R. PAVEC

Équation d'évolution sur $[O,T]$, avec condition en plusieurs points

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 3, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___1_A3_0>

EQUATION D'EVOLUTION SUR $[0,T]$,

AVEC CONDITION EN PLUSIEURS POINTS.

par

R. PAVEC

On résoud le problème :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} u \in L^2(0,T,V), \ u' \in L^2(0,T,V') \\ u'(t) + \alpha(t)\, Au(t) = f(t), \ \text{p.p. } t \in [0,T]. \\ \sum\limits_{0}^{n} \alpha_k\, u(t_k) = \xi. \end{cases}$$

INTRODUCTION.

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$ tels que $V \hookrightarrow H$, V dense dans H. En identifiant H à son anti-dual, on a $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$. Soit A l'opérateur associé à une forme hermitienne continue, coercive sur V et

$$c = \inf_{\|u\|_V = 1} \langle Au, u \rangle_{V' \times V}$$

$$D(A) = \{u \in V \mid Au \in H\} \quad \|u\|^2_{D(A)} = |u|^2_H + |Au|^2_H$$

Il existe une mesure de Radon $\mu \geq 0$ sur $[c, +\infty[$ et un champ μ-mesurable d'espaces de Hilbert (H_λ), un opérateur unitaire $\mathcal{U}$ de H sur

$$\mathcal{H} = \int H_\lambda \, d\mu(\lambda)$$

qui transforme

$$D(A^\theta) \text{ en } \mathcal{H}_\theta = \{v \mid \lambda^\theta v \in \mathcal{H}\}; \ \|v\|^2_{\mathcal{H}_\theta} = \|\lambda^\theta v\|_{\mathcal{H}}$$

et tel que pour tout $u \in V$:

$$\mathcal{U}(Au)(\lambda) = \lambda\, \mathcal{U}u(\lambda)$$

En posant pour p.p. $t \in [0,T]$ et $u \in L^2(0,T,V)$

$$(\mathcal{U}(u))(t) = \mathcal{U}(u(t))$$

on en déduit un isomorphisme entre

$$L^2(0,T,D(A^\Theta)) \text{ et } L^2(0,T,\mathcal{H}_\Theta)$$

Soit

$$w_\Theta = \{u \in L^2(0,T,D(A^{\Theta+1/2}))\,|\ u' \in L^2(0,T,D(A^{\Theta-1/2}))\}$$

$$\|u\|^2_{w_\Theta} = \|u\|^2_{L^2(0,T,D(A^{\Theta+1/2}))} + \|u'\|^2_{L^2(0,T,D(A^{\Theta-1/2}))}$$

$\mathcal{U}$ transforme w_Θ en :

$$\{v \in L^2(0,T,\mathcal{H}_{\Theta+1/2})\ |v' \in L^2(0,T,\mathcal{H}_{\Theta-1/2})\},$$

muni de sa norme canonique.

Soit α une fonction continue par morceaux sur $[0,T]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. En posant :

$$(\mathcal{U}u)(t) = u(\lambda,t)$$

le problème (I) devient équivalent à :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} u(\lambda,t) \in L^2(0,T,\mathcal{H}_{1/2}),\ u' \in L^2(0,T,\mathcal{H}_{-1/2}) \\ u'(\lambda,t) + \lambda\alpha(t)\,u(\lambda,t) = f(\lambda,t),\ \mu \text{ p.p. } \lambda \geq c,\ \text{p.p. } t \in [0,T] \\ \sum\limits_{o}^{n} \alpha_k\, u(\lambda,t_k) = \xi(\lambda). \end{cases}$$

Dans la première partie, on traite l'équation homogène (f=o) et on obtient des résultats pour une fonction α pouvant changer de signe. Dans la deuxième partie, on suppose $f \neq 0$ et la fonction α positive sur $[0,T]$, sauf en un nombre fini de points de $[0,T]$, où elle peut être nulle.

I. CAS DE L'EQUATION HOMOGENE.

Soit $a(t) = \int_0^t \alpha(\sigma)\, d\sigma$, $m = \inf_{t\in[0,T]} a(t)$, $a_o(t) = a(t) - m$

On suppose que :

(1) $\begin{cases} a_o(t) \text{ s'annule en un nombre fini de points :} \\ 0 \leq \tau_o < \tau_1 < \ldots < \tau_q \leq T \;;\; q \geq 0. \end{cases}$

En chaque point τ_i , on suppose :

(2) $\begin{cases} \alpha(t) \sim \mu_i^- \, |t-\tau_i|^{p_i^-} \text{ quand } t \to \tau_i^- \text{ , avec } \mu_i^- < o \text{ , } p_i^- \geq o \text{ .} \\ \alpha(t) \sim \mu_i^+ \, |t-\tau_i|^{p_i^+} \text{ quand } t \to \tau_i^+ \text{ , avec } \mu_i^+ > o \text{ , } p_i^+ \geq o \text{ .} \end{cases}$

(avec modification évidente si $\tau_o = o$, $\tau_q = T$)

(3) Soit $p = \max_{i=o,\ldots,q} (p_i^- , p_i^+) + 1$.

