

JEAN MÉMIN

Le théorème de Girsanov

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 2

« Probabilités », , p. 173-187

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__2_173_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE THEOREME DE GIRSANOV

par

Jean MEMIN

L'objet de cet exposé est de donner quelques résultats de Shyriaev et Liptser contenus dans [1], et d'en donner une démonstration aussi simple que possible, utilisant les outils maintenant standard de l'intégrale stochastique, tels qu'ils sont exposés dans [3] (Voir aussi [2]).

On considère le processus Z^λ , $Z_t^\lambda = \exp(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} A_t)$ où $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ sont deux processus réels, λ un nombre réel. On donne des conditions pour que Z^λ soit une martingale.

D'autre part, on démontre un théorème de Girsanov et on en déduit comme application une formule connue de Cameron - Martin.

I - NOTATIONS - RAPPELS - RESULTATS PRELIMINAIRES -

- (Ω, \mathcal{F}, P) espace probabilisé

$(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, famille croissante (complète pour P) de sous tribus de \mathcal{F} . Les processus intervenant sont (sauf mention) réels, mesurables, adaptés aux \mathcal{F}_t , définis sur (Ω, \mathcal{F}, P)

On désigne par : $\mathcal{M}_{loc}^{\mathbb{R}}$ (ou \mathcal{M}_{loc})

l'ensemble des martingales locales réelles

$\mathcal{M}_{loc,2}$ (resp $\mathcal{M}_{loc,p}$, $\mathcal{M}_{loc,p}^c$)

l'ensemble des martingales locales réelles, de carré intégrable (resp : de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable, à trajectoires continues).

Le plus souvent $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ désigne une martingale (ou une martingale locale, $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ son processus croissant associé.

Proposition 1.- ([2] , prop. 5, page 15, chap. 4)

Soit $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}_{loc,2}^c$ de processus croissant $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Si $E(A_t) < \infty$ alors $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}_2^c$

Lemme 1.-

Soit $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}_{loc}^c$ et $M_t \geq 0$.

Alors $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une surmartingale.

Démonstration :

a) $M_t \geq 0 \implies E(M_t) < +\infty$

Soit $(\tau_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de temps d'arrêts croissants, tendant vers $+\infty$ avec p , telle que $(M_{t \wedge \tau_p})_{t \in \mathbb{R}^+}$ soit une martingale relative aux \mathcal{F}_t

D'après Fatou, on a

$$E(M_{t \wedge \tau_p}) = \lim_{p \rightarrow \infty} E(M_{t \wedge \tau_p}) \geq E(M_t)$$

puisque $M_{t \wedge \tau_p}$ converge vers M_t presque sûrement quand p tend vers $+\infty$.

b) $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une surmartingale

On pose $M_s^k(\omega) = \inf(k, M_s(\omega))$ où $k \in \mathbb{N}$

M_s^k converge en croissant vers M_s

Soit $M_{s \wedge \tau_p}^k = \inf(k, M_{s \wedge \tau_p})$

alors $(M_{s \wedge \tau_p}^k)_{s \in \mathbb{R}^+}$ est une surmartingale relativement aux \mathcal{F}_s .

$M_{s \wedge \tau_p}^k$ converge vers M_s^k dans L^1 en tant que processus bornés.

Soit $t > s$ et $F \in \mathcal{F}_s$

$$\int_F M_s dP = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_F M_s^k dP = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_F M_{s \wedge \tau_p}^k dP$$

$$\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_F M_{t \wedge \tau_p}^k dP = \int_F M_t dP$$

Lemme 2.-

Soit $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}_{loc}^c$ et $M_t \geq 0$.

S'il existe $T > 0$ tel que $E(M_0) = E(M_T)$, alors

$(M_t)_{t \leq T}$ est une martingale.

