A. BRUNEL

Théorème ergodique ponctuel pour les semi-groupes commutatifs finiment engendrés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 2
« Probabilités », , p. 83-98
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___2_83_0>

THEOREME ERGODIQUE PONCTUEL POUR LES SEMI-GROUPES

COMMUTATIFS FINIMENT ENGENDRES

par

A. BRUNEL

Laboratoire de Probabilités
Université de RENNES
E.R.A. du C.N.R.S. n° 250

0 - INTRODUCTION. -

Soient T_1, T_2, ..., T_d des contractions d'un espace $\mathbb{L}^1(X,\mathfrak{F},\mu)$ où $(X,\mathfrak{F},\mu)$ est un **espace mesuré σ - fini. Ces** contracti[ons] non nécessairement positives, commutent deux à deux et vérifient en outre la condition :

(1) $\forall j \in \mathbb{N} \quad 1 \leq j \leq d \qquad \forall \varphi \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^\infty \quad ||T_j \varphi||_\infty \leq ||\varphi||_\infty.$

On se propose dans cet article de prouver le théorème ergodique :

Théorème 0-1 :

Pour tout $f \in \mathbb{L}^1$, il existe $\tilde{f} \in \mathbb{L}^1$ tel que

(1) $\lim\limits_n \frac{1}{n^d} \prod\limits_{j=1}^{d} \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} T_j^k \right) f) = \tilde{f} \qquad \mu$ p.p.

(2) $\int |\tilde{f}| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu$.

(3) pour tout $j = 1,2,\dots,d$ on a $T_j \tilde{f} = \tilde{f}$, $T_j^* (\bar{\tilde{f}}) = \bar{\tilde{f}}$

T_j^* désignant la transposée de T_j et $\bar{h}$ la conjuguée complexe de h.

Suivant des méthodes standard en théorie ergodique, on peut déduire aisément de ce théorème un résultat établi par Dunford et Schwartz en 1956 [3] relatif à un semi - groupe à d paramètres de contractions $T_{(s_1,s_2,\dots,s_d)}$ d'un espace $\mathbb{L}^1$ qui possèdent la propriété (1).

On commence par établir le théorème pour des contractions positives et l'on utilise ensuite le module linéaire de Chacon - Krengel [2] en tenant compte de résultats récents d'Akoglu et Brunel [1] .

La méthode suivie dans le cas des opérateurs positifs est basée sur la proposition suivante :

Proposition 0-1 :

Il existe une série à termes positifs :

(2) $$S = \sum_{(j_1,\dots,j_d)\in\mathbb{N}^d} a_{j_1\dots j_d}\, T_1^{j_1}\dots T_d^{j_d}$$

et $$\sum_{(j_1\dots j_d)\in\mathbb{N}^d} a_{j_1\dots j_d} = 1$$

et il existe un nombre ne dépendant que de d, $\chi > 0$, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \quad \frac{1}{n^d} \sum_{\substack{0\leq j_1<n \\ 0\leq j_d<n}} T_1^{j_1}\dots T_d^{j_d} \leq \chi \frac{1}{n_d} \sum_{0\leq j<n_d} S^j$$

en désignant par n_d la partie entière de $n^{2^{-m}}$ si $2^{m-1} < d \leq 2^m$.

Comme dans le travail, cité plus haut, de Dunford et Schwartz, cette proposition se démontre par récurrence sur d, en partant du cas particulier d = 2 pour lequel S est la contraction :

(3) $$S = (I - \sqrt{I - T_1})\,(I - \sqrt{I - T_2}),$$

l'expression (2) s'obtenant en développant (3) suivant les puissanses de T_1 et T_2.

Nous commencerons par établir le cas d = 1 comme conséquence du théorème de Chacon et Ornstein et nous identifierons la limite.

$$I - \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j f$$

On sait que pour $T \geq 0$, $T\varphi$ peut être défini pour φ mesurable et positive. Alors, la condition (1) s'écrit tout simplement $T\,1 \leq 1$.

