PIERRE BOLLEY
JACQUES CAMUS

Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 2, p. 1-79
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___1_A2_0>

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES
ET DEGENERES A PLUSIEURS VARIABLES

par

Pierre BOLLEY et Jacques CAMUS

INTRODUCTION.

On se propose d'étudier des problèmes aux limites dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, associés à des opérateurs elliptiques à l'intérieur, dégénérés au bord de cet ouvert, le bord étant caractéristique.

Dans cette direction, certains résultats ont été obtenus par M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC [1] pour l'opérateur

$$Au(x) \equiv \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1 \\ |\beta|\leq 1}} D^{\beta}\ (a_{\alpha\beta}(x).\ \varphi(x)\ D^{\alpha}u(x))$$

dans un ouvert Ω régulier, où φ est une fonction de classe C^{∞} équivalente à la distance au bord Γ de Ω, où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont de classe $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. La forme :

$$a(u,v) = \int \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1 \\ |\beta|\leq 1}} a_{\alpha\beta}(x)\ \ \varphi(x)\ D^{\alpha}\ u(x)\ \overline{D^{\beta}\ v(x)}\ dx$$

satisfaisant à la condition de coercivité : il existe une constante $c > o$ telle que pour tout u appartenant à l'espace $V = \{u \in L^2(\Omega)\ ;\ \sqrt{\varphi}\ \ D^{\alpha}\ u \in L^2(\Omega)\ ;\ |\alpha| \leq 1\}$ on ait : $a(u,u) \geq \alpha\|u\|_V^2$, ils ont établi que A est un isomorphisme de $W_1^{2+p}(\Omega) = \{u \in H^{p+1}(\Omega)\ ;\ \varphi u \in H^{p+2}(\Omega)\}$ sur $H^p(\Omega)$ pour tout entier $p \geq o$.

Dans [18], N. SHIMAKURA a introduit une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés plus générale :

$$Lu(x) \equiv L(x;D_x)\ \{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{k} P^{m-h}(x;D_x)\ \ \{\varphi(x)^{k-h}\ u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers tels que $1 \leq k \leq m$, $P^{m-h}(x;D_x)$ étant un opérateur aux dérivées partielles d'ordre $\leq m-h$, $P^m(x;D_x)$ étant un opérateur d'ordre m elliptique dans Ω. Ce sont des opérateurs d'ordre m elliptiques à l'intérieur et dont la dégénérescence au bord est d'ordre k. L'idée essentielle de l'étude faite dans [18] est d'obtenir des estimations a priori à partir de théorèmes d'isomorphisme à une variable. Il obtient ainsi certains résultats dans L^2 et sous certaines conditions qui excluent en particulier des opérateurs du type A.

Les travaux de M.I. VISIK et V.V. GRUSIN [22] permettent de compléter, en un certain sens, les résultats de [18] : considérant les problèmes aux limites associés aux opérateurs L :

$$\begin{cases} Lu = f \text{ dans } \Omega, \\ Bu = g \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

où B est un système d'opérateurs différentiels frontière, ils prouvent, moyennant certaines hypothèses générales sur L et B, que le couple d'opérateurs $\{L,B\}$ est un opérateur à indice dans des espaces convenables, le second membre f étant dans $L^2(\Omega)$.

L'objet de cet article est de faire, à partir des résultats obtenus à une variable [4] (cf : aussi [5]), une étude systématique des opérateurs elliptiques dégénérés du type L pour k et m entiers ≥ 1 (pour k=0, on retrouve les opérateurs elliptiques non dégénérés classiques (cf. [14] par exemple) ; pour k réel > o, on obtient certains résultats mais ceux-ci ne figurent pas dans cet article). Une partie des résultats cités ici a été annoncée dans [6], et [7].
A la différence des opérateurs elliptiques, il est nécessaire de faire une étude directe dans le cadre H^p, p étant un entier $\geq$ o, le nombre d'opérateurs frontière pour les problèmes aux limites associés dépendant explicitement de l'entier p.
On montre que, moyennant certaines conditions, le couple d'opérateurs $\{L,B\}$, où B est un système d'opérateurs différentiels frontière, est un opérateur à indice dans des espaces convenables, le second membre f étant dans $H^p(\Omega)$; en particulier, on montre comment cet indice dépend de l'entier p. Cette étude donne par ailleurs la régularité des problèmes aux limites associés. Dans cet ordre d'idée, citons que N. SHIMAKURA a obtenu indépendamment certains résultats de régularité dans [19].

La méthode utilisée ici permet d'étudier d'autres classes d'opérateurs elliptiques (cf. [6]). En particulier, elle permet d'obtenir les estimations a priori et la régularité des opérateurs considérés dans [2] et [21].

Cet article commence par un premier chapitre où l'on introduit les espaces de Sobolev avec poids W_k^m , généralisant ceux considérés dans [18] à des entiers k et m $\geq$ o quelconques. On y montre de plus la surjectivité des traces au moyen d'un relèvement explicite.

Dans le second chapitre, on étudie, sous certaines hypothèses, les problèmes aux limites associés aux opérateurs L. La technique utilisée est celle des estimations a priori comme dans [17].

On peut toutefois obtenir des résultats analogues à ceux du chapitre II sous des hypothèses moins restrictives ; c'est ce que l'on explicite sur des exemples dans le premier paragraphe du chapitre III. On montre ensuite que, dans certains cas, on peut caractériser algébriquement la condition imposée au système d'opérateurs frontière B. Enfin, une étude détaillée des opérateurs L pour lesquels m=2 et k=1 permet de préciser, pour cette classe d'opérateurs, les résultats obtenus par MM. KHOHN-NIRENBERG dans [13].

Dans le chapitre IV, on applique les méthodes du chapitre II à l'étude des opérateurs elliptiques dans des espaces de Sobolev avec poids (cf. [9], [11]) et à l'étude des opérateurs introduits dans [1] et [23].

I - UNE CLASSE D'ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

On désigne par $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ les ensembles des nombres complexes et réels respectivement. Etant donné un entier $n \geq 1$, on note par $\mathbb{R}^n_+$ le demi-espace de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n > o\}.$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On notera, pour tout entier r positif ou nul, $H^r(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre r sur Ω (cf : par exemple [14]), et $H^r_o(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ (*) dans $H^r(\Omega)$. L'espace dual de $H^r_o(\Omega)$ est noté $H^{-r}(\Omega)$.

Etant donnés deux entiers k et $m \geq o$, on définit les espaces de Sobolev avec poids :

$$W^m_k(\mathbb{R}^n) = \{u \subset H^{m-k}(\mathbb{R}^n) \ ; \ x_n^k \, u \in H^m(\mathbb{R}^n)\},$$

et

$$W^m_k(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in H^{m-k}(\mathbb{R}^n_+) \ ; \ x_n^k \, u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert pour les normes :

$$u \longrightarrow \|u\|_{W^m_k(\mathbb{R}^n)} = \left(\|u\|^2_{H^{m-k}(\mathbb{R}^n)} + \|x_n^k \, u\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/2},$$

et

$$u \longrightarrow \|u\|_{W^m_k(\mathbb{R}^n_+)} = \left(\|u\|^2_{H^{m-k}(\mathbb{R}^n)} + \|x_n^k \, u\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n_+)}\right)^{1/2}$$

respectivement.

<u>Proposition 1.1</u> : <u>Si k et m sont deux entiers $\geq$ 1, on a les inclusions algébriques et topologiques suivantes</u> :

$$W^m_k(\mathbb{R}^n) \subset W^{m-1}_{k-1}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad W^m_k(\mathbb{R}^n_+) \subset W^{m-1}_{k-1}(\mathbb{R}^n_+).$$

(*) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ de Ω dans $\mathbb{C}$ à support compact dans Ω et par $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(R^n)$.

<u>Démonstration</u> : Pour $\mathbb{R}^n$: soit u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}^n)$; sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} u(x)\, dx$$

vérifie :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} (1+|\xi|^2)^{m-k/2}\ \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n) \\ \text{et} \\ (1+|\xi|^2)^{m/2}\ D^k_{\xi_n}\ \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

où $D_{\xi_n} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_n}$. Par suite, pour presque tout $\xi' = (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$, la fonction $\mathcal{F}u(\xi',.)$ vérifie

$$(1.2)\qquad \begin{cases} (1+|\xi_n|^2)^{m-k/2}\ \mathcal{F}u(\xi',.) \in L^2(\mathbb{R}) \\ \text{et} \\ (1+|\xi_n|^2)^{m/2}\ D^k_{\xi_n}\ \mathcal{F}u(\xi',.) \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

On en déduit(*), pour presque tout ξ', que :

$$(1.3)\qquad \begin{cases} i\ D^{k-1}_{\xi_n}\ \mathcal{F}u(\xi',\xi_n) = \int_{\xi_n}^{+\infty} D^k_{\xi_n}\ \mathcal{F}u(\xi',\sigma)\, d\sigma \\ \text{et} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} D^k_{\xi_n}\ \mathcal{F}u(\xi',\sigma)\, d\sigma = 0. \end{cases}$$

Il faut montrer que

$$(1.4)\ \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{m-1}|D^{k-1}_{\xi_n}\mathcal{F}u(\xi)|^2\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{m-1}\left|\int_{\xi_n}^{+\infty} D^k_{\xi_n}\ \mathcal{F}u(\xi',\sigma)d\sigma\right|^2 d\xi < +\infty.$$

En développant $(1+|\xi|^2)^{m-1}$ selon la formule du binôme, on est ramené à prouver que les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi'|^{2p}\ |\xi_n|^{2q}\ \left|\int_{\xi_n}^{+\infty} D^k_{\xi_n}\ \mathcal{F}\ u(\xi',\sigma)d\sigma\right|^2\, d\xi,$$

pour $p+q \leq m-1$, sont finies.

D'après l'inégalité n° 330 de [12], pour presque tout ξ', on a :

$$(1.5)\ \int_0^{+\infty} \xi_n^{2q}\ \left|\int_{\xi_n}^{+\infty} D^k_{\xi_n}\ \mathcal{F}u(\xi',\sigma)d\sigma\right|^2 d\xi_n \leq C\ .\ \int_0^{+\infty} \xi_n^{2(q+1)}\ |D^k_{\xi_n}\ \mathcal{F}u(\xi',\xi_n)|^2\, d\xi_n,$$

(*) Cela résulte du fait que la proposition (1.1) est vraie pour n=1 (voir [4] lorsque $k \leq m$. Pour $k > m$, il suffit d'adapter les techniques utilisées dans [4]).

où C est une constante [*]. De même,

$$(1.6)\ \int_{-\infty}^{0}|\xi_n|^{2q}\Big|\int_{\xi_n}^{+\infty}D_{\xi_n}^{k}\mathcal{F}u(\xi',\sigma)d\sigma\Big|^{2}d\xi_n \leq C.\int_{-\infty}^{0}|\xi_n|^{2(q+1)}|D_{\xi_n}^{k}\mathcal{F}u(\xi',\xi_n)|^{2}d\xi_n,$$

pour presque tout ξ' d'après (1.3).

On intègre maintenant les inégalités (1.5) et (1.6) par rapport à ξ', après multiplication par $|\xi'|^{2p}$. Il vient :

$$(1.7)\ \int_{\mathbb{R}^n}|\xi'|^{2p}|\xi_n|^{2q}\Big|\int_{\xi_n}^{+\infty}D_{\xi_n}^{k}\mathcal{F}u(\xi',\sigma)d\sigma\Big|^{2}d\xi \leq C\int_{\mathbb{R}^n}|\xi'|^{2p}|\xi_n|^{2(q+1)}|D_{\xi_n}^{k}\mathcal{F}u(\xi)|^{2}d\xi\ ;$$

cette dernière intégrale est finie puisque $x_n^k u$ appartient à $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Pour $\mathbb{R}_+^n$: Cela résulte du lemme suivant :

<u>Lemme 1.1</u> : <u>Il existe un opérateur de prolongement P linéaire, continu de $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$ dans $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ tel que pour tout u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$ on ait</u> :

$$Pu\Big|_{\mathbb{R}_+^n} = u$$

<u>dans</u> $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$.

<u>Démonstration</u> : Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$, on pose :

$$Pu(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_n \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{\mathrm{Max}(k,m)} \alpha_j\, u(x',-jx_n), & \text{si } x_n < 0, \end{cases}$$

les α_j étant des constantes solutions du système :

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{Max}(k,m)} \alpha_j(-j)^{\ell} = 1 \quad \text{pour} \quad \ell = -k,\dots,\mathrm{Max}(-1,m-k-1).$$

Ces conditions impliquent que Pu appartient à $H^{m-k}(\mathbb{R}^n)$ et que x_n^k Pu appartient à $H^m(\mathbb{R}^n)$, et on a :

$$\|Pu\|_{W_k^m(\mathbb{R}^n)} \leq C\,.\,\|u\|_{W_k^m(\mathbb{R}_+^n)}\ ,$$

où C est une constante indépendante de u.

(*) On désigne ici et dans la suite par C, une constante qui peut changer d'une inégalité à l'autre.

Remarque 1.1 : A l'aide des résultats précédents, il est facile de prouver que l'on a :

$$W_k^m(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n)\ ;\ x_n^{\mathrm{Max}(o,k-m)}\, u \in L^2(\mathbb{R}_+^n)\ ,\ x_n^k u \in H^m(\mathbb{R}_+^n)\}.$$

Proposition 1.2 : On a :

(i) l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_k^m(\mathbb{R}^n)$,

(ii) l'espace $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ est dense dans $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$.

Démonstration :

(i) Dans une première étape, on tronque : soit Ψ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Psi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\Psi(x) = o$ pour $|x| \geq 2$. On pose $\Psi_R(x) = \Psi(x/R)$ pour $R > o$. Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}^n)$, la fonction $u_R = \Psi_R . u$ appartient à $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ et converge vers u dans $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ quand R tend vers $+\infty$.

Dans une seconde étape, on régularise les fonctions u_R, qu'on note maintenant u : soit j appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $j(x) \geq o$, $\int_{\mathbb{R}^n} j(x)dx = 1$. On pose $j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} j(\frac{x}{\varepsilon})$ pour $\varepsilon > o$. Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ à support compact, la fonction $u_\varepsilon = j_\varepsilon * u$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et converge vers u dans $W_k^m(\mathbb{R}^n)$, quand ε tend vers o, d'après la proposition 1.1.

(ii) Cela résulte de (i) et du lemme 1.1.

On peut caractériser les espaces de Sobolev avec poids $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$ de la façon suivante

Proposition 1.3 : Un élément u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n)$ appartient à $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$ si et seulement si $x_n^k u$ appartient à $H^m(\mathbb{R}_+^n) \cap H_o^{\mathrm{Min}(k,m)}(\mathbb{R}_+^n)$.

Démonstration : On utilise la proposition 1.2 et l'inégalité n° 330 de [12] qui permet d'établir que si v appartient à $H_o^k(\mathbb{R}_+^n)$, alors $\frac{v}{x_n^k}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+^n)$.

<u>Remarque 1.2</u> : De ce résultat suit que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ est dense dans $W^m_k(\mathbb{R}^n_+)$ lorsque $k \geq m$ et que, sur cet espace, la norme :

$$u \longrightarrow \| x_n^k u \|_{H^m(\mathbb{R}^n_+)}$$

est équivalente à la norme :

$$u \longrightarrow \| u \|_{W^m_k(\mathbb{R}^n_+)}.$$

<u>Proposition 1.4</u> : <u>L'espace dual</u> $[W^m_k(\mathbb{R}^n)]'$ <u>de l'espace</u> $W^m_k(\mathbb{R}^n)$ <u>s'identifie à l'espace des distributions T de</u> $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <u>de la forme</u> :

$$T = \sum_{j=o}^{k} x_n^j \, g_j,$$

<u>où</u> g_j, <u>pour</u> $j = o,\dots,k$, <u>appartient à</u> $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$.

<u>De plus, la norme d'espace dual sur</u> $[W^m_k(\mathbb{R}^n)]'$ <u>est équivalente à la norme</u> :

$$T \longrightarrow \|T\|_{[W^m_k(\mathbb{R}^n)]'} = \operatorname*{Inf}_{\substack{T = \sum_{j=o}^{k} x_n^j g_j \\ g_j \in H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)}} \left\{ \sum_{j=o}^{k} \|g_j\|_{H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)} \right\}$$

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 1.2, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^m_k(\mathbb{R}^n)$, par suite, on peut identifier l'espace dual $[W^m_k(\mathbb{R}^n)]'$ de $W^m_k(\mathbb{R}^n)$ à un sous-espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$.

De plus, grâce à la proposition 1.1, on peut identifier l'espace $W^m_k(\mathbb{R}^n)$ à un sous-espace fermé de l'espace produit $\prod_{j=o}^{k} H^{m-k+j}(\mathbb{R}^n)$ par l'application : $u \longrightarrow (u, x_n u, \dots, x_n^k u)$.

Il en résulte d'après le théorème de Hahn-Banach que toute distribution T, appartenant à $[W^m_k(\mathbb{R}^n)]'$ peut s'écrire, de manière non unique, sous la forme :

$$T = \sum_{j=o}^{k} x_n^j \, g_j, \tag{1.8}$$

où g_j, pour $j = o,\dots,k$, appartient à $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$.

Inversement, il est clair que toute distribution de la forme (1.8) appartient à $[W_k^m(\mathbb{R}^n)]$.

L'équivalence des normes est une conséquence facile du théorème de Banach.

La proposition suivante nous sera utile au chapitre II.

<u>Proposition 1.5</u> : <u>Si T, appartenant à</u> $[W_k^m(\mathbb{R}^n)]'$ <u>admet la décomposition particulière</u>

$$T = \sum_{j=o}^{k} x_n^j \, g_j$$

<u>où</u> g_j, <u>pour</u> $j = o,\ldots,k$ <u>appartient à</u> $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$, <u>alors on a</u> :

$$\|T\|_{[W_k^m(\mathbb{R}^n)]'} = \inf_{\substack{\sum_{j=o}^{k} x_n^j \varphi_j = o \\ \varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}} \left\{ \sum_{j=o}^{k} \|g_j + \varphi_j\|_{H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)} \right\}$$

On commence par établir un lemme.

<u>Lemme 1.2</u> : <u>Si</u> $\sum_{j=o}^{k} x_n^j \, g_j = o$ <u>pour certains</u> g_j <u>appartenant à</u> $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$, <u>alors il existe, pour tout</u> $\varepsilon > o$, <u>une famille</u> $(g_{j,\varepsilon})_{o \leq j \leq k}$ <u>vérifiant</u> :

(i) $g_{j,\varepsilon}$ <u>appartient à</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ <u>pour</u> $j = o,\ldots,k$,

(ii) $\sum_{j=o}^{k} x_n^j \, g_{j,\varepsilon} = o$,

(iii) $\lim_{\varepsilon \to o} g_{j,\varepsilon} = g_j$ <u>dans</u> $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$, <u>pour</u> $j = o,\ldots,k$.

<u>Démonstration</u> : Dans une première étape, on tronque : soit Ψ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Psi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\Psi(x) = o$ pour $|x| \geq 2$. On pose $\Psi_R(x) = \Psi(x/R)$ pour $R > o$. Pour $j = o,\ldots,k$, on note $g_{j,R} = g_j \cdot \Psi_R$. On a alors : $g_{j,R}$ est une distribution à support compact qui converge, lorsque R tend vers $+\infty$, vers g_j dans $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$. De plus, on a toujours la relation :

$$\sum_{j=o}^{k} x_n^j \, g_{j,R} = o.$$

Dans une seconde étape, on régularise les éléments $g_{j,R}$, qu'on note maintenant g_j : soit j appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $j(x) \geq o$ et $\int_{\mathbb{R}^n} j(x)dx = 1$. On pose $j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} j(\frac{x}{\varepsilon})$ pour $\varepsilon > o$, et pour $j = o,\ldots,k$ on définit $g_{j,\varepsilon}$ par :

$$\begin{cases} g_{j,\varepsilon} = j_\varepsilon * g_j + \sum_{q=j+1}^{k} \binom{q-j}{q} (-1)^{q-j} (g_q * x_n^{q-j} j_\varepsilon) \text{ si } o \leq j < k, \\ g_{k,\varepsilon} = j_\varepsilon * g_k. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la famille $(g_{j,\varepsilon})_{o\leq j\leq k}$ ainsi définie satisfait à (i), (ii) et (iii).

<u>Démonstration de la proposition 1.5</u> : Il suffit de prouver que si T admet une autre décomposition :

$$T = \sum_{j=o}^{k} x_n^j g'_j,$$

avec g'_j, pour $j = o,\ldots,k$, appartenant à $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$, alors on a l'inégalité

$$\inf_{\substack{\sum_{j=o}^{k} x_n^j \varphi_j = o \\ \varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}} \left\{ \sum_{j=o}^{k} \|g_j+\varphi_j\|_{H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)} \right\} \leq \sum_{j=o}^{k} \|g'_j\|_{H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)}$$

Or on a : $\sum_{j=o}^{k} x_n^j (g_j - g'_j) = o$ avec $g_j - g'_j$ appartenant à $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$ pour $j = o,\ldots,k$. Il suffit donc d'appliquer le lemme 1.2.

Etant donné u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$, on peut lui associer m fonctions $\gamma_j u(x')$, appelées "traces" de u et définies par :

$$(1.9)\quad \gamma_j u(x') = \begin{cases} D_{x_n}^j u(x',o), \text{ pour } j = o,\ldots,m-k-1 \text{ si } o \leq k < m, \\ (-1)^{-j-1} \int_o^{+\infty} x_n^{-j-1} u(x',x_n)dx_n, \text{ pour } j=-k,\ldots,\mathrm{Min}(-1,m-k-1) \\ \qquad\qquad \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

où $D_{x_n} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}$. On notera $\gamma u = \{\gamma_{-k}u,\ldots,\gamma_{m-k-1}u\}$. (Remarquer que $\gamma_j u$, pour $-k \leq j \leq \mathrm{Min}(-1,m-k-1)$, a un sens d'après la remarque 1.1).

<u>Proposition 1.6</u> : <u>L'application : $u \longrightarrow \gamma u$ est linéaire, continue, surjective de $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$ sur $\prod_{j=-k}^{m-k-1} H^{m-k-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.</u>

<u>Démonstration</u> :

1°) On montre d'abord que $\gamma_j u$, pour $j = -k,\dots,m-k-1$, appartient à $H^{m-k-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ et que : $u \longrightarrow \gamma_j u : W_k^m(\mathbb{R}_+^n) \longrightarrow H^{m-k-j-1/2}(\mathbb{R}^n)$ est continue.