Démonstration :

$(M_t)_{t \leq T}$ est une surmartingale d'après le lemme 1 pour $t \leq T$ avec $E(M_0) \geq E(M_t) \geq E(M_T)$ et donc

$$E(M_t) = E(M_0)$$

Soit $F \in \mathcal{F}_s$ et $s < t$.

$$\int_F M_t dP \leq \int_F M_s dP \quad \text{et} \quad \int_{F^c} M_t dP \leq \int_{F^c} M_s dP$$

d'où

$$\int_F M_t dP = \int_F M_s dP \quad (\text{puisque } E(M_s) = E(M_t))$$

II - LE PROCESSUS Z^λ .-

$(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est supposée continue à droite, M et A désignent deux processus réels, continus, adaptés aux $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, A étant croissant et nul en 0.

Pour tout λ réel, on considère Z^λ défini par :

$$Z_t^\lambda = \exp \left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} A_t \right)$$

On a le théorème 1 suivant démontré dans :

([3], voir aussi [2] - prop. 10 - p. 54).

Théorème 1 :

1) Il y a équivalence entre a) et b)

a) $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}_{loc,2}^c$ et $\langle M, M \rangle = A$.

b) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ Z^λ est une martingale locale, relativement aux tribus \mathcal{F}_t .

2) Si $M \in \mathcal{M}_{loc,2}^c$ et $\langle M, M \rangle = A$ et si pour tout t

$$E \left[\int_0^t \exp. (2\lambda M_s) dA_s \right] < \infty$$

alors $Z^\lambda \in \mathcal{M}_2^c$

Remarques : Soit $M_0 = 0$

1) si la condition a) du théorème 1 est remplie, alors (lemme 1) Z^λ est une surmartingale et $E(Z_t^\lambda) \leq 1$ (ce qui démontre le théorème 1 de [1])

2) s'il existe $T > 0$ tel que $E(Z_T^\lambda) = 1$, alors $(Z_t^\lambda)_{t \leq T}$ est une martingale (lemme 2)

3) si $Z^\lambda \in \mathcal{M}_{loc,2}^c$ pour tout $\lambda \in]-a, +a[$, $a > 0$ et si $E(A_t) < \infty$ alors, d'après la proposition 1, et d'après le a) $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}_2^c$

Théorème 2 : [[1] , théorème 2, page 3]

Soit $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ satisfaisant à la condition a) du théorème 1, avec $M_0 = 0$

S'il existe a tel que pour tout t $E[\exp a^2 A_t] < \infty$

a) Z^λ est une martingale pour tout λ tel que $\lambda^2 < 2 a^2$

b) Z^λ est une martingale de carré intégrable pour tout λ tel que $\lambda^2 \leq \frac{a^2}{3 + 2\sqrt{2}}$

Démonstration du a)

D'après le théorème 1, Z^λ est une martingale locale. On considère alors une suite croissante de temps d'arrêts τ_n avec $\tau_n \nearrow +\infty$ avec n , tels que $(Z_{t \wedge \tau_n}^\lambda)_{t \in \mathbb{R}^+}$ soit une martingale relative aux \mathcal{F}_t .

τ_n va montrer que la condition $E[\exp(a^2 A_t)] < \infty$ assure que $\sup_n E[(Z_{t \wedge \tau_n}^\lambda)^{2+\epsilon}] < \infty$ pour un $\epsilon > 0$ et pour $\lambda^2 < 2 a^2$. Cela nous donnera l'équaintégrabilité de $(Z_{t \wedge \tau_n}^\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc la martingalité de Z^λ en utilisant le lemme 2.

$$\begin{aligned}
 E \left[(Z_{t \wedge \tau_n}^\lambda)^{1+\varepsilon} \right] &= E \left[\exp(1+\varepsilon) \lambda M_{t \wedge \tau_n} - \frac{(1+\varepsilon)}{2} \lambda^2 A_{t \wedge \tau_n} \right] \\
 E \left[\left(\exp \left(\frac{p(1+\varepsilon)}{p} \lambda M_{t \wedge \tau_n} - \frac{p^2(1+\varepsilon)^2}{2p} \lambda^2 A_{t \wedge \tau_n} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \exp \left(\frac{\lambda^2}{2} (p(1+\varepsilon)^2 - (1+\varepsilon)) A_{t \wedge \tau_n} \right) \right) \right] \\
 &\leq (E \left[\exp(p(1+\varepsilon) \lambda M_{t \wedge \tau_n} - \frac{p^2(1+\varepsilon)^2 \lambda^2}{2} A_{t \wedge \tau_n} \right) \right])^{1/p} \\
 &\quad (E \left[\exp \left(\frac{\lambda^2}{2} (1+\varepsilon)(p(1+\varepsilon)-1) A_{t \wedge \tau_n} \right) \right])^{1/q}
 \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$A_{t \wedge \tau_n}$ est croissante en n et de plus :