Soit T^* la transposée de T, T^* étant une contraction positive de $\mathbb{L}^\infty$.

Lemme 1-1 :

Si $T\,1 \leq 1$, T et T^* ont la même décomposition de Hopf, $X = C \cup D$ et la sous tribu $\mathcal{J}$ des invariants sur C est la même pour T et T^*.

D est l'union des $A \in \mathcal{F}$ tels que $\sum_n T^{*n}\, 1_A \in \mathbb{L}^\infty$, or ceci entraîne $A \subset D^*$. On a donc $D \subset D^*$ et l'on démontre de même l'inclusion opposée. En outre, ceci prouve que $T\,1_D \leq 1_D$ d'où l'on déduit $T\,1_C = T^* 1_C = 1_O$.

Ensuite, si $A \in \mathcal{J}$, relativement à T, soit $T\,1_A = 1_A$ mod μ, on a aussi $T\,1_{C-A} = 1_{C-A}$ mod μ, donc $1_A\, T\, 1_{C-A} = 0$
En intégrant, on obtient

$$0 = \int 1_A\,(T\,1_{C-A})\,d\mu = \int (T^* 1_A)\,1_{C-A}\,d\mu,$$

c'est à dire $T^* 1_A \leq 1_A$ (mod μ), donc $T^* 1_A = 1_A$ (mod

Soit v, $0 < v \leq 1$, $v \in \mathbb{L}^1$. La fonction $\tilde{v} = \varliminf_n \frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} T^j v\right)$ est comprise entre 0 et 1 et vérifie l'inégalité $\tilde{v} \geq T\,\tilde{v}$. En outre, $\tilde{v} = 0$ sur D, donc $\tilde{v} = T\tilde{v} = T^*\tilde{v}$
Posons $B = \{\tilde{v} > 0\}$. $B \in \mathcal{J}$ et $\tilde{v} \in \mathbb{L}^1$ par le lemme de Fatou. La mesure finie $\tilde{v}\,.\,\mu$ est portée par B et est invariante relativement à T. Le lemme ergodique maximal montre alors que $\tilde{v} = \lim_n \frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} T^j v\right)$ car pour tout autre $A \in \mathcal{J}$, disjoint de B, on a $\mu(A) = 0$ ou $+\infty$. Il est aussi clair que $\mu(\tilde{v}) \leq \mu(v)$.

Si maintenant f est quelconque dans $\mathbb{L}^1$, le théorème de Chacon - Ornstein appliqué à f et v implique la

<u>Proposition I-1</u> :

Si $f \in \mathbb{L}^1$, $\lim\limits_n \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} T^j f = \tilde{f}$ existe μ p.p. et au sens de $\mathbb{L}^1$.

$\tilde{f}$ est nulle hors de B et, sur B,

$\tilde{f} = \tilde{v}\, E\, (\frac{f}{\tilde{v}}\, 1_B \mid \mathfrak{J} \cap B)$,

l'espérance conditionnelle étant prise relativement à la mesure finie $\tilde{v}\,\mu$.

On a donc aussi $\tilde{f} = T\,\tilde{f} = T^*\tilde{f}$, puis $\int \tilde{f}\, d\,\mu = \int_B f\, d\,\mu$.

II - Quelques propriétés des coefficients des développements de Taylor des fonctions $\xi^n(x)$ où $\xi(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$.

Ecrivons les développements :

$\xi^n\,(x) = \sum\limits_{p\geq 0} \alpha_p^n\, x^p$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}}\, \xi^n(x) = \sum\limits_{p\geq 0} \beta_p^n\, x^p$.

Clairement, les α_p^n et β_p^n sont > 0 pour $p \geq n$, 0 pour $p < n$. De plus, $\sum\limits_{p\geq 0} \alpha_p^n = 1$.

En dérivant $\xi^n(x)$ on déduit les relations $\alpha_p^n = \frac{n}{2p}\, \beta_{p-1}^{n-1}$. Un simple calcul de résidus donne :

$p \geq n \quad \beta_p^n = 2^{n-2p} \binom{2p-n}{p}$.

