_t - Y_s)) = E\left(\int_{]s,t] \times F} X \, d m\right).$$

Si $X = \sum_{i=1}^{n} 1_{]s_i,t_i] \times F_i} . a_i$, la propriété

$$\int_{]s,t] \times F} X \, d m = 0$$

résulte de la propriété de martingale de M. Par linéarité et densité, on obtient immédiatement $E(\int_{]s,t] \times F} X \, d\, m) = 0$ pour tout $X \in L^2_{\mathbb{B}_2}(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{T}(\mathcal{C}), \lambda)$. D'où la propriété de martingale pour Y.

Comme par définition

$$Y_t = \int_{]0,t] \times \Omega} X \, d\, m \qquad \text{p.s.}$$

on a bien

$$Y_t \in L^2_{\mathbb{B}_2}(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{T}(\mathcal{C}), \lambda).$$

3°) Nous avons à montrer que pour tout $X^i \in L^2_{\mathbb{B}_2}(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{T}(\mathcal{C}), \lambda_1 + \lambda_2)$ $i = 1,2$, on a en notant $Y^i_t = \int_{]0,t] \times \Omega} X^i \, d\, m_i$,

$$E\,[1_F(Y^1_t \otimes Y^2_t - Y^1_s \otimes Y^2_s)] = \int_{]s,t] \times F} X^1 \otimes X^2 \quad d \ll m_1, m_2 \gg$$

ou encore, pour tout $X^i \in L^2_{\mathbb{B}_2}(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{T}(\mathcal{C}), \lambda_1 + \lambda_2)$, on a, en posant : $A^i = \int X^i \, d\, m_i$,

$$E\,(A^1 \otimes A^2) = \int X^1 \otimes X^2 \quad d \ll m_1, m_2 \gg$$

Or, si $X^i = 1_{]s_i,t_i] \times F_i} \cdot a_i$, $F_i \in \mathcal{F}_s$, $a_i \in \mathbb{H}$, $i = 1,2$

$$]s,t] =]s_1,t_1] \cap]s_2,t_2]$$

$$E\,(A^1 \otimes A^2) = E\,[1_{F_1 \cap F_2} ((a_1 | M^1_{t_1} - M^1_{s_1}) \otimes (a_2 | M^2_{t_2} - M^2_{s_2}))]$$

$$= (a_1 \otimes a_2 | \; E[1_{F_1 \cap F_2} (M^1_t - M^1_s) \otimes (M^2_t - M^2_s)])$$

$$= (a_1 \otimes a_2) < m_1, m_2 > (]s_1,t_1] \times F_1 \cap]s_2,t_2] \times F_2)$$

$$= \int X^1 \otimes X^2 \quad d \ll m_1, m_2 \gg$$

Les applications bilinéaires continues $(X^1,X^2) \leadsto E(A^1 \otimes A^2)$ et $(X^1,X^2) \leadsto \int X^1 \otimes X^2 \, d \ll m_1,m_2 \gg$ de $(L^2_{\mathbb{B}_2}(\mathbb{R}^+ \otimes \Omega, \mathcal{C}(\mathbb{C}), \lambda_1 + \lambda_2))^2$ dans $\mathbb{G} \hat{\otimes}_T \mathbb{G}$, qui coïncident sur un ensemble total sont donc égales. Il faut prouver que

$$< Y^1_t, Y^2 >_t = \int_{]0,t] \times \Omega} X_1 \otimes X_2 \quad d < m_1,m_2 >$$

La définition du processus naturel de $\ll m_1,m_2 \gg$ montre facilement que pour tout $h \in L^1_{\mathbb{B}_2} \hat{\otimes} \mathbb{H}_2 \, (\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathcal{C}(\mathbb{C}) \lambda_1 + \lambda_2)$ et tout $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, on a

$$E\,(f.\int h \, d< m_1,m_2>) = \int E\,(f|\mathcal{F}_{u^-}).\, h \, d \ll m_1,m_2 \gg$$

Appliquant ceci à $h = 1_{]0,t] \times \Omega} X_1 \otimes X_2$, et, d'après (5.2.2), on obtient :

$$E\,(f. \int_{]0,t] \times \Omega} X_1 \otimes X_2 \quad d \ll m_1,m_2 \gg =$$
$$\int_{]0,t] \times \Omega} E\,(f|\mathcal{F}_{u^-}) \, d \ll m_1,m_2 \gg$$

4°) La formule donne lieu également à vérification simple pour les processus X étagés sur $\mathbb{R}$.

5°) L'extension est immédiate.■

6. Extension de la notion de mesure stochastique. Mesure stochastique locale.

Si $\sigma = (\sigma_n)$ est une suite de temps d'arrêt finis, strictement croissante, telle que $\lim_n \sigma_n = +\infty$ p.s., nous noterons $\mathcal{C}_\sigma$ le δ - anneau

$$\mathcal{C}_\sigma = \bigcup_n [0,\sigma_n] \cap \mathcal{C} .$$

6.1 Mesure stochastique locale.-

Définition 7.-

On appelle mesure stochastique locale, toute application σ - additive m de $\mathcal{C}$ dans l'espace $L_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F},P)$ des classes d'équivalence des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{E}$ (sous entendu : fortement mesurables) muni de la convergence en probabilité , pour laquelle existe une suite $\sigma = (\sigma_n)$ telle que

1°) m restreinte à $\mathcal{C}_\sigma$ est une mesure à valeurs dans $L^p_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F},P)$

2°) (S') $\forall\, s < t$, $\forall\, F \in \mathcal{F}_s$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$m(]s,t] \times F \cap]0,\sigma_n]) = 1_F . m(]s,t] \times \Omega \cap]0,\sigma_n]) \in L^2_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$

La suite σ est dite localiser m.