$$\begin{aligned}
 (E \left[\exp \left(p(1+\varepsilon) \lambda M_{t \wedge \tau_n} - \frac{p^2(1+\varepsilon)^2 \lambda^2}{2} A_{t \wedge \tau_n} \right) \right])^{1/p} &= \\
 (E(Z_{t \wedge \tau_n}^{p(1+\varepsilon)\lambda}))^{1/p} &
 \end{aligned}$$

Comme nous pourrions choisir p, ε , indépendamment de τ_n , on peut supposer que les temps d'arrêts τ_n sont tels que

$$E(Z_{t \wedge \tau_n}^{p(1+\varepsilon)\lambda}) = 1$$

On déduit alors de ce qui précède que :

$$E \left[(Z_{t \wedge \tau_n}^\lambda)^{1+\varepsilon} \right] \leq (E \left[\exp \left(\frac{\lambda^2}{2} (1+\varepsilon)(p(1+\varepsilon)-1) A_t \right) \right])^{1/q}$$

Examinons le terme de droite et montrons que l'on peut trouver $\varepsilon > 0, p, q$ tels que :

$$\frac{\lambda^2}{2} (1+\varepsilon)(p(1+\varepsilon)-1) \leq a^2$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda^2}{2} < a^2 \text{ implique qu'il existe } \delta > 0 \text{ tel que} \\
 a^2 - \frac{\lambda^2}{2} = \delta \frac{\lambda^2}{2} .
 \end{aligned}$$

La condition requise devient alors :

$$(1+\epsilon) (p(1+\epsilon)-1)q \leq 1 + \delta$$

d'où $\frac{\epsilon q + 1 + (1+\epsilon)\epsilon q^2}{q-1} \leq \delta$

Posons $q = \frac{2 + \delta}{\delta^2}$. On obtient l'inégalité voulue dès que

$$\epsilon (1+\epsilon) \leq \frac{\delta^2}{(2+\delta) \delta + (2+\delta)^2}$$

c.q.f.d.

Démonstration du b)

On reprend la même démonstration en recherchant un intervalle pour λ tel que :

$$(1) \quad \sup_n E \left[(Z_{t \wedge \tau_n}^\lambda)^2 \right] \leq E (\exp a^2 A_t)$$

Cette inégalité nous assurera $(Z_t^\lambda)^2$ intégrable (puisque $(Z_{t \wedge \tau_n}^\lambda)^2_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous martingale convergeant presque sûrement vers $(Z_t^\lambda)^2$).

Dans le cours de la démonstration du a), nous avons vu que la condition (1) est impliquée par (1')

$$\frac{\lambda^2}{2} (1+\epsilon) (p(1+\epsilon)-1) q \leq a^2 \quad \text{avec ici } \epsilon = 1$$

En posant $\frac{a^2}{\lambda^2} = k$ et $p = \frac{q}{q-1}$, on obtient :

$$q^2 + (1-k) q + k \leq 0$$

On montre que l'on peut prendre $q = 1 + \sqrt{2}$ ce qui implique $k \geq 2 + 2\sqrt{2}$.

Remarque :

La condition $E [\exp(a^2 A_t)] < \infty$ implique que

$(M_t)_t$ est une martingale de carré intégrable (prop. 1)

Corollaire :

Soit $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus réel, élément de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}, \ell)$ (c'est à dire tel que $\int_0^t \alpha_s^2 ds$ soit fini P p.s., et $\alpha_t - \mathcal{F}_t$ mesurable), $(\beta_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ mouvement brownien réel.