<u>Lemme II-1</u> :

Il existe une constante absolue C > 0 telle que

$n^2 \leq p \Longrightarrow \alpha_p^n \geq c\, n\, p^{-\frac{3}{2}}$

Il revient au même de prouver l'existence de $\gamma > 0$ tel que, si p , $n \to \infty$ avec $n^2 \leq p$, l'on ait $\underline{\lim}\ 2^{n-2p}\binom{2p}{p}$ ce qui se fait simplement en utilisant la formule de Stirling.

Pour tout réel $a \geq 0$, nous noterons $[a]$ la partie entière de a.

Lemme II-2 :

Il existe une constante absolue $C' > 0$, telle que pour tous entiers p, q, n et en posant $n' = [\sqrt{n}] + 1$,

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n'} \sum_{j<n'} \alpha_p^j \; \alpha_q^j \geq \frac{c'}{n^2} \quad \text{si } p \,,\, q < n$$

Supposons $q \leq p$. On peut écrire les inégalités :

$$\sum_{j<n'} \alpha_p^j \; \alpha_q^j \geq \frac{c^2}{(pq)^{3/2}} \sum_{j=0}^{[\sqrt{q}]} j^2 \geq \frac{c'}{p^{3/2}} \geq \frac{c'}{n'^3} \quad \blacksquare$$

III - Démonstration de la proposition 0-1.-

Soient T_1 et T_2 des contractions qui commutent.

Posons

$$S = \xi\,(T_1)\;\xi\,(T_2) = \sum_{(j_1,j_2)\in\mathbb{N}^2} \alpha^1_{j_1} \; \alpha^1_{j_2} \; T_1^{j_1} \; T_2^{j_2} \,.$$

S est aussi une contraction.

Lemme III-1 :

Il existe une constante absolue $\delta > 0$ telle que si T_1 et T_2 sont des opérateurs positifs qui commutent, on ait

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n^2} \sum_{0\leq j_1,j_2<n} T_1^{j_1} \; T_2^{j_2} \leq \frac{\delta}{n'} \sum_{0\leq j<n'} S^j$$

$$\frac{1}{n'} \sum_{j<n'} S^j = \sum_{(j_1,j_2)\in N^2} \left(\frac{1}{n'} \sum_{j<n'} \alpha^j_{j_1} \; \alpha^j_{j_2}\right) T_1^{j_1} \; T_2^{j_2} \geq \frac{c'}{n^2} \sum_{j_1 j_2<n} T^{j_1}$$

en appliquant le lemme II-2 et il suffit de poser $\frac{1}{c'} = \delta$. $\blacksquare$

Si l'on a ensuite 4 contractions T_j ; $j = 1,2,3,4$, positives et commutant deux à deux, on pose successivement

$$S_1 = \xi(T_1)\,\xi(T_2) \quad , \quad S_2 = \xi(T_3)\,\xi(T_4)$$

et $S = \xi(S_1)\,\xi(S_2)$. Posons $n'' = (n')'$. On peut écrire les inégalités :

$$\frac{1}{n^4}\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4<n} T_1^{j_1}\,T_2^{j_2}\,T_3^{j_3}\,T_4^{j_4} \le \frac{\delta}{n'^2}\sum_{k_1k_2<n'} S_1^{k_1}\,S_2^{k_2} \le \frac{\delta^3}{n''}\sum_{j<n''}$$

Par récurrence sur m, on démontre ainsi la proposition 0-1 pour $d = 2^m$. Si l'on remplace alors plusieurs des T_j par l'opérateur identité I, on obtient le cas général où S a bien la forme indiquée. ∎

Nous aurons besoin d'une autre inégalité entre opérateurs dans le cas où les T_i ne sont plus nécessairement positifs, mais sont des contractions sur l'espace $\mathbb{L}^1$ de fonctions à valeurs complexes, satisfaisant toujours à la condition (1).

