

MICHAËL KEANE

PIERRE MICHEL

Généralisation d'un lemme de « découpage » de Rokhlin

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 2

« Probabilités », , p. 158-172

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__2_158_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GENERALISATION D'UN LEMME DE "DECOUPAGE"

DE ROKHLIN

par

Michaël KEANE et Pierre MICHEL

Soient (Ω, β, m, T) un système dynamique apériodique et $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$ un ensemble fini d'entiers.

On constate qu'il n'est pas toujours possible de déterminer un ensemble mesurable A tel que les $T^{k_i}A$ soient deux à deux disjoints et recouvrent Ω à ϵ près. On étudie alors la mesure maximale de $\bigcup_{i=0}^{n-1} T^{k_i}A$.

On donne enfin un exemple de suite infinie $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \dots)$ telle que la mesure maximale de $\bigcup_{i=0}^{n-1} T^{k_i}A$ ait une limite inférieure nulle.

1 - Le lemme de Rokhlin.

Soit (Ω, β, m) un espace mesuré fini et T une transformation bi - mesurable de Ω dans lui-même, conservant la mesure.

T est apériodique si

$$m(\{\omega \mid \exists n \geq 1, T^n \omega = \omega\}) = 0.$$

Lemme de Rokhlin :

Si T est apériodique, pour tout entier positif n et tout nombre réel positif ε , il existe un ensemble mesurable A tel que les ensembles $A, TA, T^2A, \dots, T^{n-1}A$ soient deux à deux disjoints et vérifient

$$m\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} T^i A\right) < \varepsilon .$$

2 - Notations.-

$$K = (k_i)_{i \in [0, n-1]} ; k_i \in \mathbb{N}, k_0 = 0, k_i < k_{i+1}$$

$$\mathcal{N}_K = \{N, N \in \mathbb{N}; \forall k_i \in K, \forall k_j \in K \\ k_i \neq k_j \longrightarrow (N+k_i) \cap (N+k_j) = \emptyset\} .$$

(\mathcal{N}_K) n'est pas vide car il contient la suite

$$N = (k_{n-1}+1, 2(k_{n-1}+1), 3(k_{n-1}+1) \dots)$$

La densité extérieure de N sera notée $d^*(N)$:

$$d^*(N) = \overline{\lim}_n \frac{\text{card}(N \cap [0, n-1])}{n}$$

Enfin, nous poserons :

$$\mathcal{A}_K = \{A ; A \in \mathcal{B} ; T^{k_i} A \cap T^{k_j} A = \emptyset \quad \forall i \neq j\}$$

3 - Lemme 1.-

$$\text{Soit } \sigma = \sigma_K = \sup_{N \in \mathcal{N}_K} d^* N$$

Pour tout A de \mathcal{A}_K on a $m(A) \leq \sigma m(\Omega)$

Démonstration.-

$$\text{Soit } A \in \mathcal{A}_K . \text{ Posons } B = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{k_i} A . \\ 1_B \in L^1$$

Le théorème de Birkhoff montre que

$$\frac{1}{p} \sum_0^{p-1} 1_B(T^k \omega) \longrightarrow \bar{f}(\omega) \quad \text{m p.p.}$$

et

$$\int \bar{f} \, dm = \int f \, dm = \int 1_B \, dm = m(B) = n m(A)$$

puisque m est une mesure finie.

Soit $N_0(\omega) = \{k \mid k \in \mathbb{N}, T^k \omega \in A\}$.

Alors

$$N_0(\omega) + k_i = \{k \mid T^{k-k_i} \omega \in A\} = \{k \mid T^k \omega \in T^{k_i} A\}$$

$$0 \leq i \leq n-1$$

$$\text{et } A \in \mathcal{A}_K \longrightarrow N_0(\omega) \in \mathcal{N}_K.$$

En effet, si $k \in N_0 + k_i$ et $k \in N_0 + k_j$

on a $T^k \omega \in T^{k_i} A$ et $T^k \omega \in T^{k_j} A$

Puisque $A \in \mathcal{A}_K$, $T^{k_i} A \cap T^{k_j} A = \emptyset$ donc

$$(N_0(\omega) + k_i) \cap (N_0(\omega) + k_j) = \emptyset.$$

$$\text{Donc } 1_B(T^k \omega) = 1 \iff T^k \omega \in B = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{k_i} A$$

$$\iff k \in \bigcup_{i=0}^{n-1} N_0(\omega) + k_i$$

donc

$$\frac{1}{p} \sum_0^{p-1} 1_B(T^k \omega) = \frac{1}{p} \text{card} \left\{ \left[\bigcup_{i=0}^{n-1} (N_0(\omega) + k_i) \right] \cap [0, p-1] \right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\text{card}(N_0(\omega) + k_i) \cap [0, p-1]}{p}$$