(4) Soit $t_i = \tau_i$, $i=o,\ldots,q$ et $t_{q+1},\ldots,t_n \in [0,T]$; $(n \geq q)$.

Pour $\lambda \geq c$, on pose $A(\lambda) = \sum_0^n \alpha_k\, c^{-\lambda\, a_o(t_k)} = \beta_o + \sum_{q+1}^n \alpha_k c^{-\lambda a_o(t_k)}$

avec $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $(k=0,\ldots,n)$. On suppose :

(5) $\begin{cases} \beta_o \neq o \\ \text{Pour tout } \lambda \geq c : A(\lambda) \neq 0 \end{cases}$

Soit $X_\Theta = \{u \in W_\Theta \;|\; u'+\alpha\, Au = o\}$; muni de la norme induite par $L^2(0,T,D(A^{\Theta+1/2}))$, X_Θ est un espace de Hilbert.

Soit $\Theta_o = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$

<u>Théorème 1</u> : Avec les hypothèses (1) à (5), pour tout $\xi \in D(A^{\Theta_o})$, il existe $u \in W_o$ unique satisfaisant à :

$$\begin{cases} u'+\alpha\, Au = 0 \\ \sum_o^n \alpha_k\, u(t_k) = \xi \end{cases}$$

et l'application $\xi \longrightarrow u$ est un isomorphisme de $D(A^{\Theta_o})$ sur X_Θ. Pour tout $\Theta \geq \Theta_o$ cette application est aussi un isomorphisme entre $D(A^\Theta)$ et $X_{\Theta-\Theta_o}$.

De (5), il résulte que $\beta = \inf\limits_{\lambda \geq c} |A(\lambda)| > o$ et (2) l'existence d'une fonction β telle que,

$$(6) \qquad \begin{cases} \forall t \in [0,T] \quad 0 \leq \beta(t) \leq \alpha(t) \\ \beta(t) = \mu |t-\tau_i|^p \text{ si } t \in \left[\dfrac{\tau_i + \tau_{i-1}}{2}, \dfrac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}\right] \end{cases}$$

avec $\tau_{-1} = -\tau_o$, $\tau_{q+1} = 2T - \tau_q$; $i = o,\dots,q$

La formulation (II) du problème montre que si $u' + \alpha Au = o$:

$u(\lambda,t) = c(\lambda)\, e^{-\lambda a_o(t)}$.

En écrivant $\sum\limits_o^n \alpha_k u(t_k) = \xi$ on en déduit $C(\lambda) = \dfrac{\xi(\lambda)}{A(\lambda)}$ et (6) montre que $\mathcal{U}^{-1} u(\lambda,t) \in W_o$.

Réciproquement, si $u \in X_o$ on déduit de (2) que $C(\lambda) \in \mathcal{K}_{\Theta_o}$, et donc $\sum\limits_o^n \alpha_k u(t_k) \in D(A^{\Theta_o})$

II. EQUATION NON HOMOGENE, AVEC UNE FONCTION α S'ANNULANT EN UN POINT $T_o \in]0,T]$.

On suppose :

$$(7) \qquad \begin{cases} \forall t \neq T_o : \alpha(t) > o. \\ \alpha(t) \sim \mu\, |t-t_o|^{p-1} \text{ quand } \to T_o . \end{cases}$$

Soit $a_o(t) = \displaystyle\int_0^t \alpha(\sigma)\, d\sigma$ et $0 = t_o < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$.

$A(\lambda)$ est défini comme au § 2 avec $\beta_o = \alpha_o$. Soit $\Theta_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}$.

Théorème 2 : Si les hypothèses (7) et (5) sont vérifiées, pour tout $(f,\xi) \in L^2(0,T,D(A^{\Theta_1})) \times H$, il existe u unique satisfaisant à (I) et l'application $(f,\xi) \longrightarrow u$ est continue de $L^2(0,T,D(A^{\Theta_1})) \times H$ dans W_o. De plus, si $(f,\xi) \in L^2(0,T,D(A^\Theta)) \times D(A^{\Theta-\Theta_1})$ on a $u \in W_{\Theta-\Theta_1}$, pour tout $\Theta \geq \Theta_1$.