<u>Proposition III-1 :</u>

Il existe une constante $\chi > 0$ et une contraction positive U telle que $U\,1 \le 1$, vérifiant pour tout entier $n > 0$, et toute fonction $f \in \mathbb{L}^1$, l'inégalité

$$\frac{1}{n^d}\Big|\sum_{j_1,\dots,j_d<n} T_1^{j_1}\dots T_d^{j_d} f\Big| \le \frac{1}{n^d}\Big(\sum_{j_1,\dots,j_d<n} |T_1^{j_1}\dots T_d^{j_d}|(|f|)\Big) \le \frac{\chi}{n_d}\sum_{j<n_d} U^j(|f|)$$

En fait, avec les notations de la proposition 0-1, il suffira de prendre :

$$U = \sum_{(j_1,\dots,j_d)\in\mathbb{N}^d} a_{j_1\dots j_d}\,|T_1|^{j_1}\dots|T_d|^{j_d}$$

avec, pour chaque i, $|T_i|$ = module linéaire de T_i au sens de Chacon - Krengel (ou Dunford et Schwartz). Manifestement U est une contraction positive et $U\,1 \le 1$ puisque $|T_i|(1) \le 1$.

La seule difficulté est que les T_i commutent deux à deux, mais il n'est plus sûr que les $|T_i|$ jouissent de la même propriété. Dans le cas positif, l'inégalité se vérifie monôme par monôme de la forme $c\, T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d}$. Il est alors aisé d'en déduire l'inégalité de la proposition III-1 , en écrivant de la même manière les monômes de U^j et ceux de S^j. ∎

IV - Commençons par prouver le théorème 0-1 pour d = 1, T n'étant pas nécessairement positif. Nous utiliserons un résultat de Akcoglu et Brunel [1] suivant lequel il existe une décomposition de la partie conservative C de $|T|$: $C = \Gamma \cup \Delta$ et une fonction complexe s de module 1 sur Γ ayant les propriétés suivantes :

1) $(1 - T)\, \mathbb{L}^1(\Delta)$ est dense dans $\mathbb{L}^1(\Delta)$ pour la topologie induite par $\mathbb{L}^1$.
2) pour tout $g \in \mathbb{L}^1(\Gamma)$, $T\, g = \bar{s}\, |T|\, (sg)$ ($\bar{s}$ = conjugué de
3) Γ et Δ appartiennent à la tribu $\mathcal{J}$ des invariants de $|T|$.

En effet, les résultats obtenus dans I montrent que si l'on pose

$$f = g + h \quad , g = f\, 1_\Gamma \quad ,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j<N} T^j h \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{j<n} T^j g = \bar{S}\, \Big(\frac{1}{n} \sum_{j<n} |T|^j\, (sg)\Big) \longrightarrow \bar{s}(\widetilde{sg})$$

avec $\widetilde{sg} = |T|\, (\widetilde{sg}) = |T|^*\, (\widetilde{sg})$ et $\int_B \widetilde{sg}\, d\mu = \int sg\, d\mu$.

Or, dans [1] il est démontré que :

$$T^* h = s\, |T|^*\, (\bar{s}h) \quad \text{et} \quad |T|^* = |T^*|$$

Ceci entraîne, en posant $\check{f} = \bar{s}\, (\widetilde{sg})$

$$T^*(\bar{\check{f}}) = s\, |T|^*\, [\overline{\widetilde{sg}}] = s\, \overline{|T|^*(\widetilde{sg})} = s\, (\overline{\widetilde{sg}}) = \bar{\check{f}}.$$

La relation $T\tilde{f} = \tilde{f}$ est évidente. On a aussi $\int |\tilde{f}|\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu$
Les conditions 1), 2) et 3) du théorème 0-1 sont ainsi satisfaites pour $d = 1$.