En fait, d'après la proposition 1.2 (ii), il suffit de prouver que, pour u appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, on a :

$$\|\gamma_j u\|_{H^{m-k-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \,.\, \|u\|_{W_k^m(\mathbb{R}_+^n)}. \tag{1.10}$$

Pour $j = o,\dots,m-k-1$, si $o \leq k < m$, l'inégalité (1.10) est triviale cf : par exemple, [14].

Par ailleurs, u, appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$, vérifie en particulier :

$$\left\{\begin{array}{l} x_n^{\mathrm{Max}(o,k-m)} u \in L^2(\mathbb{R}_+ \,;\, H^{\mathrm{Max}(o,m-k)}(\mathbb{R}^{n-1})) \\ \text{et} \\ x_n^k\, u \in L^2(\mathbb{R}_+ \,;\, H^m(\mathbb{R}^{n-1})). \end{array}\right. \tag{1.11}$$

Désignons par F la transformation de Fourier en variable x_n :

$$Fv(x',\xi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_n\xi_n}\, v(x',x_n)dx_n. \tag{1.12}$$

Ainsi, si $\tilde{u}$ désigne le prolongement de u par zéro pour $x_n < o$, les relations (1.11) s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} F(x_n^{\mathrm{Max}(o,k-m)}\tilde{u}) \in L^2(\mathbb{R} \,;\, H^{\mathrm{Max}(o,m-k)}(\mathbb{R}^{n-1})) \\ \text{et} \\ (-D_{\xi_n})^{\mathrm{Min}(k,m)} \{F(x_n^{\mathrm{Max}(o,k-m)}\tilde{u})\} \in L^2(\mathbb{R} \,;\, H^m(\mathbb{R}^{n-1})). \end{array}\right. \tag{1.13}$$

Il en résulte (1.10) pour $j = -k,\dots,\mathrm{Min}(-1,m-k-1)$ puisque pour de tels indices j on a :

$$\gamma_j u = D_{\xi_n}^{-j-1} \{F\tilde{u}\}\big|_{\xi_n=o}. \tag{1.14}$$

2°) On montre maintenant que l'application est surjective.

On commence par remarquer que si u appartient à $\mathcal{D}(\overline{R^n_+})$ et si v_k est la fonction de $\mathcal{D}(R^n_+)$ définie par :

$$(1.15)\qquad v_k(x',x_n) = \int_{x_n}^{+\infty}(\int_{\sigma_2}^{+\infty}(\ldots(\int_{\sigma_k}^{+\infty} u(x',\sigma)d\sigma)\ldots)d\sigma_3)d\sigma_2,$$

alors on a les relations :

$$(1.16)\quad \begin{cases} \gamma_j u(x') = (-1)^{k-1}(-j-1)!\,(\dfrac{\partial^{k+j}}{\partial x_n^{k+j}}v_k)(x',o) \text{ pour } j=-k,\ldots,\mathrm{Min}(-1,m-k-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } k \geq 1, \\ \gamma_j u(x') = (-1)^{k+j}\, i^j\, (\dfrac{\partial^{k+j}}{\partial x_n^{k+j}} v_k)(x',o) \text{ pour } j=o,\ldots,m-k-1 \text{ si } o \leq k < m. \end{cases}$$

Désignons par $\wedge$ la transformation de Fourier en variables tangentielles :

$$(1.17)\qquad \hat{v}(\xi',x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i<x',\xi'>} v(x',x_n)dx'.$$

Soient alors j un indice tel que $-k \leq j \leq m-k-1$ et φ_j appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$. Soit de plus Ψ appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ telle que : $\Psi(t) = 1$ dans un voisinage de o. Considérons la fonction u définie par sa transformée de Fourier partielle $\hat{u}$ par :

$$(1.18)\qquad \hat{u}(\xi',x_n) = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \{\Psi(x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2})\hat{\varphi}_j(\xi')\frac{(ix_n)^{k+j}}{(k+j)!}\}.$$

La fonction $\hat{v}_k$ associée à cette fonction $\hat{u}$ par la formule (1.15) est la fonction :

$$(1.19)\qquad \hat{v}_k(\xi',x_n) = \Psi(x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2})\hat{\varphi}_j(\xi')\frac{(ix_n)^{k+j}}{(k+j)!},$$

on en déduit les relations :

$$(1.20)\qquad \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_n^{k+\ell}}\hat{v}_k(\xi',o) = \delta_{k+\ell,k+j}\, i^{k+j}\hat{\varphi}_j(\xi') \text{ pour } \ell \geq -k,$$

($\delta_{k+\ell,k+j}$ désigne le symbole de Kronecker). On vérifie ensuite qu'il existe une constante C, indépendante de φ_j, telle que :

$$(1.21)\qquad \|u\|_{W^m_k(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\ .\ \|\varphi_j\|_{H^{m-k-j-1/2}(\mathbb{R}^n)}.$$

On en conclut facilement que l'application

$$\gamma : W_k^m(\mathbb{R}_+^n) \longrightarrow \prod_{j=-k}^{m-k-1} H^{m-k-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ est surjective.}$$

Soit maintenant Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ. On suppose que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et vérifiant :

$$(1.22) \qquad \begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ \varphi(x) > 0\}, \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ \varphi(x) = 0\}, \\ \text{grad } \varphi(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \Gamma. \end{cases}$$

(grad φ étant le vecteur gradient associé à φ).

On définit les espaces de Sobolev avec poids $W_k^m(\Omega)$ par :

$$W_k^m(\Omega) = \{u \in H^{m-k}(\Omega) \ , \ \varphi^k u \in H^m(\Omega)\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert pour la norme :

$$u \longrightarrow \|u\|_{W_k^m(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{H^{m-k}(\Omega)} + \|\varphi^k u\|^2_{H^m(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Des propositions 1.1 et 1.2, on déduit facilement que :

Proposition 1.7 :

(i) Si k et m sont deux entiers ≥ 1, alors on a l'inclusion algébrique et topologique suivante :

$$W_k^m(\Omega) \subset W_{k-1}^{m-1}(\Omega).$$

(ii) L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W_k^m(\Omega)$.

Remarque 1.3 : Il résulte de la remarque 1.1 que :

$$W_k^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ \varphi^{\mathrm{Max}(0,k-m)} u \in L^2(\Omega) \ , \ \varphi^k u \in H^m(\Omega)\}.$$

Remarque 1.4 : De même, de la remarque 1.2, on déduit que, pour $k \geq m$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_k^m(\Omega)$ et que, sur cet espace, la norme :

$$u \longrightarrow \|\varphi^k u\|_{H^m(\Omega)}$$

est équivalente à la norme :

$$u \longrightarrow \|u\|_{W_k^m(\Omega)}.$$

On va maintenant définir des "traces" pour les éléments de $W_k^m(\Omega)$. Soit δ un nombre réel positif et $U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, d(x,\Gamma) < \delta\}$, $d(x,\Gamma)$ désignant la distance du point x à Γ. On supposera δ suffisamment petit de sorte que, pour tout x appartenant à U_δ, la distance de x à Γ ne soit atteinte que par un seul point x_Γ de Γ. L'application

$$\Psi : x \longrightarrow (x_\Gamma, \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}\, d(x,\Gamma)) : U_\delta \longrightarrow \Gamma \times]-\delta,\delta[$$

est un difféomorphisme de classe C^∞. Soit α une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ égale à 1 dans un voisinage de o et à support contenu dans $]-\delta,\delta[$. Alors, pour u appartenant à $W_k^m(\Omega)$, on pose, pour x appartenant à Γ :

$$(1.23)\quad \gamma_j u(x) = \begin{cases} D_t^j u(\Psi^{-1}(x,t))|_{t=o}, & \text{pour } j=o,\dots,m-k-1 \text{ si } o \le k < m, \\ (-1)^{-j-1} \displaystyle\int_o^{+\infty} t^{-j-1}\alpha(t)u(\Psi^{-1}(x,t))dt, & \\ & \text{pour } j = -k,\dots,\mathrm{Min}(-1,m-k-1) \text{ si } k \ge 1, \end{cases}$$

où $D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$. On notera $\gamma u = \{\gamma_{-k}u,\dots,\gamma_{m-k-1}u\}$.

De la proposition 1.6, on déduit la

<u>proposition 1.8</u> : <u>L'application : $u \longrightarrow \gamma u$ est linéaire continue surjective de $W_k^m(\Omega)$ sur $\prod_{j=-k}^{m-k-1} H^{m-k-j-1/2}(\Gamma)$.</u>

On sera amené au chapitre II à considérer aussi les espaces suivants :

$$W_{k,\varphi}^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^{m-k}(\mathbb{R}^n)\ ,\ \varphi^k u \in H^m(\mathbb{R}^n)\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert pour la norme :

$$u \longrightarrow \|u\|_{W_{k,\varphi}^m(\mathbb{R}^n)} = \left(\|u\|^2_{H^{m-k}(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi^k u\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/2}.$$

Des propositions 1.1 et 1.2, on déduit facilement que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^m_{k,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Il en résulte que l'espace dual $[W^m_{k,}(\mathbb{R}^n)]'$ est un espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, $[W^m_{k,}(\mathbb{R}^n)]'$ coïncide avec l'espace des distributions T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de la forme

$$T = \sum_{j=o}^{k} \varphi^j g_j$$

où g_j, pour $j = o,\ldots,k$, appartient à $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$. De plus, la norme d'espace dual sur $[W^m_{k,}(R^n)]'$ est équivalente à la norme :

$$T \longrightarrow \|T\|_{[W^m_{k,}(\mathbb{R}^n)]'} = \inf_{\substack{T = \sum_{j=o}^{k} \varphi^j g_j \\ g_j \in H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)}} \{ \sum_{j=o}^{k} \|g_j\|_{H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)} \}.$$

II - ETUDE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES ET DEGENERES

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ du type défini dans le chapitre I. Soit l'opérateur elliptique dégénéré $L \equiv L(x;D_x)$ défini par :

$$L(x;D_x)\,\{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{k} P^{2m-h}\,(x;D_x)\ \{\varphi(x)^{k-h}\ u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers tels que $1 \leq k \leq 2m$ (*), $P^{2m-h}(x;D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles d'ordre $\leq$ 2m-h , $P^{2m}(x;D_x)$ étant un opérateur elliptique dans $\overline{\Omega}$, d'ordre 2m. Ce sont des opérateurs d'ordre 2m, elliptiques à l'intérieur et dont la dégénérescence au bord est d'ordre k. On se propose d'étudier des problèmes aux limites associés à L

$$\begin{cases} Lu = f \text{ dans } \Omega \\ B\gamma u = g \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

où B est un système d'opérateurs différentiels frontière en nombre fini, du point de vue de l'existence des solutions u dans des espaces de Sobolev avec poids du type $W_k^{2m+P}(\Omega)$.

Comme dans le cas elliptique, on ne peut se donner arbitrairement l'opérateur {L,B} pour que le problème soit bien posé ; aussi on sera amené à introduire certaines conditions sur cet opérateur.

Le but essentiel de ce chapitre est de montrer que l'opérateur {L,B} est un opérateur à indice (entre espaces convenables), la technique utilisée étant celle des estimations à priori.

(+) Ce chapitre fait suite à [4], c'est pourquoi on fait la restriction $1 \leq k \leq 2m$. Dans le chapitre IV, on montrera que les résultats ici sont aussi valables pour 2m < k.

1°) Estimations a priori dans le demi espace.

1.1. Les estimations a priori dans le demi espace pour le cas des coefficients constants.

1.1.1. : Notations et hypothèses

Soit l'opérateur $L \equiv L(x_n; D_{x'}, D_{x_n})$ défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Lu(x) \equiv L(x_n; D_{x'}, D_{x_n})\,\{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{k} P^{2m-k}(D_{x'}; D_{x_n})\,\{x_n^{k-h}\, u(x)\}\,,$$

où $(D_{x'}, D_{x_n}) = (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\,;\,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$, où m et k sont deux entiers tels que $1 \leq k \leq 2m$ et où

(i) $P^{2m-h}(D_{x'}\,;\,D_{x_n})$, pour $o \leq h \leq k$, est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants complexes, homogène et d'ordre 2m-h :

$$P^{2m-h}(D_{x'}; D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+j=2m-h} P^{2m-h}_{j,\alpha}\, D^{\alpha}_{x'}\, D^{j}_{x_n}\;;$$

(ii) $P^{2m}(D_{x'}; D_{x_n})$ est un opérateur proprement elliptique, c'est-à-dire : pour tout vecteur ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}-\{o\}$, le polynôme $P^{2m}(\xi'; \xi_n)$ en ξ_n, admet exactement m zéros situés dans $\operatorname{Im} \xi_n > o$ et m zéros situés dans $\operatorname{Im} \xi_n < o$.

Cet opérateur L induit, pour tout entier $p \geq o$, une application linéaire continue de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}^n_+)$.

Par transformation de Fourier en variables tangentielles, (cf : (1.17)) l'opérateur L est transformé en un opérateur différentiel ordinaire en x_n, noté $L(x_n; \xi', D_{x_n})$, dépendant du paramètre ξ' de $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$L(x_n; \xi', D_{x_n})\,\{v(x_n)\} \equiv \sum_{h=o}^{k} P^{2m-h}\,(\xi'; D_{x_n})\,\{x_n^{k-h}\, v(x_n)\}.$$

Ces opérateurs appartiennent à la classe des opérateurs différentiels étudiés dans [4]. Ceci nous amène à définir pour chaque entier $p \geq o$ la condition $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$ suivante :

$H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$: l'équation $\phi(\rho) \equiv \sum_{h=o}^{k} P^{2m-k+h}_{2m-k+h,o}\, i^h \rho(\rho-1)\ldots(\rho-h+1) = o$ n'admet pas de racine sur la droite $Re\rho = -p-2m+k-\frac{1}{2}$.

Désignons par r_p le nombre de racines de l'équation $\phi(\rho) = o$ vérifiant :

$$Re\rho > -p-2m+k-\frac{1}{2}.$$

On introduit alors une condition $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$ portant sur le nombre $\chi_p = m-r_p$.

$H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$: le nombre χ_p est $\geq o$.(*)

On définit maintenant les opérateurs frontière. Pour $j = 1,\ldots,\chi_p$ (si χ_p est $> o$), soit l'opérateur $B^p_j(D_{x'})$ défini par :

$$B^p_j(D_{x'}) \equiv \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}\,(D_{x'})$$

où, pour tout couple d'entiers (j,q) vérifiant $1 \leq j \leq \chi_p$, $-k \leq q \leq 2m+p-k-1$, $B_{j,q}(D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants complexes, homogène et d'ordre m_j-q, m_j étant un entier vérifiant $-k \leq m_j \leq 2m+p-k-1$ et si, m_j-q est négatif, l'opérateur $B_{j,q}(D_{x'})$ correspondant est par définition l'opérateur nul.

On notera $B_p \equiv B_p(D_{x'}) \equiv (B^p_1(D_{x'}),\ldots,B^p_{\chi_p}(D_{x'}))$. Cet opérateur B_p induit une application linéaire continue de

$$W^{2m+p}_k(\mathbb{R}^n_+) \quad \text{dans} \quad \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) :$$

$$u \longrightarrow B_p\,\gamma u = (B^p_1\,\gamma u,\ldots,B^p_{\chi_p}\,\gamma u)$$

où

$$B^p_j\,\gamma u = \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}\,\gamma_q u$$

pour $j = 1,\ldots,\chi_p$.

(*) On examinera par la suite quelques cas particuliers où cette condition n'est pas réalisée.

Par transformation de Fourier en variables tangentielles, l'opérateur B_p est transformé en un opérateur linéaire de $\mathbb{C}^{2m+p}$ dans $\mathbb{C}^{\chi_p}$, noté $B_p(\xi')$, dépendant du paramètre ξ' de $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$z = (z_{-k},\dots,z_{2m+p-k-1}) \longrightarrow B_p(\xi')z = (B_1^p(\xi')z,\dots,B_{\chi_p}^p(\xi')z)$$

où

$$B_j^p(\xi')z = \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}(\xi')z_p$$

pour $j = 1,\dots,\chi_p$.

On définit maintenant la condition $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ suivante$^{(*)}$:

$H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$: pour tout ω appartenant à S_{n-2}, sphère unité de $\mathbb{R}^{n-1}$, le problème aux limites :

$$\begin{cases} L(x_n;\omega,D_{x_n})\,\{v(x_n)\} = 0 \\ B_p(\omega).\gamma v = 0 \end{cases}$$

Si $\chi_p > 0$, ou bien

$$\{L(x_n;\omega,D_{x_n})\,\{v(x_n)\} = 0$$

si $\chi_p = 0$, n'admet que la solution $v=0$ dans $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$.

1.1.2. Enoncé des résultats

Pour tout entier $p \geq 0$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$, défini sur $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ par :

$$(1.1) \qquad \mathcal{P}_p : u \longrightarrow \mathcal{P}_p u = \begin{cases} \{Lu\ ;\ B_p\,\gamma u\} & \text{si } \chi_p > 0, \\ Lu & \text{si } \chi_p = 0. \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire continu de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^p(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ si $\chi_p > 0$ ou dans $H^p(\mathbb{R}^n_+)$ si $\chi_p = 0$.

Désignons par $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$ (resp. $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'$) l'espace dual de $H^p(\mathbb{R}^n_+)$ (resp. $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$). L'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire continu de

$$[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ dans } [W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]' \quad \text{si } \chi_p > 0$$

ou de $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$ dans $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'$ si $\chi_p = 0$.

Désignons enfin par j_p l'isomorphisme canonique de $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$ sur $H_o^{-p}(\mathbb{R}^n_+)$ espace des distributions de $H^{-p}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

On a alors les théorèmes suivants :

<u>Théorème 1.1</u> : <u>Soit p un entier $\geq$ o. On suppose que les conditions</u> $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$ <u>et</u> $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ <u>sont réalisées. Alors, il existe une constante c > o telle que pour tout u appartenant à</u> $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ <u>on ait</u> :

(i) <u>si</u> $k < 2m+p$:

$$\|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c \cdot \{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-mj-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|(1+x_n^k)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

<u>si</u> $\chi_p > o$ <u>ou bien</u>

$$\|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c \cdot \{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|(1+x_n^k)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\}$$

<u>si</u> $\chi_p = o$

(ii) <u>si $k = 2m$ et $p = o$</u>

$$\|u\|_{W_{2m}^{2m}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c \cdot \{\|\mathcal{P}_o u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_o} H^{-m_j-1/2}} + \|x_n^{2m}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\}$$

<u>si</u> $\chi_o > o$ <u>ou bien</u>

$$\|u\|_{W_{2m}^{2m}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c \cdot \{\|\mathcal{P}_o u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|x_n^{2m}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\} ,$$

<u>si</u> $\chi_o = o$.

<u>Théorème 1.2</u> : <u>Soit p un entier $\geq$ o. On suppose que les conditions</u> $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p,\mathbb{R}^n_+)$ et $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ <u>sont réalisées. Alors, il existe une constante c > o telle que, pour tout (f,g) appartenant à</u>

$$[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

<u>si</u> $\chi_p > o$ <u>et pour tout f appartenant à</u> $[H^p(R^n_+)]'$ <u>si</u> $\chi_p = o$, <u>on ait respectivement</u> :

$$\|(f,g)\|_{[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq c \,.\, \{\|\mathcal{P}^*_p(f,g)\|_{|W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)|'} +$$

$$+ \|j_p f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\} ,$$

et

$$\|f\|_{[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'} \leq c \,.\, \{\|\mathcal{P}^*_p f\|_{|W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)|'} + \|j_p f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\}.$$

1.1.3. Démonstration du théorème 1.1 :

Pour simplifier la démonstration, on supposera $\chi_p > o$. Les hypothèses $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$ et $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ impliquent que, pour tout ω appartenant à S_{n-2}, le couple d'opérateurs $\{L(x_n;\omega,D_{x_n}),\ B_p(\omega)\}$ réalise un isomorphisme de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{\chi_p}$. La sphère S_{n-2} étant compacte, on en déduit qu'il existe une constante $c > o$ telle que pour tout ω appartenant à S_{n-1} et tout v appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$ on ait :

$$(1.2)\quad \sum_{\ell=o}^{2m+p} \|D_s^\ell(s^k v(s))\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq c.\{\|L(s;\omega,D_s)\{v(s)\}\|_{H^p(\mathbb{R}_+)} + \|B_p(\omega).\gamma_v\|_{\mathbb{C}^{\chi_p}}\}.$$

Pour u appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ et ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} - \{o\}$, on pose

$$v(s) = u(x_n)$$

avec $s = x_n|\xi'|$.

On vérifie que l'on a les relations suivantes :

$D_s^\ell(s^k v(s)) = |\xi'|^{k-\ell}\ D_{x_n}^\ell(x_n^k\ u(x_n))$ pour $\ell = o,\dots,2m+p$,

$L(s;\omega,D_s)\{v(s)\} = |\xi'|^{k-2m}\ L(x_n;\xi',D_{x_n})\{u(x_n)\}$ avec $\omega = \xi'/|\xi'|$,

$B_{j,q}(\omega) = |\xi'|^{q-m_j}\ B_{j,q}(\xi')$ pour $1 \leq j \leq \chi_p$ et $-k \leq q \leq 2m+p-k-1$, si $\chi_p > o$,

$\gamma_q v = |\xi'|^{-q}\ \gamma_q u$ pour $-k \leq q \leq 2m+p-k-1$.

Par suite, il existe une constante $c > o$ telle que, pour tout u appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ et tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} - \{o\}$, on ait :

$$(1.3)\quad \sum_{\ell=o}^{2m+p} |\xi'|^{k-\ell+1/2} \|D^{\ell}_{x_n}(x_n^k u(x_n))\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq$$

$$\leq c . \left\{ \sum_{\ell=o}^{p} |\xi'|^{k-\ell-2m+1/2} \|D^{\ell}_{x_n}(L(x_n;\xi',D_{x_n})\{u(x_n)\}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \sum_{j=1}^{\chi_p} |\xi'|^{-m_j} \left| \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}(\xi')\, \gamma_q u \right| \right\}.$$

Ainsi, pour tout u appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} - \{o\}$, on a l'inégalité

$$(1.4)\quad \sum_{\ell=o}^{2m+p} |\xi'|^{k-\ell+1/2} \|D^{\ell}_{x_n}(x_n^k \hat{u}(\xi',x_n))\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq c . \left\{ \sum_{\ell=o}^{p} |\xi'|^{k-\ell-2m+1/2} \|D^{\ell}_{x_n}(L(x_n;\xi',D_{x_n})\{\hat{u}(\xi',x_n)\}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \sum_{j=1}^{\chi_p} |\xi'|^{-m_j} \left| \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}(\xi')\, \gamma_q \hat{u}(\xi',.) \right| \right\}.$$

On multiplie les deux membres de l'inégalité (1.4) par $|\xi'|^{2m+p-k-1/2}$ et on intègre par rapport à ξ' dans $\mathbb{R}^{n-1}$. On obtient l'inégalité :

$$(1.5)\quad \sum_{|\alpha|+j=2m+p} \|D^{\alpha}_{x'} D^{j}_{x_n}(x_n^k u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq c. \|\mathcal{P}_p u\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

d'où :

$$(1.6)\quad \|x_n^k u\|_{H^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c.\{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|x_n^k u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\}.$$

On en déduit le théorème 1.1 en utilisant les remarques 1.1 et 1.2 du chapitre I.