Remarques

1°) On peut évidemment formuler la définition 7 de la façon suivante : l'application m de $\mathcal{C}$ dans $L_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F},P)$ est une mesure stochastique locale si il existe une suite "localisante" $\sigma = (\sigma_n)$ telle que $\forall\, n$ la restriction de m à $\mathcal{C} \cap]0,\sigma_n]$ est une mesure stochastique.

2°) Une mesure stochastique est trivialement une mesure locale, localisable par la suite $(n\, 1_\Omega)_{n \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêts constants.

Théorème 7.-

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach réflexif séparable. Soit α une mesure sur $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$, à valeurs dans $\mathbb{E}$, à variation finie, telle que :

$(A \in \mathcal{O}_{\mathcal{G}}), 1_A$ indistingable de zéro $\Longrightarrow$ $\alpha(A) = 0$.

Alors il existe un processus V, continu à droite, nul en 0, à valeurs dans $\mathbb{E}$, unique à l'indistingabilité près, tel que $\forall n$ $(V_{t \wedge \sigma_n})_{n \in \mathbb{N}}$ soit le processus naturel de la mesure α^n définie sur $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ par

$$\alpha^n (A) = \alpha (A \cap]0,\sigma_n]).$$

Démonstration.-

Pour prouver le théorème, il nous suffit évidemment de prouver que si V^{n+1} est le processus naturel de α^{n+1}, on a

$$(6.1.1) \qquad V^{n+1}_{t\wedge\sigma_n} = V^n_t \qquad \text{P.s.} \quad \text{sur } [\sigma_n \leq t].$$

Etant donné l'unicité à l'indistingabilité près des processus V^n, on aura : $\forall n \ \exists \ \Omega_n \quad P(\Omega_n) = 1$ avec

$$\forall \omega \in \Omega_n \qquad \forall t \in [0, \sigma_n(\omega)] \qquad V^{n+1}_t(\omega) = V^n_t(\omega)$$

On définit alors V, de façon unique, à l'indistingabilité près en posant

$$\forall \omega \in \bigcap_n \Omega_n \qquad t \in]\sigma_n(\omega),\sigma_{n+1}(\omega)] \qquad V_t(\omega) = V^{n+1}_t(\omega).$$

Or, d'après le théorème 1 bis, on a, pour tout $F \in \mathcal{F}$,

$$E(1_F . V^{n+1}_{t\wedge\sigma_n}) = \int_{]0,\sigma_n]} E(1_F \mid \mathcal{F}_{u^-}) \, d\alpha^{n+1} =$$

$$= \int E(1_F \mid \mathcal{F}_{u^-}) \, d\alpha^n ,$$

ce qui prouve (6.1.1). ∎

Définition 8.-

Le processus V du théorème 7 sera appelé processus naturel de α.

6.2 Mesure stochastique locale et processus associé.

Définition 9.-

Une mesure stochastique locale m et un processus X seront dits associés (ou que X engendre m) si

(6.2.1) $\forall \quad]s,t] \times F \in \mathcal{R} \qquad m(]s,t] \times F) = 1_F.(X_t - X_s)$ p.s.

Théorème 8.-

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach réflexif séparable. Toute mesure stochastique locale m, à valeurs dans $L_{\mathbb{E}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est engendrée par un processus stochastique X_m à valeurs dans $\mathbb{E}$, continu à droite pour la topologie faible de $\mathbb{E}$, nul en 0, unique à l'indistingabilité près.

Le processus X_m a presque sûrement des limites à gauche faibles.

Si, pour une suite $\mathfrak{S} = (\sigma_n)$ localisant m, $E \circ m$ en restriction à $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}$ est une mesure à variation finie, on a

$$X_m = M + V$$

où $(M_{\sigma_n \wedge t})_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale (i.e. : où M est une martingale locale) et $(V_{\sigma_n \wedge t})_{t \in \mathbb{R}^+}$ est naturel, pour tout n.

Démonstration.-

Ce théorème résulte à peu près immédiatement des théorèmes 2 et 3. En effet, pour toute suite (σ_n) localisant m, soit X_m^n le processus engendrant la mesure stochastique $A \leadsto m(A \cap]o,\sigma_n])$, et $X_m^n = M^n + V^n$ la décomposition correspondante. Si pour tout n existe $\Omega_n \in \mathcal{F}$ tel que

$$P(\Omega_n) = 1 \quad \text{et}$$

$$\forall \omega \in \Omega_n \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad X_m^{n+1}(t \wedge \sigma_n, \omega) = X_m^n(t \wedge \sigma_n, \omega)$$

on construit X_m , M et V en posant

$\forall\, \omega \in \bigcap_n \Omega_n \qquad \sigma_n(\omega) < u \leq \sigma_{n+1}(\omega)$

$$X_m(u,\omega) = X_m^{n+1}(u,\omega)$$

$$M(u,\omega) = M^{n+1}(u,\omega)$$

$$V(u,\omega) = V^{n+1}(u,\omega)$$

Le théorème résulte donc complètement du 2°) du théorème général de "localisation" que nous énonçons maintenant.