Une conséquence de ce théorème ergodique est que, pour tout $f \in \mathbb{L}^1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une décomposition de f sous la forme :

(4) $$f = \tilde{f} + (I - T)\, f' + \varphi$$

avec $f' \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^\infty$ et $\varphi \in \mathbb{L}^1$, $||\varphi||_1 < \varepsilon$.

En effet, la décomposition (4) existe évidemment avec $f' \in \mathbb{L}^1$.
Puis, par troncation, on écrit $f' = f'' + \psi$ avec $f'' \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^\infty$ et $||\psi||_1$ suffisamment petit.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème fondamental par récurrence sur d. Supposons-le vrai pour $d - 1$ et posons pour simplifier :

$$A_n = \frac{1}{n^d} \sum_{j_1, \dots, j_d < n} T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d} \quad , \quad B_n = \frac{1}{n^{d-1}} \sum_{j_2, \dots, j_d < n} T_2^{j_2} \dots T_d^{j_d}$$

On a alors, en écrivant $f = \tilde{f}_1 + (I - T_1)\, f_1' + \varphi_1$, c'est à dire la décomposition (4) relativement à f et T_1,

(5) $$A_n f = B_n \tilde{f}_1 + \frac{I - T_1^n}{n} B_n f' + A_n \varphi.$$

Mais, $B_n \tilde{f}_1 \longrightarrow \tilde{\tilde{f}}$ avec $\tilde{f} = T_j \tilde{f}$, $\tilde{\tilde{f}} = T_j^* \tilde{\tilde{f}}$ pour $2 \leq j \leq d$
et $\int |\tilde{\tilde{f}}|\, d\mu \leq \int |\tilde{f}_1|\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu$.

Le deuxième terme de (5) tend uniformément vers 0, donc

$$\overline{\lim_n}\, |A_n f - \tilde{\tilde{f}}| \leq \overline{\lim_n}\, |A_n \varphi|.$$

En appliquant la proposition III-1, on majore le second membre par $\chi \lim_n \left(\frac{1}{n} \sum_{j<n} U^j(|\varphi|)\right) = \chi\, \psi$ avec $||\psi||_1 \leq ||\varphi||_1 < \varepsilon$.

On a donc :

$$\int \overline{\lim_n} \, |A_n f - \tilde{f}| \, d\mu \leq \chi \varepsilon .$$

On a bien prouvé que $\tilde{f} = \lim_n A_n f \quad \mu$ - p.p..

D'autre part, $B_n \tilde{f}_1 = B_n T_1 \tilde{f}_1 = T_1 B_n \tilde{f}_1 \longrightarrow T_1 \tilde{f} = \tilde{f}$

Cette dernière égalité montre que supp $\tilde{f} \subset \Gamma_1$ (décomposition de Akcoglu - Brunel relative à T_1) et l'on obtient

$$T_1^* (\bar{\tilde{f}}) = s_1 \, |T_1|^* (\overline{s_1 \tilde{f}}) = s_1 \, \overline{|T_1|^* (s_1 \tilde{f})} = s_1 \bar{s}_1 \bar{\tilde{f}} = \bar{\tilde{f}}. \blacksquare$$

V - Pour préciser le rôle des opérateurs barycentres S nous allons plus généralement considérer un opérateur V de la forme

$$V = \sum_{(j_1,\ldots,j_d) \in \mathbb{N}^d} b_{j_1 \ldots j_d} \, T_1^{j_1} \ldots T_d^{j_d} ,$$

combinaison convexe infinie des monômes $T_1^{j_1} \ldots T_d^{j_d}$, et montrer que s'il y a suffisamment de coefficients non nuls, le théorème ergodique appliqué à V donne la même limite que le théorème O-L. Pour parvenir à cela, nous commençons par un théorème général sur les points fixes d'une famille commutative de contractions d'un espace de Banach.

<u>THéorème V-1</u> :

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach , $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille dénombrable de contractions de $\mathbb{E}$, commutant deux à deux, $U = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha U_\alpha$ un barycentre des U_α avec des coefficients $c_\alpha > 0$ Alors

$$\mathbb{E} \ni x = U x \Longleftrightarrow \forall \alpha \in A \quad U_\alpha x = x$$

Il suffit de montrer le résultat pour deux contractions U_1 et U_2 et un barycentre $U = c_1 U_1 + c_2 U_2$.

