Y. DERRIENNIC

Sur les frontières et les propriétés ergodiques des processus de Markov à temps discret

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1970-1971, fascicule 1
« Probabilités », , p. 27-86
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1970-1971___1_27_0>

SUR LES FRONTIERES ET LES PROPRIETES ERGODIQUES

DES PROCESSUS DE MARKOV A TEMPS DISCRET

par

Y. DERRIENNIC

Laboratoire de Probabilités - Equipe associée du CNRS n° 250

TABLE DES MATIERES

Cet article est constitué par le texte de la thèse de 3e cycle de M. DERRIENNIC

INTRODUCTION

En 1941, R.S. MARTIN a donné une représentation intégrale des fonctions harmoniques, positives, définies dans un domaine borné de R^n pour cela il construisit spécialement une frontière "idéale" identifiable au cercle dans le cas du disque (cf. [21], [4]). Poursuivant la confrontation si féconde entre la théorie des processus de Markov et la théorie du potentiel, dont il était l'un des principaux artisans, J.L. DOOB, en 1959, a défini une frontière analogue pour une chaîne de Markov, et l'a appelée frontière de Martin de sortie (cf. [10]) : les fonctions harmoniques étant, dans ce cas, les fonctions invariantes sous l'opérateur de transition de la chaîne. (on ne considère ici que des processus à temps discret, et par chaîne on entend un processus dont l'espace des états est discret). Peu après G.A. HUNT d'une part et J. NEVEU d'autre part ont donné une nouvelle construction de cette frontière, en utilisant systématiquement des méthodes probabilistes (cf. [18], [23]). En 1956, partant d'une idée différente, W. FELLER avait défini, toujours pour une chaîne de Markov, un autre type de frontière sur laquelle chaque fonction harmonique bornée est représentée par une fonction continue (cf. [15]).

Le travail présenté ici est entièrement consacré à l'extension de ces notions et des résultats qui s'y rattachent, au cas d'un processus de Markov défini sur un espace d'états plus général.

La première tentative dans ce sens a été faite en 1968 par M.A. AKCOGLU et R.W. SHARPE (cf. [2]). Ces deux auteurs se sont placés dans le cadre abstrait de la théorie ergodique : ils ont étudié une contraction positive définie sur un espace L^1. Considérer un processus de Markov, c'est-à-dire une probabilité de transition, ne restreint pas vraiment la généralité, car J.L. DOOB a montré, en 1963, qu'il est toujours possible d'associer à une contraction positive sur L^1 un opérateur, défini par une probabilité de transition, qui lui est isomorphe. (cf. [11]). D'autre part, ceci permet l'utilisation simultanée des techniques probabilistes et des techniques de la théorie ergodique.

Dans le chapitre 1, la frontière de Feller est définie pour un processus quelconque. Les résultats obtenus synthétisent ceux de W. FELLER et certains de ceux de M.A. AKCOGLU et R.W. SHARPE. La structure d'algèbre définie par ces derniers, sur l'espace des fonctions harmoniques bornées, a, ici, une signification simple : l'usage de cette structure remplace celui, plus classique, de la structure d'ordre et dispense de parler des fonctions surharmoniques et des potentiels ; en particulier on obtient ainsi une nouvelle construction de la "frontière totale" définie par W. FELLER. Evidemment il est possible de définir la frontière de Feller à moindres frais : il serait facile de prouver que l'espace des fonctions harmoniques bornées est un espace de Kakutani du type M et d'en déduire cette définition (cf. [19]). Mais la méthode employée ici fournit de nombreux résultats qui permettent d'utiliser la frontière de Feller comme base pour la construction de la frontière de Martin.