Théorème 9. - (De "localisation")

Soit m une mesure stochastique sur $\mathcal{C}$, à valeurs dans $L^p_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F},P)$. Alors

1°- pour tout $B \in \mathcal{C}$ la mesure

$m_B : A \rightsquigarrow m(B \cap A)$

est une mesure stochastique et si $B \in \mathbb{R}^+ \times G$, $G \in \mathcal{F}$

(6.2.1) $\quad \forall\, A \in \mathcal{C} \qquad A \subset \,]0,t] \times \Omega \Longrightarrow m_B(A) = 1_G . m_B(A)$ p.s.

2°- si m est engendrée par le processus X, et $]S,T]$ est un intervalle stochastique borné, alors la mesure stochastique $m_{]S,T]}$ est engendrée par le processus $(X_{T\wedge t} - X_{S\wedge t})_{t \in \mathbb{R}^+}$

Démonstration.-

1°) Prouvons d'abord le 1°) dans le cas où $B = \,]u,v] \times G \in \mathcal{R}$.

Soit d'abord $A = \,]s,t] \times F \in \mathcal{R}$. Par définition

$m_B(A) = m(]u \vee s, t \wedge v] \times (F \cap G))$

$\qquad = 1_{F \cap G}\, m(]u\vee s \,,\, t \wedge v] \times (F \cap G))$

On en déduit d'abord

(6.2.2) $\quad m_B(A) = 1_F\, m(]u \vee s, t \wedge v] \times (F \cap G)) = 1_F\, m(B \cap A)$

ce qui prouve que m_B est une mesure stochastique.

On en déduit ensuite

(6.2.3) $m_B(A) = 1_G \cdot m(]u \vee s, t \wedge v] \times F \cap G) = 1_G\, m_B(A)$

ce qui prouve (6.2.1) dans le cas particulier envisagé.
On déduit immédiatement de (6.2.2), en prolongeant par mesurabilité, que pour tout $B \in \mathcal{B}$, m_B est une mesure stochastique.

En considérant les éléments de $\mathcal{B}$ inclus dans $\mathbb{R}^+ \times G$, en remarquant que ceux de ces éléments inclus dans $]0,t] \times \Omega$ forment un σ - anneau , on déduit aisément de (6.2.3) en appliquant toujours le même principe de prolongement par mesurabilité que, pour tout $]s,t] \times F$ et tout $B \subset]0,t] \times G$, on a

$$m_B\,(]s,t] \times F) = 1_G\, m_B\,(]s,t] \times F)$$

On passe évidemment immédiatement au cas général de (6.2.1) .

2°) il résulte de la proposition 1 en 3.5 ci dessus que si T est un temps d'arrêt borné

$$m\,(]0,t] \times \Omega \cap [0,T]) = X\,(t \wedge T)$$

D'où le théorème. ■

6.3 Mesure stochastique locale engendrée par une martingale locale.-

Une martingale locale étant par définition un processus M pour lequel existe une suite $\sigma = (\sigma_n)$ de temps d'arrêts finis strictement croissante, telle que $\lim_n \sigma_n = +\infty$ p.s. et telle que $\forall_n\ (M_{t \wedge \sigma_n})_{t \in \mathbb{R}^+}$ soit une martingale par rapport aux $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ le théorème suivant est une conséquence triviale du théorème 5.

Théorème 10.-

Soit M une martingale locale, à valeurs dans un Hilbert séparable $\mathbb{H}$, continue à droite; si on pose

$\forall \ ]s,t] \times F \in \mathcal{R} \qquad m(]s,t] \times F) = 1_F\,(M_t - M_s)$

1°) m se prolonge en une mesure stochastique locale unique

2°) $\sigma = (\sigma_n)$ étant une suite localisant m, la restriction à $\mathcal{C}_\sigma$ de $E \circ m$ est une mesure α sur $\mathcal{C}_\sigma$; à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}$, à variation finie telle que

$$|\alpha| \leq \lambda = \mathrm{Tr} \cdot \alpha .$$

3°) le processus naturel V de la mesure α possède la propriété

$(M_t^{\otimes 2} - V_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale locale.

Démonstration.-

Excepté la possibilité de prolonger m sur $\mathcal{C}$ (et non seulement sur $\mathcal{C}_\sigma$) le théorème est une conséquence triviale des théorèmes 5 et 7.