Si V est une contraction, posons $E(V) = \frac{1}{e} \exp(V) = \frac{1}{e} \sum_{j \geq 0} \frac{V^j}{j!}$.

On a :

$(E(V))^n = \frac{1}{e^n} \exp (nV) = \sum_{j\geq 0} \frac{n^j}{e^n j!} V^j = \sum_{j\geq 0} a_j^n V^j$ avec $a_j^n = \frac{n^j}{e^n j!}$,

et $(I - V)\ (E(V))^n = \sum_{j=0}^{\infty} \{a_j^n - a_{j-1}^n\} V^j$ en posant $a_{-1}^n = 0$.

Ceci donne :

$$||(1 - V)\ (E(V))^n|| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j^n - a_{j-1}^n| = 2\, a_n^n ,$$

donc $\lim_n ||(I - V)\ (E(V))^n|| = 0$

L'égalité $\frac{1}{C_1} U = U_1 + \frac{C_2}{C_1} U_2$ donne :

$$e^{-\frac{1}{c_1}} \exp (\frac{1}{c_1} U) = E (U_1)\ e^{-\frac{c_2}{c_1}} \exp (\frac{c_2}{c_1} U_2)$$
$$= E (U_1) . V_2 ,$$

Les trois termes étant des contractions de $\mathbb{E}$. Si $U X = X$, on a aussi, pour tout n ,

$$X = (E(U_1))^n V_2^n X \quad \text{et} ,$$

$||X - U_1X|| \leq || (1 - U_1)\ (E(U_1))^n|| \ . \ || X ||$, donc

$$X = U_1X .$$

L'autre implication du théorème est évidente. ∎

Revenons à l'opérateur V introduit au début de ce paragraphe.

Le théorème V-1 montre alors que :

$$\mathbb{L}^1 \ni f = V f \iff \begin{cases} f = T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d} f \text{ pour les } (j_1,\dots,j_d) \\ \text{tels que } b_{j_1\dots j_d} \neq 0. \end{cases}$$

Si, pour chaque entier k, $1 \leq k \leq d$, il existe $(j_1,\dots,j_d)$ tels que $b_{j_1\dots j_k\dots j_d}$ et $b_{j_1,\dots j_k+1,\dots,j_d}$ sont non nuls, il est alors clair que

$T_kf = f$ et l'on obtient l'équivalence :

(6) $\quad \mathbb{L}^1 \ni f = V f \iff \forall\, k = 1,2,\dots,d \quad T_kf = f$

En particulier S possède la propriété (6).

Proposition V-1 :

Si une contraction barycentre V possède la propriété (6), pour tout $f \in \mathbb{L}^1$, on a :

$$\lim_n A_n(f) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j<n} V^j f \qquad \mu \text{ - p.p.}$$

Relativement à V, f se décompose en

$f \in \mathbb{L}^1 \quad f = g + h \quad , \underline{g = V\,g} \quad$ et $h \in \overline{(I - V)\,\mathbb{L}^1}$

Mais l'orthogonal de $\overline{(I - V)\,\mathbb{L}^1}$ dans $\mathbb{L}^\infty$ est le noyau de $I - V^*$.

Le théorème V-1 montre que :

$\mathbb{L}^\infty \ni \varphi \quad = V^* \varphi \Longleftrightarrow \varphi = T_k^* \varphi \quad k = 1,2,\ldots,d.$, donc que

$$\mathrm{Ker}\,(I - V^*) = \bigcap_{1 \le k \le d} \mathrm{Ker}\,(I - T_k^*) \; ,$$

qui implique à son tour

$$\overline{(I - V)\,\mathbb{L}^1} = \overline{\sum_{1 \le k \le d} (I - T_k)\,\mathbb{L}^1}.$$

Cette dernière propriété entraîne la limite

$$\lim_n A_n\, h = 0 \quad \mu \text{ - p.p.},$$

et comme $A_n g = g$, on a aussi $\lim_n A_n f = g$. ∎

VI - Donnons brièvement pour terminer la démonstration du théorème de Dunford - Schwartz mentionné dans l'introduction.
Nous nous bornerons à considérer un semi - groupe $(T_x)^{(1)}_{x \in \mathbb{R}_+^2}$ de contractions de $\mathbb{L}^1$ vérifiant la condition (1).