Mais

$$\text{card} [N \cap [0, p-1]] = \text{card} [N \cap [0, p-k-1]] + \text{card} [N \cap [p-k-1, p-1]]$$

$$= \text{card} [(N+k) \cap (k, p-1)] + \text{card} [N \cap (p-k-1, p-1)]$$

d'où

$$\frac{\text{card} [N \cap (0, p-1)]}{p} = \frac{\text{card} [(N+k) \cap (k, p-1)]}{p} + \frac{\text{card} [N \cap (p-k-1, p-1)]}{p}$$

Comme $\text{card } [N \cap (p-k-1, p-1)] \leq k$

on a

$$\overline{\lim} \frac{\text{card } [N \cap (0, p-1)]}{p} = \overline{\lim} \frac{\text{card } [(N+k) \cap (k, p-1)]}{p}$$

donc

$$d^*(N) = d^*(N+k).$$

Comme $\frac{1}{p} \sum_0^{p-1} 1_B(T^k \omega)$ converge vers $\bar{f}(\omega)$ m.p.p. on déduit

$$\bar{f}(\omega) \leq \sum_{i=0}^{n-1} d^*(N_0(\omega) + k_i) = n d^*(N_0(\omega))$$

$$\leq n \sigma \quad \text{p.p.}$$

d'où

$$n m(A) = \int \bar{f} d m \leq \int n \sigma d m = n \sigma m(\Omega).$$

4 - Lemme 2.-

Pour tout ε positif, il existe A élément de \mathcal{A}_n tel que $m(A) > (\sigma - \varepsilon)m(\Omega)$.

Démonstration :

Soient N_0 tel que $d^*(N_0) = \sigma_0 > \sigma - \frac{\varepsilon}{2}$ et M un entier vérifiant

$$\begin{cases} \frac{M}{M + k_{n-1}} > 1 - \varepsilon_1 \\ \frac{\text{card } (N_0 \cap [0, M-1])}{M} > \sigma_0 - \varepsilon_2 \end{cases}$$

Appliquons le théorème de Rokhlin avec

$$K' = \{0, 1, 2, \dots, M + k_{n-1} - 1\}.$$

$\forall \varepsilon_3 > 0, \exists A_0 \in \mathcal{A}_{K'}$, tel que

si $0 \leq i \leq M + k_{n-1} - 1$

$0 \leq j \leq M + k_{n-1} - 1, i \neq j$

on ait $T^i A_0 \cap T^j A_0 = \emptyset$ et

$$m(A_0 \cup T A_0 \cup \dots \cup T^{M+k_{n-1}-1} A_0) > (1 - \varepsilon_0)m(\Omega)$$

On a donc $(M+k_{n-1}) m(A_0) > (1-\varepsilon_3) m(\Omega)$

soit $m(A_0) > \frac{1-\varepsilon_3}{M+k_{n-1}} m(\Omega)$.

Posons $A = \bigcup_{i \in N_0 \wedge [0, M-1]} T^i A_0$

Alors

$$B = \bigcup_{j \in K} T^j A \subset \bigcup_{i=0}^{M+k_{n-1}-1} T^i A_0$$

Donc B est une union disjointe de $T^j A$, et

$$m(A) = [\text{card}(N_0 \cap (0, M-1))] m(A_0)$$

$$> M \cdot (\sigma_0 - \varepsilon_2) \frac{(1-\varepsilon_3) m(\Omega)}{M+k_{n-1}}$$

$$> (1-\varepsilon_1) (\sigma_0 - \varepsilon_2) (1-\varepsilon_3) m(\Omega)$$

$$\geq (\sigma_0 - \frac{\varepsilon}{2}) m(\Omega) \geq (\sigma - \varepsilon) m(\Omega).$$

Le recouvrement maximum de Ω a donc pour mesure $n \sigma m(\Omega)$

où σ est la $\overline{\lim}_{N \in \mathcal{N}_K} d^*(N)$

donc

Le lemme de Rokhlin n'est plus vrai lorsque l'on remplace l'ensemble $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ par un ensemble quelconque d'entiers :

$$(k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$$

Par exemple, soit

$$K = K_{q,n} = (0, 1, 2, \dots, n, 2n, 3n, \dots, qn)$$

et $A \in \mathcal{B}$, un sous-ensemble mesurable de Ω tel que

$$\forall i \in K, \forall j \in K, i \neq j \longrightarrow T^i A \cap T^j A = \emptyset$$

Montrons que $\forall r, \forall s, 0 \leq r \leq qn$

$$0 \leq s \leq qn \quad r \neq s$$

implique $T^r A \cap T^s A = \emptyset$.