$(Z_t^\lambda)_{t \in \mathbb{R}^+} = \left(\exp \left[\lambda \int_0^t \alpha_u d\beta u - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \alpha_u^2 du \right] \right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est

une surmartingale d'espérance inférieure ou égale à 1.

Si $E \left(\exp \left[a^2 \cdot \left(\int_0^t \alpha_u^2 du \right) \right] \right) < \infty$ alors Z^λ est une martingale d'espérance égale à 1, pour λ tel que $\lambda^2 < 2 a^2$.

Ce résultat est conséquence immédiate de ce qui précède puisque $\left(\int_0^t \alpha_u d\beta u \right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale locale, de processus croissant associé $\left(\int_0^t \alpha_u^2 du \right)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Remarque :

La condition $E \left[\exp a^2 \left(\int_0^t \alpha_u^2 du \right) \right]$ est en particulier réalisée si le processus $(\alpha_u)_{u \in \mathbb{R}^+}$ est borné.

2 applications des théorèmes 1 et 2

Proposition 2 : ([1], théorème 5, p. 32)

Soit $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ processus réel de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}, \ell)$, indépendant de $(\beta_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ pour chaque t .

Alors Z^λ , tels que $Z_t^\lambda = \exp \left(\lambda \int_0^t \alpha_u d\beta u - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \alpha_u^2 du \right)$ est une martingale.

Démonstration :

Soit $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ identique à (Ω, \mathcal{F}, P) et $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P}) = (\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', P \otimes P')$.

Soit de même $\bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t$

Sur $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$, on définit les processus :

$$\bar{\beta}_t(\bar{\omega}) = \beta_t(\omega) \quad \text{où } \bar{\omega} = (\omega, \omega')$$

$$\bar{\alpha}_t(\bar{\omega}) = \alpha_t(\omega')$$

$$\text{On a } \bar{P} \left[\int_0^t \bar{\alpha}_u^2(\bar{\omega}) du < \infty \right] = P' \left[\int_0^t \alpha_u^2(\omega') du < \infty \right] = 1$$

d'où $(\bar{\alpha}_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}, \ell)$

On a, par conséquent, :

$$\bar{E} \left[\exp \left(\lambda \int_0^t \bar{\alpha}_u d\bar{\beta}_u - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \bar{\alpha}_u^2 du \right) \right] \leq 1$$

où \bar{E} désigne l'espérance relative à \bar{P}

$$\text{or : } \bar{E} \left[\exp \left(\lambda \int_0^t \bar{\alpha}_u d\bar{\beta}_u - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \bar{\alpha}_u^2 du \right) \right]$$

$$= \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} \exp \left(\lambda \int_0^t \alpha_u(\omega') d\beta_u(\omega) - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \alpha_u^2(\omega') du \right) P(d\omega) \right) P'(d\omega')$$

$$\text{or } \int_0^t \alpha_u^2(\omega') du < \infty \quad P'.p.s.$$

$$\text{d'où } \exp \left(\lambda^2 \int_0^t \alpha_u^2(\omega') du \right) < \infty \quad P'.p.s.$$

ce qui implique :

$$\int_{\Omega} \exp \left(\lambda^2 \int_0^t \alpha_u^2(\omega') du \right) P(d\omega) < \infty \quad P'.p.s.$$

et, d'après le théorème 2, :

$$\int_{\Omega} \exp \left(\lambda \int_0^t \alpha_u(\omega') d\beta_u(\omega) - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \alpha_u^2(\omega') du \right) P(d\omega) = 1$$

$$\bar{E} (Z_t^\lambda) = 1$$

Z^λ est donc une martingale d'après le lemme 2.

Proposition 3 :

Soit $(\beta_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien normalisé à n dimensions.