Or ce dernier point est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 3.- telle que $\forall\, n\ 1_{]0,\sigma_n]} \cdot m$ soit une mesure stochastique

Si m est une mesure sur $\mathcal{C}_\sigma$, à valeurs dans $L^p_E(\Omega,\mathcal{F},P)$ (p = 1 ou 2), m se prolonge de façon unique en une application de $\mathcal{C}$ dans $L_E\,(\Omega,\mathcal{F},P)$, σ - additive pour la métrique de la convergence en probabilité.

Démonstration.-

Si on pose

$m_n\,(A) = m\,(A \cap]0,\sigma_n])$ on a

$m_n\,(A) = m_{n+p}\,(A \cap]0,\sigma_n])$.

Si donc $A \subset]0,u] \times \Omega$, d'après le théorème 9,

$m_n(A) - m_{n+1}(A) = m_{n+p}(A \cap]u \wedge \sigma_n , u \wedge \sigma_{n+1}])$

$$= 1_{[\sigma_{n+1} \wedge u > \sigma_n \wedge u]} \cdot [m_n(A) - m_{n+1}(A)] .$$

La condition $\lim_n \sigma_n = + \infty$ p.s. implique donc immédiatement l'existence d'un $m(A) \in L_{\mathbb{E}}(\Omega,\mathcal{F},P)$ défini presque sûrement par

(6.3.1) $\omega \in [\sigma_n > u]$ $m(A)(\omega) = m_n(A)(\omega)$ p.s.

Si $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante avec $\bigcap_p A_p = \emptyset$ et $A_o \subset]0,u] \times \Omega$, on a

$\lim_p \text{prob}\ m(A_p \cap]0,\sigma_n]) = \lim_p \text{prob}\ m_n(A_p) = 0$

Comme $m(A_p \cap]\sigma_n,\sigma_{n+1}]) = m_{n+1}(A_p \cap]\sigma_n,\sigma_{n+1}])$

$$= 1_{[\sigma_{n+1} \wedge u > \sigma_n \wedge u]} m_{n+1}(A_p \cap]\sigma_n,\sigma_{n+1}])$$

on a $P[m(A_p \cap]0,\sigma_n]) \neq m(A_p)] \leq P[\sigma_n \leq u]$.

D'où l'on déduit immédiatement la convergence en probabilité vers zéro de $m(A_p)$, et la σ - additivité de m, pour la métrique de la convergence en probabilité.

L'unicité de m résulte évidemment de l'unicité de sa restriction à $\mathcal{Q}_{\mathcal{G}}$ et de sa σ - additivité.■

Il est évident qu'on peut généraliser les notations $<M,N>$ et $< m,n >$ du paragraphe 5 au cas des martingales locales.

6.4 Mesure stochastique locale engendrée par une mesure aléatoire.-

Il est clair que, si V est un processus à valeurs dans $\mathbb{E}$, tel que, pour tout ω l'application $]s,t] \rightsquigarrow V_t(\omega)-V_s(\omega)$ se prolonge en une mesure $\nu(\omega)$ sur les boréliens bornés de $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{E}$, en posant pour tout $A \in \mathcal{C}$

$$m\,(A) = \int 1_A\,(u,.)\ \nu(du\ ,\ .\ )$$

on définit une mesure stochastique locale, localisée par la suite (σ_n) de temps d'arrêts :

$$\sigma_n\,(\omega) = \inf\,\{t : ||\nu||^{\;2}\,(]0,t],\,\omega) \geq n\,\}$$

6.5 Intégration par rapport à une mesure stochastique locale.-

Nous considérons les mêmes espaces $\mathbb{H}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$ et $\mathbb{B}_3$ qu'au § 5.

Soit également m une mesure stochastique locale engendrée par un processus $Z = V + M$ où X est supposé fortement continu à droite, où V est le processus naturel de $E \circ m$, définie sur $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ et à variation finie, M étant une martingale locale.

Supposons d'abord $M = 0$. Si X est un processus prévisible, tel que, pour tout $\sigma_n \in \mathcal{G}$ et tout t :

$$1_{[0,\sigma_n\wedge t]}\,X \in L^1_{\mathbb{B}_2}\,([0,t\wedge\sigma_n],\,[0,t\wedge\sigma_n]\times\mathcal{C},\ |E \circ m|)$$

l'intégrale $\int_A X\ d\ m$ est définie pour tout $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ et la mesure $A \rightsquigarrow \int_A X\ d\ m$ se prolonge en une mesure stochastique locale à laquelle correspond un processus continu à droite Y unique à l'indistingabilité près, que nous noterons $(\int^{\cdot} X\ d\ m)$ ou $(\int^{\cdot} X\ d\ V)$, appelé processus intégral de X par rapport à m .

Dans le cas où $V = 0$ on généralise immédiatement le théorème 6 en considérant l'intégrale des processus X prévisibles à valeurs dans $\mathbb{H}$ tels que pour une suite localisante convenable $\mathfrak{S} = (\sigma_n)$ de temps d'arrêt, pour tout t et n on ait

$$1_{[0,\sigma_n \wedge t]} X \in L^2_{\mathbb{B}_2} (\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{C}(\mathfrak{E}), \mathrm{Tr} \bullet \alpha) .$$

L'application $A \rightsquigarrow \int_A X \, d\, m$ définit, pour un tel processus, une mesure à valeurs dans $L^2_{\mathbb{G}} (\Omega, \mathcal{F}, P)$, se prolongeant en une mesure stochastique locale à laquelle est associé un processus Y continu à droite, unique à l'indistingabilité près, et qui est une martingale locale.