Pour établir les estimations a priori du théorème 1.2, on a besoin de quelques lemmes techniques.

1.1.4. Quelques lemmes

Soient ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et ϕ_q, pour $q = -k,\ldots,2m+p-k-1$, appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$; la distribution

$$(1.7)\quad T = \Phi + \sum_{q=-k}^{-1} \phi_q \otimes x_n^{-q-1}\, Y(x_n) + \sum_{q=0}^{2m+p-k-1} \phi_q \otimes \delta^{(q)}(x_n)$$

où Y est la fonction d'Heaviside et δ la mesure de Dirac en $x_n = 0$, appartient à $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'$.

Pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, la distribution en x_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(1.8)\quad \hat{T}(\xi',.) = \hat{\Phi}(\xi',.) + \sum_{q=-k}^{-1} \hat{\phi}_q(\xi')\, x_n^{-q-1}\, Y(x_n) + \sum_{q=0}^{2m+p-k-1} \hat{\phi}_q(\xi')\, \delta^{(q)}(x_n)$$

appartient à $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'$.

Désignons par $H_{\xi'}$ l'homothétie

$$(1.9)\qquad H_{\xi'} : x_n \longmapsto s = x_n|\xi'|$$

pour ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$. Notons $H_{\xi'}\hat{T}(\xi',.)$ la distribution en s définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(1.10)\quad \langle H_{\xi'}\hat{T}(\xi',.),\alpha(s)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \langle \hat{T}(\xi',.),\alpha(x_n|\xi'|)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

pour toute fonction α de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

<u>Lemme 1.1</u> : <u>Avec les notations précédentes, il existe une constante $c > 0$, indépendante de ϕ et ϕ_q, pour $q = -k,\dots,2m+p-k-1$, telle que</u> :

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{-4m-2p+2k+1}\, \|H_{\xi'}\hat{T}(\xi',.)\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'}\, d\xi' \leq c.\, \|T\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'}.$$

<u>Démonstration</u> : Puisque, pour $q = -k,\dots,-1$, la distribution $x_n^{-q-1}\, Y(x_n)$ appartient à $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'$, on peut écrire :

$$(1.11)\qquad x_n^{-q-1}\, Y(x_n) = \sum_{j=0}^{k} x_n^j\, Y_{j,q}(x_n)$$

où $Y_{j,q}$ appartient à $H^{-2m-p+k-j}(\mathbb{R})$ pour $0 \leq j \leq k$ et $-k \leq q \leq -1$.

Par ailleurs, $\phi_q \otimes \delta^{(q)}(x_n)$ appartient à $H^{-2m-p+k}(\mathbb{R}^n)$ pour $q = 0,\dots,2m+p-k-1$.

Il en résulte que la distribution T définie par (1.7) peut encore s'écrire sous la forme :

(1.12) $\quad T = \sum_{j=0}^{k} x_n^j V_j$,

avec $V_0 = \phi + \sum_{q=-k}^{-1} \phi_q \otimes Y_{0,q} + \sum_{q=0}^{2m+p-k-1} \phi_q \otimes \delta^{(q)}$ et $V_j = \sum_{q=-k}^{-1} \phi_q \otimes Y_{j,q}$ pour $j=1,\dots,k$.

De plus, V_j appartient à $H^{-2m-p+k-j}(\mathbb{R}^n)$ pour $j = 0,\dots,k$.

Soit maintenant $(\varphi_j)_{0\le j\le k}$, une famille de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\sum_{j=0}^{k} x_n^j \varphi_j = 0$. Posons $U_j = V_j + \varphi_j$ pour $j = 0,\dots,k$.

Pour toute fonction α appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle H_{\xi}, \hat{T}(\xi',.), \alpha(s)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \sum_{j=0}^{k} \langle \hat{U}_j(\xi',.), x_n^j \alpha(x_n|\xi'|)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})}.$$

On examine chacun des termes du second membre. On a :

$$\langle \hat{U}_j(\xi',.), x_n^j\alpha(x_n|\xi'|)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}U_j(\xi',\xi_n)|\xi'|^{-j-1} F^{-1}(s^j\alpha(s))(\xi_n/|\xi'|)d\xi_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}U_j(\xi',x_n|\xi'|)(1+x_n^2)^{\frac{-2m+k-p-j}{2}} |\xi'|^{-j} (1+x_n^2)^{\frac{2m-k+p+j}{2}} F^{-1}(s^j\alpha(s))(x_n)dx_n \ ;$$

il en résulte que :

$$|\langle \hat{U}_j(\xi',.), x_n^j\alpha(x_n|\xi'|)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})}| \le$$

$$\le |\xi'|^{-j} \, \|s^j\alpha(s)\|_{H^{2m+p-k+j}(\mathbb{R})} \left(\int_{\mathbb{R}} (1+x_n^2)^{-2m-p+k-j} |\mathcal{F}U_j(\xi',x_n|\xi'|)|^2 dx_n\right)^{1/2}$$

$$= \|s^j\alpha(s)\|_{H^{2m+p-k+j}(\mathbb{R})} |\xi'|^{2m+p-k-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (|\xi'|^2+\xi_n^2)^{-2m-p+k-j}|\mathcal{F}U_j(\xi',\xi_n)|^2 d\xi_n\right)^{1/2}$$

Comme la norme sur $W_k^{2m+p}(\mathbb{R})$ est équivalente à la norme :

$$v \longmapsto \sum_{j=0}^{k} \|s^j v(s)\|_{H^{2m+p-k+j}(\mathbb{R})},$$

on déduit des majorations précédentes que :

$$\|H_{\xi'}\hat{T}(\xi',.)\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'} \le |\xi'|^{4m+2p-2k-1} \sum_{j=0}^{k} \left(\int_{\mathbb{R}} (|\xi'|^2+\xi_n^2)^{-2m-p+k-j}|\mathcal{F}U_j(\xi',\xi_n)|^2 d\xi_n\right),$$

d'où

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{-4m-2p+2k+1} \|H_{\xi'}\hat{T}(\xi',.)\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'} \, d\xi' \leq c. \sum_{j=o}^{k} \|U_j\|^2_{H^{-2m-p+k-j}(\mathbb{R}^n)} .$$

Le lemme 1.1 est alors une conséquence de la proposition 1.5 du chapitre I.

Lemme 1.2 : Avec les notations précédentes, il existe une constante $c > o$, indépendante de ϕ et ϕ_q, pour $q = -k,\dots,2m+p-k-1$, telle que :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} \|\hat{T}(\xi',.)\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'} \, d\xi' \leq c. \|T\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} .$$

Démonstration : Avec les notations de la démonstration précédente, on doit démontrer que :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} \|\hat{U}_j(\xi',.)\|^2_{H^{-2m-p+k-j}(\mathbb{R})} \, d\xi' \leq c. \|U_j\|^2_{H^{-2m-p+k-j}(\mathbb{R}^n)}$$

ce qui est facile à voir.

1.1.5. Démonstration du théorème 1.2

On fait la démonstration dans le cas où $\chi_p > o$. L'espace $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'$ étant canoniquement isomorphe au sous-espace des distributions de $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'$ à support dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, on peut considérer l'opérateur $\mathcal{P}_p^*$ comme un opérateur linéaire continu de

$$[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ dans } [W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'.$$

Lemme 1.3 : Soit $(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$ appartenant à $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. Alors, $\mathcal{P}_p^*(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$, considéré comme élément de $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'$, s'écrit :

$$\mathcal{P}_p^*(f,g_1,\dots,g_{\chi_p}) = L^*(j_pf) + \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=-k}^{-1} (-1)^{-q-1} B^*_{j,q}\, g_j \otimes x_n^{-q-1}\, Y(x_n)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=o}^{2m+p-k-1} i^{-q}\, B^*_{j,q}\, g_j \otimes \delta^{(q)}(x_n)$$

où L^* (resp. $B^*_{j,q}$) désigne l'opérateur adjoint formel de L (resp. de $B_{j,q}$).

Démonstration : Soit φ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Par définition

$$\langle \mathcal{P}^*_p(f,g_1,\dots,g_{\chi_p}),\overline{\varphi}|_{\mathbb{R}^n_+}\rangle_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'\times W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$=\langle(f;g_1,\dots,g_{\chi_p}),\mathcal{P}_p\overline{\varphi}|_{\mathbb{R}^n_+}\rangle_{([H^p(\mathbb{R}^n_+)]'\times\prod_{j=1}^{\chi_p}H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))\times(H^p(\mathbb{R}^n_+)\times\prod_{j=1}^{\chi_p}H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))}$$

$$=\langle f,\overline{L\varphi}|_{\mathbb{R}^n_+}\rangle_{[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'\times H^p(\mathbb{R}^n_+)}+\sum_{j=1}^{\chi_p}\langle g_j,\sum_{q=-k}^{2m+p-k-1}\overline{B_{j,q}\gamma_q\varphi|_{\mathbb{R}^n_+}}\rangle_{H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})\times H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$=\langle L^*(j_pf),\overline{\varphi}\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}+\sum_{j=1}^{\chi_p}\sum_{q=-k}^{-1}(-1)^{-q-1}\langle B^*_{j,q}g_j\otimes x_n^{-q-1}Y(x_n),\overline{\varphi}\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\sum_{j=1}^{\chi_p}\sum_{q=0}^{2m+p-k-1}i^{-q}\langle B^*_{j,q}g_j\otimes\delta^{(q)}(x_n),\overline{\varphi}\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

d'où le lemme.

Démonstration du théorème 1.2 :

Désignons, pour tout ω appartenant à S_{n-2}, par $\mathcal{P}_p(\omega)$ l'opérateur :

$v\longmapsto\mathcal{P}_p(\omega)v\equiv(L(x_n;\omega,D_{x_n})v,\ B_p(\omega)\gamma v):W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)\longrightarrow H^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^{\chi_p}$.

Les hypothèses $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$ et $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ impliquent que $\mathcal{P}_p(\omega)$ est un isomorphisme ; son adjoint $\mathcal{P}^*_p(\omega)$ est donc un isomorphisme de $[H^p(\mathbb{R}_+)]'\times\mathbb{C}^{\chi_p}$ sur $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)]'$. Pour $(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$ appartenant à $[H^p(\mathbb{R}_+)]'\times\mathbb{C}^{\chi_p}$, $\mathcal{P}^*_p(\omega)(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$ considéré comme élément de $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'$ s'écrit :

$$\mathcal{P}^*_p(\omega)(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})=L^*(x_n;\omega,D_{x_n})(j_pf)+\sum_{j=1}^{\chi_p}\sum_{q=-k}^{-1}(-1)^{-q-1}B^*_{j,q}(\omega)g_j\,x_n^{-q-1}Y(x_n)$$

$$+\sum_{j=1}^{\chi_p}\sum_{q=0}^{2m+p-k-1}i^{-q}B^*_{j,q}(\omega)g_j\,\delta^{(q)}(x_n),$$

où j_p désigne ici l'isomorphisme canonique de $[H^p(\mathbb{R}_+)]'$ sur $H_0^{-p}(\mathbb{R})$.

La compacité de la sphère S_{n-2} implique l'existence d'une constante $c>0$ telle que, pour tout ω appartenant à S_{n-2} et pour tout $(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$ appartenant à $[H^p(\mathbb{R}_+)]'\times\mathbb{C}^{\chi_p}$, on ait :

$$(1.13)\quad \|f\|_{[H^p(\mathbb{R}_+)]'} + \sum_{j=1}^{\chi_p} |g_j| \leq c.\ \Big\| L^*(s;\omega,D_s)\{j_p f\} + \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=-k}^{-1} (-1)^{-q-1}\, B^*_{j,q}(\omega) g_j s^{-q-1} Y(s)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=o}^{2m+p-k-1} i^{-q}\, B^*_{j,q}(\omega) g_j\ \delta^{(q)}(s) \Big\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'} .$$

Soit maintenant $(f, g_1, \ldots, g_{\chi_p})$ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+) \times (\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}))^{\chi_p}$ et soit la distribution $T = \mathcal{P}^*_p(f; g_1, \ldots, g_{\chi_p})$. L'expression même de $\mathcal{P}^*_p(f; g_1, \ldots, g_{\chi_p})$ (cf : lemme 1.3) prouve que l'on peut appliquer les lemmes 1.1 et 1.2 (remarquer que, dans ce cas, $j_p f$ n'est autre que le prolongement par o de f pour $x_n < o$, ainsi $j_p f = \tilde{f}$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$).

Par ailleurs, pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, on a :

$$H_{\xi'} \hat{T}(\xi',.) = |\xi'|^{2m-k-1} L^*(s;\omega,D_s)\{\widehat{j_p f}(\xi', s/|\xi'|)\} + \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=-k}^{-1} (-1)^{-q-1} |\xi'|^{m_j}\, B^*_{j,q}(\omega) g_j(\xi') s^{-q-1}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=o}^{2m+p-k-1} i^{-q}\ |\xi'|^{m_j}\ B^*_{j,q}(\omega)\ \hat{g}_j(\xi')\ \delta^{(q)}(s),$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Appliquons l'inégalité (1.13) à $(|\xi'|^{2m-k-1}\ \widehat{j_p f}(\xi', s/|\xi'|); |\xi'|^{m_1}\ g_1(\xi'), \ldots, |\xi'|^{m_{\chi_p}}\ \hat{g}_{\chi_p}(\xi'))$; il vient :

$$(1.14)\quad |\xi'|^{2m-k-1} \|\widehat{j_p f}(\xi', s/|\xi'|)\|_{H^{-p}(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{\chi_p} |\xi'|^{m_j}\ |\hat{g}_j(\xi')| \leq c.\ \|H_{\xi'} \hat{T}(\xi',.)\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'} .$$

On élève au carré, on multiplie par $|\xi'|^{-4m-2p+2k+1}$ les deux membres de l'inégalité obtenue et on intègre ensuite par rapport à ξ', pour $|\xi'| \geq 1$; compte tenu du lemme 1.2, cela donne :

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{-2p-1} \|\widehat{j_p f}(\xi', s/|\xi'|)\|^2_{H^p(\mathbb{R})}\, d\xi' + \sum_{j=1}^{\chi_p} \int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{-4m-2p+2k+1+2m_j}\ |\hat{g}_j(\xi')|^2\ d\xi'$$
$$\leq c.\ \|\mathcal{P}^*_p(f, g_1, \ldots, g_{\chi_p})\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} .$$

D'autre part :

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{-2p-1} \| \widehat{j_p f}(\xi', s/|\xi'|)\|^2_{H^{-p}(\mathbb{R})} d\xi' = \int_{|\xi'|\geq 1} \int_{\mathbb{R}} (|\xi'|^2+\xi_n^2)^{-p} |\mathcal{F}\tilde{f}(\xi',\xi_n)|^2 d\xi$$

$$\geq \int_{|\xi'|\geq 1} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^{-p} |\mathcal{F}\tilde{f}(\xi',\xi_n)|^2 d\xi,$$

et

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{-4m-2p+2k+1+2m_j} |\hat{g}(\xi')|^2 d\xi' \geq \int_{|\xi'|\geq 1} (1+|\xi'|^2)^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}} |\hat{g}_j(\xi')|^2 d\xi'.$$

Il reste à majorer

$$\int_{|\xi'|\leq 1} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^{-p} |\mathcal{F}\tilde{f}(\xi',\xi_n)^2 d\xi$$

et

$$\int_{|\xi'|\leq 1} (1+|\xi'|^2)^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}} |\hat{g}_j(\xi')|^2 d\xi'.$$

Or il est facile de vérifier que :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} (1+|\xi'|^2)^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}} |\hat{g}_j(\xi')|^2 d\xi' \leq 2 \|g_j\|^2_{H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

pour $j = 1,\ldots,\chi_p$.

Pour majorer la première intégrale, on introduit l'opérateur $\mathcal{T}_p(\omega_o)$ pour un certain ω_o appartenant à S_{n-2}. On applique l'inégalité (1.13) à la famille $(\widehat{j_p f}(\xi',.);\hat{g}_1(\xi'),\ldots,\hat{g}_{\chi_p}(\xi'))$ et pour $\omega = \omega_o$; on obtient :

$$(1.15)\quad \|\widehat{j_p f}(\xi',.)\|_{H^{-p}(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{\chi_p} |\hat{g}_j(\xi')| \leq c.\ \|\mathcal{P}_p^*(\omega_o)(\widehat{j_p f}(\xi',.);\hat{g}_1(\xi'),\ldots,\hat{g}_{\chi_p}(\xi'))\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'}$$

Par ailleurs,

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^{-p} |\mathcal{F}\tilde{f}(\xi',\xi_n)|^2 d\xi_n \leq \|\widehat{j_p f}(\xi',.)\|^2_{H^{-p}(\mathbb{R})}$$

et, pour $|\xi'|\leq 1$,

$$\|(\mathcal{P}_p^*(\xi')-\mathcal{P}_p^*(\omega_o))(\widehat{j_p f}(\xi',.);\hat{g}_1(\xi'),\ldots,\hat{g}_{\chi_p}(\xi')\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'}$$

$$\leq c.\ \{\|\widehat{j_p f}(\xi',.)\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{\chi_p} |\hat{g}_j(\xi')|\} ;$$

par suite, en intégrant la relation (1.15) (après avoir élevé au carré) par rapport à ξ', pour $|\xi'| \leq 1$, on obtient :

$$\int_{|\xi'|\leq 1}\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^{-p}\, |\mathcal{F}\tilde{f}(\xi',\xi_n)|^2\, d\xi \leq$$

$$\leq c.\left\{\int_{|\xi'|\leq 1} \|\mathcal{P}_p^*(\xi')(\widehat{j_p f}(\xi',.);\hat{g}_1(\xi'),\ldots,\hat{g}_{\chi_p}(\xi'))\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'}\, d\xi'\right.$$

$$\left.+\int_{|\xi'|\leq 1} \|\widehat{j_p f}(\xi',.)\|^2_{H^{-p-1}(\mathbb{R})}\, d\xi' + \sum_{j=1}^{\chi_p}\int_{|\xi'|\leq 1} |\hat{g}_j(\xi')|^2\, d\xi'\right\}.$$

Le lemme 1.2 donne que :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} \|\mathcal{P}_p^*(\xi')(\widehat{j_p f}(\xi',.);\hat{g}_1(\xi'),\ldots,\hat{g}_{\chi_p}(\xi'))\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'}\, d\xi' \leq$$

$$\leq c.\ \|\mathcal{P}_p^*(f;g_1,\ldots,g_{\chi_p})\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'},$$

d'autre part,

$$\int_{|\xi'|\leq 1} \|\widehat{j_p f}(\xi',.)\|^2_{H^{-p-1}(\mathbb{R})}\, d\xi' \leq c.\ \|j_p f\|^2_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{et}$$

$$\int_{|\xi'|\leq 1} |\hat{g}_j(\xi')|^2\, d\xi' \leq c.\ \|g_j\|^2_{H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

pour $j = 1,\ldots,\chi_p$.

Finalement, on a obtenu la majoration :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} (1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^{-p}|\mathcal{F}\tilde{f}(\xi',\xi_n)|^2 d\xi \leq c.\left\{\|\mathcal{P}_p^*(f;g_1,\ldots,g_{\chi_p})\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'}\right.$$

$$\left.+\|j_p f\|^2_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^{\chi_p} \|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\right\}$$

on en déduit facilement les estimations à priori du théorème 1.2.

1.2 Les estimations a priori dans le demi-espace pour le cas des coefficients variables.

1.2.1 : Notations et hypothèses :

Soit l'opérateur $L \equiv L(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})$ défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Lu(x) \equiv L(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})\{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{k} P^{2m-h}(x,D_{x'},D_{x_n})\ \{x_n^{k-h}\, u(x)\},$$

où m et k sont deux entiers tels que $1 \leq k \leq 2m$ et où :

(i) $P^{2m-h}(x,D_{x'},D_{x_n})$, pour $o \leq h \leq k$, est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées dans $\mathbb{R}^n$, d'ordre inférieur ou égal à 2m-h :

$$P^{2m-h}(x,D_{x'},D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+j\leq 2m-h} P^{2m-h}_{j,\alpha}(x)\, D^{\alpha}_{x'}\, D^{j}_{x_n} ;$$

(ii) $P^{2m}(x,D_{x'},D_{x_n})$ est un opérateur d'ordre 2m proprement elliptique dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, c'est à dire : pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}-\{o\}$ et pour tout $x\in\overline{\mathbb{R}^n_+}$, le polynôme

$$P^{2m}_{2m}(x,\xi',\xi_n) \equiv \sum_{|\alpha|+j=2m} P^{2m}_{j,\alpha}(x)\, \xi'^{\alpha}\xi^{j}_n \quad \text{en } \xi_n,$$

admet exactement m zéros situés dans Im $\xi_n < o$ et m zéros situés dans Im $\xi_n > o$.

Cet opérateur L induit, pour tout entier $p \geq o$, une application linéaire continue de $W^{2m+p}_k(\mathbb{R}^n_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}^n_+)$.

A cet opérateur L, on associe l'opérateur $L^o \equiv L^o(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})$ défini par la relation :

$$L^o(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})\{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{k} P^{2m-h}_{2m-h}(x,D_{x'},D_{x_n})\,\{x_n^{k-h}\, u(x)\},$$

où

$$P^{2m-h}_{2m-h}(x;D_{x'},D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+j=2m-h} P^{2m-h}_{j,\alpha}(x)\, D^{\alpha}_{x'}\, D^{j}_{x_n} .$$

L'opérateur $L^o(o,x_n;D_{x'},D_{x_n})$ est un opérateur du type étudié au paragraphe 1.1 ; les conditions $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$ et $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$ associées s'écrivent :

$H_1(p;R^n_+)$: l'équation $\phi^o(\rho) \equiv \sum_{h=o}^{k} P^{2m-k+h}_{2m-k+h,o}(o)\; i^h\, \rho(\rho-1)\ldots(\rho-h+1) = o$ n'admet pas de racine sur la droite $\mathrm{Re}\rho = -p-2m+k-\frac{1}{2}$,

et si r_p désigne le nombre de racines de l'équation $\phi^o(\rho) = o$ vérifiant $\mathrm{Re}\rho > -p-2m+k-\frac{1}{2}$, on a :

$H_2(p;R^n_+)$: le nombre $\chi_p = m - r_p$ est $\geq o$.