Soit $(a_t^{ij})^{i,j}$ matrice (n,m) semi définie positive et soit $\lambda \in \mathbb{R}^m$, avec $\forall i \forall j \quad P \left[\int_0^t (a_u^{ij})^2 du < \infty \right] = 1$

(On désignera la matrice $(a_t^{ij})^{i,j}$ par a_t

Soit Z^λ défini par :

$$Z_t^\lambda = \exp \left[\langle \lambda, \int_0^t a_u d\beta_u \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle \lambda, a_u a_u^* \lambda \rangle du \right]$$

$(Z_t^\lambda)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale locale (relativement tou.

jours aux \mathcal{F}_t).

Démonstration :

Le résultat est immédiat, puisque $\langle \lambda, \int_0^t a_u d\beta_u \rangle_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale locale réelle, de processus croissant associé $\int_0^t \langle \lambda, a_u a_u^* \lambda \rangle du$ (Voir par exemple [2], th. 3 et th. 4 - p. 34 et suivantes du chapitre 4).

Enfin, le théorème 2 montre que Z^λ est une martingale dès qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$E \left[\exp\left(\frac{1}{2} + \delta\right) \int_0^t \langle \lambda, a_u a_u^* \lambda \rangle du \right] < \infty$$

III - THEOREME DE GIRSANOV.-

Le théorème suivant est une généralisation d'un théorème donné dans ([1] - th. 3 - p. 11 et suivantes).

Théorème 3.- (Théorème de Girsanov)

Soit $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ une P-martingale locale réelle, de processus croissant associé $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, définis sur (Ω, \mathcal{F}, P) , relativement à la famille croissante de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Soit $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus réel défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) , appartenant à $\mathcal{M}_2(A, \mathbb{R})$, et satisfaisant à :

$$(1) : E(Z_t)_{0 \leq t \leq T} = 1 \text{ avec } Z_t = \exp \left[\int_0^t \alpha_u dM_u - \frac{1}{2} \int_0^t \alpha_u^2 dA_u \right]$$

alors sur l'intervalle $[0, T]$

$$\text{Le processus } (X_t)_{0 \leq t \leq T}, X_t = - \int_0^t \alpha_u dA_u + M_t$$

est une Q_T -martingale locale définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q_T)$ relativement à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ de tribus, de processus croissant

$$(A_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ avec :}$$

Q_T absolument continu par rapport à P

On a : $\frac{dQ_T}{dP} = Z_T$ et plus généralement pour tout $u \leq T$

$$E \left[\frac{dQ_T}{dP} \mid \mathcal{F}_u \right] = Z_u$$

Lemme 3.-

Soit sur $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ la mesure Q_t de densité Z_t , alors Q_t est une probabilité équivalente à la restriction de P à \mathcal{F}_t .

Démonstration.-

La condition (1) assure que Q_t est une probabilité, et même puisque Z_t est une P -martingale, on a, pour $s < t$,

$$\left[\frac{dQ_t}{dP} \mid \mathcal{F}_s \right] = Z_s$$

il reste donc à montrer que $P \ll Q_t$

Pour cela, il suffit de remarquer que $P[Z_t = 0] = 0$

ce qui est évident puisque Z_t est une exponentielle.

Démonstration du théorème.-

On considère le processus $(\mathcal{E}_t^\lambda)_{t \in \mathbb{R}^+}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\mathcal{E}_t^\lambda = \exp \left(-\lambda \int_0^t \alpha_u dA_u + \lambda Mt - \frac{\lambda^2}{2} A_t \right)$$

Soit $\varphi_t^\lambda = \exp \left(\int_0^t (\alpha_u + \lambda) dM_u - \frac{1}{2} \int_0^t (\alpha_u + \lambda)^2 dA_u \right)$

$(\varphi_t^\lambda)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une P -martingale locale, puisque $(\alpha_u + \lambda)_{u \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{L}_2$

et que $(\int_0^t (\alpha_u + \lambda) dM_u)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une P -martingale locale de processus croissant $(\int_0^t (\alpha_u + \lambda)^2 dA_u)_{t \in \mathbb{R}^+}$

De plus, on a : $\varphi_t^\lambda = \mathcal{E}_t^\lambda Z_t$

On considère une suite $(\ominus_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêts tels que

$$\ominus_p = \inf \{ t \mid \varphi_t^\lambda \geq p, \lambda_t \geq p, Z_t \geq p \}$$

\ominus_p croît vers $+\infty$ avec p car $\varphi_t^\lambda, \mathcal{E}_t^\lambda, Z_t$ sont finis presque sûrement.