De (7), il résulte qu'il existe $\mu > o$ tel que pour u et t tel que $0 \leq u \leq t \leq T$:

(8) $$0 \leq \mu(t-u)^p \leq a_o(t) - a_o(u).$$

On utilise alors la formulation de (II) du problème (I). L'unicité est immédiate (théorème 1). L'existence se démontre en deux étapes. On résoud d'abord :

$$\begin{cases} v \in W_o \\ v'(t) + \alpha(t)\, A\, v(t) = f(t) \\ v(o) = o. \end{cases}$$

On a :

$$\mathcal{U} v\ (t) = v(\lambda,t) = \int_o^t e^{-\lambda(a_o(t) - a_o(u))} f(\lambda,u)\, du.$$

De (8), on déduit :

$$\int_o^T \|v(\lambda,t)\|^2_{H_\lambda} dt \leq C\, \lambda^{-2/p} \|f(\lambda,.)\|^2_{L^2(O,T,H_\lambda)}$$

Il en résulte

$$\int_o^\infty \int_o^T \lambda \|v(\lambda,t)\|^2_{H_\lambda} d\mu(\lambda)\, dt \leq c\, \|f\|^2_{L^2(O,T,D(A^{\Theta_1}))}$$

On en déduit $v \in W_o$. On résoud alors :

$$\begin{cases} v_o \in W \\ v_o'(t) + \alpha(t)\, A\, v_o(t) = o \\ \sum\limits_o^n \alpha_k\, v_o\, (t_k) = \xi - \sum\limits_o^n \alpha_k\, v(t_k). \end{cases}$$

et ce système admet une solution $v_o \in W_o$ d'après le théorème 1. En posant $u = v + v_o$, on en déduit une solution de I.

<u>Remarque</u> : Le théorème 2 est encore vrai en supposant $\alpha(t) > o$ sauf en des points $o < T_o < T_1 < \ldots < T_q$, et telle que :

$$\alpha(t) \sim \mu_i\, |t-T_i|^{p_i} \text{ quand } t \to T_i \ (\mu_i > o,\ p_i > o)$$

avec $p = \max\limits_{i=o,\ldots,q} (p_i) + 1.$

Théorème 2'. Soit $m \in \mathbb{N}$ et α une fonction de classe C^m.

Si $(f,\xi) \in [L^2(0,T,D(A^{\theta_1+m})) \cap H^m(0,T,V')] \times D(A^m)$, la solution u de (I) appartient à $L^2(0,T,D(A^{m+1/2})) \cap H^{m+1}(0,T\,;\,V')$, et l'application $(f,\xi) \longrightarrow u$ est continue dans ces espaces.

$H^m(0,T,V') = \{v \in L^2(0,T,V') \mid v^{(j)} \in L^2(0,T,V'),\ j=1,\dots,m\}$.

$\theta_1 + m \geq m - \frac{1}{2}$. Donc, $f \in L^2(0,T,D(A^{m-1/2}))$ et d'après le théorème des dérivées intermédiaires $f^{(j)} \in L^2(0,T,D(A^{m-1/2,j}))$ pour $j=0,1,\dots,m$.

D'après le théorème 2), la solution u de (I) vérifie

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T,D(A^{m+1/2}) \\ u' \in L^2(0,T,D(A^{m-1/2}) \end{cases}$$

Supposons que $u^{(j)} \in L^2(0,T,D(A^{m+1/2-j}))$. De (I), on déduit

$u^{(j+1)}(t) = f^{(j)}(t) - (\alpha(t)\,Au)^{(j)}$

si $k \leq j-1$ $\quad u^{(k)} \in L^2(0,T,D(A^{m-1/2-j-1}))$ et donc $Au^{(k)} \in L^2(0,T,D(A^{m-1/2-j})$

D'où :

$(\alpha(t)\,Au)^{(j)} = \alpha(t)\,A\,u^{(j)} +$ élément de $L^2(0,T,D(A^{m-1/2-j})$

or $\quad \alpha(t)\,A\,u^{(j)}(t) \in L^2(0,T,D(A^{m+1/2-j-1})$

$f^{(j)}(t) \in L^2(0,T,D(A^{m+1/2-j-1}))$ si $j \leq m$.

ce qui entraine $u^{(j+1)} \in L^2(0,T,D(A^{m+1/2-(j+1)}))$.

On en déduit $u^{(m+1)} \in L^2(0,T,V')$. La continuité résulte aussi de cette démonstration.

Remarque : Si $\rho = 0$, $\theta_1 = -\frac{1}{2}$ ($\alpha(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$). Les applications considérées dans le théorème 2 et le théorème 2' sont des isomorphismes.

<u>Exemple</u> :

$$V = H_0^1(o,1) \qquad H = L^2(0,1)$$

$$a(u,v) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\, dx \ ; \ u,v \in V$$

$$A = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(o,1).$$

$T = 2$; $\alpha(t) = |1-t|$, $t \in [0,2]$.

On a $p = 2$. $\Theta_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

D'après le théorème 2, pour tout $f \in L^2(]0,2[\times]0,1[)$, $\xi \in L^2(0,1)$, il existe u unique satisfaisant à :

$$\begin{cases} u \in L^2(0,2,H_0^1(o,1)), \ u' \in L^2(0,2, H^{-1}(0,1)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - |1-t| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \text{ pp } (t,x) \in [0,2] \times [0,1]. \\ \sum_0^n \alpha_n \, u\,(t_k\,,x) = \xi(x), \text{ pp } x \in [0,1]. \end{cases}$$

où les coefficients α_k , satisfont à (5).