On définit maintenant les opérateurs frontière. Pour $j = 1,\ldots,\chi_p$ (si χ_p est $> o$), soit l'opérateur $B^p_j(x';D_{x'})$ défini par :

$$B^p_j(x';D_{x'})\,\gamma u \equiv \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}(x';D_{x'})\;\gamma_q u$$

où, pour tout couple d'entiers (j,q) vérifiant $1 \leq j\ \chi_p$, $-k \leq q \leq 2m+p-k-1$, $B_{j,q}(x';D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées dans $\mathbb{R}^{n-1}$, d'ordre inférieur ou égal à m_{j-q}, m_j étant un entier vérifiant $-k \leq m_j \leq 2m+p-k-1$ et, si m_{j-q} est négatif, l'opérateur $B_{j,q}(x';D_{x'})$ correspondant est par définition l'opérateur nul.

On notera $B_p \equiv B_p(x';D_{x'}) \equiv (B_1^p(x';D_{x'}),\dots,B_{\chi_p}^p(x';D_{x'}))$.
Cet opérateur B_p induit une application linéaire continue de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$u \longrightarrow B_p\ \gamma u = (B_1^p\ \gamma u,\dots,B_{\chi_p}^p\ \gamma u)$$

où

$$B_j^p\ \gamma u = \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}\ \gamma_q u$$

pour $j = 1,\dots,\chi_p$.

A cet opérateur B_p, on associe l'opérateur $B_p^o \equiv B_p^o(x';D_{x'}) \equiv (B_1^{p,o}(x';D_{x'}),\dots,B_{\chi_p}^{p,o}(x';D_{x'}))$ où, pour $j = 1,\dots,\chi_p$:

$$B_j^{p,o}(x';D_{x'})\gamma u \equiv \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}^{m_{j-q}}(x';D_{x'}),\ \gamma_q u$$

$B_{j,q}^{m_{j-q}}(x';D_{x'})$ étant la somme des termes d'ordre exactement m_j-q dans l'opérateur $B_{j,q}(x';D_{x'})$.

On définit maintenant la condition $H_3(p;\mathbb{R}_+^n)$ suivante :

$H_3(p;\mathbb{R}_+^n)$: pour tout ω appartenant à S_{n-2}, sphère unité de $\mathbb{R}^{n-1}$, le problème aux limites :

$$\begin{cases} L^o(o,x_n;\omega,D_{x_n})\ \{v(x_n)\} = o \\ B_p^o(o;D_{x'})\ \gamma v = o \end{cases}$$

si $\chi_p > o$, ou bien

$$\{L^o(o,x_n;\omega,D_{x_n})\ \{v(x_n)\} = o$$

si $\chi_p = o$, n'admet que la solution $v = o$ dans $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$.

1.2.2. Enoncé des résultats :

Pour tout entier $p \geq o$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ par :

$$\mathcal{P}_p : u \longrightarrow \mathcal{P}_p u = \begin{cases} \{Lu \,;\, B_p \gamma u\} & \text{si } \chi_p > o, \\ Lu & \text{si } \chi_p = o. \end{cases} \tag{1.16}$$

C'est un opérateur linéaire continu de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ si $\chi_p > o$ ou dans $H^p(\mathbb{R}_+^n)$ si $\chi_p = o$. On a alors :

Théorème 1.3 : Soit p un entier $\geq o$. On suppose que les conditions $H_1(p;\mathbb{R}_+^n)$, $H_2(p;\mathbb{R}_+^n)$ et $H_3(p;\mathbb{R}_+^n)$ sont réalisées. Alors :

(i) il existe $\varepsilon_o > o$ et $c_o > o$ telles que, pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ et à support contenu dans la boule de centre d'origine et de rayon ε_o, on ait :

1. si $k < 2m+p$:

$$\|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq c_o \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{H^p(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|(1+x_n^k)u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \right\} \quad \text{si } \chi_p > o,$$

ou bien

$$\|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq c_o \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{H^p(\mathbb{R}_+^n)} + \|(1+x_n^k)u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \right\} \quad \text{si } \chi_p = o.$$

2. si $k = 2m$ et $p = o$

$$\|u\|_{W_{2m}^{2m}(\mathbb{R}_+^n)} \leq c_o \left\{ \|\mathcal{P}_o u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^{\chi_o} H^{-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|x_n^{2m} u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \right\} \quad \text{si } \chi_o > o,$$

ou bien

$$\|u\|_{W_{2m}^{2m}(\mathbb{R}_+^n)} \leq c_o \left\{ \|\mathcal{P}_o u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} + \|x_n^{2m} u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \right\} \quad \text{si } \chi_o = o.$$

(ii) pour tout entier $q \geq 1$ tel que l'équation $\phi^o(\rho) = o$ n'admette pas de racine dans la bande $-(p+q)-2m+k-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\rho \leq -p-2m+k-\frac{1}{2}$, il existe $\varepsilon_q > o$ et $c_q > o$ telles que, pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$, à support contenu dans la boule de centre l'origine et de rayon ε_q, et vérifiant :

$$\mathcal{P}_p u \in H^{p+q}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \text{si} \quad \chi_p > o$$

<u>ou bien</u>

$$\mathcal{P}_p u \in H^{p+q}(\mathbb{R}^n_+) \quad \text{si} \quad \chi_p = o,$$

<u>alors u appartient à</u> $W_k^{2m+p+q}(\mathbb{R}^n_+)$ <u>et de plus</u> :

$$\|u\|_{W_k^{2m+p+q}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c_q \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{H^{p+q}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W_k^{2m+p+q-1}(\mathbb{R}^n_+)} \right\} \quad \underline{\text{si}} \quad \chi_p > o$$

<u>ou bien</u>

$$\|u\|_{W_k^{2m+p+q}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c_q \left\{ \|\mathcal{P}_p u\|_{H^{p+q}(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{W_k^{2m+p+q-1}(\mathbb{R}^n_+)} \right\} \quad \underline{\text{si}} \quad \chi_p = o.$$

L'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire continu de $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'$ si $\chi_p > o$ ou de $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$ dans $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'$ si $\chi_p = o$.

Au moyen de l'isomorphisme $j_p : [H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \longrightarrow H_o^{-p}(\mathbb{R}^n_+)$, on peut considérer l'opérateur $\mathcal{P}_p^*$ comme un opérateur linéaire continu de

$H_o^{-p}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ si $\chi_p > o$ et, de $H_o^{-p}(\mathbb{R}^n_+)$ si $\chi_p = o$,

dans le sous-espace des distributions de $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'$ à support dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

On a alors :

<u>Théorème 1.4</u> : <u>Soit p un entier</u> $\geq o$. <u>On suppose que les conditions</u> $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$ <u>et</u> $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ <u>sont réalisées. Alors, il existe des constantes</u> $\varepsilon > o$ <u>et</u> $c > o$ <u>telles que, pour tout</u> (f,g) <u>appartenant à</u>

$$H_o^{-p}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

<u>et à support contenu dans la boule de centre l'origine et de rayon</u> ε <u>(il s'agit de la boule de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>pour f et de la boule dans</u> $\mathbb{R}^{n-1}$ <u>pour</u> g_j, $j = 1,\dots,\chi_p$) <u>si</u> $\chi_p > o$ <u>et pour tout f appartenant à</u> $H_o^{-p}(\mathbb{R}^n_+)$ <u>et à support contenu dans la boule de centre l'origine et de rayon</u> ε <u>si</u> $\chi_p = o$, <u>on ait respectivement</u> :

$$\|(f,g)\|_{H_o^{-p}(\mathbb{R}^n_+)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq c\Big\{\|\mathcal{P}_p^*(f,g)\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} + \|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\Big\},$$

et

$$\|f\|_{H_o^{-p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c.\Big\{\|\mathcal{P}_p^* f\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} + \|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\Big\}.$$

1.2.3. Démonstration du théorème 1.3 :

On fait la démonstration, pour $\chi_p > o$. On notera $B(o,\varepsilon)$ la boule ouverte de centre o et de rayon ε dans $\mathbb{R}^n$.

On applique le théorème 1.1 au couple d'opérateurs $\{L^o(o,x_n;D_{x'},D_{x_n}),\ B_p^o(o;D_{x'})\}$; il existe donc une constante $c > o$ telle que pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$, on ait :

$$(1.17)\quad \|x_n^k u\|_{H^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c.\Big\{\|L^o(o,x_n;D_{x'},D_{x_n})\{u(x)\}\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|B_p^o(o;D_{x'})\gamma u\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|x_n^k u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\Big\}.$$

La continuité des coefficients des opérateurs L et B_p montre qu'il existe une fonction $\alpha(\varepsilon)$, tendant vers o avec ε, telle que pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ avec $Supp(u) \subset B(o,\varepsilon)$ (Supp(u) signifie support de u), on ait :

$$(1.18)\quad \begin{aligned} &\|(L^o(x,x_n,D_{x'},D_{x_n})-L^o(o,x_n;D_{x'},D_{x_n}))\{u(x)\}\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \alpha(\varepsilon)\ \|u\|_{W^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)},\\ &\|(B_p^o(x',D_{x'})-B_p^o(o;D_{x'}))\gamma u\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \alpha(\varepsilon)\ \|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)}\ ; \end{aligned}$$

Les hypothèses faites sur les coefficients des opérateurs L et B_p impliquent l'existence d'une constante $\alpha > o$ telle que pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$, on ait :

$$(1.19)\quad \begin{aligned} &\|(L(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})-L^o(x,x_n;D_{x'},D_{x_n}))\{u(x)\}\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \alpha\ \|u\|_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R}^n_+)},\\ &\|(B_p(x',D_{x'})-B_p^o(x',D_{x'}))\gamma u\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \alpha\ \|u\|_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R}^n_+)}. \end{aligned}$$

pour tout $\beta>o$, il existe $C_\beta>o$ telle que pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(R_+^n)$

$$(1.20)\quad \begin{aligned} \|u\|_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R}_+^n)} &\leq \beta\,\|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)} + c_\beta\,\|(1+x_n^k)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{si } k < 2m+p, \\ \|u\|_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R}_+^n)} &\leq \beta\,\|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)} + c_\beta\,\|x_n^k u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{si } k = 2m \text{ et } p = o. \end{aligned}$$

On déduit facilement le théorème 1.3-(i), des inégalités (1.17), (1.18), (1.19) et (1.20)

La démonstration du théorème 1.3-(ii) sera faite par récurrence sur l'entier $q \geq 1$. Soit donc u appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ avec $\mathrm{Supp}(u) \subset B(o,\varepsilon)$, $o < \varepsilon < \varepsilon_o$, et $\mathcal{P}_p u$ appartenant à

$$H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^{p} H^{2m+p+1-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

On suppose de plus que l'équation $\phi^o(\rho) = o$ n'a pas de racine dans la bande $-(p+1)-2m+k-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\rho \leq -p-2m+k-\frac{1}{2}$.

On utilise la méthode des quotients différentiels. Pour h appartenant à $\mathbb{R}-\{o\}$ et i compris entre 1 et n-1, on pose :

$$\tau_{i,h}v(x) = v(x_1,\dots,x_i+h,\dots,x_n),$$
$$\rho_{i,h}v(x) = \frac{1}{h}(\tau_{i,h}v(x) - v(x)).$$

Si h satisfait à $o < |h| < \frac{1}{2}(\varepsilon_o-\varepsilon)$, les supports de $\tau_{i,h}v$ et $\rho_{i,h}v$ sont contenus dans la boule $B(o,\varepsilon')$ où $\varepsilon' = \varepsilon + \frac{1}{2}(\varepsilon_o-\varepsilon)$ dès que le support de v est contenu dans la boule $B(o,\varepsilon)$. On a :

$$L(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})\{\rho_{i,h}u(x)\} = \rho_{i,h}(L(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})\{u(x)\})$$
$$+ \sum_{h=o}^{k}\ \sum_{j=o}^{2m-h}\ \sum_{|\alpha|=o}^{2m-h-j} \rho_{i,h}\,(P_{j,\alpha}^{2m-h}(x))\, D_{x'}^{\alpha}\, D_{x_n}^{j}\,\{\tau_{i,h}(x_n^{k-h}u(x))\}.$$

Les hypothèses faites sur les coefficients de l'opérateur L impliquent l'existence d'une constante $\alpha > o$, indépendante de u et de h, telle que :

$$(1.21)\quad \|L(\rho_{i,h}u)\|_{H^p(\mathbb{R}_+^n)} \leq \alpha\{\|\rho_{i,h}(Lu)\|_{H^p(\mathbb{R}_+^n)} + \|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)}\} ;$$

et, de même

$$(1.22)\quad \|B_p(\gamma\rho_{i,h}u)\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha \left\{ \|\rho_{i,h}(B_p\gamma u)\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \right\},$$

où $\rho_{i,h}(B_p\gamma u) = (\rho_{i,h}(B_1^p\gamma u),\ldots,\rho_{i,h}(B^p_{\chi_p}\gamma u))$.

Par ailleurs, les estimations (i) du théorème 1.3 appliquées à la fonction $\rho_{i,h}u$ (pourvu que $\varepsilon' < \varepsilon_o$) s'écrivent :

$$(1.23)\quad \begin{cases} \|\rho_{i,h}u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c_o \left\{ \|\mathcal{P}_p(\rho_{i,h}u)\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)\times\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|(1+x_n^k)\rho_{i,h}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \right\} & \text{si } k < 2m+p, \\ \|\rho_{i,h}u\|_{W_{2m}^{2m}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c_o \left\{ \|\mathcal{P}_o(\rho_{i,h}u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)\times\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|x_n^{2m}\rho_{i,h}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \right\} & \text{si } k = 2m \text{ et } p = o. \end{cases}$$

D'autre part, il existe une constante β, indépendante de u et de h (pourvu que h reste dans un borné fixe, par exemple $o < |h| < 1$), telle que :

$$(1.24)\quad \begin{cases} \|\rho_{i,h}(Lu)\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \beta\, \|Lu\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)}, \\ \|\rho_{i,h}(B_p\gamma u)\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \beta \|B_p\gamma u\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+1-k-m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}. \end{cases}$$

Enfin, il existe une constante δ, indépendante de u et de h, telle que :

$$(1.25)\quad \begin{cases} \|(1+x_n^k)\rho_{i,h}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \delta \|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} & \text{si } k < 2m+p, \\ \|x_n^{2m}\rho_{i,h}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \delta \|x_n^{2m}u\|_{H^{2m}(\mathbb{R}^n_+)} & \text{si } k = 2m \text{ et } p = o. \end{cases}$$

Des inégalités (1.21),...,(1.25), on déduit que $\rho_{i,h}u$ demeure dans un borné de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ lorsque h varie de sorte que $o < |h| < \frac{1}{2}(\varepsilon_o - \varepsilon)$; il en résulte que $D_{x_i}x$ appartient à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ avec la majoration :

$$(1.26)\quad \|D_{x_i}u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq c.\left\{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)\times \prod_{j=1}^{p} H^{2m+p+1-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)}\right\},$$

et ceci pour i = 1,...,n-1.

Pour montrer que u appartient à $W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+^n)$, il reste à établir que $D_{x_n}u$ appartient à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$. Pour cela, on remarque que :

$$(1.27)\quad \sum_{h=o}^{k} P_{2m-h,o}^{2m-h}(x)D_{x_n}^{2m-h}\{x_n^{k-h}u(x)\} = Lu(x) - \sum_{h=o}^{k}\ \sum_{j=o}^{2m-h-1}\ \sum_{|\alpha|=o}^{2m-h-j} P_{j,\alpha}^{2m-h}(x)D_{x'}^{\alpha}D_{x_n}^{j}\{x_n^{k-h}u(x)\}$$

appartient à $H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)$.

Divisons les deux membres de (1.27) par $P_{2m,o}^{2m}(x)$, ce qui est possible car $P_{2m,o}^{2m}(o) \neq o$ et donc $P_{2m}^{2m}(x)$ est non nul dans la boule $B(o,\varepsilon)$ si ε est assez petit et, pour h = 1,...,k, soit $Q^{2m-h}(x)$ une fonction indéfiniment dérivable et à dérivées bornées dans $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ telle que :

$$Q^{2m-h}(x) = P_{2m-h,o}^{2m-h}(x)/P_{2m,o}^{2m}(x)$$

pour x appartenant à la boule $B(o,\varepsilon)$, ainsi (1.27) devient :

$$(1.28)\quad D_{x_n}^{2m}\{x_n^k u\} + \sum_{h=1}^{k} Q^{2m-h}(x)\, D_{x_n}^{2m-h}\{x_n^{k-h}u\} \in H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n).$$

Or, on peut écrire, pour h = 1,...,k :

$$Q^{2m-h}(x) = Q^{2m-h}(x',o) + x_n\, r^{2m-h}(x)$$

où $r^{2m-h}(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable et à dérivées bornées dans $\overline{\mathbb{R}_+^n}$. Introduisons maintenant l'opérateur $\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})$ en x_n et dépendant du paramètre x' :

$$\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})\{v(x)\} \equiv (1+D_{x_n}^{2m})\{x_n^k v\} + \sum_{h=1}^{k} Q^{2m-h}(x',o)\, D_{x_n}^{2m-h}\{x_n^{k-h}v\}.$$

La relation (1.28) s'exprime alors :

$$(1.29)\quad \mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})\{u(x)\} \in H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n).$$

Puisque, pour $h = 1,\dots,k$, $Q^{2m-h}(o) = P^{2m-h}_{2m-h,o}(o)/P^{2m}_{2m,o}(o)$, l'équation

$$\phi(x',\rho) \equiv \sum_{h=o}^{k} Q^{2m-k+h}(x',o)i^h \rho(\rho-1)\dots(\rho-h+1) = o$$

(en convenant que $Q^{2m}(x',o) \equiv 1$) n'admet pas de racine dans la bande $-(p+1) - 2m + k - \frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\rho \leq -p -2m + k - \frac{1}{2}$ et le nombre de racines de cette équation vérifiant $\mathrm{Re}\rho > -2m -p + k - \frac{1}{2}$ est égal à r_p si (x',o) appartient à la boule $B(o,\varepsilon)$ où ε est suffisamment petit.

Utilisant les résultats de [4], de (1.29) on déduit que, pour presque tout x', $u(x',.)$ appartient à $W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+)$. On va montrer que u appartient à $W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ où

$$W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^{n-1})) = \{v \in H^{2m+p+1-k}(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^{n-1})),\ x_n^k v \in H^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))\}$$

avec, d'une manière générale, pour r entier $\geq o$:

$$H^r(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^{n-1})) = \{v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+)\ ,\ D^j_{x_n} v \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \text{ pour } j = o,\dots,r\}.$$

De [4], on déduit facilement qu'il existe une constante $c > o$ telle que, pour tout v appartenant à $W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+)$, on ait :

$$\|v\|_{W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+)} \leq c.\ \left\{\|\mathcal{L}(o,x_n;D_{x_n})v\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}_+)} + \|v\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)}\right\}.$$

D'après la continuité des coefficients de l'opérateur $\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})$, il existe $\varepsilon > o$ tel que, pour tout v appartenant à $W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+)$ et tout x' tel que (x',o) appartienne à la boule $B(o,\varepsilon)$, on ait :

$$(1.30)\quad \|v\|_{W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq 2c.\ \left\{\|\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})v\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)} + \|v\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)}\right\}.$$

On applique l'inégalité (1.30) à la fonction $u(x',.)$, pourvu que le support de u soit contenu dans la boule $B(o,\varepsilon)$. On intègre ensuite par rapport à x' dans $\mathbb{R}^{n-1}$, et on obtient :

$$(1.31)\quad \|u\|_{W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq 2c.\ \left\{\|\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})u\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)}\right\}.$$

Ainsi, u appartient à $W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+\ ;\ L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ ce qui, compte tenu du fait que $D_{x_i}u$, pour $i=1,\dots,n-1$, appartient à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$, implique que $D_{x_n}u$ appartient aussi à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$; de plus, on a la majoration :

$$\|D_{x_n} u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C. \{ \|\mathcal{P}_p u\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+1-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \}.$$

Finalement, on a démontré le théorème 1.3 (ii) lorsque q=1. Pour $q \geq 1$, on raisonne par récurrence par une méthode analogue.

1.2.4. Démonstration du théorème 1.4.

Pour simplifier, on supposera $\chi_p > 0$. Soit (f,g) appartenant à $H_0^{-p}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$; $\mathcal{P}_p^*(f,g)$, considéré comme élément de $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'$, s'écrit (cf. lemme 1.3) :

$$\mathcal{P}_p^*(f,g) = L^*(f) + \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=-k}^{-1} (-1)^{-q-1} B_{j,q}^* g_j \otimes x_n^{-q-1} Y(x_n) + \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=0}^{2m+p-k-1} i^{-q} B_{j,q}^* g_j \otimes \delta^{(q)}(x_n).$$

Pour établir les estimations a priori du théorème 1.4, on a besoin de plusieurs lemmes.

Lemme 1.4 : Il existe une constante c > o telle que, pour toute fonction b appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante c(b) > o telle que pour tout f appartenant à $H^{-p}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout opérateur de dérivation D^{2m-h} d'ordre 2m-h avec $0 \leq h \leq k$, on ait :

$$\|b(x) D^{2m-h}(x_n^{k-h} f)\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq C \left\{ \max_{x\in\mathbb{R}^n} |b(x)| . \|f\|_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} + C(b) \|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} \right\}$$

Démonstration : Soit ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On forme :

$$< b D^{2m-h}(x_n^{k-h} f), \phi >_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = (-1)^{2m-h} < f, x_n^{k-h} D^{2m-h}(b\phi)>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

$$= (-1)^{2m-h} < bf, x_n^{k-h} D^{2m-h}\phi >_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} + (-1)^{2m-h} < f, x_n^{k-h}[D^{2m-h}, b]>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

où $[D^{2m-h},b]$ désigne le commutateur de l'opérateur D^{2m-h} et de l'opérateur de multiplication par b.