Il est évident que tout processus X tel que

(6.5.1) p.s. $X(.,\omega) \in L^2_{\mathbb{B}_2} (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}, d <M,M> (\omega))$

possède la propriété d'intégrabilité précédente. Il suffit en effet de définir la famille de temps d'arrêt par

$$\sigma_n(\omega) = \inf \{t : \int_0^t ||X(.,\omega)||^2_{\mathbb{B}_2} \, d< M,M > (\omega) > n\}$$

La famille des processus prévisibles vérifiant (6.5.1) sera dans la suite désignée par $\Lambda_{\mathbb{B}_2} (M)$.

Enfin, il est clair que si M est à trajectoires continues on étend ce qui précède aux processus X Bien mesurables. Les processus intégraux sont alors en outre continus.

7 . Formule de Ito. -

Dans ce paragraphe, nous étendons aux processus à valeurs dans un espace de Hilbert la formule de " composition des différentielles " due dans le cas du mouvement brownien réel à K. Ito.

$\mathbb{F}$ $\mathbb{H}$ et $\mathbb{G}$ désignent des Hilbert séparables.

7.1 Théorème 11. -

Soit m la mesure stochastique dans $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega,\mathfrak{F},P)$ engendrée par la martingale M , à valeurs dans $\mathbb{H}$, fortement continue, de carré intégrable.

Soit v une mesure stochastique dans $L^1_{\mathbb{F}}(\Omega,\mathfrak{F},P)$ à variation finie engendrée par un processus $\mathbb{V}$ dont les trajectoires sont continues et engendrent des mesures aléatoires à valeurs dans $\mathbb{F}$.

Soit Φ une application de $\mathbb{F} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{G}$, continue, une fois différentiable par rapport à la première variable et deux fois différentiables par rapport à la deuxième variable, les dérivées partielles $\phi^{1,0}$ $\phi^{0,1}$ $\phi^{0,2}$, étant supposées uniformément continues sur $V(]0,t]\times\Omega) \times M(]0,t]\times\Omega)$ pour tout t.

Alors, les deux processus $(\phi(V_t,M_t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ et

$$Y = \left(\phi(V_o,M_o) + \int_{]0,t]\times\Omega} \phi^{1,0}(V,M)\,dv + \int_{]0,t]\times\Omega} \phi^{0,1}(V,M)\,dm + \frac{1}{2}\int_{]0,t]\times\Omega} \phi^{0,2}(V,M)\,d\langle m\rangle\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$$

sont indistingables.

Démonstration.-

Nous montrons d'abord un lemme :

Lemme 1.-

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ existe une suite croissante $(\tau_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêts telle que

(i) $\lim_{k\to\infty} \tau_k^n = +\infty$ p.s.

(ii) $\tau_{k+1}^n > \tau_k^n$ sur $[\tau_k^n < \infty]$

(iii) $\sup_k \sup_{\tau_k^n \leq s < \tau_{k+1}^n} ||M_s(\omega)-M_{\tau_k^n}(\omega)||^2 \leq \frac{1}{n}$

$\sup_k \sup_{\tau_k^n \leq s < \tau_{k+1}^n} ||V_s(\omega)-V_{\tau_k^n}(\omega)|| \leq \frac{1}{n}$

$\sup_k \sup_{\tau_k^n \leq s < \tau_{k+1}^n} ||\langle M\rangle_s(\omega) - \langle M\rangle_{\tau_k^n}(\omega)|| \leq \frac{1}{n}$

Démonstration.-

Posons $\tau_o^n = 0$

et par récurrence définissons

$$\tau_{k+1}^n(\omega) = \inf\{t : t>\tau_k^n(\omega),\ \max(||V_t-V_{\tau_k^n}||, ||M_t-M_{\tau_k^n}||^2), ||\langle M\rangle_t-\langle M\rangle_{\tau_k^n}||, > \frac{1}{n}\}$$

(avec la convention $\inf\emptyset = \infty$).

En raison de la continuité des trajectoires (la continuité à droite suffit) de M et V, les τ^n_k forment une suite strictement croissante de temps aléatoires qui sont des temps d'arrêt (en vertu de la continuité à droite toujours supposée de la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$). D'où la propriété (ii).