Soit $(\theta'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite croissante vers $+\infty$ de temps d'arrêts, telle que $(\varphi_{t \wedge \theta'_p}^\lambda)_{t \in \mathbb{R}^+}$ soit une P -martingale.

On considère alors $\tau_p = \theta_p \wedge \theta'_p$

$(\tau_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante vers $+\infty$ de temps d'arrêt et $(\varphi_{t \wedge \tau_p}^\lambda)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une P -martingale.

Soit $F \in \mathcal{F}_{t \wedge \tau_p}$. On obtient :

$$\int_F Z_{t \wedge \tau_p} \xi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dP = \int_F \varphi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dP$$

Pour $\tau_q > \tau_p$ on a :

$$\int_F Z_{t \wedge \tau_p} \xi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dP = \int_F Z_{t \wedge \tau_q} \xi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dP$$

car $(Z_{t \wedge \tau_p})_{p \geq 0}$ est $\mathcal{F}_{t \wedge \tau_p}$ -martingale.

Soit à partir de maintenant $s \leq T$, $t \leq T$

Comme $Z_{t \wedge \tau_q}$ converge vers Z_t dans L^1 lorsque $q \rightarrow \infty$ et que $\xi_{t \wedge \tau_p}^\lambda$ est borné, on a :

$$\int_F Z_{t \wedge \tau_p} \xi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dP = \int_F \lim_q (Z_{t \wedge \tau_q}) \xi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dP = \int_F Z_t \xi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dP$$

d'où
$$\int_F Z_t \xi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dP = \int_F \varphi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dP$$

mais

$$\int_F Z_t^2 \xi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dP = \int_F \xi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dQ_T$$

et pour $s > t$

$$\int_F \xi_{s \wedge \tau_p}^\lambda dQ_T \equiv \int_F \varphi_{s \wedge \tau_p}^\lambda dP = \int_F \varphi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dP = \int_F \xi_{t \wedge \tau_p}^\lambda dQ_T$$

$(\mathcal{F}_{t \wedge \tau_p}^A)_{0 \leq t \leq T}$ est donc une Q_T - martingale relativement aux $(\mathcal{F}_{t \wedge \tau_p}^A)_{0 \leq t \leq T}$. D'après le lemme 4, (dont la démonstration suit)

$(\mathcal{F}_{t \wedge \tau_p}^A)_{0 \leq t \leq T}$ est donc aussi une Q_T - martingale relativement aux $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. D'après le théorème 1, $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est alors une Q_T - martingale locale, de processus croissant $(A_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Lemme 4.-

Si $(M_{t \wedge \tau_p})_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale relative à $\mathcal{F}_{t \wedge \tau_p}^A$, c'est aussi une martingale relative aux $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Démonstration.-

Soit $F \in \mathcal{F}_s$ $s < t$

$$\int_F M_{s \wedge \tau_p} dP = \int_{F \cap [\tau_p \leq s]} M_{s \wedge \tau_p} dP + \int_{F \cap [\tau_p > s]} M_{s \wedge \tau_p} dP$$

Sur $[\tau_p \leq s]$ $M_{s \wedge \tau_p} = M_{\tau_p} = M_{t \wedge \tau_p}$ et $F \cap [\tau_p \leq s] \in \mathcal{F}_s$

donc

$$\int_{F \cap [\tau_p \leq s]} M_{s \wedge \tau_p} dP = \int_F M_{t \wedge \tau_p} dP$$

Enfin, $F \cap [\tau_p > s] \in \mathcal{F}_{s \wedge \tau_p}^A$

d'où

$$\int_{F \cap [\tau_p > s]} M_{s \wedge \tau_p} dP = \int_{F \cap [\tau_p > s]} M_{t \wedge \tau_p} dP \quad \text{c.q.f.d.}$$