Pour $t > 0$, on pose $B_t = \{x = (x_1,x_2) \mid 0 \le x_1 \le t,\ 0 \le x_2 \le t\}$

et l'on considère les moyennes ergodiques :

$$f \in \mathbb{L}^1 \qquad M_t f = \frac{1}{t^2} \iint_{B_t} (T_x f)\, d\lambda\,(x) \text{ où } d\ \ (x) = dx_1\, dx_2$$

Pour $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, posons $M_{j,k} = \displaystyle\iint_{\substack{j \le x_1 < j+1 \\ k \le x_2 < k+1}} T_x d\lambda(x) = T_1^j\, T_2^k\, M_{0,0}$: l

$T_1 = T_{(1,0)}$ et $T_2 = T_{(0,1)}$. On a alors $M_n = A_n M_{0,0} = M_{0,0}\, A_n$ pour n entier et avec les notations employées dans le cas discret.

(1) Le semi-groupe est supposé être fortement mesurable.

On déduit de là que si $g \in \mathbb{L}^1 \cap L^\infty$, $(M_t - M_{[t]})\, g \longrightarrow 0$ (dans $\mathbb{L}^\infty$). Etablissons maintenant le

<u>Lemme VI-1</u> :

$$\text{Si } f \in \mathbb{L}^1 \quad \int \overline{\lim_{t\to\infty}} \; |M_t f| \; d\,\mu \leq \delta \; ||f||_1$$

(δ utilisé dans le lemme III-1)

$$|M_t f| \leq \frac{1}{t^2} \int_{B_t}\!\!\int |T_x\,(|f|)\; d\,\lambda(x) \leq \frac{1}{t^2} \int\!\!\int_{B_{n+1}} |\,T_x|(|f|)\; d\,\lambda(x)$$

avec $n = [t]$. Et ensuite

$$|M_t f| \leq \frac{1}{t^2} \sum_{j_1, j_2 < n+1} |\,T_1^{j_1}\, T_2^{j_2}\,|\; |M_{0,0}|(|f|)).$$

En appliquant la proposition III-1 et tenant compte du fait que $|M_{0,0}|$ est aussi une contraction de $\mathbb{L}^1$ on obtient l'inégalité voulue

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a une décomposition de f,

$$f = g + \varphi \quad \text{avec } g \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^\infty \;,\; ||\varphi||_1 < \varepsilon$$

Ce qui précède montre que :

$$\int \overline{\lim_{t,t'\to +\infty}} \; |\,M_t f - M_{t'} f|\; d\,\mu \leq 2\;\delta\;\varepsilon$$

puisque $M_{[t]}\, g$ et $M_{[t']}\, g$ convergent vers $M_{0,0}\tilde{g}$ μ - p.p..

Nous avons ainsi prouvé que $M_t f \to \check{f} = M_{0,0}\,\tilde{f}$ μ - p.p., $\tilde{f}$ ayant été définie dans le cas du semi - groupe discret engendré par T_1 et T_2.

