

MONIQUE TOUGERON

Comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur elliptique dégénéré

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 6, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__1_A6_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES D'UN

OPERATEUR ELLIPTIQUE DEGENERÉ

D'après NORDIN

par

Monique TOUGERON

Introduction :

Dans le cas particulier où $A = - \sum_j D_j (\varphi D_j)$ et où $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ est constant sur Γ , Nordin améliore le résultat de Baouendi et Goulaouic [1] concernant le comportement du nombre $N(\lambda)$ de valeurs propres inférieures à λ ; (au lieu d'un encadrement, il obtient un équivalent de $N(\lambda)$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$).

I - FORMULE DE COURANT-FISHER

1. Opérateurs bornés (Riesz-Nagy [4] ou Courant Hilbert [2])

Données : H espace de Hilbert de dimension infinie ; $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint compact dans H , strictement positif.

Résultat : Si $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k \rightarrow 0$ désigne la suite des valeurs propres de T , on a :

$$\mu_k = \begin{array}{l} \text{Min} \\ \mathcal{L} \text{ sev de } H \\ \dim \mathcal{L} \leq k-1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Max} \\ u \in \mathcal{L}^\perp \\ u \neq 0 \end{array} \quad \frac{(Tu, u)_H}{\|u\|_H^2}$$

2. Opérateurs non bornés

Données : $(A, D(A))$ non borné, auto-adjoint, strictement positif dans H ; injection de $D(A)$ dans H compacte.

Résultat : Si $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \rightarrow +\infty$, désigne la suite

des valeurs propres de $(A, D(A))$, on a :

$$\lambda_k = \begin{array}{l} \text{Max} \\ \mathcal{L} \text{ sev de } D(A)^{1/2} \\ \dim \mathcal{L} \leq k-1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Min} \\ u \in \mathcal{L}^\perp \\ u \in D(A)^{1/2} \\ u \neq 0 \end{array} \quad \frac{\|A^{1/2}u\|_H^2}{\|u\|_H^2}$$

3. Formes quadratiques

Données : $a(u)$, $b(u)$ fonctionnelles quadratiques définies positives sur un espace vectoriel W ; V désigne le complété de W pour la norme $(a(u))^{1/2}$, H le complété de W pour $(b(u))^{1/2}$; $a(u,v)$ et $b(u,v)$ formes sesquilinéaires associées à $a(u)$ et $b(u)$ sont des produits scalaires sur V et H ; on suppose que l'on a les inclusions $W \subset V \subset H$ et que : $\forall u \in V, a(u) \geq b(u)$.

Résultat : D'après un théorème de Friedrichs (Riesz-Nagy [4]), il existe un unique opérateur non borné $(A, D(A))$ dans H , auto-adjoint, de domaine $D(A) \subset V$, vérifiant : $a(u,v) = b(Au,v)$ pour tous $u \in D(A), v \in V$; de plus A est positif, $D(A)$ est dense dans V et $D(A)^{1/2} = V$; si de plus l'injection de V dans H est compacte, le $k^{\text{ième}}$ valeur propre de $(A, D(A))$ donnée en 2) s'exprime aussi par :

$$\lambda_k = \begin{array}{l} \text{Max} \\ \mathcal{L} \text{ sev de } V \\ \dim \mathcal{L} \leq k-1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Min} \\ u \in \mathcal{L}^\perp \\ u \in V \\ u \neq 0 \end{array} \quad \frac{a(u)}{b(u)}$$

On dit que $(A, D(A))$ est l'extension de Friedrichs associée à a, b et W , et que λ_k est la $k^{\text{ième}}$ valeur propre associée à (a,b,W) . (Par abus de langage, on parlera de l'extension de Friedrichs associée à a,b,W quand il faudra prendre celle associée à $a+b,b,W$ et lui retrancher l'identité, lorsqu'on aura $a(u) \geq 0$ au lieu de $a(u) \geq b(u)$).

II - PREMIERE APPLICATION DE LA FORMULE DE COURANT-FISHER

Données :

. Ω ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n > 1$, de bord Γ , tel que $\bar{\Omega}$ soit une variété à bord de classe C^∞ .

. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 0\}$, $\Gamma = \{x \mid \varphi(x) = 0\}$, $d\varphi(x) \neq 0$ sur Γ .

On note $V = \{u \in L^2(\Omega), \sqrt{\varphi} D_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n\}$.

. $a(u), b(u)$ formes quadratiques intégral-différentielles définies dans V

$$\begin{cases} a(u) = \int_{\Omega} \varphi \sum_j (D_j u)^2 dx = \sum_j \|\sqrt{\varphi} D_j u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ b(u) = \int_{\Omega} u^2 dx = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{cases}$$

Résultat : Les "données" de I.3) sont satisfaites par $a+b, b, V$; d'après Bocuendi-Goulaouic [2], l'extension de Friedrichs associée à a, b, V est donc l'opérateur $(A, D(A))$ non borné dans $L^2(\Omega)$ défini par :

$$D(A) = \{u \in H^1(\Omega), \varphi u \in H^2(\Omega)\}, \quad Au = - \sum_j D_j (\varphi D_j u);$$

et, l'injection de $D(A)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, la $k^{\text{ième}}$ -valeur propre de $(A, D(A))$ est donnée par :

$$\lambda_k = \begin{array}{cc} \text{Max} & \text{Min} \\ \mathcal{L} \text{ sev de } V & u \in \mathcal{L}^\perp_V \\ \dim \mathcal{L} \leq k-1 & u \neq 0 \end{array} \frac{a(u)}{b(u)}.$$

III - ETUDE DE LA FONCTION $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega)$.