En outre, par définition,

$$E\Big(\sum_{\tau^n_{k+1} \leq t} \|M_{\tau^n_{k+1}} - M_{\tau^n_k}\|^2_{\mathbb{H}\hat{\otimes}_T} + \|V_{\tau^n_{k+1}} - V_{\tau^n_k}\|_F + \|\langle M\rangle_{\tau^n_{k+1}} - \langle M\rangle_{\tau^n_k}\|_{\mathbb{H}\hat{\otimes}_T \mathbb{H}}$$

$$= \sum_k E\|M_{\tau^n_{k+1}\wedge t} - M_{\tau^n_k \wedge t}\|^2_{\mathbb{H}} + \sum_k E\|V_{\tau^n_{k+1}} - V_{\tau^n_k}\|_F + \sum_k E\|\langle M\rangle_{\tau^n_{k+1}\wedge t^-}$$

$$- \langle M_{\tau^n_k\ t}\rangle\|_{\mathbb{H}\hat{\otimes}_T \mathbb{H}}$$

$$\leq 2\lambda\ (]0,t] \times \Omega) + |v|\ (]0,t] \times \Omega).$$

Donc, pour tout k

$$\frac{2k}{n}\ P\left[\tau^n_{k+1} \leq t\right] \leq 2\lambda\ (]0,t] \times \Omega) + |v|\ (]0,t] \times \Omega)$$

et par suite

$$P\left[\sup_k \tau^n_k \leq t\right] = 0.$$

Ce qui signifie

$$\lim_{k\to\infty} \tau^n_k = +\infty \quad \text{p.s.}$$

La propriété (i) du lemme est donc démontrée . Quant à la propriété (iii), elle résulte de la définition.

Nous poursuivons la démonstration du théorème en écrivant, pour toute famille (σ^n_k) vérifiant les propriétés du lemme,

$$\Phi(V_t,M_t) - \Phi(V_o,M_o) = \sum_{k\geq 0}\left[\Phi(V_{\sigma^n_{k+1}\wedge t},M_{\sigma^n_{k+1}\wedge t}) - \Phi(V_{\sigma^n_k\wedge t},M_{\sigma^n_{k+1}\wedge t})\right.$$

$$+ \sum_{k\geq 0}\left[\Phi(V_{\sigma^n_k\wedge t},M_{\sigma^n_{k+1}\wedge t}) - \Phi(V_{\sigma^n_k\wedge t}\ M_{\sigma^n_k\wedge t})\right]$$

et en montrant que le second membre de cette égalité converge dans $\mathbb{L}^1_G(\Omega,\mathcal{F},P)$ vers Y_t. Les processus Y et $(\Phi(V_t,M_t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ étant continus, ceci prouvera leur égalité à l'indistingabilité près.

Pour simplifier les notations, t étant fixé dans la démonstration, nous noterons $\sigma^n_k\wedge t = \sigma^n_k$.

Nous décomposons alors la démonstration en une succession de lemmes :

<u>Lemme 4.-</u>

$$\sum_{k\geq 0}\left[\Phi(V_{\sigma^n_{k+1}},M_{\sigma^n_{k+1}}) - \Phi(V_{\sigma^n_k},M_{\sigma^n_{k+1}})\right] \xrightarrow[L^1_{\mathbb{G}}(\Omega,\mathcal{F},P)]{n\to\infty} \int_{]0,t]\times\Omega} \Phi^{1,0}(V,M)\,dv$$

<u>Démonstration du lemme 4.-</u>

Soit

$$\varepsilon_1(n) = \sup_{\|x-y\|\leq\frac{1}{n}} \|\Phi^{1,0}(x) - \Phi^{1,0}(y)\|$$

En vertu de la formule des accroissements finis

$$\|\sum_k \Phi(V_{\sigma^n_{k+1}},M_{\sigma^n_{k+1}}) - \Phi(V_{\sigma^n_k},M_{\sigma^n_{k+1}}) - \Phi^{1,0}(V_{\sigma^n_k},M_{\sigma^n_{k+1}}).(V_{\sigma^n_{k+1}} - V_{\sigma^n_k})\|_{\mathbb{G}}$$

$$\leq \sum_k \varepsilon_1(n)\,\|V_{\sigma^n_{k+1}} - V_{\sigma^n_k}\|_{\mathbb{H}}$$

On a

$$(7.1.2)\ \lim_{n\to\infty} E\ \|\sum_k \Phi(V_{\sigma^n_{k+1}},M_{\sigma^n_{k+1}}) - \Phi(V_{\sigma^n_k},M_{\sigma^n_{k+1}}) - \Phi^{1,0}(V_{\sigma^n_k},M_{\sigma^n_{k+1}}).(V_{\sigma^n_{k+1}} - V_{\sigma^n_k})\|$$

$$\leq \lim_n \varepsilon_1(n)\,|v|\,(]0,t]\times\Omega) = 0.$$

Or, si on pose :

$$\Phi_n(u,w) = \sum_k \Phi^{1,0}(V(\omega)_{\sigma_k^n}, M(\omega)_{\sigma_{k+1}^n})\, 1_{]\sigma_k^n, \sigma_{k+1}^n]}(u,\omega)$$

Φ_n converge simplement vers $\Phi^{1,0}(V,M)$ sur $]0,t] \times \Omega$, avec $||\Phi_n||_G \leq$ constante. Or Φ_n est elle même limite simple de fonctions étagées bornées par une constante. Donc Φ_n converge vers $\Phi^{1,0}(V,M)$ dans $\mathbb{L}^1_{\mathbb{G}}(\Omega,\mathfrak{F},|\alpha|)$ et, par suite, dans $L^1_{\mathbb{G}}(\Omega,\mathfrak{F},P)$ on a

$$\int_{]0,t]\times\Omega} \Phi_n \, d\,v = \sum_k \Phi^{1,0}(V_{\sigma_k^n}, M_{\sigma_{k+1}^n}).(V_{\sigma_{k+1}^n} - V_{\sigma_k^n})$$

et

$$\lim_n \int_{]0,t]\times\Omega} \Phi_n \, d\,v = \int_{]0,t]\times\Omega} \Phi^{1,0}(V,M)\, d\,v.$$

Ce qui prouve le lemme 4.