On majore chacun des deux termes :

$$|\langle bf, x_n^{k-h} D^{2m-h}\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}| \leq \|bf\|_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} \|x_n^{k-h} D^{2m-h}\phi\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}, \text{ or}$$

or (cf. : [16]) :

$$\|bf\|_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} \leq C.\{\operatorname*{Max}_{x\in\mathbb{R}^n} |b(x)| \, \|f\|_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} + C(b)\|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\},$$

et $$\|x_n^{k-h} D^{2m-h}\phi\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C.\|\phi\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)}$$

Par ailleurs,

$$|\langle f, x_n^{k-h}[D^{2m-h},b]\,\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}| \leq \|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} \|x_n^{k-h}[D^{2m-h},b]\phi\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n)},$$

l'opérateur $[D^{2m-h},b]$ étant un opérateur d'ordre 2m-h-1, on peut écrire :

$$\|x_n^{k-h}[D^{2m-h},b]\phi\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \leq C(b)\|\phi\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Il en résulte l'inégalité :

$$|\langle bD^{2m-h}(x_n^{k-h}f),\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}| \leq C\{\operatorname*{Max}_{x\in\mathbb{R}^n}|b(x)|\,\|f\|_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} + C(b)\|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\} \cdot |\phi|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)},$$

d'où le lemme 1.4.

<u>Lemme 1.5</u> : Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction b appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, il existe $C(b) > 0$ telle que pour tout g appartenant à $H^{-2m-p+k+q+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ avec $-k \leq q \leq -1$, on ait :

$$\|b(x')g\otimes x^{-1-q}Y(x_n)\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq C.\{\operatorname*{Max}_{x\in\mathbb{R}^{n-1}}|b(x')|\,\|g\|_{H^{-2m-p+k+q+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + C(b)\|g\|_{H^{-2m-p+k+q-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\}.$$

Démonstration : Soit ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On forme :

$$<bg \otimes x_n^{-q-1}\, Y(x_n), \phi>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = (-1)^{-q-1} < bg,\ \gamma_q\ \phi>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)},$$

d'où

$$|<bg \otimes x_n^{-1-q}\, Y(x_n), \phi>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}| \leq \|bg\|_{H^{-2m-p+k+q+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\ \|\gamma_q \phi|_{\mathbb{R}^n_+}\|_{H^{2m+p-k-q-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Or :

$$\|bg\|_{H^{-2m-p+k+q+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C.\{\max_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} |b(x')|\,\|g\|_{H^{-2m-p+k+q+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + C(b)\ \|g\|_{H^{-2m-p+k+q-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\}$$

et

$$\|\gamma_q\phi|_{\mathbb{R}^n_+}\|_{H^{2m+p-k-q-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C.\ \|\phi\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)},$$

le lemme 1.5. est alors une conséquence immédiate des inégalités précédentes.

Lemme 1.6 : Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction b appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, il existe une constante $C(b) > 0$ telle que pour tout g appartenant à $H^{-2m-p+k+q+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ avec $0 \leq q \leq 2m+p-k-1$, on ait :

$$\|b(x')\ g \otimes \delta^{(q)}(x_n)\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq C.\{\max_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} |b(x')|\ \|g\|_{H^{-2m-p+k+q+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$+ C(b)\ \|g\|_{H^{-2m-p+k+q-\frac{1}{2}}}\ \}.$$

Démonstration : Elle est analogue à celle du lemme 1.5.

On peut maintenant démontrer le théorème 1.4. On applique le théorème 1.2. au couple d'opérateurs $\{L^\circ(o,x_n\,; D_{x'}, , D_{x_n}),\ B_p^\circ(0\,; D_{x'})\}$; il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout (f,g) appartenant à

$$H_o^{-p}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}),\ \text{on ait :}$$

$$(1.3.1.)\quad \|(f,g)\|_{H_o^{-p}(\mathbb{R}^n_+)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C.\{\| L^{o*}(o,x_n\,;\,D_{x'}\,,\,D_{x_n})\{f\} +$$

$$+\sum_{j=1}^{\chi_p}\sum_{q=-k}^{-1}(-1)^{-q-1}\,B_{j,q}^{m_j-q*}(o,D_{x'})\,g_j\otimes x_n^{-q-1}\,Y(x_n)$$

$$+\sum_{j=1}^{\chi_p}\sum_{q=o}^{2m+p-k-1} i^{-q}\,B_{j,q}^{m_j-q*}(o;D_{x'})\,g_j\otimes\delta^{(q)}(x_n)\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'}$$

$$+\|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}+\sum_{j=1}^{\chi_p}\|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\}\,.$$

La continuité des coefficients des opérateurs L et B_p et les lemmes 1.4, 1.5, et 1.6 prouvent l'existence d'une fonction $\alpha(\varepsilon)$, tendant vers 0 avec ε, et d'une fonction $\beta(\varepsilon) > 0$ telles que pour tout (f,g) appartenant à

$$H_o^{-p}(\mathbb{R}^n)\times\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

et à support contenu dans la boule $B(o,\varepsilon)$, on ait :

$$(1.32)\quad\left\{\begin{aligned}
&\|(L^{o*}(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})-L^{o*}(o,x_n;D_{x'},D_{x_n}))\{f\}\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'}\leq\alpha(\varepsilon)\,\|f\|_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)}\\
&\qquad\qquad+\beta(\varepsilon)\,\|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)},\\
&\|(B_{j,q}^{m_j-q*}(x';D_{x'})-B_{j,q}^{m_j-q*}(o,D_{x'}))\,g_j\otimes x_n^{-q-1}Y(x_n)\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'}\leq\\
&\qquad\leq\alpha(\varepsilon)\,\|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)}+\beta(\varepsilon)\,\|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})},\\
&\|(B_{j,q}^{m_j-q*}(x';D_{x'})-B_{j,q}^{m_j-q*}(o;D_{x'}))\,g_j\otimes\delta^{(q)}(x_n)\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'}\leq\\
&\qquad\leq\alpha(\varepsilon)\,\|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}+\beta(\varepsilon)\,\|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}
\end{aligned}\right.$$

Par ailleurs, il est facile de voir que :

$$(1.33)\quad\begin{cases} \|(L^*(x,x_n;D_{x'},D_{x_n}) - L^{\circ *}(x,x_n;D_{x'},D_{x_n}))\{f\}\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq C.\|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}, \\ \|(B^*_{j,q}(x';D_{x'})-B^{m_j-q*}_{j,q}(x',D_{x'}))g_j \otimes x_n^{-q-1}\,Y(x_n)\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq \\ \qquad\leq C.\|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}, \\ \|(B^*_{j,q}(x';D_{x'})-B^{m_j-q*}_{j,q}(x';D_{x'}))\,g_j \otimes \delta^{(q)}(x_n)\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq \\ \qquad\leq C.\|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}. \end{cases}$$

Des inégalités (1.31), (1.32), et (1.33), on déduit le théorème 1.4.

2°) Estimations a priori dans l'ouvert Ω.

2.1. Notations et hypothèses.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ. On suppose que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et vérifiant :

$$(2.1)\quad\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) > 0\}, \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) = 0\}, \\ \text{Grad}\ \varphi(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \Gamma. \end{cases}$$

On posera $\varphi_j = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ pour $j=1,\ldots,n$. Ainsi Grad $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$.

Soit l'opérateur $L \equiv L(x\ ;D_x)$ défini sur Ω par :

$$Lu(x) \equiv L(x\ ;D_x)\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{k} P^{2m-h}(x\ ;D_x)\{\varphi(x)^{k-h}\,u(x)\},$$

où m et k sont deux entiers tels que $1 \leq k \leq 2m$ et où :

(i) $P^{2m-h}(x\ ;\ D_x)$, pour $0 \leq h \leq k$, est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables dans $\overline{\Omega}$, d'ordre inférieur ou égal à 2m-h :

$$P^{2m-h}(x\ ;\ D_x) \equiv \sum_{|\alpha| \leq 2m-h} P_\alpha^{2m-h}(x)\ D_x^\alpha\ ;$$

(ii) $P^{2m}(x\ ;\ D_x)$ est un opérateur d'ordre 2m proprement elliptique dans $\overline{\Omega}$, c'est-à-dire : pour tout x appartenant à $\overline{\Omega}$ et pour tout couple de vecteurs (ξ, ξ') de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants, le polynôme

$$P_{2m}^{2m}(x\ ;\ \xi + \tau\xi') \equiv \sum_{|\alpha| = 2m} P_\alpha^{2m-h}(x)\ (\xi + \tau\xi')^\alpha$$

en τ, admet exactement m zéros situés dans $\operatorname{Im}\tau < 0$ et m zéros situés dans $\operatorname{Im}\tau > o$.

Cet opérateur L induit, pour tout entier $p \geq 0$, une application linéaire continue de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$.

On introduit, pour tout entier $p \geq o$, les conditions $H_1(p\ ;\ \Omega)$ et $H_2(p\ ;\ \Omega)$ suivantes :

$H_1(p\ ;\ \Omega)$: Pour tout x appartenant à Γ, l'équation :

$$\phi(x\ ;\ \rho) \equiv \sum_{h=o}^{k} P_{2m-k+h}^{2m-k+h}(x\ ;\ \operatorname{grad}\varphi(x))\ i^h\ \rho(\rho-1)\ \ldots\ (\rho-h+1) = 0$$

n'admet pas de racine sur la droite $\operatorname{Re}\rho = -p-2m + k - \frac{1}{2}$.

(le polynôme $P_{2m-h}^{2m-h}(x\ ;\ \xi)$, pour $h=0,\ldots,k$ désigne la partie principale du polynôme $P^{2m-h}(x\ ;\ \xi)$ ie : $P_{2m-h}^{2m-h}(x\ ;\ \xi) \equiv \sum_{|\alpha| = 2m-h} P_\alpha^{2m-h}(x)\ \xi^\alpha$).

$H_2(p\ ;\ \Omega)$: Pour tout x appartenant à Γ, le nombre $r_p(x)$ de racines de l'équation $\phi(x\ ;\ \rho) = o$ vérifiant $\operatorname{Re}\rho > -p-2m + k - \frac{1}{2}$ est constant et égal à r_p. Le nombre $\chi_p = m - r_p$ est $\geq o$.

On définit maintenant les opérateurs frontière. Pour $j=1,\ldots,\chi_p$ (si χ_p est $> o$), soit l'opérateur $B_j^p(x\ ;\ D_\Gamma)$ sur Γ défini par :

$$B_j^p\ (x\ ;\ D_\Gamma)\gamma u \equiv \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}(x\ ;\ D_\Gamma)\ \gamma_q u$$

où, pour tout couple d'entiers (j,q) vérifiant $1 \le j \le \chi_p$, $-k \le q \le 2m+p-k-1$, $B_{j,q}(x\ ;\ D_\Gamma)$ est un opérateur différentiel sur Γ, à coefficients de classe $C^\infty(\Gamma)$, et d'ordre inférieur ou égal à m_j-q, m_j étant un entier vérifiant $-k \le m_j \le 2m+p-k-1$ et, si m_j-q est négatif, l'opérateur $B_{j,q}(x,D_\Gamma)$ correspondant est par définition l'opérateur nul.

On notera $B_p \equiv B_p(x\ ;\ D_\Gamma) \equiv (B_1^p(x\ ;\ D_\Gamma),\ldots,\ B^p_{\chi_p}(x\ ;\ D_\Gamma))$. Cet opérateur B_p induit une application linéaire continue de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $\prod\limits_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

$$u \longmapsto B_p\ \gamma\ u = (B_1^p\ \gamma u\ ,\ \ldots\ ,\ B^p_{\chi_p}\ \gamma\ u)$$

où

$$B_j^p\ \gamma u = \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}\ \gamma_q\ u,$$

pour $j = 1,\ldots,\ \chi_p$.

Désignons par $B_{j,q}^{m_j-q}(x\ ;\ D_\Gamma)$ la partie principale de l'opérateur $B_{j,q}(x\ ;\ D_\Gamma)$ pour $1 \le j \le \chi_p$ et $-k \le q \le 2m+p-k-1$. On définit alors la condition $H_3(p\ ;\ \Omega)$ suivante :

$H_3(p\ ;\ \Omega)$: Pour tout x appartenant à Γ et pour tout vecteur ξ appartenant à T_x , espace cotangent en x à Γ, le problème aux limites :

$$\begin{cases} \sum\limits_{h=o}^{k} P_{2m-h}^{2m-h}(x\ ;\ \xi + \mathrm{grad}\ \varphi(x)\ D_t)\ \{t^{k-h}\ v(t)\} = 0, \\ \sum\limits_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{j,q}^{m_j-q}(x\ ;\ \xi)\ \gamma_q v = 0 \quad \text{pour} \quad j=1,\ldots,\ \chi_p\ , \end{cases}$$

si $\chi_p > o$, ou bien

$$\left\{ \sum_{h=o}^{k} P_{2m-h}^{2m-h}(x\ ;\ \xi + \mathrm{grad}\ \varphi(x)\ D_t)\ \{t^{k-h}\ v(t)\} = 0, \right.$$

si $\chi_p = 0$, n'admet que la solution $v = 0$ dans $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$.

Remarque 2.1.

Les conditions introduites dans $H_1(p\ ;\ \Omega)$, $H_2(p\ ;\ \Omega)$ et $H_3(p\ ;\ \Omega)$ sont invariantes par difféomorphisme.

2.2. Enoncé des résultats.

Pour tout entier $p \geq 0$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur $W_k^{2m+p}(\Omega)$ par :

$$(2.2)\quad \mathcal{P}_p : u \longmapsto \mathcal{P}_p u = \begin{cases} \{Lu \;;\; B_p\, \gamma u\} & \text{si } \chi_p > 0, \\ Lu & \text{si } \chi_p = 0. \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire continu de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}$ si $\chi_p > 0$ ou dans $H^p(\Omega)$ si $\chi_p = 0$.

Désignons par $[H^p(\Omega)]'$ (resp. $[W_k^{2m+p}(\Omega)]'$) l'espace dual de $H^p(\Omega)$ (resp. $W_k^{2m+p}(\Omega)$. L'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire continu de $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}$ si $\chi_p > 0$ et de $[H^p(\Omega)]'$ dans $[W_k^{2m+p}(\Omega)]'$ si $\chi_p = 0$.

L'espace $[H^p(\Omega)]'$ étant canoniquement isomorphe à l'espace $H_0^{-p}(\Omega)$ des distributions de $H^{-p}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\Omega}$, on peut considérer l'opérateur $\mathcal{P}_p^*$ comme un opérateur linéaire continu de $H_0^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}$ si $\chi_p > 0$ ou, de $H_0^{-p}(\Omega)$ si $\chi_p = 0$, dans le sous-espace des distributions de $[W_{k,}^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'$ à support dans $\overline{\Omega}$.

On a alors les théorèmes suivants :

<u>Théorème 2.1</u> : Soit p un entier ≥ 0; On suppose que les conditions $H_1(p\;;\;\Omega)$, $H_2(p\;;\;\Omega)$ et $H_3(p\;;\;\Omega)$ sont réalisées. Alors :

(i) il existe une constante $c_0 > 0$ telle que pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ on ait :

1. Si $k < 2m + p$:

$$\|u\|_{W_k^{2m+p}(\Omega)} \leq c_0 \{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\} \text{ si } \chi_p > 0,$$

ou bien

$$\|u\|_{W_k^{2m+p}(\Omega)} \leq c_0 \{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^p(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\} \text{ si } \chi_p = 0.$$

2. Si $k = 2m$ et $p = 0$:

$$\|u\|_{W^{2m}_{2m}(\Omega)} \leq c_o \{\| \mathcal{P}_o u\|_{L^2(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_o} H^{-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \| \varphi^{2m} u\|_{L^2(\Omega)}\} \quad \text{si } \chi_o > o$$

ou bien

$$\|u\|_{W^{2m}_{2m}(\Omega)} \leq c_o \{\| \mathcal{P}_o u\|_{L^2(\Omega)} + \| \varphi^{2m} u\|_{L^2(\Omega)}\} \quad \text{si } \chi_o = o$$

(ii) Pour tout entier $q \geq 1$, tel que l'équation $\phi(x ; \rho) = o$ n'ait pas de racine dans la bande $-(p+q)-2m+k-\frac{1}{2} \leq \text{Re}\ \rho \leq -p-2m+k-\frac{1}{2}$ pour tout x appartenant à Γ, il existe une constante $C_q > o$ telle que, pour tout u appartenant à $W^{2m+p}_k(\Omega)$ et vérifiant $\mathcal{P}_p u \in H^{p+q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ si $\chi_p > o$ ou bien $\mathcal{P}_p u \in H^{p+q}(\Omega)$ si $\chi_p = 0$, alors u appartient à $W^{2m+p+q}_k(\Omega)$ et de plus :

$$\|u\|_{W^{2m+p+q}_k(\Omega)} \leq C_q \{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^{p+q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W^{2m+p+q-1}_k(\Omega)}\} \text{si } \chi_p > o$$

ou bien

$$\|u\|_{W^{2m+p+q}_k(\Omega)} \leq C_q \{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^{p+q}(\Omega)} + \|u\|_{W^{2m+p+q-1}_k(\Omega)}\} \quad \text{si } \chi_p = 0.$$

<u>Théorème 2.2</u> : Soit p un entier $\geq o$. On suppose que les conditions $H_1(p ; \Omega)$, $H_2(p ; \Omega)$ et $H_3(p ; \Omega)$ sont réalisées. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout (f,g) appartenant à

$$H^{-p}_o(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \text{si } \chi_p > o$$

et pour tout f appartenant à $H^{-p}_o(\Omega)$ si $\chi_p = o$, on ait respectivement :

$$\|(f,g)\|_{H^{-p}_o(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C. \{ \|\mathcal{P}^*_p(f,g)\|_{[W^{2m+p}_{k,}(\mathbb{R}^n)]'} + \|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}$$

$$+ \|g\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} ,$$

et

$$\|f\|_{H^{-p}_o(\Omega)} \leq C. \{\|\mathcal{P}^*_p f\|_{[W^{2m+p}_{k,}(\mathbb{R}^n)]'} + \|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\} .$$

2.3. Démonstration du théorème 2.1.

On fera la démonstration pour $\chi_p > o$. Par "cartes locales" et "partition de l'unité" on se réduit, par un raisonnement classique, au **théorème** 1.3 et aux estimations a priori pour les opérateurs elliptiques.

En effet, soit $(O_i)_{1 \leq i \leq N}$ un recouvrement fini de Γ par des ouverts O_i dont le diamètre sera fixé ensuite de façon convenable et, soit Θ_i, pour $i = 1,\dots,N$, un difféomorphisme de classe C^∞ de O_i sur la boule de R^{n-1} de contre l'origine et de rayon ε. Soit enfin $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq N}$ une partition de l'unité subordonné au recouvrement $(O_i)_{1 \leq i \leq N}$ de Γ.

Conservant les notations du chapitre I et si $0 < \varepsilon < \delta$, on définit les ouverts $\mathcal{U}_i$, pour $i = o,1,\dots,N$:

$$\mathcal{U}_i = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_\Gamma \in O_i \, , \, d(x,\Gamma) < \varepsilon\} \quad \text{pour } i = 1,\dots,N \, ,$$

et

$$\mathcal{U}_o = \{x \in \Omega \; ; \; d(x, \Gamma) > \varepsilon\}.$$

Ainsi, pour $i=1,\dots,N$ l'application $\Xi_i : x \longmapsto (\Theta_i(x_\Gamma), d(x,\Gamma))$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathcal{U}_i$ sur la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre l'origine et de rayon ε. On choisira ε assez petit de sorte que la fonction α (qui a servi à définir l'opérateur "trace" γ, cf. chapitre I), vérifie : $\alpha(t) = 1$ pour $|t| \leq \varepsilon$.

Soit par ailleurs, φ_o une fonction appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$ égale à 1 sur $\overline{\mathcal{U}_o}$.

Considérons maintenant une fonction u appartenant à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ et telle que $\mathcal{P}_p u$ appartienne à $H^{p+q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ où q est égal à 0 ou 1.

La fonction $\varphi_o u$ appartient à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ et $L(\varphi_o u)$ appartient à $H^{p+q}(\Omega)$; la régularité à l'intérieur pour les opérateurs elliptiques donne que $\varphi_o u$ appartient à $W_k^{2m+p+q}(\Omega)$ et que l'on a :

(2.3) $$\|\varphi_o u\|_{W_k^{2m+p+q}(\Omega)} \leq C.\ \{\| L(\varphi_o u)\|_{H^{p+q}(\Omega)} + \|\varphi_o u\|_{L^2(\Omega)}\}.$$

D'autre part, on vérifie que pour tout $\beta > o$, il existe une constante $C_\beta > o$ telle que :

(2.4) $$\|B_p\gamma(\varphi_o u)\|_{\prod\limits_{j=1}^{p} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \beta\|\varphi_o u\|_{W_k^{2m+p+q}(\Omega)} + C_\beta\|\varphi_o u\|_{L^2(\Omega)}.$$

De (2.3) et (2.4), on déduit :

(2.5) $$\|\varphi_o u\|_{W_k^{2m+p+q}(\Omega)} \leq C.\ \{\|\mathcal{P}_p(u)\|_{H^{p+q}(\Omega)\times\prod\limits_{j=1}^{p} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}} + \|\varphi_o u\|_{L^2(\Omega)}\}.$$

On estime maintenant la fonction $v = u - \varphi_o u$.

Afin de pouvoir utiliser directement les résultats du théorème 1.3, on écrit l'opérateur L sous une forme un peu différente. Soit ϕ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ satisfaisant aux conditions (1.22) du chapitre I et qui, de plus, vérifie :

$$\phi(x) = d(x,\Gamma) \text{ si } x \in \mathcal{U}_\delta.$$

On vérifie que la fonction φ/ϕ définie sur $\mathbb{R}^n-\Gamma$ se prolonge en une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et non nulle sur Γ. Ainsi, $Lv(x)$ peut aussi s'écrire :

(2.6) $$Lv(x) = \sum_{h=o}^{k} Q^{2m-h}(x\ ;\ D_x)\ \{\phi(x)^{k-h}\ u(x)\},$$

où les opérateurs $Q^{2m-h}(x\ ;\ D_x)$ possèdent les mêmes propriétés que les opérateurs $P^{2m-h}(x\ ;\ D_x)$.