Soit Ω_1 un ouvert contenu dans Ω ; on note $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega_1)$, (resp. $N(\lambda, \frac{a}{b}, \bar{\Omega}_1)$) le nombre de valeurs propres associées à $(a, b, C^1_0(\Omega_1))$, (resp. $(a, b, C^1(\bar{\Omega}_1))$) inférieures ou égales à λ . De la formule de Courant-Fisher on déduit :

- 1) λ et Ω_1 étant fixés si $\frac{a}{b}$ croît, $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega_1)$ décroît, (resp. $N(\lambda, \frac{a}{b}, \overline{\Omega}_1)$).
- 2) λ et $\frac{a}{b}$ étant fixés, si Ω_1 décroît $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega_1)$ et $N(\lambda, \frac{a}{b}, \overline{\Omega}_1)$ décroissent.
- 3) λ et $\frac{a}{b}$ étant fixés, si $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$, alors posant

$$N(\Omega) = N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega),$$

on a

$$N(\Omega_1) + N(\Omega_2) \leq N(\Omega) \leq N(\overline{\Omega}) \leq N(\overline{\Omega}_1) + N(\overline{\Omega}_2).$$

IV - COMPORTEMENT DE $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega)$ LORSQUE $\lambda \rightarrow +\infty$

Dans le cas particulier où la dérivée normale (intérieure) de φ sur Γ , $\varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$, est constante sur Γ , on se propose de démontrer que :

(1) $N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega)$ est équivalent à $\sigma_n(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow \infty$

avec $\sigma_2(\lambda) = d_2 \lambda \log \lambda$, $\sigma_n(\lambda) \sim d_n \lambda^{n-1}$ pour $n \geq 3$, et $d_2 = \frac{c_1}{4} (\frac{\partial \varphi}{\partial v})^{-1/2}$,

$$d_n = (n-1) c_{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^{\frac{1-n}{2}} \int_1^\infty \left[\frac{t+1}{2}\right] t^{-n} dt \text{ pour } n \geq 3,$$

$$c_{n-1} = (2\pi)^{1-n} \omega_{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^{\frac{1-n}{2}} \text{ vol}(\Gamma) \text{ pour } n \geq 2,$$

ω_n désignant le volume de la boule unité de \mathbb{R}^n .

1. Localisation au voisinage de Γ

Γ étant une sous-variété compacte de \mathbb{R}^n de dimension $(n-1)$, on peut trouver un nombre fini d'ouverts de \mathbb{R}^n , recouvrant Γ , dans chacun desquels (y, t) , (où y est l'intersection avec Γ de l'unique géodésique minimal passant par x et normale à Γ , et t la distance de x à y), soit un système de coordonnées. Pour ε assez petit, on note alors :

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid 0 < t < \varepsilon\}$$

et Ω_ε^* le complémentaire de Ω_ε dans Ω . De III 3), on déduit alors :

$$N(\Omega_\varepsilon) \leq N(\Omega) \leq N(\overline{\Omega_\varepsilon}) + N(\overline{\Omega_\varepsilon^*}),$$

et donc

$$\lim_{\lambda} \frac{N(\lambda, \Omega_{\epsilon})}{\sigma_n(\lambda)} \leq \liminf \frac{N(\lambda, \Omega)}{\sigma_n(\lambda)} \leq \overline{\lim} \frac{N(\lambda, \Omega)}{\sigma_n(\lambda)} \leq \overline{\lim} \frac{N(\overline{\Omega}_{\epsilon})}{\sigma_n(\lambda)} + \overline{\lim} \frac{N(\overline{\Omega}_{\epsilon}^*)}{\sigma_n(\lambda)}$$

L'extension de Friedrichs associée à $(a, b, \overline{\Omega}_{\epsilon}^*)$ est $(A, D(A))$ où A est un opérateur uniformément elliptique dans $\overline{\Omega}_{\epsilon}^*$ et $D(A)$ le domaine du problème de Neumann dans $\overline{\Omega}_{\epsilon}^*$; le comportement à l'infini de $N(\lambda, \overline{\Omega}_{\epsilon}^*)$ est donc connu (Garding [3]) : il est de type $O_{\epsilon}(\lambda^{n/2})$; ceci réduit la suite d'inégalités ci-dessus à :

$$\liminf \frac{N(\overline{\Omega}_{\epsilon})}{\sigma_n(\lambda)} \leq \liminf \frac{N(\Omega)}{\sigma_n(\lambda)} \leq \overline{\lim} \frac{N(\Omega)}{\sigma_n(\lambda)} \leq \overline{\lim} \frac{N(\overline{\Omega}_{\epsilon})}{\sigma_n(\lambda)}$$

Pour avoir (1), il suffit donc de démontrer :

(2) ϵ étant fixé assez petit, $\liminf \frac{N(\overline{\Omega}_{\epsilon})}{\sigma_n(\lambda)} = \overline{\lim} \frac{N(\overline{\Omega}_{\epsilon})}{\sigma_n(\lambda)} = 1$.

2. Séparation des variables

Dans le système de coordonnées (y, t) , la métrique réiemannienne de \mathbb{R}^n est

$$dt^2 + \sum_{j,k=1}^{n-1} g_{jk}(y, t) dy^j dy^k,$$

donc sur Ω_{ϵ} et pour $u \in C_0^1(\Omega_{\epsilon})$ ou $C_1(\overline{\Omega}_{\epsilon})$, on a

$$\begin{cases} a(u) = \int_{\Omega_{\epsilon}} \varphi(y, t) \left(\sum_{j,k=1}^{n-1} g^{jk}(y, t) \partial_j u \partial_k u + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right) g^{1/2} dy dt \\ b(u) = \int_{\Omega_{\epsilon}} u(y, t)^2 g^{1/2} dy dt \end{cases}$$

avec $g = |\det(g_{jk})_{jk}|$, $(g^{jk})_{jk} = (g_{jk})_{jk}^{-1}$;

On pose $\gamma_{jk}(y) = g_{jk}(y, 0)$ pour $j, k = 1, \dots, n-1$; $\sum_1^{n-1} \gamma_{jk} dy^j dy^k$ est alors la métrique induite par (g_{jk}) sur Γ .