<u>Lemme 5.</u>-

Si ψ est un processus à valeurs dans $\mathfrak{L}(\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H} ; \mathbb{G})$, continu à droite, borné, on a dans $L^{1^T}_{\mathbb{G}}(\Omega,\mathfrak{F},P)$,

$$\int_{]0,t]\times\Omega} \psi \, d < m > = \lim_n \sum_k \psi_{\sigma_k^n} . (M_{\sigma_{k+1}^n} - M_{\sigma_k^n})^{\otimes 2}$$

<u>Démonstration du lemme 5.</u>-

Considérant la suite

$$\Psi_n = \sum_k 1_{]\sigma_k^n, \sigma_{k+1}^n]} . \psi_{\sigma_k^n}$$

on a, en appliquant le théorème de la convergence dominée,

$$(7.1.3) \quad \int_{]0,t]\times\Omega} \psi \, d \langle M \rangle = \lim_n \int_{]0,t]\times\Omega} \psi_n \, d \langle M \rangle$$

$$= \lim_n \sum_k \psi_{\sigma_k^n} . (\langle M \rangle_{\sigma_{k+1}^n} - \langle M \rangle_{\sigma_k^n})$$

la limite étant dans $\mathbb{L}^1_{\mathbb{G}}(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Il nous suffit de montrer maintenant que

$$(7.1.4) \lim_n E \| \sum_k \psi_{\sigma_k^n} . [(M_{\sigma_{k+1}^n} - M_{\sigma_k^n})^{\otimes 2} - (\langle M \rangle_{\sigma_{k+1}^n} - \langle M \rangle_{\sigma_k^n})] \|^2 = 0.$$

En utilisant la propriété de martingale de M, l'expression du 1er membre de (7.1.4) s'écrit :

$$\sum_k E \| \psi_{\sigma_k^n} . [(M_{\sigma_{k+1}^n} - M_{\sigma_k^n})^{\otimes 2} - (\langle M \rangle_{\sigma_{k+1}^n} - \langle M \rangle_{\sigma_k^n})] \|^2 \leq$$

$$\leq \frac{2K^2}{n^2} \sum_k [E \| (M_{\sigma_{k+1}^n} - M_{\sigma_k^n})^{\otimes 2} \| + E \| \langle M \rangle_{\sigma_{k+1}^n} - \langle M \rangle_{\sigma_k^n} \|]$$

$$\leq \frac{4K^2}{n^2} \, |\alpha| \, (]0,t] \times \Omega).$$

D'où la formule (7.1.4) et, compte tenu de (7.1.3), le lemme 5.

<u>Lemme 6.-</u>

$$\sum_k \Phi (V_{\sigma_k^n}, M_{\sigma_{k+1}^n}) - \Phi (V_{\sigma_k^n}, M_{\sigma_k^n}) \xrightarrow[\mathbb{L}^1_{\mathbb{G}}(\Omega,\mathcal{F},P)]{n \to \infty} \int_{]0,t]\times\Omega} \Phi^{0,1} (V,M) \, dm +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{]0,t]\times\Omega} \Phi^{0,2} (V,M) \, d \langle m \rangle.$$

Démonstration du lemme 6.-

En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction $h \rightsquigarrow \Phi(x,y+h) - \Phi(x,y) - \Phi^{0,1}(x,y)h - \frac{1}{2}\Phi^{0,2}(x,y) \,.\, h^{\otimes 2}$, on obtient immédiatement, en posant

$$\varepsilon_2(n) = \sup_{||x-x'||+||y'-y||\leq\frac{1}{n}} (||\Phi^{0,1}(x,y)-\Phi^{0,1}(x',y')||+||\Phi^{0,2}(x,y)-\Phi^{0,2}(x',y')||$$

$$||\sum_k \Phi(V_{\sigma_k^n},M_{\sigma_{k+1}^n}) - \Phi(V_{\sigma_k^n},M_{\sigma_k^n}) - \sum_k \Phi^{0,1}(V_{\sigma_k^n},M_{\sigma_k^n})(M_{\sigma_{k+1}^n} - M_{\sigma_k^n})$$

$$-\frac{1}{2}\sum_k \Phi^{0,2}(V_{\sigma_k^n},M_{\sigma_k^n})(M_{\sigma_{k+1}^n} - M_{\sigma_k^n})^{\otimes 2}|| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\varepsilon_2(n) \sum_k ||M_{\sigma_{k+1}^n} - M_{\sigma_k^n}||^2$$