La limite ergodique est invariante pour les moyennes $M_{j,k}$ puisque $\check{f} = T_1\check{f} = T_2\check{f}$. En utilisant des décompositions de $\mathbb{R}_+^2$ en carrés de côté $\frac{1}{2^p}$, on obtient :

$$\check{f} = \frac{1}{4^p} \int\!\!\int_{\substack{\frac{j}{2^p} \leq x_1 < \frac{j+1}{2^p} \\ \frac{k}{2^p} \leq x_2 < \frac{k+1}{2^p}}} (T_x \check{f})\; d\,\lambda(x) \;,\; \mu - \text{p.p.}$$

Si x_o est un point de continuité de l'application $y \longmapsto T_y\check{f}$ de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{L}^1$, on en déduit $\check{f} = T_{x_0}\check{f}$ μ - p.p. Et, d'après les propriétés de continuité des semi - groupes fortement mesurables [3], on en déduit que $\check{f} = T_x\check{f}$ a lieu aussi presque partout en x.

Il est aussi possible d'obtenir l'analogue de la proposition V-1, sous la forme suivante :

Soit $\omega : x \longmapsto \omega(x)$ une fonction > 0, borélienne bornée, et telle que $\int_{\mathbb{R}_+^2} \omega(x)\, d\lambda(x) = 1$. Appelons W la contraction barycentre :

$$W = \int_{\mathbb{R}_+^2} \omega(x)\, T_x\, d\lambda(x).$$

<u>Proposition VI-1</u> :

Pour tout $f \in \mathbb{L}^1$, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} M_t f = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j<n} W^j f \quad \mu\text{ - p.p.}$$

Le théorème V-1 donne pour tout borélien B de $\mathbb{R}_+^2$ et tout point fixe h de W dans $\mathbb{L}^1$,

$$\frac{1}{\int_B \omega\, d\lambda} \int_B \omega(x)\, T_x h\, d\lambda(x) = h \quad \mu\text{ - p.p.}$$

On en déduit en presque tout point x_o, $T_{x_o} h = h$ μ - p.p.

Soit alors $f = h + f'$ la décomposition de f relativement à W, c'est à dire telle que $h = W h$, $f' \in \overline{(I - W)\ \mathbb{L}^1}$.

f' est orthogonale à tous les $\varphi \in \mathbb{L}^\infty$ vérifiant $\varphi = W^*\varphi$.

Mais, cette dernière égalité entraîne $\varphi = T_x^*\varphi$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+^2$. Donc $f' - M_t f' \perp \varphi$ ce qui implique

$f' - \lim_{t\to+\infty} M_t f' \perp \varphi$.

Puisque $h = W h$ on en déduit :

$$f - \lim_{t\to+\infty} M_t f \perp \varphi,$$

donc $h - \lim_{t \to +\infty} M_t f \perp \varphi$ quel que soit $\varphi \in \mathrm{Ker}\,(I - \overset{*}{W})$ dans L^2

Or $h - \lim_{t \to +\infty} M_t f$ est W - invariante, donc nulle (mod μ). ■

Nous avons voulu signaler le rôle de ces contractions barycentres qui, du point de vue ergodique, se comportent comme les moyennes ergodiques. Et ceci se généralise - t - il, peut - être, à des moyennes ergodiques plus générales que celles qui ont été envisagées jusqu'à présent, tout au moins dans le cas des opérateurs

On peut enfin identifier la limite de $M_t f$ en utilisant la proposition I-1 et les résultats du paragraphe IV.

Soit $\tilde{w}$ la fonction qui est à W ce que v est à T dans la proposition I-1, s la fonction associée à la décomposition de Akcoglu - Brunel de l'opérateur W. On peut écrire :

$$\lim_{t \to +\infty} M_t f = \tilde{s}\,\tilde{w}\,E\left[\frac{sf}{\tilde{w}} \,\Big|\, \mathcal{I} \cap \mathrm{supp}\,(s)\right] ,$$

où $\mathrm{supp}\,(s) = \mathrm{supp}\,(\tilde{w})$, l'espérance conditionnelle étant prise par rapport à la mesure finie $\tilde{w}.\mu$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.A. AKCOGLU and A. BRUNEL,
" Contractions on L^1-spaces "
Trans. Am. Math. Soc. 155 , 2 , April 1971

[2] R. V. CHACON and U. KRENGEL,
" Linear modulus of a linear operator "
Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) , 553-559

[3] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