On remarque que pour t petit, on a :

$$\varphi(y, t) = t \varphi'_t(y, 0) (1 + O(t))$$

$$g^{1/2}(t, y) = g^{1/2}(0, y) (1 + O(t)) \equiv \gamma^{1/2}(y) (1 + O(t))$$

$$\text{et } \sum_{j,k=1}^{n-1} g^{jk}(y,t) \partial_j u \partial_k u = (1+O(\epsilon)) \sum_{j,k=1}^{n-1} \gamma^{jk}(y) \partial_j u \partial_k u ;$$

si donc on pose :

$$\begin{cases} a_1(u) = \int_{\Omega_\epsilon} t \Psi'_t \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sum_1^{n-1} \gamma^{jk}(y) \partial_j u \partial_k u \right) \gamma^{1/2} dy dt \\ b_1(u) = \int_{\Omega_\epsilon} u^2 \gamma^{1/2} dy dt \end{cases}$$

on a :

$$\text{i) } b(u) - b_1(u) = \int_{\Omega_\epsilon} O(\epsilon) u^2 \gamma^{1/2} dy dt, \text{ d'où } |b(u) - b_1(u)| < O(\epsilon) \cdot b_1(u)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } a(u) - a_1(u) = \int_{\Omega_\epsilon} t \Psi'_t(y,0) \gamma^{1/2} & \left[(1+O(\epsilon)) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + (1+O(\epsilon)) \sum_1^{n-1} \gamma^{jk} \partial_j u \partial_k u \right] - \\ & - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \sum_1^{n-1} \gamma^{jk} \partial_j u \partial_k u \Big] dy dt \end{aligned}$$

La partie entre crochets est du type

$$O_1(t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + O_2(t) \sum_1^{n-1} \gamma^{jk} \partial_j u \partial_k u ;$$

on a donc :

$$|a(u) - a_1(u)| \leq O(\epsilon) a_1(u),$$

et, pour ϵ assez petit :

$$\frac{1}{1+O(\epsilon)} \cdot \frac{a_1(u)}{b_1(u)} \leq \frac{a(u)}{b(u)} \leq \frac{a_1(u)}{b_1(u)} \cdot \frac{1}{1-O(\epsilon)} ;$$

d'où l'on déduit, d'après III 1)

$$\begin{cases} N(\lambda, \frac{a}{b}, \bar{\Omega}_\epsilon) \leq N(\lambda, \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{1}{1-O(\epsilon)}, \bar{\Omega}_\epsilon) \\ N(\lambda, \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{1}{1+O(\epsilon)}, \Omega_\epsilon) \leq N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega_\epsilon) \end{cases}$$

et ceci est équivalent à :

$$N(\lambda(1+O(\epsilon)), \frac{a_1}{b_1}, \Omega_\epsilon) \leq N(\lambda, \frac{a}{b}, \Omega_\epsilon) \leq N(\lambda, \frac{a}{b}, \bar{\Omega}_\epsilon) \leq N(\lambda(1-O(\epsilon)), \frac{a_1}{b_1}, \bar{\Omega}_\epsilon)$$

Une condition suffisante pour avoir (2) est donc, ϵ étant fixé assez petit :

$$(3) \quad N(\lambda, \frac{a_1}{b_1}, \bar{\Omega}_\epsilon) \text{ et } N(\lambda, \frac{a_1}{b_1}, \Omega_\epsilon) \text{ équivalents à } \sigma_n(\lambda) \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty,$$

et, posant

$$\omega(y, t) = u(y, t) \cdot \sqrt{\varphi_v}(y, 0) \quad , \quad a_2(\omega) = a_1\left(\frac{\omega}{\sqrt{\varphi_v}}\right) \quad , \quad b_2(\omega) = b_1\left(\frac{\omega}{\sqrt{\varphi_v}}\right) \quad ,$$

(3) équivaut à

$$(4) \quad N\left(\lambda, \frac{a_2}{b_2}, \Omega_\varepsilon\right) \text{ et } N\left(\lambda, \frac{a_2}{b_2}, \bar{\Omega}_\varepsilon\right) \text{ équivale(n)t à } \sigma_n(\lambda) \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty \quad .$$

3. Spectre d'un opérateur elliptique auto-adjoint sur Γ

On pose

$$\begin{cases} a_0(\omega) = \int_{\Gamma} \varphi_v \sum_1^{n-1} \gamma^{jk} \partial_j \left(\frac{\omega}{\sqrt{\varphi_v}}\right) \cdot \partial_k \left(\frac{\omega}{\sqrt{\varphi_v}}\right) \gamma^{1/2} dy \\ b_0(\omega) = \int_{\Gamma} \frac{\omega^2}{\varphi_v} \gamma^{1/2} dy \end{cases}$$

alors $a_2(\omega)$ et $b_2(\omega)$ s'expriment par :

$$\begin{cases} a_2(\omega) = \int_0^\varepsilon t \left(\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 \gamma^{1/2} dy + a_0(\omega) \right) dt \\ b_2(\omega) = \int_0^\varepsilon b_0(\omega) dt \end{cases}$$

On étudie l'extension de Friedrichs associée à $a_0, b_0, C^1(\Gamma)$:

. Le complété de $C^1(\Gamma)$ pour $(b_0)^{1/2}$ est $L^2(\Gamma)$ car φ_v est strictement positive sur Γ et Γ compacte.

. $(a_0 + b_0)^{1/2}$ est une norme équivalente à

$$\|\omega\|_{H^1(\Gamma)} = \left[\sum_{j,k} \int_{\Gamma} \gamma^{jk} \partial_j \omega \partial_k \omega \gamma^{1/2} dy + \int_{\Gamma} \omega^2 \gamma^{1/2} dy \right]^{1/2}$$

donc le complété de $C^1(\Gamma)$ pour $(a_0 + b_0)^{1/2}$ est $H^1(\Gamma)$.

. Soit A_0 l'opérateur défini par

$$A_0(\omega) = - \sum_{j,k} \left(\frac{\varphi_v}{\gamma}\right)^{1/2} \cdot \partial_j \left(\gamma^{1/2} \cdot \varphi_v \gamma^{jk} \partial_k \left(\frac{\omega}{\sqrt{\varphi_v}}\right) \right) ;$$

on sait que $(A_0 + 1, H^1(\Gamma))$ est auto-adjoint, semi-borné inférieurement par 1 dans $L^2(\Gamma)$; d'autre part

$H^2(\Gamma) \subset H^1(\Gamma)$ et $b_0((A_0+1)\omega_1, \omega_2) = (a_0+b_0)(\omega_1, \omega_2)$ pour tous $\omega_1 \in H^2(\Gamma)$, $\omega_2 \in H^1(\Gamma)$; c'est donc que $(A_0, H^2(\Gamma))$ est l'extension de Friedrichs associée à a_0 , b_0 et $C^1(\Gamma)$. Le comportement à l'infini de $N(\mu, \frac{a_0}{b_0}, \Gamma)$ est donc du type (Garding [3]) :

$$(5) \quad N_0(\mu) \equiv N(\mu, \frac{a_0}{b_0}, \Gamma) \sim C_{n-1} \mu^{n-1/2} \text{ quand } \mu \rightarrow \infty$$

avec

$$C_{n-1} = (2\pi)^{1-n} \cdot \omega_{n-1} \int_{\Gamma} \varphi_v^{1-n/2} \gamma^{1/2} dy$$