Comme

$$E\left(\sum_k ||M_{\sigma^n_{k+1}} - M_{\sigma^n_k}||^2\right) \leq \lambda\,(]0,t] \times \Omega)$$

et, en vertu du lemme 5, on voit que le lemme 6 sera prouvé si

$$(7.1.5) \quad \sum_k \Phi^{0,1}(V_{\sigma_k^n},M_{\sigma_k^n})(M_{\sigma_{k+1}^n} - M_{\sigma_k^n}) \xrightarrow[L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mathcal{T}(\mathbb{C}),\lambda)]{n\to\infty} \int_{]0,t]\times\Omega} \Phi^{0,1}(V\ ,M\ )\,dm.$$

Or ceci résulte de ce que

$$\sum_k 1_{]\sigma_k^n,\sigma_{k+1}^n]} \,.\, \Phi^{0,1}(V_{\sigma_k^n},M_{\sigma_k^n}) \xrightarrow[L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}\times\Omega,\mathcal{T}(\mathbb{C}),\lambda)]{n\to\infty} 1_{]0,t]\times\Omega}\, \Phi^{0,1}(V_{-},M_{-}).$$

Le lemme 6 est donc prouvé.

Le théorème 11 résulte donc maintenant, compte tenu des remarques du début de démonstration, complètement des lemmes 4 et 6. ∎

7.2 <u>Extension au cas d'une martingale locale M.</u>

Si l'on suppose que les dérivées partielles $\Phi^{1,0}$, $\Phi^{0,1}$ et $\Phi^{0,2}$ sont uniformément continues sur les parties bornées de $\mathbb{F} \times \mathbb{H}$, on étend facilement le théorème 11 au cas où m et v sont des mesures stochastiques locales.

On se ramène au cas du théorème 11 en considérant une suite localisante de temps $\sigma' = (\sigma'_n)$ d'arrêts définie de la façon suivante : si (σ_n) est une suite localisante pour v et m, on pose

$$\sigma'_n = \sigma_n \wedge \inf\{ t : ||M_t||_{\mathbb{H}} + ||V_t||_G > n\} .$$

REFERENCES

[1] BARTLE R.G.
" A general bilinear vector integral "
Studia Math. 15 - P. 337-352 (1956)

[1]bis DUNFORD - BARTLE et SCHWARTZ
" Weak compactness and vector measures "
Can. J. of Math. 7 - 1955 - P. 289-305

[2] CURTAIN and FALB
" Stochastic differential equations in Hilbert spaces "
J. of Math. Analysis and Applications. Vol. 31 (1970)
P. 434-448

[3] DELLACHERIE C.
" La théorie générale des processus "
Séminaire de Probabilités - Strasbourg - 1969

[4] DINCULEANU N.
" Vector measures " - Pergamon Press - 1967

[5] DOLEANS C. - DADE - MEYER P.A.
" Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales "
Séminaire de Probabilités IV - Lecture Notes in Math. Vol. 24
Springer Verlag - 1970

[5]bis C. DOLEANS - DADE

[6] DUNFORD N. et SCHWARTZ S.T.
" Linear operators I " - Interscience - 1966

[7] ITO K.
" Lecture Notes on stochastic processes "
Tata Institute for fundamental research. Bombay. 1961

[7]bis ITO K.
" Stochastic integral "
Proc. Imperial Acad. - Tokyo, 20, P. 519-524 (1944)

[8] Mc. KEAN P.
" Stochastic integral " - Academic Press - 1968

[9] KUNITA H.
" Stochastic integrals based on martingales taking values in Hilbert spaces " - J. of Math. Vol. 38 (1970) 41-52

[10] METIVIER M.
" Limites projectives de mesures "
Annali di mat. pura ed aplicata. IV - t. LXIII (1963)
P. 225-251

[11] METIVIER M.
" Martingales à valeurs vectorielles - Applications à la dérivation des mesures vectorielles "
Annales de l'Institut Fourier de l'Université de Grenoble -
Tome XVII - Fascicule 2 - 1967

[12] METIVIER M.
" Mesures vectorielles et intégrale stochastique "
Séminaire Université de Rennes . Juin 1972

[13] MEYER P.A.
" Intégrales stochastiques I et II "
Séminaire de Probabilités I. Lecture Notes in Math. Vol. 39.
Springer Verlag 1967

[14] MEYER P.A.
" Probabilités et Potentiel. "
Hermann. 1966

[15] OUVRARD
" Processus à valeurs hilbertiennes et théorème de Girsanov"
A paraître.

[16] PELLAUMAIL J.
" Un exemple d'intégrale d'une fonction réelle par rapport à une mesure vectorielle : l'intégrale stochastique "
C.R.A.S. Paris. t. 274. P. 1369-1372

[17] PELLAUMAIL J.
" Thèse "
A paraître . Rennes

[18] PELLAUMAIL J.
" Sur la décomposition de Doob-Meyer d'une quasi martingale "
C.R.A.S. Paris. t. 274. P. 1563-1565

[19] PETTIS B.J.
" On integration in vector spaces "
Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938) P. 277-304

[20] SCHWARTZ L.
" Produits tensoriels topologiques "

[21] CHATTERJI S.D.
" Martingales of Banach valued random variables "
Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) 395-398

[22] SCALORA H.F.
" Abstract martingale convergence theorems "
Pac. J. of Math. VOL. II (1961) n° 1 - 347-374