Corollaire du théorème 3 : (immédiat)

Soit $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $(\beta_t)_{0 \leq t \leq T}$ mouvement brownien réel normalisé,

et supposons que $E(Z_t) = 1$ pour tout $t \leq T$ avec :

$$\exp \left[\int_0^t \alpha_u d\beta_u - \frac{1}{2} \int_0^t \alpha_u^2 du \right] = Z_t$$

alors le processus $((\xi_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathcal{F}_t, Q_T)$, où

$$\xi_t = - \int_0^t \alpha_u d\beta_u + \beta_t, \text{ et où } \frac{dQ_T}{dP} = Z_T, \text{ est un mouve-}$$

ment brownien.

(C'est une application immédiate du théorème précédent puis-

qu'alors $(\xi_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale locale de processus croissant égal à t . C'est donc un mouvement brownien).

(Voir par exemple : ([2] th. 9 - chap. 4 - p. 56).

Application : Formule de Cameron-Martin

Théorème : Soit les équations différentielles :

(1) : $dX_t = \sigma(t, X_t) d\beta_t + b(t, X_t) dt$

(2) : $dX_t = \alpha(t, X_t) d\beta_t$

avec

a) $\sigma(t, X_t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

b) $b(t, X_t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

c) $\sigma(t, X_t) \geq c > 0$ P.p.s.

d) $E \left[\exp \left[\int_0^t b(u, X_u) \sigma^{-1}(u, X_u) d\beta_u - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(u, X_u) \sigma^{-2}(u, X_u) du \right] \right] = 1$

Si $(\Omega, \mathcal{F}_t, \beta_t, P, X_t)$ est solution de (2), alors

$(\Omega, \mathcal{F}_t, \hat{\beta}_t, Q_t, X_t)$ est solution de (1).

avec $\frac{dQ_t}{dP} = Z_t = \exp \left[\int_0^t b(u, X_u) \sigma^{-1}(u, X_u) d\beta_u - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(u, X_u) \sigma^{-2}(u, X_u) du \right]$

$(\hat{\beta}_u, \hat{\mathcal{F}}_u)_{0 \leq u \leq t}$ est un mouvement brownien défini sur $(\Omega, \hat{\mathcal{F}}_t, Q_t)$.

Démonstration.-

Posons $\hat{\sigma}_t(\omega) = \sigma(t, X_t(\omega))$, $\hat{b}_t(\omega) = b(t, X_t(\omega))$.

La condition donnée implique (th. 2) que Z_t est une P - martingale relative aux $\hat{\mathcal{F}}_t$. Les probabilités Q_t de densité Z_t sont bien définies. On peut appliquer le corollaire du théorème de Girsanov.

Soit $(\hat{\beta}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, $\hat{\beta}_t = - \int_0^t \hat{b}_u \hat{\sigma}_u^{-1} du + \beta_t$

$(\hat{\beta}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien sur $(\Omega, (\hat{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, Q)$.

$(\beta_t) = \int_0^t \hat{b}_u \hat{\sigma}_u^{-1} du + \hat{\beta}_t$; on peut définir $\int_0^t \sigma_u d\beta_u$

relativement à $(\Omega, \hat{\mathcal{F}}_t, Q)$. On a alors :

$$\int_0^t \hat{\sigma}_u d\beta_u = \int_0^t \hat{\sigma}_u d\hat{b}_u + \int_0^t \hat{b}_u du$$

c'est à dire :

$$X_t = \int_0^t \sigma(u, X_u) d\hat{\beta}_u + \int_0^t b(u, X_u) du$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est donc bien solution de l'équation (1).

Références.-

[1] SHYRIAIEV - LIPTSER
 " Sur les processus stochastiques dont la mesure est équivalente à celle d'un mouvement brownien "
 (Polycopié en 1970 - en Russe)

[2] M. METIVIER
 " Processus de Markov " (Chap. IV) (Polycopié - 1972)
 Université de RENNES -

[3] DUFLO
 " Intégrale stochastique " - Cours de 3ème cycle - 1970