4. Décomposition suivant les fonctions propres de A_0

Soient $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ les valeurs propres de $(A_0, H^2(\Gamma))$ et $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ une base de fonctions propres correspondantes, orthonormale pour b_0 dans $L^2(\Gamma)$. Pour $\omega \in C_0^1(\Omega_\epsilon)$ ou $\omega \in C^1(\bar{\Omega}_\epsilon)$, on a :

$$\omega(y, t) = \sum_0^{\infty} b_0(\omega(y, t), h_j(y)) \cdot h_j(y) = \sum_0^{\infty} \omega_j(t) \cdot h_j(y) \text{ pour } 0 < t < \epsilon$$

On pose alors :

$$\begin{cases} f(\mu) = f(\mu, u) = \int_0^\epsilon t(u'(t))^2 + \mu u^2(t) dt \\ g(u) = \int_0^\epsilon u(t)^2 dt \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} a_2(\omega) = \varphi_v \sum_0^{\infty} f(\frac{\mu_j}{\varphi_v}, \omega_j) \\ b_2(\omega) = \sum_0^{\infty} g(\omega_j), \end{cases}$$

$$\text{et } N(\lambda, \frac{a_2}{b_2}, \Omega_\epsilon) = N\left(\lambda, \frac{\sum_0^{\infty} \varphi_v f(\frac{\mu_j}{\varphi_v}, \omega_j)}{g(\omega_j)}, \Omega_\epsilon\right)$$

Mais un raisonnement de $n^{\text{ième}}$ diamètre permet d'écrire :

$$N(\lambda, \frac{a_2}{b_2}, \Omega_\epsilon) = \sum_0^{\infty} N(\lambda, \varphi_v \cdot f(\frac{\mu_j}{\varphi_v})/g, I_\epsilon)$$

Une condition suffisante pour avoir (4) est alors :

$$(6) \quad \sum_0^{\infty} N \left(\frac{f(\frac{\mu_j}{\varphi_v})}{g}, J_\varepsilon, \frac{\lambda}{\varphi_v} \right) \sim \sigma_n(\lambda) \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty, \text{ avec } J_\varepsilon = I_\varepsilon \text{ ou } \bar{I}_\varepsilon.$$

On pose encore $f'(u) = \int_0^\varepsilon t (1 - \frac{1}{\varepsilon} t) u_t^2 dt$; on a $f'(u) < f(u, u)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$, donc d'après III.1),

$$(7) \quad N\left(\frac{f(\mu)}{g}, \bar{I}_\varepsilon, \lambda\right) \leq N\left(\frac{f'}{g}, \bar{I}_\varepsilon, \lambda\right)$$

Or l'extension de Friedrichs associée à f' , g et $C^1(\bar{I}_\varepsilon)$ est un opérateur dégénéré du type Baouendi-Goulaouic, avec $Au = -\frac{d}{dt} (t(1 - \frac{t}{\varepsilon}) \cdot \frac{du}{dt})$, la dégénérescence ayant lieu en 0 et ε ; donc

$$(8) \quad N\left(\frac{f'}{g}, \bar{I}_\varepsilon, \lambda\right) = O(\sqrt{\lambda}) \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty,$$

et aussi $\sum_0^{j_0} N\left(\frac{f(\mu_j/\varphi_v)}{g}, \frac{\lambda}{\varphi_v}\right) = O(\sqrt{\lambda})$, avec $j_0 = \max_1 j, \mu_j \leq \frac{1}{\varphi_v}$

$$\sum_0^{j_0} N\left(\frac{f(\frac{\mu_j}{\varphi_v})}{g}, \frac{\lambda}{\varphi_v}\right) = o(\sigma_n(\lambda)).$$

Une condition suffisante pour avoir (6) est alors

$$\sum_{j_0}^{\infty} N\left(\frac{f(\frac{\mu_j}{\varphi_v})}{g}, J, \frac{\lambda}{\varphi_v}\right) \sim \sigma_n(\lambda) \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty, \text{ avec } J = I_\varepsilon \text{ ou } \bar{J}_\varepsilon$$

ou encore

$$(9) \quad \int_{\mu = \frac{1}{\varphi_v}}^{\infty} N\left(\frac{f(\frac{\mu}{\varphi_v})}{g}, J, \frac{\lambda}{\varphi_v}\right) dN_0(\mu) \sim \sigma_n(\lambda).$$

5. Le lemme principali) Une autre écriture de (9)

Pour $\rho > 0$, on considère les formes quadratiques

$$\begin{cases} F(\rho, v) = \int_0^\rho t (v'^2 + v^2) dt \\ G(\rho, v) = \int_0^\rho v^2 dt \end{cases}$$

alors pour $\mu > 0$ et pour $v = u\left(\frac{t}{\sqrt{\mu}}\right)$, on a :

$$\begin{cases} f(\mu, u) = F(\varepsilon\sqrt{\mu}, v) \\ g(u) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} G(\varepsilon\sqrt{\mu}, v) \end{cases}$$

On pose $M(\lambda, \rho) = N\left(\frac{F(\rho)}{G(\rho)}, I_\rho, \lambda\right)$ et $\bar{M}(\lambda, \rho) = N\left(\frac{F(\rho)}{G(\rho)}, \bar{I}_\rho, \lambda\right)$, alors

$N\left(\frac{f(\mu)}{g}, J, \lambda\right) = M\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}}, \varepsilon\sqrt{\mu}\right)$, et la condition (9) devient

$$\int_{\mu=\frac{1}{\psi_v}}^{\infty} M\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu} \psi_v}, \frac{\varepsilon\sqrt{\mu}}{\sqrt{\psi_v}}\right) dN_0(\mu) \sim \sigma_n(\lambda) \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty, \text{ (de même avec } \bar{M}\text{),}$$

ou encore, faisant $\psi_v \mu = \tau^2$, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\psi_v}$:

$$(10) \quad \int_{\tau^2=1}^{\infty} m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon'\tau\right) \cdot dN_0\left(\frac{\tau^2}{\psi_v}\right) \sim \sigma_n(\lambda), \quad m = M \text{ ou } \bar{M}.$$

ii) Etude de la fonction $m(\lambda, \rho)$

On va démontrer le lemme suivant :