On peut écrire : $v = \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_i\, v$ où, pour $i=1,\ldots,N$, φ_i est une fonction de classe C^∞ à support dans $\mathcal{U}_\delta$ définie par :

$$\varphi_i(x) = \alpha_i(x_\Gamma)\ \alpha(d(x,\Gamma)).$$

La fonction $\varphi_i v$ appartient à $W_k^{2m+p+q}(\Omega)$, est à support dans $\mathcal{U}_i \cap \overline{\Omega}$ et vérifie :

$\mathcal{P}_p(\varphi_i v)$ appartient à $H^{p+q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Par le difféomorphisme Ξ_i, on se ramène dans la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre l'origine et de rayon ε et compte-tenu de (2.6), et du fait que

$$\gamma_q(\varphi_i v) \circ \Theta_i^{-1} = \gamma_q\left((\varphi_i v) \circ \Xi_i^{-1}\right)$$

pour $q = -k, \ldots, 2m+p-k-1$, on applique le théorème 1.3 à l'opérateur transformé $\Xi_i^* \mathcal{P}_p$ (pourvu que ε et le diamètre de $\mathcal{O}_i$ soient assez petits). Il en résulte que $\varphi_i v$, pour $i=1,\ldots,N$, appartient à $W_k^{2m+p+q}(\Omega)$ et que l'on a l'inégalité :

$$(2.7)\quad \begin{cases} \|\varphi_i v\|_{W_k^{2m+p+q}(\Omega)} \le C.\{\|\mathcal{P}_p(\varphi_i v)\|_{H^{p+q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\varphi_i v\|_{L^2(\Omega)}\}, \\ \qquad\qquad \text{si } k < 2m+p, \\ \|\varphi_i v\|_{W_{2m}^{2m+q}(\Omega)} \le C.\{\|\mathcal{P}_o(\varphi_i v)\|_{H^q(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_o} H^{q-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\varphi^{2m}\varphi_i v\|_{L^2(\Omega)}\}, \\ \qquad\qquad \text{si } k = 2m \text{ et } p = o. \end{cases}$$

(on a utilisé le fait que, pour tout $\beta > o$, il existe une constante $C_\beta > o$ telle que pour tout v appartenant à $W_k^{2m+p+1}(\Omega)$, on a :

$$\begin{cases} \|v\|_{W_k^{2m+p}(\Omega)} \le \beta\|v\|_{W_k^{2m+p+1}(\Omega)} + C_\beta\|v\|_{L^2(\Omega)}, \text{ si } k < 2m+p, \\ \|v\|_{W_{2m}^{2m}(\Omega)} \le \beta\ \|v\|_{W_{2m}^{2m+1}(\Omega)} + C_\beta\ \|\varphi^{2m} v\|_{L^2(\Omega)}, \text{ si } k = 2m \text{ et } p = 0. \end{cases}$$

De (2.7), on déduit que :

$$(2.8)\quad \begin{cases} \|\varphi_i v\|_{W_k^{2m+p+q}(\Omega)} \le C.\{\|\mathcal{P}_p v\|_{H^{p+q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\varphi_i v\|_{L^2(\Omega)}\}, \\ \qquad\qquad \text{si } k < 2m+p, \\ \|\varphi_i v\|_{W_{2m}^{2m+q}(\Omega)} \le C.\{\|\mathcal{P}_o v\|_{H^q(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_o} H^{q-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\varphi^{2m}\varphi_i v\|_{L^2(\Omega)}, \\ \qquad\qquad \text{si } k=2m \text{ et } p=o, \end{cases}$$

pour $i=1,\ldots,N$.

En écrivant que $v=u-\varphi_o u$ et en sommant les inégalités (2.8) et (2.5) (et compte-tenu de (2.4)), on obtient l'inégalité :

$$\|u\|_{W_k^{2m+p+q}(\Omega)} \leq C.\{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^{p+q}(\Omega)\times\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\},$$

si $k < 2m+p$,

$$\|u\|_{W_{2m}^{2m+q}(\Omega)} \leq C.\{\|\mathcal{P}_o u\|_{H^q(\Omega)\times\prod_{j=1}^{\chi_o} H^{q-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}} + \|\varphi^{2m}u\|_{L^2(\Omega)}\}, \text{ si } k=2m \text{ et } p=o,$$

pour $q=o$ ou 1.

Pour $q > 1$, on raisonne par récurrence sur q et on utilise la même méthode que ci-dessus. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.1.

2.4. Démonstration du théorème 2.2.

On fera la démonstration pour $\chi_p > o$. On conserve les notations du paragraphe précédent.

Soit (f,g) appartenant à $H_o^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}$. Alors, $\varphi_o(f,g) = (\varphi_o f, o)$ appartient à $H_o^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}$ et vérifie

$$\mathcal{P}_p^*(\varphi_o f, o) = L^*(\varphi_o f) \in H^{-2m-p}(\mathbb{R}^n).$$

L'opérateur L^* étant elliptique à l'intérieur, on a :

$$\|\varphi_o f\|_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} \leq C.\{\|L^*(\varphi_o f)\|_{H^{-2m-p}(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi_o f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\}. \tag{2.10}$$

Il en résulte l'inégalité :

$$\|\varphi_o f\|_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} \leq C.\{\|\mathcal{P}_p^*(f,g)\|_{[W_{k,}^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} + \|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\}. \tag{2.11}$$

On estime maintenant l'élément (f',g) où $f' = f-\varphi_o f$. On peut écrire $(f',g) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(f',g)$ où $\varphi_i(f',g) = (\varphi_i f', \alpha_i g) = (\varphi_i f', \alpha_i g_1, \dots, \alpha_i g_{\chi_p})$ pour $i = 1,\dots, N$.

L'élément $\varphi_i(f',g)$ appartient à $H_o^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et, par le difféomorphisme Ξ_i, on se ramène dans la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon ε. On applique alors le théorème 1.4 à l'opérateur transformé $\Xi_i^* \mathcal{P}_p^*$ (pourvu que ε et le diamètre de C_i soient assez petits). Revenant à Ω, on obtient l'inégalité :

$$(2.12)\quad \|\varphi_i(f',g)\|_{H_o^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C.\left\{\|\mathcal{P}_p^*(\varphi_i(f',g))\|_{\left[W_{k,}^{2m+p}(\mathbb{R}^n)\right]'} + \|\varphi_i f'\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + \|\alpha_i g\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right\}.$$

Il en résulte l'inégalité :

$$(2.13)\quad \|\varphi_i(f',g)\|_{H_o^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C.\left\{\|\mathcal{P}_p^*(f,g)\|_{\left[W_{k,}^{2m+p}(\mathbb{R}^n)\right]'} + \|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right\}.$$

Sommant les inégalités (2.11) et (2.13), on obtient l'estimation du théorème 1.4.

3°) Existence des solutions dans les espaces $W_k^\ell(\Omega)$ avec ℓ entier $\geq$ 2m+p.

Soit p un entier $\geq$ o. On peut maintenant étudier le problème aux limites :

$$(3.1)\quad \begin{cases} Lu = f \text{ dans } \Omega, \\ B_p\ \gamma u = g \text{ sur } \Gamma \text{ (si } \chi_p > o), \end{cases}$$

du point de vue de l'existence des solutions dans les espaces $W_k^\ell(\Omega)$, avec ℓ entier $\geq$ 2m+p.

Notre but essentiel est de montrer que, sans les hypothèses du paragraphe 2.1, l'opérateur :

$$(3.2)\quad \mathcal{P}_p : u \longmapsto \mathcal{P}_p u = \begin{cases} (Lu,\ B_p\ \gamma u) & \text{si } \chi_p > o, \\ Lu & \text{si } \chi_p = o, \end{cases}$$

est un opérateur à indice de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}$ si $\chi_p > o$ et de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$ si $\chi_p = o$. Moyennant une condition supplémentaire sur l'opérateur $\mathcal{P}_p$, on montrera que c'est aussi un opérateur à indice de $W_k^{2m+p+q}(\Omega)$ dans $H^{p+q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}$ si $\chi_p > o$ et de $W_k^{2m+p+q}(\Omega)$ dans $H^{p+q}(\Omega)$ si $\chi_p = 0$, q étant un entier ≥ 1. Enfin, on exprimera les conditions de comptabilité du problème (3.1) en utilisant un problèmes aux limites adjoint.

Plus précisément, on a le théorème suivant :

<u>Théorème 3.1</u> : Avec les notations du paragraphe 2.1, on suppose que les conditions $H_1(p\ ;\ \Omega)$, $H_2(p\ ;\ \Omega)$ et $H_3(p\ ;\ \Omega)$ sont réalisées, et que, pour tout x appartenant à Γ, l'équation $\phi(x\ ;\ \rho) = 0$ n'a pas de racine dans la bande -
$-(p+q) - 2m + k - \frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ \rho \leq -p - 2m + k - \frac{1}{2}$, q étant un entier $\geq o$.

Alors, si r est un entier compris entre 0 et q, l'opérateur $\mathcal{P}_p$, défini par (3.2), opérant de $W_k^{2m+p+r}(\Omega)$ dans

$$\begin{cases} H^{p+r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+r-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)} & \text{si } \chi_p > o, \\ H^{p+r}(\Omega) & \text{si } \chi_p = o, \end{cases}$$

est un opérateur à indice, cet indice étant indépendant de r ; le noyau de $\mathcal{P}_p$ est égal à l'espace

$$\{u \in W_k^{2m+p+q}(\Omega),\ \mathcal{P}_p u = o\},$$

et si $\chi_p > o$ (resp. $\chi_p = 0$), l'image de $\mathcal{P}_p$ est composée des éléments

$$(f,g) \in H^{p+r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+r-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)} \quad (\text{resp. } f \in H^{p+r}(\Omega))$$

tels que

$$\begin{cases} \langle f,\overline{v}\rangle_{H^p(\Omega)\times H_o^{-p}(\Omega)} + \langle g,\overline{\varphi}\rangle_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)} \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}} = 0 \quad (\text{resp.} \\ \quad \langle f,\overline{v}\rangle_{H^p(\Omega)\times H_o^{-p}(\Omega)} = 0) \\ \text{pour tout élément } \phi = (v,\varphi) \ (\text{resp. } \phi = v) \text{ de } H_o^{-p}(\Omega) \times H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}_{(\Gamma)} \ (\text{resp.} \\ H_o^{-p}(\Omega)) \text{ vérifiant } \quad \mathcal{P}_p^{*}\phi = o, \end{cases}$$

où $\mathcal{P}_p^{*}$ est l'adjoint de l'opérateur $\mathcal{P}_p$ considéré pour r = o.

Démonstration : On fait la démonstration pour $\chi_p > 0$. Désignons par $\mathcal{P}_{p,r}$ l'opérateur $\mathcal{P}_p$ considéré comme opérateur de

$$W_k^{2m+p+r}(\Omega) \text{ dans } H^{p+r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+r-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}, \text{ pour } r = o,\dots,q.$$

Il résulte du théorème 2.1, que le noyau de $\mathcal{P}_{p,r}$ coïncide avec l'espace

$$\{u \in W_k^{2m+p+q}(\Omega),\ \mathcal{P}_p u = o\},$$

et que l'image de $\mathcal{P}_{p,r}$ soit $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{p,r}$, est égale à :

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{p,r} = \mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{p,o} \cap \{ H^{p+r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+r-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)} \}. \tag{3.3}$$

L'injection de $W_k^{2m+p+r}(\Omega)$ dans $W_k^{2m+p+r-1}(\Omega)$ étant compacte, on déduit du théorème 2.1 (cf. lemme 5.1 du chapitre II [14]) que le noyau de $\mathcal{P}_{p,r}$ est de dimension finie et que $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{p,r}$ est fermée.

Etudions maintenant $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{p,o}$. Puisque $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{p,o}$ est fermée, l'équation

$$\mathcal{P}_{p,o} u = F \in H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}$$

admet une solution u, appartenant à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ si et seulement si F satisfait à la relation d'orthogonalité :

$$\langle F, \phi \rangle_{\left(H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}\right) \times \left(H_o^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}\right)}$$

pour tout élément ϕ, appartenant à $H_o^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et vérifiant

$$\mathcal{P}^*_{p,o}\,\phi = 0,$$

où $\mathcal{P}^*_{p,o}$ désigne l'adjoint de $\mathcal{P}_{p,o}$.

Démontrons maintenant que le noyau de $\mathcal{P}^*_{p,o}$ est de dimension finie. L'injection de $H_o^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}$ dans $H^{-p-1}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}$ étant compacte, on déduit du théorème 2.2 que le noyau de $\mathcal{P}^*_{p,o}$ est de dimension finie ; par suite, $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{p,o}$ est de codimension finie dans

$$H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)} .$$

Il reste à établir que

$$\text{Codim Im } \mathcal{P}_{p,r} = \text{Codim Im } \mathcal{P}_{p,o}$$

pour $r = o,\ldots,q$. Or, ceci résulte facilement de (3.3) et du fait que Im $\mathcal{P}_{p,r}$ est fermé. Le théorème 3.1. est démontré.

Corollaire 3.1 : Avec les notations du paragraphe 2.1, on suppose que les conditions $H_1(p\ ;\ \Omega)$, $H_2(p\ ;\ \Omega)$ et $H_3(p\ ;\ \Omega)$ sont réalisées, et que, pour tout x appartenant à Γ, l'équation $\phi(x\ ;\ \rho) = o$ n'a pas de racine dans le demi-espace $\text{Re } \rho \leq -p-2m + k - \frac{1}{2}$.

Alors, le noyau de l'opérateur $\mathcal{P}_p$ coïncide avec l'espace

$$N = \{u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),\ \mathcal{P}_p u = o\} .$$

Démonstration : Ceci résulte trivialement du théorème 3.1 et du fait que

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \bigcap_{s \geq o} H^s(\Omega).$$

III - RESULTATS COMPLEMENTAIRES ET EXEMPLES.

1°) Remarques sur les conditions $H_2(p\ ;\ \Omega)$ et $H_3(p\ ;\ \Omega)$:

Au cours du chapitre II, on a remarqué que les conditions $H_2(p\ ;\ \Omega)$ et $H_3(p\ ;\ \Omega)$ impliquent essentiellement que l'opérateur différentiel, en une variable t (cf. la condition $H_3(p\ ;\ \Omega)$, chapitre II, 2°),

$$(1.1) \qquad \sum_{h=o}^{k} p_{2m-h}^{2m-h}\,(x\ ;\ \xi + \text{grad}\ \varphi(x)\,D_t)\ \{t^{k-h}v\},$$

est un opérateur linéaire continu surjectif de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+)$, la dimension du noyau dans $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$ étant égale à χ_p .

Néanmoins, les techniques utilisées précédemment permettent d'obtenir des résultats analogues à ceux du théorème 2.1, chapitre II, lorsque l'opérateur (1.1) est un opérateur à indice de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$ d'indice χ_p, la codimension de l'image dans $H^p(\mathbb{R}_+)$ étant indépendante de x et de ξ mais non nécessairement nulle, et en outre, dans certains cas, des résultats analogues à ceux du théorème 3.1. C'est ce que nous allons développer sur des exemples précis.

Considérons d'abord le cas où Ω est le demi-espace $\mathbb{R}_+^n$. Soit l'opérateur $L \equiv L(x_n\ ;\ D_{x'},\ ,\ D_{x_n})$ défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$(1.2) \qquad Lu(x) \equiv L(x_n\ ;\ D_{x'},\ ,\ D_{x_n})\ \{u(x)\} \equiv x_n^k((1 + \sum_{i=1}^{n-1} D_{x_i}^2)^m + D_{x_n}^{2m})\ \{u(x)\},$$

où m est un entier ≥ 1 et k un entier vérifiant : $1 \leq k \leq 2m$.

Pour étudier cet opérateur L dans le demi-espace $\mathbb{R}_+^n$, on emploie la méthode classique (cf. [18] par exemple) qui consiste à ajouter une variable tangentielle, soit x_o, et de considérer non plus l'opérateur L défini par (1.2) mais l'opérateur $M \equiv M(x_n\ ;\ D_{x_o},\ D_{x'},\ ,\ D_{x_n})$ défini sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$(1.3) \qquad Mu(x) \equiv M(x_n\ ;\ D_{x_o},\ D_{x'},\ D_{x_n})\ \{u(x)\} \equiv x_n^k\ ((\sum_{i=o}^{n-1} D_{x_n}^2)\ \{u(x)\}.$$

On effectue la transformation de Fourier en variables tangentielles, ce qui nous amène à considérer l'opérateur différentiel en une variable x_n $M(x_n\ ;\ \xi_o, \xi', D_{x_n})$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$(1.4) \qquad M(x_n\ ;\ \xi_o, \xi', D_{x_n})\ \{u(x_n)\} \equiv x_n^k\ \Big(\Big(\sum_{i=o}^{n-1} \xi_i^2\Big)^m + D_{x_n}^{2m}\Big)\ \{u(x_n)\}$$

pour (ξ_o, ξ') appartenant à $\mathbb{R}^n$. Lorsque (ξ_o, ξ') appartient à S_{n-1}, sphère unité de $\mathbb{R}^n$, l'opérateur (1.4) se réduit à l'opérateur :

$$(1.5) \qquad M(x_n\ ;\ \xi_o, \xi', D_{x_n})\ \{u(x_n)\} \equiv x_n^k\ (1 + D_{x_n}^{2m})\ \{u(x_n)\}.$$

Soit p un entier $\geq$ o et posons r_p = Min (p,k). Il sulte alors de [4] que :

<u>Proposition 1.1</u> : Pour tout (ξ_o, ξ') appartenant à S_{n-1}, sphère unité de $\mathbb{R}^n$, l'opérateur :

$$u \longmapsto (M(x_n\ ;\ \xi_o, \xi', D_{x_n})u\ ;\ \gamma_{-j}u, \gamma_{-j+1}u, \dots, \gamma_{-j+m-1}u)$$

où j est un entier satisfaisant à $-(m+p) + k \leq j \leq k$, est un isomorphisme algébrique et topologique de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $(H^p(\mathbb{R}_+) \times H_o^{r_p}(\mathbb{R}_+)) \times \mathbb{C}^m$.

Utilisant alors les techniques du chapitre II, 1°, on effectue l'homothétie $s = |(\xi_o, \xi')|\ x_n$ et dans les inégalités obtenues (cf : l'inégalité (1.4) du chapitre II), on fait $\xi_o = 1$. Il en résulte le théorème suivant :

<u>Théorème 1.1</u> : Soient p un entier $\geq$ 0 et r_p = Min (k,p). L'opérateur

$$u \longmapsto (Lu\ ;\ \gamma_{-j}u\ ,\ \gamma_{-j+1}u\ ,\ \dots\ ,\ \gamma_{-j+m-1}u)$$

où L est défini par (1.2) et où j est un entier satisfaisant à $-(m+p)+k \leq j \leq k$, est un isomorphisme algébrique et topologique de

$$W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n) \text{ sur } (H^p(\mathbb{R}_+^n) \times H_o^{r_p}(\mathbb{R}_+^n)) \times \prod_{\ell=-j}^{-j+m-1} H^{2m+p-k-\ell-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

Dans le cas où Ω est un ouvert borné "régulier" de $\mathbb{R}^n$, on peut citer les opérateurs : $\varphi^k(x)$ A, où φ est une fonction de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$ satisfaisant à (1.22) chapitre I, et où A est un opérateur proprement elliptique dans $\overline{\Omega}$ d'ordre 2m et k un entier supérieur ou égal à 1. De tels opérateurs seront étudiés en détail au chapitre III, 3° et surtout au chapitre IV.

2°) Etude algébrique de la condition $H_3(p ; \mathbb{R}^n_+)$:

Les résultats obtenus dans [4] permettent dans certains d'exprimer la condition $H_3(p ; \Omega)$ introduite dans le chapitre II, à l'aide de conditions algébriques sur l'opérateur.

Lorsque Ω est un ouvert borné "régulier", on ne peut donner, en général, de critères algébriques permettant d'établir si le problème aux limites est bien posé. Toutefois, de tels critères existent pour certains types d'opérateurs ; c'est ce que nous montrerons au paragraphe 3°). Dans cette direction, citons aussi les travaux de V.P. GLOUCHKO et de V.V. GRUSHIN [10] .

Lorsque Ω est le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$, on peut, sous certaines conditions, exprimer la condition $H_3(p ; \mathbb{R}^n_+)$ à l'aide de conditions algébriques équivalentes sur l'opérateur. La nature même de la condition $H_3(p ; \mathbb{R}^n_+)$ nous permet de limiter cette étude au cas des opérateurs homogènes à coefficients constants. Les notations utilisées seront celles du chapitre II. 1.1. On utilisera les résultats obtenus dans [4] (chapitre II, 5°), ce qui nous amène à faire deux restrictions : on suppose que le nombre r_p est nul et que les opérateurs B_{jq} sont identiquement nuls pour tout couple d'entiers (j,q) vérifiant $1 \leq j \leq m$ et $2m-k \leq q \leq 2m+p-k-1$.

Comme dans [4], pour chaque ω appartenant à S_{n-2}, on associe à l'opérateur différentiel ordinaire $L(x_n ; \omega, D_{x_n})$ un projecteur $R(\omega)$ de $\mathbb{C}^{2m}$. La condition $H_3(p ; \mathbb{R}^n_+)$ est alors équivalente à la condition suivante :

$$(2.1)\quad \begin{cases} \text{Pour tout } \omega \text{ appartenant à } S_{n-2}, \text{ il existe un opérateur linéaire} \\ D(\omega) \text{ de } \mathbb{C}^m \text{ dans } \mathbb{C}^{2m} \text{ tel que :} \\ \qquad \begin{cases} B_p(\omega)\, D(\omega) = id_{\mathbb{C}^m}\,, \\ R(\omega)\;\; D(\omega) = D(\omega). \end{cases} \end{cases}$$

Dans [18], cette condition (2.1), pour p=o, était appelée (S.L.) par analogie avec la condition de Shapiro-Lopatinski pour les problèmes aux limites elliptiques.

Dans le paragraphe suivant, où m=1 et k=1, on montrera que cette condition (2.1) pour l'opérateur $\mathcal{P}_p = (L, \gamma_o)$ est équivalente à une seule condition algébrique portant sur l'opérateur L.

Remarquons que cette condition (2.1) peut être utilisée sous des hypothèses moins restrictives, en particulier en ce qui concerne le nombre r_p et la condition $H_2(p\ ;\mathbb{R}^n_+)$; l'exemple qui suit est dans cette situation pour $p \geq 1$.