Soit $r = kn + i$

$$s = k'n + j.$$

avec

$$0 \leq k' \leq k < q$$

$$kn + i \neq k'n + j$$

$$0 \leq i \leq n$$

$$0 \leq j \leq n.$$

$$a) i < j. \quad T^{kn+i} A \cap T^{k'n+j} A = T^{k'n+i} (T^{(k-k')n} A \cap T^{(j-i)} A)$$

Or $(k-k')n \in K$

$$j-i \in K$$

donc $T^r A \cap T^s A = \emptyset$.

$$b) i > j. \quad T^{kn+i} A \cap T^{k'n+j} A = T^{(k'-1)n+i} [T^{(k-k'+1)n} A \cap T^{n+j-i} A]$$

Or $0 \leq n+j-i \leq n$ donc $n+j-i \in K$

et $(k-k'+1)n \in K$

On a encore $T^r A \cap T^s A = \emptyset$.

Il y a donc au moins $(qn+1)$ sous-ensembles " $T^i A$ " disjoints dans Ω .

Comme $m(T^i A) = m(A)$ on en déduit

$$m(A) \leq \frac{1}{qn+1} m(\Omega)$$

donc

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i \in K} T^i A\right) &\leq \frac{n+q}{qn+1} m(\Omega) \\ &\leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{q}\right) m(\Omega) \end{aligned}$$

$< \epsilon$ si n et q sont suffisamment grands.

On peut donc choisir K pour que le "recouvrement maximum" soit aussi petit que l'on veut.

6 - Proposition.-

Il existe un nombre σ_K , indépendant de (Ω, β, m, T) ,
 $0 < \sigma_K \leq \frac{1}{n}$ tel que :

1°) $\forall A \in \mathcal{A}_K : m(A) \leq \sigma_K m(\Omega)$

2°) $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathcal{A}_K$ tel que
 $m(A) > (\sigma_K - \varepsilon) m(\Omega)$

3°) On peut choisir K de telle sorte que $n\sigma_K$ soit
aussi voisin de 0 que l'on veut.

7 - σ_K est un nombre rationnel.

7.1 Introduisons l'ensemble des "différences" :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_K = \{ k_i - k_j \mid i \in \{ 0, n-1 \}, j \in \{ 0, i-1 \} \}$$

et notons \mathcal{D}^* le complémentaire de \mathcal{D} dans \mathbb{N} .

Soit $N \in \mathcal{N}_K$ avec $N = \{ 0, n_1, n_2, \dots, n_p, \dots \}$

Alors $n \in \mathcal{N}_K \iff n_i - n_j \in \mathcal{D}^* \quad \forall i, \forall j.$

Sinon $n_i - n_j = k_\ell - k_m$

donc $n_i + k_m = n_j + k_\ell$

or $n_i + k_m \in N + k_m$ et $n_j + k_\ell \in N + k_\ell$

Comme $N + k_m$ et $N + k_\ell$ sont deux ensembles disjoints

ceci est impossible.

La recherche d'une suite N de \mathcal{N}_K équivaut donc à celle
d'une suite

$$\begin{aligned} D &= \{ n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_2, \dots, n_p - n_{p-1}, \dots \} \\ &= \{ d_1, d_2, d_3, \dots \} \end{aligned}$$

avec $\sum_{h=0}^j d_{i+h} \in \mathcal{D}^* \quad \forall i, \forall j.$

7.2 Soit $\alpha_n(D)$ la moyenne de Césaro de (d_1, d_2, \dots, d_n) et $\alpha(D)$ la limite inférieure de $\alpha_n(D)$ pour n tendant vers l'infini :

$$\alpha_n(D) = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}$$

$$\alpha(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(D)$$

Nous pouvons ne considérer que des " d_i " dans $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^* \cap (0, k_{n-1})$ car si on augmente d_i , $\alpha_n(D)$ augmente.