Lemme : Soit $\lambda > 0$, $m = M$ ou \bar{M} , on a :

$$a) \quad 0 < \rho_0 \leq \lambda \leq \rho \implies m(\lambda, \rho) = \frac{\lambda}{2} + O(\lambda^{3/4})$$

$$b) \quad \lambda > \rho > \rho_0 > 0 \implies m(\lambda, \rho) = O_{\rho_0}(\sqrt{\lambda\rho})$$

c) A entier pair positif et $0 < \delta < 1$ étant donnés, il existe $\rho_0 > A$ tel que pour $\lambda \leq A$ et $\rho \geq \rho_0$, on ait $m(\lambda, \rho) = \left[\frac{\lambda+1}{2}\right]$, sauf si λ appartient

à des intervalles symétriques de longueur 2δ autour des entiers impairs $1, 3, 5, \dots$, où la différence aux deux extrémités est au plus 1 en valeur absolue.

Démonstration :

a) Remarque préliminaire

. Pour $\rho_2 > \rho_1 > 0$ et $I =]\rho_1, \rho_2[$, on considère encore :

$$\begin{cases} F(\rho_1, \rho_2, v) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} t(v^2 + t^2) dt \\ G(\rho_1, \rho_2, v) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} v^2 dt \end{cases},$$

et on note $m(\lambda, \rho_1, \rho_2)$ avec $m = M$ ou \bar{M} , les fonctions $N\left(\frac{F(\rho_1, \rho_2)}{G(\rho_1, \rho_2)}, \lambda\right)$ associées à $F(\rho_1, \rho_2)$, $G(\rho_1, \rho_2)$ et $C_0^1(I)$ ou $C^1(\bar{I})$.

. On remplace $F(\rho_1, \rho_2, v)$ par $C.F'(\rho_1, \rho_2, v) = C \int_{\rho_1}^{\rho_2} (v^2 + t^2) dt$, où $C > 0$, et on note λ_k , resp. $\bar{\lambda}_k$, la $k^{\text{ième}}$ valeur propre associée à $(CF', G, C_0^1(I))$, resp. $(CF', G, C^1(\bar{I}))$. L'extension de Friedrichs associée à $(CF', G, C_0^1(I))$ est $(A, D(A))$ avec $D(A) = H_0^1 \cap H^2(\rho_1, \rho_2)$, $Au = -Cu'' + Cu$, et $(A, D(\bar{A}))$ avec $D(\bar{A}) = \{u \in H^1, \frac{d^2u}{dt^2} \in L^2, \frac{du}{dt}(\rho_1) = \frac{du}{dt}(\rho_2) = 0\}$ si $C_0^1(I)$ est remplacé par $C^1(\bar{I})$. Tout couple propre (λ, u) pour $(A, D(A))$ où $(A, D(\bar{A}))$ vérifie : $-Cu'' + Cu' = \lambda u$, c'est-à-dire est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $-Cr^2 + (C-\lambda) = 0$; on en déduit que :

1) Il n'y a pas de valeur propre inférieure à C dans les deux cas.

2) $\lambda_1 > C$, $\bar{\lambda}_1 = C$ et $\bar{\lambda}_2 > C$

3) $\lambda_k = C \left[\left(\frac{k\pi}{\rho_1 - \rho_2} \right)^2 + 1 \right]$, $k=1, 2, \dots$ et $\bar{\lambda}_{k+1} = \lambda_k$ pour $k=1, 2, \dots$

. De l'inégalité : $\rho_1 \frac{F'(\rho_1, \rho_2)}{G(\rho_1, \rho_2)} \leq \frac{F(\rho_1, \rho_2)}{G(\rho_1, \rho_2)} \leq \rho_2 \frac{F'(\rho_1, \rho_2)}{G(\rho_1, \rho_2)}$, on déduit,

d'après III.1), $N(\rho_2 \frac{F'}{G}) \leq N(\frac{F'}{G}) \leq N(\rho_1 \frac{F'}{G})$; mais comme

$$N(C \frac{F'}{G}, \lambda, I) = \left[\frac{\rho_2 - \rho_1}{\Pi} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{C} - 1\right)_+} \right] \text{ et } N(C \frac{F'}{G}, \lambda, \bar{I}) = N(C \frac{F'}{G}, \lambda, I) + 1, \text{ on a :}$$

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\Pi} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\rho_2} - 1\right)_+} - 1 \leq m(\lambda, \rho_1, \rho_2) \leq \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Pi} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\rho_1} - 1\right)_+} + 1$$

B) Démonstration de a) :

Soit $\rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_{v-1} = \lambda < \rho_v = \rho$ une partition de $[\rho_0, \rho]$,

telle que celle de $[\rho_0, \lambda]$ soit équidistante. D'après III.3, on a :

$$\sum_{k=0}^{v-1} M(\lambda, \rho_k, \rho_{k+1}) \leq m(\lambda, \rho_0, \rho) \leq \sum_{k=0}^{v-1} \bar{M}(\lambda, \rho_k, \rho_{k+1}), \text{ d'où, posant}$$

$$f(x) = \frac{1}{\Pi} \sqrt{\frac{\lambda}{x} - 1} \text{ pour } 0 < x \leq \lambda, \text{ on déduit, d'après a),}$$

$$-v + \sum_{k=0}^{v-3} (\rho_{k+1} - \rho_k) f(\rho_{k+1}) \leq m(\lambda, \rho_0, \rho) \leq \sum_{k=0}^{v-2} (\rho_{k+1} - \rho_k) f(\rho_k) + v ;$$

cette dernière inégalité implique la suivante :

$$-v - \frac{\lambda^{3/2}}{(v-1)\sqrt{\rho_0}} + \int_{\rho_0}^{\lambda} f(x) dx \leq m(\lambda, \rho_0, \rho) \leq \int_{\rho_0}^{\lambda} f(x) dx + \frac{\lambda^{3/2}}{(v-1)\sqrt{\rho_0}} + v .$$

$$\text{Comme } \int_{\rho_0}^{\lambda} f(x) dx = -\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0} - 1}}{\Pi} + \frac{\lambda}{\Pi} \text{ arc tg } \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0} - 1} \text{ et } \text{arc tg} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0} - 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0} - 1}} + o \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0} - 1}} \right) \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty, \text{ on a } \int_{\rho_0}^{\lambda} f(x) dx = \frac{\lambda}{2} + O_{\rho_0}(\lambda^{1/2}) \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty \text{ et :}$$