On va détailler la condition (2.1) introduite ci-dessus pour l'opérateur suivant :

$$(2.2)\qquad Lu(x) \equiv L(x_n\ ; D_{x'}, D_{x_n})\,\{u(x)\} \equiv x_n^2\,(1 + \sum_{i=1}^{n} D^2_{x_i})\,\{u(x)\}.$$

On utilisera les résultats obtenus dans [4] (chapitre II, 4°) et chapitre II,5°]. L'opérateur frontière B_p considéré est défini par :

$$(2.3)\qquad B_p\,\gamma u \equiv B_p(D_{x'})\,\gamma u \equiv B_{-2}(D_{x'})\,\gamma_{-2}u + B_{-1}(D_{x'})\,\gamma_{-1}u,$$

où $B_{-q}(D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants d'ordre $\leq$ m+q où m est un entier tel que $-2 \leq m \leq p-1$ et si $m+q < o$, l'opérateur $B_{-q}(D_{x'})$ correspondant est par définition l'opérateur nul.

On pose :

$$(2.4)\qquad B_{-q}(D_{x'}) \equiv \sum_{|\alpha|=o}^{m+q} p_{q,\alpha}\, D^{\alpha}_{x'}\ .$$

La matrice $R(\omega)$ associée à l'opérateur L défini par (2.2) est égale à :

$$(2.5) \qquad R(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Ainsi, la condition (2.1) est équivalente à la condition suivante :

$$(2.6) \qquad \begin{cases} \text{Pour tout } \omega \text{ appartenant à } S_{n-2} : \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|=m+2} p_{2,\alpha}\, \omega^{\alpha} - \sum_{|\alpha|=m+1} p_{1,\alpha}\, \omega^{\alpha} \neq 0. \end{cases}$$

Montrons maintenant comment cette condition (2.1) peut être utilisée pour obtenir des théorèmes d'existence dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$. On commence par introduire une variable tangentielle supplémentaire x_o (cf. 1°)). Ainsi, au couple $\{L,B_p\}$, on associe le couple d'opérateurs $\{M,C_p\}$ définis par :

$$(2.7) \qquad \begin{cases} M(x_n\,;\,\xi_o,\xi',\,D_{x_n})\,\{u(x_n)\} \equiv x_n^2\,\big(\displaystyle\sum_{i=o}^{n-1} \xi_i^2 + D_{x_n}^2\big)\,\{u(x_n)\}, \\ C_p(\xi_o,\xi')\,\gamma u \equiv C_{-2}(\xi_o,\,\xi')\,\gamma_{-2}u + C_{-1}(\xi_o,\,\xi')\,\gamma_{-1}u, \end{cases}$$

où $(\xi_o,\,\xi')$ appartient à $\mathbb{R}^n$ et où

$$(2.8) \qquad C_{-q}(\xi_o,\,\xi') \equiv \sum_{|\alpha|=o}^{m+q} p_{q,\alpha}\, \xi_o^{m+q-|\alpha|}\, \xi'^{\alpha} \quad \text{pour } q = 1,2.$$

On vérifie facilement que la condition (2.1) pour le couple d'opérateurs $\{M,C_p\}$ équivaut à :

$$(2.9) \qquad \begin{cases} \text{Pour tout } (\xi_o,\,\xi') \text{ appartenant à } S_{n-1}, \text{ sphère unité de } \mathbb{R}^n, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|=o}^{m+2} p_{2,\alpha}\, \xi_o^{m+2-|\alpha|}\, \xi'^{\alpha} - \sum_{|\alpha|=o}^{m+1} p_{1,\alpha}\, \xi_o^{m+1-|\alpha|}\, \xi'^{\alpha} \neq 0. \end{cases}$$

Comme dans le paragraphe 1°), on en déduit le théorème suivant :

<u>Théorème 2.1</u> : Si le couple d'opérateurs $\{L,B_p\}$ définis par (2.2) et (2.3) vérifie la condition (2.9), alors $\{L,B_p\}$ est un isomorphisme de :

(i) $W_2^2(\mathbb{R}^n_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n_+) \times H^{-\frac{1}{2}-m}(\mathbb{R}^{n-1})$,

(i i) $W_2^3(\mathbb{R}^n_+)$ sur $H_o^1(\mathbb{R}^n_+) \times H^{+\frac{1}{2}-m}(\mathbb{R}^{n-1})$,

(iii) $W_2^{2+p}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $((H^p(\mathbb{R}^n_+) \cap H_o^2(\mathbb{R}^n_+)) \times H^{p-\frac{1}{2}-m}(\mathbb{R}^{n-1}))$ pour $p \geq 2$

Remarque 2.1 : La condition (2.9) est évidemment une condition plus forte que la condition (2.6).

3°) Etude détaillée des opérateurs L dans le cas particulier $m = k = 1$.

Dans ce paragraphe, nous allons préciser les résultats obtenus pour les opérateurs L introduits au chapitre II pour lesquels $m = k = 1$. On utilisera les résultats de [4] chapitre III.

Dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$, nous limiterons notre étude à un exemple en relation avec le paragraphe 1°). Appliquant le théorème 2.1 du chapitre III de [4], on obtient facilement le :

Théorème 3.1 : Soient p un entier ≥ 0 et L l'opérateur défini par :

$$Lu(x) \equiv L(x_n \,;\, D_{x'}, D_{x_n})\, u(x) \equiv (1 + \sum_{i=1}^{n} D^2_{x_i})\, \{x_n u(x)\} + \lambda\, D_{x_n} u(x),$$

où λ appartient à $\mathbb{C}$. On a alors :

(i) Si $Re(i\lambda) < -\frac{3}{2} - p$: l'opérateur $\{L, \gamma_0\}$ est un isomorphisme de $W_1^{2+p}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}^n_+) \times H^{p+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

(ii) Si $Re\,(i\lambda) > -\frac{3}{2} - p$ et

1) Si $(i\lambda) \neq -2m$, avec m entier ≥ 1 : l'opérateur L est un isomorphisme de $W_1^{2+p}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}^n_+)$.

2) Si $(i\lambda) = -2m$, avec m entier ≥ 1 : l'opérateur $\{L, \gamma_0\}$ est un isomorphisme de $W_1^{2+p}(\mathbb{R}^n_+) \times H^{p+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ où $K^p(\mathbb{R}^n_+) =$

$$= \{f \in H^p(\mathbb{R}^n_+) \;;\; \gamma_0 \left[(1 + \sum_{i=1}^{n} D^2_{x_i})^{m-1} f\right] = 0 \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})\} .$$

Soit maintenant Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ comme au chapitre II 2°). Les opérateurs $L \equiv L(x \,;\, D_x)$ pour lesquels $m = k = 1$ peuvent s'écrire sous la forme :

(3.1) $Lu(x) \equiv L(x\,;D_x)\,u(x) \equiv P^2(x\,;D_x)\,\{\varphi(x)\,u(x)\} + P^1(x\,;D_x)\,\{u(x)\} + a(x)\,u(x)$

où

(i) $P^2(x\,;D_x) \equiv \sum_{1 \le i,j \le n} a^{ij}(x)\,D_i D_j$ est un opérateur différentiel d'ordre 2, homogène, à coefficients de classe $C^\infty(\bar{\Omega})$ et proprement elliptique dans $\bar{\Omega}$,

(ii) $P^1(x\,;D_x) \equiv \sum_{i=1}^{n} a^i(x)\,D_i$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 ou plus, homogène et à coefficients de classe $C^\infty(\bar{\Omega})$,

(iii) $a(x)$ est une fonction de classe $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Par analogie avec le chapitre III de [4], on pose, pour x appartenant à $\Gamma = \partial\Omega$,

(3.2) $\rho(x) = i\,P^1(x\,;\operatorname{grad}\varphi(x)) \,/\, P^2(x\,;\operatorname{grad}\varphi(x))$;

on définit aussi, pour x appartenant à Γ et ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, la condition $C(x\,;\xi)$ suivante :

$C(x,\xi)$: il existe un entier $n = n(x\,;\xi) \geq 1$ tel que :

$$P^1(x\,;\xi + \tau_+(x\,;\xi)\operatorname{grad}\varphi(x)) = in(\tau_+(x\,;\xi) - \tau_-(x;\xi))\,P^2(x\,;\operatorname{grad}\varphi(x)),$$

où $\tau_+(x\,;\xi)$ et $\tau_-(x\,;\xi)$ sont les racines à partie imaginaire positive et négative de l'équation $P^2(x\,;\xi + \tau\operatorname{grad}\varphi(x)) = 0$.

De même, pour x appartenant à Γ et ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, on définit la condition $K(x\,;\xi)$ suivante :

$K(x\,;\xi)$: il existe un entier $n = n(x\,;\xi) \geq 0$ tel que :

$$P^1(x\,;\xi + \tau_-(x\,;\xi)\operatorname{grad}\varphi(x)) = in\,(\tau_+(x\,;\xi) - \tau_-(x,\xi))\,P^2(x\,;\operatorname{grad}\varphi(x)).$$

<u>Remarque 3.1</u> :

1) $\rho(x)$ est une fonction invariante par difféomorphisme.

2) Les conditions suivantes : pour tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, $C(x\ ;\ \xi)$ est vraie (resp. non vraie) sont invariantes par difféomorphisme.

La même propriété est valable pour la condition $K(x\ ;\ \xi)$.

Remarque 3.2 :

1) Soit x appartenant à Γ. Si pour tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, $C(x; \xi)$ est vraie, cela implique, en dimension $n \geq 3$, qu'il existe un entier $m = m(x) \geq 1$ tel que :

$$\rho(x) = -2m \text{ et } a^i(x) = im \sum_{j=1}^{n} (a^{ij}(x) + a^{ji}(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x).$$

Par exemple, l'opérateur :

$$L(x\ D_x)\{u(x)\} \equiv \varphi(x) \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} a^{ij}(x)\, D_i D_j + \sum_{i=1}^{n} a^i(x)\, D_i + a(x) \right) \{u(x)\} \tag{3.3}$$

vérifie pour tout x appartenant à Γ et pour tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, la condition $C(x\ ;\ \xi)$.

Dans cette hypothèse, la condition $K(x\ ;\ \xi)$ n'est jamais satisfaite pour tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ.

2) Soit x appartenant à Γ. Si $a^{ij}(x) = \overline{a^{ji}}(x)$, si $ia^j(x)$ est réel et si $\rho(x)$ n'est pas un entier de la forme $-2m$ (resp. $2(m-1)$) avec m entier ≥ 1, alors $C(x;\xi$ (resp. $K(x\ ;\ \xi)$) est non vraie pour tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ.

Les résultats obtenus dans le chapitre III de [4] permettent d'exprimer la condition $H_3(p\ ;\ \Omega)$ à l'aide des conditions algébriques $C(x\ ;\ \xi)$ et $K(x\ ;\ \xi)$. Ainsi, à l'aide des méthodes du chapitre II, on obtient le théorème suivant (cf. théorème 3.1, chapitre II) :

Théorème 3.2 :

Soient l'opérateur L défini en (3.1) et p un entier ≥ 0. Alors :

(i) Si Re $\rho(x) < -\frac{3}{2} - p$ pour tout x appartenant à Γ et si, pour tout x appartenant à Γ et tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, la condition $K(x;\xi)$ n'est pas vérifiée, l'opérateur $\{L, \gamma_0\}$ opérant de $W_1^{2+p-q}(\Omega)$ dans $H^{p-q}(\Omega) \times H^{p-q+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un opérateur à indice, dont l'indice est indépendant de l'entier q pour $0 \leq q \leq p$.

(ii) Si Re $\rho(x) > -\frac{3}{2} - p$ pour tout x appartenant à Γ et si, pour tout x appartenant à Γ et tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, la condition $C(x;\xi)$ n'est pas vérifiée, l'opérateur L opérant de $W_1^{2+p+q}(\Omega)$ dans $H^{p+q}(\Omega)$ est un opérateur à indice, dont l'indice est indépendant de l'entier q pour $q \geq o$. De plus, le noyau de l'opérateur L dans $W_1^{2+p}(\Omega)$ est l'espace $\{u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}),\ Lu = 0 \text{ dans } \Omega\}$.

<u>Remarque 3.3</u> :

1) Les résultats de régularité correspondant à ce théorème 3.2 (cf. théorème 2.1, chapitre II), s'énoncent de la façon suivante :

(i) Si l'hypothèse (i) du théorème 3.1 est satisfaite et si de plus k est un entier ≥ 0 tel que Re $\rho(x) < -\frac{3}{2} - (p+k)$ pour tout x appartenant à Γ, on a : si u appartient à $W_1^{2+p}(\Omega)$ et $\{L,\gamma_0\}$ (u) appartient à $H^{p+k}(\Omega) \times H^{p+k+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ • alors u appartient à $W_1^{2+p+k}(\Omega)$.

(ii) Si l'hypothèse (ii) du théorème 3.1 est satisfaite et si k est un entier ≥ 0, on a : si u appartient à $W_1^{2+p}(\Omega)$ et Lu appartient à $H^{p+k}(\Omega)$, alors u appartient à $W_1^{2+p+k}(\Omega)$.

2) On peut aussi obtenir des estimations a priori et des résultats de régularité pour des opérateurs L du type (3.1) pour lesquels les hypothèses du chapitre II ne sont pas vérifiées. Ainsi, si Re $\rho(x) > -\frac{3}{2} - p$ pour tout x appartenant à Γ et si, pour tout x appartenant à Γ et tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, la condition $C(x ; \xi)$ est vérifiée (cf. Remarque 3.2) et si k est un entier ≥ 0, on a :

si u appartient à $W_1^{2+p}(\Omega)$ et $\{L,\gamma_o\}$ (u) appartient à $H^{p+k}(\Omega) \times H^{p+k+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, alors u appartient à $W_1^{2+p+k}(\Omega)$ et il existe $C_k > 0$ telle que :

$$\|u\|_{W_1^{2+p+k}(\Omega)} \leq C_k \{\|\{L,\gamma_o\}\ (u)\|_{H^{p+k}(\Omega) \times H^{p+k+\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W_1^{1+p+k}(\Omega)}\} ,$$

(c_k étant indépendante de u).

Par exemple, l'opérateur défini en (3.3) satisfait à ces conditions ; on montrera au chapitre IV suivant que c'est un opérateur à indice dans des espaces convenables.

<u>Remarque 3.4</u> : Les opérateurs $L(x\ ;\ D_x)$ considérés en (3.1) avec a^{ij}, ia^j et a fonctions réelles appartiennent à la classe des opérateurs étudiés dans [13] (cf. aussi [8], [15]). Selon Fichera, la frontière Γ de Ω est partagée en trois parties qui, dans notre cas et avec nos notations, s'expriment par les conditions suivantes :

$\Sigma_3 = \emptyset$ (ensemble des points de Γ non caractéristiques pour L),

$\Sigma_2 = \{x \in \Gamma\ ,\ \rho(x) < -1\}$,

$\Sigma_1 = \{x \in \Gamma,,\ \rho(x) \geq -1\}$.

Dans [13], Köhn et Nirenberg obtiennent essentiellement, moyennant une condition supplémentaire sur l'opérateur en tout point de Σ_2, un théorème d'existence pour l'équation $L(x\ ;\ D_x)\ u = f$: étant donné f dans un espace de Sobolev $H^N(\Omega)$ (avec $N > 1$), il existe une solution u de $L(x\ ;\ D_x)u = f$ nulle sur Σ_2 et qui appartient à un certain espace de Sobolev sur Ω. Les résultats obtenus dans la remarque 3.3 permettent de compléter la régularité d'une telle solution.

Il ressort de l'étude faite dans ce paragraphe 3°) que pour de tels opérateurs, il serait plus correct de considérer $\Sigma_2 = \{x \in \Gamma,\ \rho(x) < -\frac{3}{2}\}$ et $\Sigma_1 = \Gamma - \Sigma_2$ et de poser sur Σ_2 des conditions aux limites en accord avec le théorème 3.2 et la remarque 3.3. Ainsi, par exemple, si on veut obtenir une régularité, de tout ordre, de la solution, il ne faut pas imposer de conditions aux limites sur Σ_2 (sauf cas particulier correspondant au point 2. de la remarque 3.3).

IV. UNE GENERALISATION ET APPLICATIONS.

1°) Généralisation des résultats du chapitre II lorsque $k > 2m$:

Les résultats donnés dans [4] pour des opérateurs $L \equiv L(t\ ;\ D_t)$ définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$Lu(t) \equiv L(t;D_t)\ \{u(t)\} \equiv \sum_{h=o}^{k} P^{m-h}(D_t)\ \{t^{k-h}\ u(t)\}$$

où k et m sont deux entiers vérifiant $1 \leq k \leq m$ sont valables, sous les mêmes hypothèses, pour des opérateurs $L \equiv L(t\ ;\ D_t)$ définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$Lu(t) \equiv L(t;D_t)\ \{u(t)\} = \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,m)} P^{m-h}(D_t)\ \{t^{k-h}u(t)\}$$

où k et m sont deux entiers quelconques supérieurs ou égaux à 1, l'équation déterminante $\phi(\rho) = o$ étant :

$$\phi(\rho) \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}\ (k,m)} p_{m-h}^{m-h}\ i^{k-h}\ \rho(\rho-1)\ \ldots\ (\rho-k+h+1) = 0.$$

Cette généralisation faite à une variable amène une généralisation des résultats obtenus au chapitre II. Les notations étant celles introduites dans le chapitre II, on considère les opérateurs $L \equiv L(x,x_n\ ;\ D_{x'},\ ,\ D_{x_n})$ définis sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Lu(x) \equiv L(x,x_n\ ;\ D_{x'},\ ,\ D_{x_n})\ \{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} P^{2m-h}(x;D_{x'},,D_{x_n})\ \{x_n^{k-h}u(x)\}$$

et les opérateurs $L \equiv L(x\ ;\ D_x)$ définis sur Ω par :

$$(1.1) \qquad Lu(x) \equiv L(x;D_x)\ \{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}\ (k,2m)} P^{2m-h}(x\ ;\ D_x)\ \{\varphi_{(x)}^{k-h}\ u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers ≥ 1 et où les opérateurs $P^{2m-h}(x;D_{x'},,D_{x_n})$ et $P^{2m-h}(x;D_x)$ satisfont les hypothèses indiquées au II.1.2.1 et II.2.2.1. respectivement ; les équations déterminantes associées $\phi^o(\rho) = o$ et $\phi(x;\rho) = 0$ pour x appartenant à Γ étant :

$$\phi^o(\rho) \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}\ (k;2m)} p_{2m-h,o}^{2m-h}(o)\ \ i^{k-h}\ \rho(\rho-1)\ \ldots\ (\rho-k+h+1) = 0$$

et

$$\phi\ (x;\rho) \qquad \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}\ (k,2m)} P_{2m-h}^{2m-h}\ (x;\mathrm{grad}\ \varphi(x))\ i^{k-h}\ \rho\ \rho-1)\ \ldots\ (\rho-k+h+1) = 0.$$

Les opérateurs frontière B_j^p sont les mêmes que ceux introduits au chapitre II.

Dans ces conditions, les théorèmes 1.1, 1.3 et 2.1 du chapitre II correspondant aux estimations a priori "directes" et les théorèmes 1.2, 1.4 et 2.2 du chapitre II correspondant aux estimations a priori "duales" sont applicables à de tels opérateurs et plus généralement les résultats obtenus dans les théorèmes 1.1, 1.3 et 2.1 lorsque k=2m et p=o sont valables lorsque $k \geq 2m+p$. Par ailleurs, le théorème 3.1 du chapitre II est aussi valable pour ces opérateurs.

Les remarques concernant les conditions $H_2(p\ ;\Omega)$ et $H_3(p\ ;\Omega)$ faites dans le 1°) du chapitre III sont applicables à de tels opérateurs. La condition $H_3\ (p\ ;\mathbb{R}^n_+)$ peut aussi dans ce cas être exprimée à l'aide d'une condition algébrique analogue à la condition (2.1) du 2°) du chapitre III.

Les opérateurs $L \equiv L(x\ ;D_x)$ définis en (1.1) avec $k \geq 2m$ peuvent encore s'écrire sous la forme :

$$Lu\ (x) \equiv \varphi(x)^{k-2m}\ Mu(x)$$

où $M \equiv M\ (x\ ;D_x)$ est un opérateur du type (1.1) :

$$Mu(x) \equiv \sum_{h=o}^{2m} Q^{2m-h}\ (x\ ;D_x)\ \ \{\varphi_{(x)}{}^{2m-h}\ u(x)\}.$$

Plus généralement, étant donnés un opérateur $L \equiv L(x\ ;D_x)$ du type (1.1) et des entiers p et $q \geq o$, les méthodes du chapitre II permettent d'étudier les opérateurs $\varphi(x)^q\ L(x\ ;D_x)$, de $W^{2m+p}_{k+q}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$, et l'opérateur $L(x\ ;D_x)$, de $W^{2m+p}_{k+q}(\Omega)$ dans $W^p_q(\Omega)$. En particulier, on peut étudier l'indice de tels opérateurs et la dépendance de cet indice par rapport aux paramètres q et p. Dans les deux cas, cette étude se ramène à l'étude d'un opérateur M du type (1.1) :

$$Mu(x) \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}\ (2m,k+q)} Q^{2m-h}\ (x\ ;D_x)\ \ \{\varphi(x)^{k+q-h}\ u(x)\}$$

sur l'espace $W^{2m+p}_{k+q}(\Omega)$.

On va maintenant appliquer ces méthodes à deux exemples déjà étudiés dans [11] et [23]. Celles-ci nous permettront d'une part, de retrouver des résultats déjà connus et d'autre part, de les compléter.

2°) Application à l'étude des problèmes aux limites associés aux opérateurs elliptiques dans des espaces de Sobolev avec poids.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ, $\overline{\Omega}$ étant une variété compacte à bord de classe C^∞. Soit $A \equiv A(x ; D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre 2m sur Ω, proprement elliptique sur $\overline{\Omega}$, à coefficients indéfiniment différentiables sur $\overline{\Omega}$ et soient m opérateurs frontière $B_j \equiv B_j (x ; D_\Gamma)$ pour $1 \leq j \leq m$, B_j étant un opérateur differentiel sur Γ d'ordre m_j avec $o \leq m_j \leq 2m-1$, à coefficients indéfiniment différentiables sur Γ tels que le système $(B_j)_{1 \leq j \leq m}$ soit normal sur Γ et recouvre A sur Γ (cf. [14]).

Dans [11], M.C. GOUDJO montre que pour $1 < q < +\infty$, et pour p et k entiers positifs ou nuls tels que $p > p(k) = \operatorname{Max}_{j=1}^{m} (-2m+m_j+ k+ \frac{1}{q})$, l'opérateur $T \equiv \{A ; B_1,\ldots,B_m\}$, opérant de $W_k^{2m+p,q}(\Omega)$ dans

$$W_k^{p,q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} W^{2m+p-m_j-k-\frac{1}{q},q}_{(\Gamma)}$$

est un opérateur à indice, dont l'indice ne dépend ni de q, ni de p, ni de k. ($W_k^{\ell,q}(\Omega)$ désigne l'espace $W_k^q(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \varphi_{(x)}{}^k D^\beta u \in L^q(\Omega),\ |\beta| \leq \ell\}$ muni de la norme canonique). Par des méthodes d'interpolation, il généralise ces résultats à des paramètres p et k réels positifs. Il complète ainsi [9].