$$\text{Nous avons } d_1 = n_1$$

$$d_1 + d_2 = n_2$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = n_3$$

$$\sum_{i=1}^n d_i = n_n$$

$$\text{donc } n = \text{card} \left[N \cap \left(0, 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^n d_i\right) \right]$$

$$\text{Alors } \delta_m = \frac{\text{card}[N \cap (0, m)]}{m} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n d_i < m < \sum_{i=1}^{n+1} d_i$$

Puisqu'il n'y a pas d'éléments de N entre $\sum_{i=1}^n d_i$ et $\sum_{i=1}^{n+1} d_i$, on a

$$\delta_m = \frac{\text{card} \left[N \cap \left(0, \sum_{i=1}^n d_i + \lambda\right) \right]}{\sum_{i=1}^n d_i + \lambda}$$

avec $\lambda < d_{i+1} < k_{n-1}$ car $d_{i+1} \in \mathcal{D}^*$

$$\text{d'où } \delta_m = \delta \sum_{i=1}^n d_i \times \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n d_i + \lambda}$$

$$\text{Comme } \lambda \text{ est borné, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n d_i + \lambda} = 1$$

$$\text{donc } \overline{\lim} \delta_m = \overline{\lim} \delta \sum_{i=1}^n d_i$$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } d^*(N) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card} [N \cap (0, \sum_{i=1}^n d_i)]}{\sum_{i=1}^n d_i} \\
 &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sum_{i=1}^n d_i} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}} \\
 &= \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(L)} = \frac{1}{\alpha(D)}
 \end{aligned}$$

7.3 Nous allons maintenant montrer qu'il existe une suite D_0 , périodique, telle que $\alpha(D_0)$ soit minimum.

Pour cela, nous allons étudier le problème suivant :

Soient m points pondérés de masses respectives a_1, a_2, \dots, a_m tels que seuls certains " couples " $a_i a_j$ soient " admissibles ". Nous dirons qu'une suite est " admissible " si tous les couples consécutifs extraits le sont.

Alors, il existe parmi toutes les suites admissibles une suite $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, avec

$$\omega_i \in \{a_\ell\} \quad \ell = 1, \dots, m$$

dont la limite des moyennes de Césaro soit minimale et cette suite peut être choisie périodique.

7.4 Démonstration

Formons toutes les " boucles admissibles " c'est à dire toutes les suites finies permises, sans points doubles.

Nous avons donc

$b = b_1 b_2 \dots b_k$ ($b_1 \dots$) que nous écrirons

$b = b_1 b_2 \dots b_k$ avec $b_i \in \{a_\ell\}$ $\ell \in (1 \dots m)$

$b_i \neq b_j$ si $i \neq j$.

Il y a au plus

$m + \frac{m(m-1)}{2} + \dots + \frac{m!}{m}$ telles boucles donc un nombre fini de boucles admissibles.

(Remarquons que pour les déterminer il suffit de considérer toutes les boucles débutant par a_1 , puis toutes celles débutant par a_2 et ne contenant pas a_1 , puis toutes celles débutant par a_3 et ne contenant ni a_1 , ni a_2 ...).

Soit alors

$$\Omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_n \dots,$$

avec $\omega_i \in \{a_i\} \quad i \in (1 \dots m)$, une suite admissible.

$$\text{Posons } \Omega_n = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$$

$$i_0 = i(\Omega) = \inf \{ i \mid \omega_i \in (\omega_1 \dots \omega_{i-1}) \}$$

$$j_0 = j(\Omega) \text{ défini par } \omega_j(\Omega) = \omega_{i_0}(\Omega)$$

avec $j(\Omega) < i(\Omega)$.

$$\lambda_0 = \lambda(\Omega) = i(\Omega) - j(\Omega)$$

$$b_0 = b(\Omega) = \omega_j(\Omega) \omega_{j_0+1} \dots \omega_{i_0-1}.$$

$$\text{et } \varphi(\Omega) = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{j_0-1} \omega_{i_0} \omega_{i_0+1} \dots \omega_n \dots$$

Si $\alpha(\Omega_n)$ est la moyenne de Césaro de Ω_n nous avons :

$$\alpha(\Omega_n) = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}{n}. \text{ Donc}$$

$$n \alpha(\Omega) = (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{j_0-1}) + (\omega_{j_0} + \omega_{j_0+1} + \dots + \omega_{i_0-1}) + (\omega_{i_0} + \dots + \omega_n)$$

$$n \alpha(\Omega_n) = (\omega_{j_0} + \omega_{j_0+1} + \dots + \omega_{i_0-1}) + (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{j_0-1} + \omega_{i_0} + \dots + \omega_n)$$