$$-\frac{\lambda^{3/2}}{(v-1)\sqrt{\rho_0}} - v + O_{\rho_0}(\lambda^{1/2}) + \frac{\lambda}{2} \leq m(\lambda, \rho_0, \rho) \leq \frac{\lambda}{2} + O_{\rho_0}(\lambda^{1/2}) + \frac{\lambda^{3/2}}{(v-1)\sqrt{\rho_0}} + v ,$$

et donc, prenant v assez grand par rapport à λ , $m(\lambda, \rho_0, \rho) = \frac{\lambda}{2} + O(\lambda^{3/4})$

quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Enfin, $M(\lambda, \rho_0) + M(\lambda, \rho_0, \rho) \leq m(\lambda, \rho) \leq \bar{M}(\lambda, \rho_0) + \bar{M}(\lambda, \rho_0, \rho)$ d'après III.3. ,

et d'après (7), et (8) :

$M(\lambda, \rho_0) = N \left(\frac{f \left(\frac{\rho_0^2}{2} \right)}{g}, I_\varepsilon, \frac{\rho_0 \lambda}{\varepsilon} \right) = \rho_0 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \right)$, d'où $M(\lambda, \rho_0) = O_\varepsilon(\sqrt{\lambda})$ ainsi que $\bar{M}(\lambda, \rho_0)$, donc, d'après le calcul ci-dessus, on a bien a) du lemme.

γ) Démonstration de b)

Soit $\rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_v = \rho$ une partition équidistante de $[\rho_0, \rho]$.
 Comme en β) on écrit encore $m(\lambda, \rho_0, \rho) \leq \sum_{k=1}^{v-1} f(\rho_k) \cdot (\rho_{k+1} - \rho_k) + v$, et cette fois, on majore grossièrement la différence $\int_{\rho_0}^{\rho} f(X) dX - \sum_{k=1}^{v-1} f(\rho_k) (\rho_{k+1} - \rho_k)$ par $\frac{\rho - \rho_0}{v} f(\rho_0) = \frac{1}{\Pi v} (\rho - \rho_0) \cdot \frac{\sqrt{\lambda - \rho_0}}{\sqrt{\rho_0}}$, puis par $\rho \rho_0^{-1/2} \lambda^{1/2} v^{-1}$; comme $\int_{\rho_0}^{\rho} f(X) dX < \sqrt{\rho \lambda}$, (faire $x\lambda = t^2$), pour v assez grand (de l'ordre de $\rho^{1/2}$), on obtient $m(\lambda, \rho_0, \rho) = O_{\rho_0}(\sqrt{\lambda \rho})$, ce qui ajouté à $m(\lambda, \rho) \leq \bar{M}(\lambda, \rho_0) + \bar{M}(\lambda, \rho_0, \rho)$, et $\bar{M}(\lambda, \rho_0) = N \left(\frac{f \left(\frac{\rho_0^2}{2} \right)}{g}, I_\varepsilon, \frac{\rho_0 \lambda}{\varepsilon} \right) = O_\varepsilon(\sqrt{\lambda \rho_0}) = O(\sqrt{\lambda \rho})$ implique b) du lemme.

δ) Démonstration de c)

. L'extension de Friedrichs associée à $(F(\rho)) G(\rho), C^1(I_\rho)$, resp. $C^1(I_\rho)$, est l'opérateur $(A, D(A))$, resp. $D(\bar{A})$, non borné dans $L^2(I_\rho)$, avec :

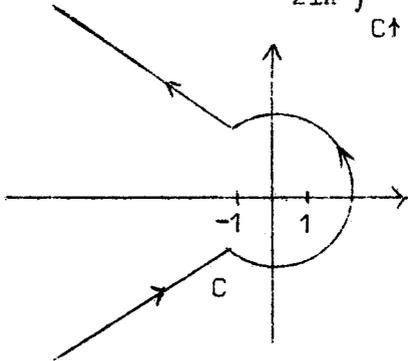
$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H^1(I_\rho), tu \in H^2, u(\rho) = 0\} \\ D(\bar{A}) = \{u \in H^1(I_\rho), tu \in H^2, \frac{du}{dt}(\rho) = 0\} \\ Au = -(tu')' + tu \end{cases}$$

. L'équation $-(tu')' + tu - \lambda u = 0, \lambda \in \mathbb{C}, t > \alpha$, est du type équation de Laplace ou équation du 2ème type de Fuchs, l'équation indiciale en 0 étant $\alpha^2 = 0$; elle admet donc pour base de solutions les fonctions :

$$\begin{cases} u_0(t) = 1 + t f_0(t) \\ u_1(t) = (1+t f_0(t)) \text{Log } t + t f_1(t), f_0 \text{ et } f_1 \text{ étant analytiques en } 0. \end{cases}$$

Il est de plus démontré dans Valiron [5] (méthode de Laplace), que

$$u(t, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} e^{zt} (z-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} (z+1)^{-\frac{1}{2}(\lambda+1)} dz,$$



où C est le contour ci-après, vérifie cette équation différentielle pour $t > 0$; cette solution admet une limite finie quand $t \rightarrow 0^+$, (faire $z' = t(z-1)$ dans l'intégrale), donc elle est multiple de $u_0(t)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

On vérifie facilement ensuite que toute solution vérifiant $t(\frac{du}{dt})^2 \in L^1(0, T)$, $T < +\infty$, est multiple de $u_0(t)$, donc aussi de $u(t, \lambda)$. Ainsi, les valeurs propres de $(A, D(A))$ sont les zéros réels positifs de $u(\rho, \lambda)$ et celles de $(A, D(\bar{A}))$ ceux de $\frac{du}{dt}(\rho, \lambda)$.

Maintenant $u(t, \lambda) = (2t)^{-\frac{1}{2}(\lambda+1)} e^t v(t, \lambda)$ avec $v(t, \lambda)$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} e^z z^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} (\frac{z}{2t} + 1)^{-\frac{1}{2}(\lambda+1)} dz \text{ et } \frac{dv}{dt}(t, \lambda) = \frac{\lambda+1}{4t^2} v(t, \lambda+2), \text{ d'où}$$

$$\frac{du}{dt}(t, \lambda) = (2t)^{-\frac{1}{2}(\lambda+1)} e^t w(t, \lambda) \text{ avec } w(t, \lambda) = (1 - \frac{\lambda+1}{2t}) v(t, \lambda) + \frac{\lambda+1}{4t^2} v(t, \lambda+2),$$

donc les zéros en λ de $u(t, \lambda)$ sont les mêmes que ceux de $v(t, \lambda)$ et ceux de $u'_t(t, \lambda)$ les mêmes que ceux de $w(t, \lambda)$.