Dans ce paragraphe, on va retrouver ces résultats dans le cas où q=2 par les méthodes indiquées au 1°) ; celles-ci nous donneront par ailleurs d'autres résultats.

On considère l'opérateur $\mathcal{P}^k \equiv \{ \varphi^k A ; B_1,\ldots,B_m\}$ opérant de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-m_j-k-\frac{1}{2}}_{(\Gamma)}$ pour $p > p(k) = \operatorname{Max}_{j=1}^{m} (-2m+m_j+k+ \frac{1}{2})$.

Remarquons tout d'abord que les espaces $W_k^{\ell,2}(\Omega)$ coïncident avec les espaces $W_k^\ell(\Omega)$ définis au chapitre I et que les espaces $W^{\ell-\frac{1}{2},2}(\Gamma)$ coïncident avec les espaces $H^{\ell-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Par ailleurs, il est facile de vérifier que l'opérateur $\varphi^k A$ est linéaire continu dans $H^p(\Omega) \cap H_o^{\min(p,k)}(\Omega)$, de sorte que les hypothèses $H_2(p\ ;\ \Omega)$ et $H_3(p\ ;\ \Omega)$ ne sont pas en général satisfaites. Néanmoins, selon les remarques faites au chapitre III, on peut appliquer les méthodes du chapitre II à l'opérateur $\mathcal{P}^k$, noté désormais $\mathcal{P}_p^k$, opérant de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $\left(H^p(\Omega) \cap H_o^{\mathrm{Min}(k,p)}(\Omega)\right) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-m_j-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Ainsi, on obtient facilement (cf. théorème 2.1, chapitre II) :

(i) Il existe une constante $c_p > o$ telle que pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ on ait :

$$\|u\|_{W_k^{2m+p}(\Omega)} \leq c_p \left\{ \|\mathcal{P}_p^k u\|_{H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right\} ;$$

(ii) pour tout entier $q \geq o$, si u appartient à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ et si $\mathcal{P}_p^k u$ appartient à $\left(H^{p+q}(\Omega) \cap H_o^{\mathrm{Min}(p+q,k)}(\Omega)\right) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, alors u appartient à $W_k^{2m+p+q}(\Omega)$ et il existe une constante $c_{p+q} > 0$, indépendante de u telle que :

$$\|u\|_{W_k^{2m+p+q}(\Omega)} \leq c_{p+q} \left\{ \|\mathcal{P}_p^k u\|_{H^{p+q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right\} .$$

De l'assertion (i), on déduit (cf. théorème 3.1, chapitre II) que le noyau de $\mathcal{P}_p^k$ dans $W_k^{2m+p}(\Omega)$ est de dimension finie et que l'image $\mathcal{P}_p^k W_k^{2m+p}(\Omega)$ est fermée dans $\left(H^p(\Omega) \cap H_o^{\min(p,k)}(\Omega)\right) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

De l'assertion (ii), on déduit que :

(2.1) $\qquad \mathrm{Ker}\ \mathcal{P}_p^k = \{u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})\ ;\ Au = 0,\ B_j u = 0,\ 1 \leq j \leq m\}$

et que

$$\mathcal{P}_p^k W_k^{2m+p+q}(\Omega) \equiv \mathcal{P}_p^k W_k^{2m+p}(\Omega) \cap (H^{p+q}(\Omega) \cap H_o^{\min(p+q,k)}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

pour tout entier $q \geq o$.

Par transposition, on va montrer que la codimension de $\mathcal{P}_p^k W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \cap H_o^{\mathrm{Min}(k,p)}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H_{(\Gamma)}^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}$ est finie. D'après ce qui précède, il suffit de considérer le cas où p est le premier entier positif ou nul supérieur à p(k) et, dans ces conditions (puisque p(k) < k), on a : $H^p(\Omega) \cap H_o^{\mathrm{Min}(k,p)}(\Omega) = H_o^p(\Omega)$. Ainsi, l'opérateur $\mathcal{P}_p^{k*}$, adjoint de $\mathcal{P}_p^k$, est linéaire continu de $H^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H_{(\Gamma)}^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}$ dans l'espace dual $[W_k^{2m+p}(\Omega)]'$ de l'espace $W_k^{2m+p}(\Omega)$ et est défini par :

$$< \mathcal{P}_p^{k*}(f\ ;\ g_1,\dots,g_m),\ \bar{\phi} >_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = < f,\ \overline{\varphi^k A\phi|_\Omega} >_{H^{-p}(\Omega)\times H_o^p(\Omega)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} < g_j,\ \overline{B_j\phi|_\Gamma} >_{H_{(\Gamma)}^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}} \times H_{(\Gamma)}^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}}$$

pour ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $(f\ ;\ g_1,\dots,g_m)$ appartenant à $H^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H_{(\Gamma)}^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}$.

On introduit maintenant l'opérateur $T_p \equiv \{A\ ;\ B_1,\dots,B_m\}$ de $H^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H_{(\Gamma)}^{2m+p-m_j-\frac{1}{2}}$. L'opérateur T_p^*, adjoint de T_p, est linéaire continu de $H_o^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H_{(\Gamma)}^{-2m-p+m_j+\frac{1}{2}}$ dans $H_o^{-(2m+p)}(\Omega)$ et est défini par :

$$< T_p^*(F;G_1,\dots,G_m),\ \bar{\phi} >_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = < F,\ \overline{A\phi|_\Omega} >_{H_o^{-p}(\Omega)\times H^p(\Omega)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} < G_j, \overline{B_j\phi|_\Gamma} >_{H_{(\Gamma)}^{-2m-p+m_j+\frac{1}{2}} \times H_{(\Gamma)}^{2m+p-m_j-\frac{1}{2}}} .$$

pour ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $(F;G_1,\dots,G_m)$ appartenant à

$$H_o^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H_{(\Gamma)}^{-2m-p+m_j+\frac{1}{2}} .$$

D'après [17] (théorème 6), le noyau de T_p^* coïncide avec l'espace

$$\mathcal{N}^p = \{(F;G_1,\dots,G_m) \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \times [\mathcal{D}(\Gamma)]^m\ ;\ T_p^*(F;G_1,\dots,G_m) = 0\},$$

et cet espace est de dimension finie.

Or étant donné f appartenant à $H^{-p}(\Omega)$, on peut lui associer canoniquement F, appartenant à $H_o^{-p}(\Omega)$, de la façon suivante :

(2.2) $\quad F : \phi \longrightarrow \langle f, \varphi^k \phi|_\Omega \rangle_{H^{-p}(\Omega) \times H_o^p(\Omega)} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$,

et F et $\varphi^k f$ coïncident dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ainsi, étant donné $(f ; g_1, \dots, g_m)$ appartenant à Ker $\mathcal{P}_p^{k*}$, on peut associer canoniquement $(F ; G_1, \dots, G_m)$ appartenant à Ker $T_p^* = \mathcal{N}$ où $G_j = g_j$ pour $j=1,\dots,m$ et où F est défini par (2.2) ; de plus, la correspondance $(f ; g_1, \dots, g_m) \longrightarrow (F ; G_1, \dots, G_m)$ est évidemment injective. En fait, cette correspondance est surjective ; en effet, si $(F ; G_1, \dots, G_m)$ appartient à $\mathcal{N}$, il résulte de la proposition 5.1 chap. II de [14] que F appartient à

$$H_o^{2m-1-\operatorname{Max}_{j=1}^{m}(m_j)}(\Omega)$$ et donc, $f = F/\varphi^k$ appartient à $H^{-p}(\Omega)$ et $(f ; G_1, \dots, G_m)$ appartient à Ker $\mathcal{P}_p^{k*}$. Finalement, on a démontré que Ker $\mathcal{P}_p^{k*}$ est de dimension finie et isomorphe à l'espace $\mathcal{N}$.

Par suite, on a établi que l'opérateur $\mathcal{P}_p^k$, opérant de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \cap H_o^{\operatorname{Min}(p,k)}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un opérateur à indice et que cet indice est égal à l'indice de l'opérateur $T_p \equiv \{A ; B_1, \dots, B_m\}$ de $H^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Comme la multiplication par $1/\varphi^k$ est un isomorphisme de $H^p(\Omega) \cap H_o^{\operatorname{Min}(p,k)}(\Omega)$ sur $W_k^p(\Omega)$, on en déduit que l'opérateur $T \equiv \{A ; B_1, \dots, B_m\}$ opérant de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $W_k^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-m_j-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de p et de k avec la condition $p > p(k) = \operatorname{Max}_{j=1}^{m} (-2m+m_j+k+\frac{1}{2})$. On a ainsi retrouvé les résultats de [11] dans le cadre Hilbertien.

Pour s'affranchir de la restriction $p > p(k)$, il est nécessaire d'introduire des opérateurs frontière B_j plus généraux. Par exemple, on peut considérer des opérateurs frontière B_j analogues à ceux introduits dans le chapitre II 2°). Ainsi, si l'opérateur $\mathcal{P}^k \equiv \{\varphi^k A ; B_1, \dots, B_m\}$ satisfait la condition $H_3(o,\Omega)$ (et il est facile de voir qu'il existe de tels opérateurs cf. : chapitre III par exemple), on démontrerait facilement que l'opérateur $\mathcal{P}^k$, opérant de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \cap H_o^{Min(k,p)}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de l'entier $p \geq 0$. (signalons que le problème de l'invariance de l'indice par rapport à k ne se pose pas puisque de tels opérateurs généraux B_j n'opèrent pas en général dans les espaces $W_h^{2m+p}(\Omega)$ dès que h est différent de k).

3°) <u>Application à l'étude des opérateurs introduits dans</u> [1] <u>et</u> [23] :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ, $\overline{\Omega}$ étant une variété compacte à bord de classe C^∞. Soit $L \equiv L(x\,;D_x)$ l'opérateur différentiel défini sur Ω par :

$$(3.1) \qquad Lu(x) \equiv L(x;D_x)\,\{u(x)\} \equiv \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\|\beta|\leq 1}} D^\beta\,(a_{\alpha\beta}(x)\;\varphi(x)^k D^\alpha\,u(x))$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont indéfiniment différentiables sur $\overline{\Omega}$ et k est un entier supérieur ou égal à 1, et où φ est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à (1.22), chapitre I. On suppose que cet opérateur L est coercif sur l'espace :

$$V_k(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)\;;\;\varphi^{k/2}\,D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq 1\}$$

muni de la norme canonique, i.e. : il existe une constante $c > o$ telle que pour tout u appartenant à $V_k(\Omega)$, on ait :

$$(3.2)\ \mathrm{Re}\,\Big(\sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\|\beta|\leq 1}} \int_\Omega (-1)^{|\beta|}\;a_{\alpha\beta}(x)\;\varphi(x)^k\,D^\alpha u(x)\;\overline{D^\beta u(x)}\,dx\Big) \geq c\,\Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} \|\varphi^{k/2}\,D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Pour p entier positif ou nul et m entier supérieur ou égal à 1, soient les espaces $E_{p,m}(\Omega)$ et $F_{p,m}(\Omega)$ définis par cartes locales à partir des espaces $E_{p,m}(\mathbb{R}^n_+)$ et $F_{p,m}(\mathbb{R}^n_+)$ suivants :

$$E_{p,m}(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)\;;\;x_n^{|\beta|-1}\,D^\beta u \in H^p(\mathbb{R}^n_+),\ 2 \leq |\beta| \leq m+1,\ o \leq \beta_n \leq 2\},$$

$F_{p,m}(\mathbb{R}^n_+) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+) \ ; \ \frac{1}{x_n^{k-1-|\alpha'|}} \ D_{x'}^{\alpha'} f \in H^p(\mathbb{R}^n_+),\ o \leq |\alpha'| \leq m-1\}$,

munis des normes canoniques.

Remarquons que pour m=1, les espaces $E_{p,1}(\Omega)$ et $F_{p,1}(\Omega)$ peuvent être définis globalement sur Ω par :

$$E_{p,1}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \ ; \ \varphi D^\alpha u \in H^p(\Omega),\ |\alpha| = 2\} \equiv W_1^{2+p}(\Omega),$$

$$F_{p,1}(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ f/_{\varphi^{k-1}} \in H^p(\Omega) \ .$$

Dans [1], MM. BAOUENDI-GOULAOUIC ont étudié l'opérateur L dans le cas où k=1 d'un point de vue variationnel et ont obtenu des résultats de régularité par une méthode de régularisation elliptique. Dans [23], M.C. ZUILY a généralisé ces résultats de régularité pour $k \geq 1$ par des méthodes analogues ; notant $\{\frac{k}{2}\}$ le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{k}{2}$, il a démontré que si u appartient à $V_k(\Omega)$ et Lu appartient à $F_{p,\{\frac{k}{2}\}}(\Omega)$, alors u appartient à $E_{p,\{\frac{k}{2}\}}(\Omega)$, ce qui permet de déduire que l'opérateur L est un isomorphisme de $E_{p,\{\frac{k}{2}\}}(\Omega)$ sur $F_{p,\{\frac{k}{2}\}}(\Omega)$ pour tout entier $p \geq o$ et de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \cap H_o^{k-1}(\Omega)$.

Dans ce paragraphe, on va retrouver des résultats de régularité analogues par les méthodes indiquées au 1°), sans toutefois les recouvrir totalement, puis les compléter dans le cas où $k > 1$.

Tout d'abord, on remarque que l'opérateur L peut s'écrire sous la forme :

$$L(x;D_x)\ \{u(x)\} \equiv \varphi(x)^{k-1}\ \mathcal{L}(x;D_x)\ \{u(x)\}$$

où $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(x;D_x)$ est un opérateur de la forme :

$$\mathcal{L}u(x) \equiv \mathcal{L}(x;D_x)\ \{u(x)\} \equiv P^2(x;D_x)\ \{\varphi(x)\ u(x)\} + P^1(x;D_x)\ \{u(x)\} + a(x)u(x)$$

où $P^h(x;D_x)$ est un opérateur différentiel homogène d'ordre h pour $1 \leq h \leq 2$ avec en particulier :

$$P^2(x;D_x) \equiv \sum_{|\alpha| = |\beta| = 1} a_{\alpha\beta}(x)\, D^{\alpha+\beta} ,$$

et où a(x) est une fonction de classe $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Cet opérateur $\mathcal{L}$ appartient à la classe des opérateurs étudiés dans le 3°) du chapitre III. Conservant les notations de ce paragraphe, on vérifie que pour x appartenant à Γ, $\rho(x)$ est constant et égal à k-2. D'après [3], la condition de coercivité (3.2) impliquent deux conditions algébriques sur l'opérateur $P^2(x;D_x)$ qui permettent de démontrer facilement que, pour tout x appartenant à Γ et tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, l'opérateur, défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$P^2(x;\xi + \text{grad } \varphi(x).D_t) \{tu(t)\} + P^1(x;\xi + \text{grad } \varphi(x).D_t) \{u(t)\},$$

est un isomorphisme de $W_1^{2+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+)$ pour tout entier $p \geq o$. En particulier, la condition $c(x;\xi)$ n'est pas vérifiée. On peut alors établir le :

<u>Théorème 3.1</u> : soient p un entier positif ou nul et $L \equiv L(x;D_x)$ l'opérateur défini en (3.1). On suppose que l'opérateur L satisfait à la condition (3.2). Alors, pour tout entier $m \geq 1$, l'opérateur L réalise un isomorphisme de $E_{p,m}(\Omega)$ sur $F_{p,m}(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : les résultats du chapitre III - 3°), compte-tenu de ce qui précède, permettent d'affirmer que si u appartient à $W_1^2(\Omega)$ et $\mathcal{L}$ u appartient à $H^p(\Omega)$, alors u appartient à $W_1^{2+p}(\Omega)$ et il existe une constante $c_p > o$, indépendante de u telle que :

$$\|u\|_{W_1^{2+p}(\Omega)} \leq C_p \{ \|\mathcal{L} u\|_{H^p(\Omega)} + \|u\|_{W_1^{1+p}(\Omega)} \}.$$

Par cartes locales, on se ramène au demi-espace $\mathbb{R}^n_+$, puis utilisant la méthode des quotients différentiels, on démontre, grâce à cette estimation a priori, que si u appartient à $W_1^2(\Omega)$ et Lu appartient à $F_{p,m}(\Omega)$ que u appartient à $E_{p,m}(\Omega)$. Le corollaire du théorème 3.2 du chapitre III permet alors de conclure que l'opérateur L est un opérateur à indice de $E_{p,m}(\Omega)$ dans $F_{p,m}(\Omega)$.

La condition (3.2) prouve que L est injectif sur $E_{p,m}(\Omega)$. Enfin, la condition (3.2) et le résultat de régularité pour p=o et $m = \{\frac{k}{2}\}$ de [23] permettent de prouver que L est surjectif de $E_{p,m}(\Omega)$ sur $F_{p,m}(\Omega)$, d'où le théorème 3.1.

On va maintenant compléter l'étude de cet opérateur L en le considérant comme opérateur de $W_k^{2+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$. Plus précisément, on va démontrer le :

<u>Théorème 3.2</u> : soient p un entier positif ou nul et $L \equiv L(x;D_x)$ l'opérateur défini en (3.1). On suppose que l'opérateur L satisfait à la condition (3.2). Alors, l'opérateur L réalise un isomorphisme de $W_k^{2+p}(\Omega)$ sur $H^p(\Omega) \cap H_o^{Min(k-1,p)}(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : On écrit l'opérateur L sous la forme :

$$L(x;D_x)\,\{u(x)\} \equiv P^2(x;D_x)\,\{\varphi(x)^k\, u(x)\} + P^1(x;D_x)\,\{\varphi(x)^{k-1}u(x)\} + \\ + a(x)\ \varphi(x)^{k-1}\ u(x),$$

où $P^h(x;D_x)$ est un opérateur différentiel homogène d'ordre h pour $1 \leq h \leq 2$ avec en particulier

$$P^2(x;D_x) \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x)\ D^{\alpha+\beta},$$

et où a(x) est une fonction de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Comme précédemment, on vérifie que la condition (3.2) implique que, pour tout x appartenant à Γ et tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, l'opérateur, défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$P^2(x;\xi + \text{grad}\ \varphi(x).D_t)\,\{t^k u(t)\} + P^1(x;\xi + \text{grad}\ \varphi(x).D_t)\,\{t^{k-1}u(t)\}$$

est un isomorphisme de $W_k^{2+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+) \cap H_o^{Min(k-1,p)}(\mathbb{R}_+)$ pour tout entier $p \geq o$. On en déduit que l'opérateur L, opérant de $W_k^{2+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \cap H_o^{Min(k-1,p)}(\Omega)$, est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de l'entier $p \geq o$.

La condition (3.2) prouve que L est injectif sur $W_k^{2+p}(\Omega)$ et le théorème 3.1 prouve que L est surjectif de $W_k^{2+p}(\Omega)$ sur $H^p(\Omega) \cap H_o^{Min(k-1,p)}(\Omega)$, ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés. Arch. Rat. Méc. Anal, 34, n° 5, 361-379 (1969).

[2] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications. A paraître au Journal of Functional Analysis.

[3] P. BOERO - R. PAVEC : Coercivité des formes sesquilinéaires intégro-différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids. C.R.A.S. Paris, t. 270, 1416-1419 (1970).

[4] P. BOLLEY - J. CAMUS : Sur une certaine classe d'opérateurs différentiels ordinaires, elliptiques et dégénérés. C.R.A.S. Paris, t. 271, 593-595 (1970)

[5] P. BOLLEY - J. CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable. Publications des Séminaires de Mathématiques Université de Rennes, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Année 1971-1972.

[6] P. BOLLEY - J. CAMUS : Sur certains problèmes aux limites, elliptiques et dégénérés. C.R.A.S. Paris, t. 271 - 980-983 (1970).

[7] P. BOLLEY - J. CAMUS : Une classification de problèmes elliptiques dégénérés à une ou plusieurs variables. Exposé n° 22, Séminaire GOULAOUIC-SCHWARTZ 1970-1971, Ecole Polytechnique, Paris.

[8] G. FICHERA : On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order. Boundary value problems in differential equations. Univ. of Wisconsin Press, Madison. 97-120 (1960).

[9] G. GEYMONAT - P. GRISVARD : Problemi ai limiti lineari allitici negli spazi di Sobolev con peso - Le Matematiche, Vol XXII, Fasc. 2 (1967).

[10] V.P. GLOUCHKO : Travaux scientifiques de la Société Mathématique de Moscou. t. 23, 113-173 (1970).

[11] C. GOUDJO : Problèmes aux limites dans les espaces de Sobolev avec poids. Thèse de 3ème cycle, Nice (1970).

[12] HARDY - LITTLEWOOD - POLYA : Inequalities - Cambridge University Press (1967).

[13] J. KHON - L. NIRENBERG : Degenerate elliptic parabolic equations of second order. C.P.A.M., Vol. XX, 797-872 (1967).

[14] J.L. LIONS - E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1, Dunod, Paris (1968).

[15] O.A. OLEINIK : On linear second order equations with non negative characteristic form. Mat. U.S.S.R. Sbornik, Vol. 69, 111-140 (1966)

[16] J. PEETRE : A proof of the hypoellipticity of formally hypoelliptic differential operators. C.P.A.M. Vol. XIV, 737-744 (1961).

[17] J. PEETRE : Another approach to elliptic boundary value problems. C.P.A.M. Vol. XIV, 711-731, (1961).

[18] N. SHIMAKURA : Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré. J. Math. Kyoto Univ. Vol. 9, n° 2, 275-335 (1969).

[19] N. SHIMAKURA : Une remarque sur la régularité des solutions des problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré. Proc. Japan Acad. Vol. 47, n° 3 (1971).

[20] N. SHIMAKURA : Problème de Dirichlet pour des opérateurs elliptiques dégénérés du 2ème ordre. Proc. Japan Acad. (1971).

[21] H. TRIEBEL : Erzeugung des nuklearen lokalkonvexen Raumes $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ durch einen elliptishen differential operatoren zweiter ordnung. Math. Ann. 177, 247-264 (1968).

[22] M.I. VISIK - V.V. GRUSIN : Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain. Math. U.S.S.R. Sbornik, Vol. 9, n° 4 (1969).

[23] C. ZUILY : Etude de la régularité d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du 2ème ordre. Thèse de 3ème cycle, Paris (1969).