$$= \lambda(\Omega) \alpha[b(\Omega_n)] + [n - \lambda(\Omega)] \alpha[\varphi(\Omega_n)]$$

$$= \lambda_0 \alpha(b_0) + (n - \lambda_0) \alpha[\varphi(\Omega_n)]$$

Appliquons de nouveau " l'opérateur φ " à $\varphi(\Omega_n)$

Nous obtenons

$$[n - \lambda_0(\Omega_n)] \alpha[\varphi(\Omega_n)] = \lambda_1 \alpha(b_1) - [n - \lambda_0 - \lambda_1] \alpha(\varphi^2(\Omega_n))$$

d'où $m \alpha(\Omega_n) = \lambda_0 \alpha(b_0) + \lambda_1 \alpha(b_1) + (n - \lambda_0 - \lambda_1) \alpha[\varphi^2(\Omega_n)]$

et, de proche en proche, :

$$n \alpha(\Omega_n) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \alpha(b_i) + [n - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i] \alpha[\varphi^k(\Omega_n)]$$

avec $K = n - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \leq m$ car comme il y a m valeurs distinctes de ω_i , dans tout ensemble de longueur supérieure à m il y a au moins une boucle.

D'où

$$\begin{aligned} n \alpha(\Omega_n) &= \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \alpha(b_i) + K \alpha[\varphi^k(\Omega_n)] \\ &\geq \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \right) \alpha_0 + K \alpha[\varphi^k(\Omega_n)] \end{aligned}$$

où α_0 représente l'infimum des moyennes de Césaro des boucles.

D'autre part, $\varphi^k(\Omega_n)$ comporte K termes et sa moyenne de Césaro est supérieure ou égale à $\inf a_i$ donc

$$\begin{aligned} n \alpha(\Omega_n) &\geq \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \right) \alpha_0 + K \inf_i (a_i) \\ \alpha(\Omega_n) &\geq \frac{n-K}{n} \alpha_0 + \frac{K}{n} \inf_i a_i \\ &\geq \alpha_0 - \frac{K}{n} \alpha_0 + \frac{K}{n} \inf_i a_i \end{aligned}$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(\Omega_n) \geq \alpha_0$.

Donc, il existe une suite "minimale" qui est périodique : c'est

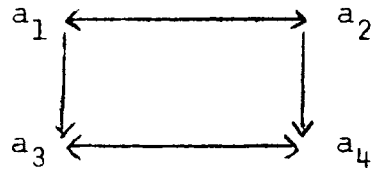
la suite $b_{\alpha_0} \ b_{\alpha_1} \ b_{\alpha_0} \ \dots$

où b_{α_0} est une boucle vérifiant $\alpha(b_{\alpha_0}) = \alpha_0 = \inf \alpha(b)$, l'infimum étant pris sur l'ensemble des boucles admissibles.

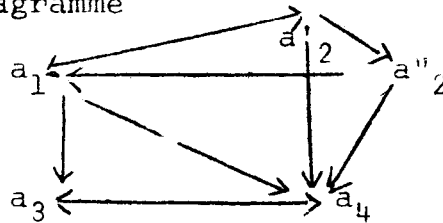
7.5 Remarque.-

Si une paire $a_i a_i$ est admissible sans que le triplet $a_i a_i a_i$ ne le soit, le raisonnement précédent s'applique encore en remplaçant le point a_i par deux points a'_i et a''_i , de même poids que a_i et en considérant les nouvelles paires admissibles convenables.

Exemple : supposons que l'on ait quatre points, les paires admissibles étant déterminées par le diagramme suivant :



si $a_2 a_2$ est admissible sans que $a_2 a_2 a_2$ le soit, on obtiendra le nouveau diagramme



7.6 Prenons pour " a_n " tous les blocs admissibles B_e tels que la somme des " d_i " d'un tel bloc soit supérieure ou égale à k_{n-1} , tous les blocs étant choisis de même longueur. Ceci est toujours possible : il suffit de prendre pour longueur commune des blocs le nombre $k_{n-1} + 1$. En pratique, la longueur choisie pourra être très inférieure à ce nombre.

Alors si $B_1 B_2$ et $B_2 B_3$ sont admissibles, $B_1 B_2 B_3$ l'est car B_1 est sans influence sur B_3 puisqu'ils sont séparés par des termes dont la somme est supérieure à k_{n-1} donc appartient à \mathcal{D}^* .

Les blocs étant choisis de même longueur, la moyenne de Césaró des d_i est la moyenne de Césaró des blocs positifs.