D'autre part, $v(\infty, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\lambda-1))}$ et $v(t, \lambda) \rightarrow v(\infty, \lambda)$ quand $t \rightarrow \infty$, uniformément en λ sur tout compact. De même, $w(\infty, \lambda) = v(\infty, \lambda)$ et $w(t, \lambda) \rightarrow w(\infty, \lambda)$

uniformément sur tout compact ; les zéros de $v(\infty, \lambda)$ sont exactement 1, 3, 5...

et chacun est simple. Pour tout $t > 0$, $\lambda \rightarrow v(t, \lambda)$ est une fonction entière

(théorème de Morera), ainsi que $v(\infty, \lambda)$, donc $v'_t(t, \lambda) \rightarrow v'_t(\infty, \lambda)$ uniformément

sur tout compact et $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{v'(t, \lambda)}{v(t, \lambda)} d\lambda \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{v'(\infty, \lambda)}{v(\infty, \lambda)} d\lambda$ pour tout contour

fermé γ ne contenant pas de zéro de $v(\infty, \lambda)$. Les dernières intégrales ne sont

autres que $Z_t - P_t$ où $Z_t =$ nombre de zéros de $v(t, \lambda)$ contenus dans l'intérieur

de γ , comptés avec leur multiplicité, $P_t =$ nombre de pôles. En particulier,

pour tout $\delta, 0 < \delta < 1$, si γ désigne le cercle de centre $2k+1$ et de rayon δ , pour tout $A = 2p, p \in \mathbb{N}$, il existe $\rho_0 > A$ tq $\forall t \geq \rho_0, v(t, \lambda)$ a exactement ρ zéros dans $0 < \text{Re } \lambda < A$, un dans chaque disque de centre $2k+1, k=0, \dots, p-1$, et de rayon δ ; par ailleurs, $v(t, \bar{\lambda}) = \overline{-v(t, \lambda)}$, donc les zéros sont réels et on a c).

o) Fin de la démonstration.

A l'aide du lemme précédent, on veut montrer, remplaçant ϵ' par ϵ dans (10) :

$$J = \int_{\tau^2=1}^{\infty} m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \epsilon\tau\right) dN_0\left(\frac{\tau^2}{\varphi_v}\right) \sim \sigma_n(\lambda) \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty, m = M \text{ ou } \bar{M}.$$

Pour λ assez grand, on décompose J en $J_1 = \int_{\tau=1}^{\sqrt{\lambda/\epsilon}}$ et $I = \int_{\tau=\sqrt{\lambda/\epsilon}}^{\infty}$.

Déjà, d'après b) du lemme et (5),

$$J_1 = \sum_{1 \leq \mu_j \leq \frac{\lambda}{\epsilon}} m\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_j}}, \epsilon\sqrt{\mu_j}\right) \leq N_0\left(\frac{\lambda}{\epsilon\varphi_v}\right) \cdot O_\epsilon(\sqrt{\lambda\epsilon}) = O_\epsilon(\lambda^{\frac{n}{2}}) = o(\sigma_n(\lambda)).$$

Il reste donc à montrer que $I \sim \sigma_n(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow \infty$

i) D'après c) du lemme, pour $A=2, 0 < \delta < \frac{1}{2}, \exists \rho_0 > 2$ tq $\forall \lambda_1 \leq 2, \rho \geq \rho_0$,

on ait $m(\lambda_1, \rho) = \left\lfloor \frac{\lambda_1+1}{2} \right\rfloor$ sauf si $\lambda_1 \in]1-\delta, 1+\delta[$; donc, si on fait $\lambda_1 = \frac{\lambda}{\tau}$,

$\rho = \epsilon\tau$, pour $\lambda \geq \lambda'_1, \tau \geq \frac{\lambda}{1-\delta}$ avec $\lambda'_1 > \frac{\rho_0(1-\delta)}{\epsilon}$, on a $m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \epsilon\tau\right) = 0$.

D'autre part, $N_0\left(\frac{\tau^2}{\varphi_v}\right) \sim c_{n-1} \left(\frac{\tau}{\sqrt{\varphi_v}}\right)^{n-1}$ quand $\tau \rightarrow \infty$, implique : $\exists \tau_0$ tq $\tau \geq \tau_0$

entraîne $N_0(\tau^2) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{\varphi_v}}\right)^{n-1} (c_{n-1} + O(1)\delta)$ et donc :

$$\exists \lambda'_2 \text{ tq } \lambda \geq \lambda'_2 \implies N_0\left(\frac{\tau^2}{\varphi_v}\right) = (c_{n-1} + O(1)\delta) \cdot \left(\frac{\tau}{\sqrt{\varphi_v}}\right)^{n-1} \text{ pour } \tau \geq \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon}}$$

Ainsi, pour $\lambda \geq \lambda' = \sup(\lambda'_1, \lambda'_2)$ on a simultanément :

$$\begin{cases} m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \epsilon\tau\right) = 0 \text{ pour } \tau \geq \frac{\lambda}{1-\delta} \\ N_0\left(\frac{\tau^2}{\varphi_v}\right) = (c_{n-1} + O(1)\delta) \left(\frac{\tau}{\sqrt{\varphi_v}}\right)^{n-1} \text{ pour } \tau \geq \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon}} \end{cases}$$

on en déduit que pour $\lambda \geq \lambda'$, $\int_{\tau = \frac{\lambda}{1-\delta}}^{\infty} m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau\right) dN_0\left(\frac{\tau^2}{\varphi_v}\right) = 0$ et donc

$$I = \int_{\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau\right) dN_0\left(\frac{\tau^2}{\varphi_v}\right).$$

ii) on intègre I par parties :

$$I = \left[m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau\right) N_0\left(\frac{\tau^2}{\varphi_v}\right) \right]_{\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} - \int_{\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} N_0\left(\frac{\tau^2}{\varphi_v}\right) dm\left(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau\right) \equiv F_1 + F_2$$

or $F_1 = -m(\sqrt{\lambda\varepsilon}, \sqrt{\lambda\varepsilon}) N_0\left(\frac{\lambda}{\varepsilon\varphi_v}\right)$ d'après i), mais comme $m(\sqrt{\lambda\varepsilon}, \sqrt{\lambda\varepsilon}) = O(\sqrt{\lambda\varepsilon})$ d'après b) du lemme et $N_0\left(\frac{\lambda}{\varepsilon\varphi_v}\right) = O\left(\left(\frac{\lambda}{\varepsilon\varphi_v}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)$, F_1 est du type $O_\varepsilon\left(\lambda^{\frac{n}{2}}\right)$. Il reste donc à montrer que F_2 est équivalent à $\sigma_n(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow \infty$.

iii) d'après i), $F_2 = -(c_{n-1} + O(1)\delta) \int_{\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} \left(\frac{\tau}{\sqrt{\varphi_v}}\right)^{n-1} dm\left(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau\right)$ et devient par intégration par parties :

$$F_2 = \varphi_v^{-\frac{n-1}{2}} \left[- \left[m\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}, \varepsilon\tau\right) \cdot \tau^{n-1} \right]_{\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} (c_{n-1} + O(1)\delta) + (n-1)(c_{n-1} + O(1)\delta) \int_{\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau\right) \tau^{n-2} d\tau \right]$$

$$\equiv \varphi_v^{-\frac{n-1}{2}} (G_1 + G_2)$$

Comme en ii), on utilise i) et b) du lemme pour montrer que $G_1 = O\left(\lambda^{\frac{n}{2}}\right)$; il reste alors à montrer : $G_2 \sim \sigma_n(\lambda) \varphi_v^{-\frac{n-1}{2}}$ quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Déjà, pour $n=2$, d'après a) du lemme, $G_2 = (c_1 + O(1)\delta) \int_{\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\frac{\lambda}{1-\delta}} \left(\frac{\lambda}{2\tau} + O\left(\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{3}{4}}\right)\right) d\tau$

et donc $G_2 = (c_1 + O(1)\delta) \left(\frac{\lambda}{4} \text{Log } \lambda + O(\lambda)\right) = (d_2 \varphi_v^{\frac{1}{2}} + O(1)\delta) \lambda \text{Log } \lambda + O(\lambda)$

et donc $G_2 \sim \sigma_2(\lambda) \varphi_v^{\frac{1}{2}}$ quand $\lambda \rightarrow \infty$.

iv) Maintenant, pour $n > 2$, $\int_1^{\infty} \left[\frac{t+1}{2}\right] t^{-n} dt$ est convergente donc :

$\exists A_0, A > \sup\left(A_0, \frac{1}{\delta}\right)$ et A entier pair implique $\frac{1}{A} < \delta$ et $\int_A^{\infty} \left[\frac{t+1}{2}\right] t^{-n} dt < \delta$.

On décompose l'intégrale apparaissant dans G_2 en :

$$I_1 + I_2 \equiv \int_{\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\lambda/A} m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau\right) \tau^{n-2} d\tau + \int_{\lambda/A}^{\frac{\lambda}{1-\sigma}} m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau\right) \tau^{n-2} d\tau$$

d'après a) du lemme, $I_1 = \int_{\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}}^{\lambda/A} \left(\frac{\lambda}{2\tau} + O\left(\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{3/4}\right)\right) \tau^{n-2} d\tau = O(1) \delta \lambda^{n-1}$

d'après c) du lemme, $I_2 = \int_{\lambda/A}^{\frac{\lambda}{1-\sigma}} \tau^{n-2} \left[\frac{\lambda+1}{2}\right] d\tau - \left(\int_{\frac{\lambda}{1+\sigma}}^{\frac{\lambda}{1-\sigma}} \left[\frac{\lambda+1}{2}\right] \tau^{n-2} d\tau + \int_{\frac{\lambda}{2+\sigma}}^{\frac{\lambda}{2-\sigma}} \dots \right) +$
 $+ \left(\int_{\frac{\lambda}{1+\sigma}}^{\frac{\lambda}{1-\sigma}} m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau\right) \tau^{n-2} d\tau + \int_{\frac{\lambda}{2+\sigma}}^{\frac{\lambda}{2-\sigma}} \dots \right)$

et $\int_{\frac{\lambda}{2k-1+\delta}}^{\frac{\lambda}{2k-1-\delta}} \tau^{n-2} \left(m\left(\frac{\lambda}{\tau}, \varepsilon\tau\right) - \left[\frac{\lambda+1}{2}\right] \right) d\tau \leq \int_{\frac{\lambda}{2k-1+\delta}}^{\frac{\lambda}{2k-1-\delta}} \tau^{n-2} d\tau$, donc :

$$I_2 = \int_{\lambda/A}^{\lambda} \left[\frac{\lambda+1}{2}\right] \tau^{n-2} d\tau + \int_{\lambda}^{\frac{\lambda}{1-\sigma}} \left[\frac{\lambda+1}{2}\right] \tau^{n-2} d\tau + O(1) \left(\sum_{k=1}^{p(\lambda, A) < +\infty} \int_{\frac{\lambda}{2k-1+\sigma}}^{\frac{\lambda}{2k-1-\delta}} \tau^{n-2} d\tau \right);$$

Or, la seconde intégrale est nulle, la première égale $\lambda^{n-1} \int_1^{\infty} \left[\frac{t+1}{2}\right] t^{-n} dt + O(1) \delta \lambda^{n-1}$, et le dernier terme du type $O(1) \cdot \delta \cdot \lambda^{n-1}$; on a donc :

$$I_1 + I_2 = O(1) \delta \cdot \lambda^{n-1} + \lambda^{n-1} \int_1^{\infty} \left[\frac{t+1}{2}\right] t^{-n} dt$$

d'où $K \sim \varphi^{\frac{n-1}{2}} \sigma_n(\lambda)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAQUENDI-GOULAOUIC : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.

- [2] COURANT-HILBERT : Methods of Mathematical Physics - Interscience 1962.

- [3] GARDING : On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators.
Math. Scand 1 (1953), 237-255.

- [4] RIESZ-NAGY : Leçons d'analyse Fonctionnelle - Gauthiers Villars.

- [5] VALIRON : Equations fonctionnelles - Applications. Masson et C^{ie}.