La suite minimale périodique trouvée dans le lemme nous fournit donc une suite minimale périodique d'éléments de D dont la limite des moyennes de Césaro est rationnelle.

Donc σ est rationnel.

7.7 Exemples.-

a) Reprenons l'exemple de 4.5 :

$$K = \{0, 1, 2, \dots, n, 2n, 3n, \dots, qn\}$$

$$\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, qn\}$$

donc $\mathcal{D}^* = \{m \mid m \geq qn+1\}$ et la suite minimale périodique est trivialement :

$$D = (0, qn+1, qn+1, \dots)$$

d'où $N = (0, qn+1, 2(qn+1), 3(qn+1), \dots)$

et $\sigma_K = \frac{1}{qn+1}$

b) $K = \{0, 3, 7\}$

$$\mathcal{D} = \{0, 3, 4, 7\}$$

$$\mathcal{D}^* = \{1, 2, 5, 6, 8\}$$

$$b_0 = 1, 1, 8$$

et $\alpha(b_0) = \inf(a_i) = \frac{10}{3}$

d'où $\sigma = \frac{3}{10}$

et $m(A \cup T^3A \cup T^7A) < \frac{9}{10} m(\Omega)$

si A, T^3A et T^7A sont disjoints.

8 - Exemple d'une suite infinie (k_i) , $(k_i < k_{i+1})$ telle que la mesure maximale de $\bigcup_0^{n-1} T^{k_i} A$ ait une limite inférieure nulle.

Nous allons montrer que la suite ci dessous répond à la question :

$$0, 1, 2, 3, \dots, n, 2n, 3n, \dots, qn,$$

$$m_1, m_1+1, m_1+2, \dots, m_1+2n, m_1+4n, m_1+6n, \dots, m_1+2^2qn,$$

$$m_2, m_2+1, m_2+2, \dots, m_2+2^2n, m_2+2 \cdot 2^2n, m_2+3 \cdot 2^2n, \dots, m_2+2^4qn,$$

$$m_3, m_3+1, m_3+2, \dots, m_3+2^3n, m_3+2 \cdot 2^3n, m_3+3 \cdot 2^3n, \dots, m_3+2^6qn$$

$$m_4, m_4+1, m_4+2, \dots, m_4+2^4n, m_4+2 \cdot 2^4n, m_4+3 \cdot 2^4n, \dots, m_4+2^8qn$$

.....

.....

$$m_p, m_p+1, m_p+2, \dots, m_p+2^p n, m_p+2 \cdot 2^p n, m_p+3 \cdot 2^p n, \dots, m_p+2^p q \cdot 2^p n$$

.....

avec $m_{p+1} > m_p + 2^{2p}qn.$

Considérons la sous suite finie $K_p +$

$$K_p = \{0, 1, \dots, m_p + 2^{2p}qn\}.$$

et soit σ_p correspondant.

L'ensemble des différences contient l'ensemble des différences $k_j - k_i$ pour $m_p < k_i < k_j < m_{p+1}$, c'est à dire l'ensemble des différences de l'ensemble

$$0, 1, 2, \dots, 2^p n, 2 \cdot 2^p n, 3 \cdot 2^p n, \dots, 2^p q \cdot 2^p n$$

Or, cet ensemble " différence " est l'ensemble de tous les nombres entiers compris entre 0 et $2^{2p}qn.$

La mesure maximale de A_p , sous ensemble associé à K_p , est donc inférieure à

$$\left(\frac{1}{2^{2p}qn + 1} \right) m(\Omega)$$

donc $\sigma_p < \frac{1}{2^{2^p q n + 1}} < \frac{1}{2^{2^p q n}}$. Or si ρ_p est le nombre de termes de la suite K_p on a :

$$\begin{aligned} \rho_p &= (n+1) + (q-1) \\ &\quad + (2n+1) + (2q-1) \\ &\quad + (2^2 n+1) + (2^2 q-1) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (2^p n+1) + (2^p q-1) \\ &= n(1+2+2^2 + \dots + 2^p) + q(1+2+2^2 + \dots + 2^p) \\ &= (n+q) \frac{2^{p+1} - 1}{2 - 1} = (n+q) (2^{p+1} - 1) \end{aligned}$$

donc

$$\rho_p \sigma_p < \frac{(n+q) (2^{p+1} - 1)}{2^{2^p q n}} < \frac{1}{2^{p-1}} \frac{n+q}{n q} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

REFERENCE

ROKHLIN - Dobl. Akad. Nank. SSRR. - 60-1948 - p. 349-351
(en russe)