Dans le chapitre 2, on prouve, par une méthode originale, la convergence des trajectoires "le long" des limites des moyennes ergodiques plus couramment appelées, depuis un célèbre théorème, limites de Chacon et Ornstein (cf. [8]). Ce résultat précise le principal résultat de M.A. AKCOGLU et R.W. SHARPE, et établit un lien étroit entre la théorie ergodique et la théorie de la frontière : en effet il implique le théorème d'identification de la limite de Chacon et Ornstein dans le cas conservatif (cf. [7]), et le théorème de convergence des trajectoires vers la frontière de Martin dans le cas d'une chaîne dissipative (cf. [23]). En supposant que l'espae des états est topologique localement compact à base dénombrable, et que le processus possède certaines propriétés de régularité, on est alors amené à donner une définition de la frontière de Martin qui généralise la définition classique de façon naturelle. La seule propriété perdue est l'unicité de la représentation intégrale.

Dans le chapitre 3, sous des hypothèses plus faibles mais en supposant toujours que l'espace des états est localement compact à base dénombrable, on donne une nouvelle définition de la frontière de Martin (celle-ci est dite abstraite pour la distinguer de la précédente qui est dite concrète). Pour cela on utilise la frontière de Feller totale et une modification d'une méthode employée par M.A. AKCOGLU et R.W. SHARPE. Cette modification est justifiée par un exemple qui montre que la définition de la frontière de Martin proposée par ces derniers, qui n'ont fait aucune hypothèse sur l'espace des états, n'est pas conforme à la définition classique. On montre aussi, en généralisant des résultats prouvés par J. FELDMAN pour une chaîne (cf. [14]), que cette nouvelle définition généralise la précédente : en particulier on prouve ainsi que la relation d'équivalence définie par J. FELDMAN sur la frontière de Feller peut s'étendre à la frontière de Feller totale, ce qui répond, à une question posée par J. TAYLOR.

Les problèmes qui ont été à l'origine de cette étude m'ont été posés par Monsieur A. BRUNEL. Il m'a initié à la théorie ergodique et par la suite m'a constamment encouragé et conseillé. Je tiens à lui exprimer ici ma reconnaissance sincère. Je remercie aussi Monsieur M. METIVIER, avec qui j'ai étudié le calcul des probabilités, et qui a accepté de présider mon jury, ainsi que Monsieur J. NEVEU qui a bien voulu y participer.

Je remercie enfin Mademoiselle M. F CHERIAUX qui a dactylographié le manuscrit.

CHAPITRE I

LA FRONTIERE DE FELLER

Le but de ce chapitre est d'obtenir, pour une probabilité de transition quelconque, la généralisation des résultats démontrés par FELLER dans [15] pour une matrice stochastique ; et en particulier la représentation des fonctions harmoniques par les fonctions continues sur un espace compact. Les méthodes employées par FELLER étaient plutôt analytiques ; les méthodes employées ici sont plutôt probabilistes : on utilise systématiquement l'espace des trajectoires, les évènements stationnaires... Ceci permet une étude plus précise des fonctions "prolongeables" à la frontière, des mesures définies sur la frontière, de la frontière totale...

1) NOTATIONS et RESULTATS PRELIMINAIRES.

Les données de base sont un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ et une probabilité de transition $P(x,B)$ de cet espace dans lui-même. Par les formules $Pf(x) = \int_E f(y)\, P(x,dy)$ et $\nu P(B) = \int_E \nu(dx)\, P(x,B)$ sont définies, respectivement, une contraction sur l'espace de Banach $\mathcal{B}$ des fonctions réelles, $\mathcal{E}$-mesurables, bornées, et une contraction sur l'espace de Banach $\mathcal{M}$ des mesures bornées sur $(E, \mathcal{E})$, (ces deux espaces sont munis des normes usuelles). Ces deux opérateurs sont transposés l'un de l'autre dans la dualité entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{M}$. L'opérateur ainsi défini sur les fonctions, se prolonge par continuité monotone aux fonctions $\mathcal{E}$-mesurables positives.

Une fonction f, $\mathcal{E}$-mesurable, bornée ou positive, est dite harmonique si elle vérifie l'équation $Pf = f$. Les fonctions harmoniques bornées forment un sous-espace de Banach de $\mathcal{B}$, noté $\mathcal{H}$.

Le processus de Markov canonique, associé, est défini par la donnée de :

- l'espace produit $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu produit $\mathcal{F}$.
- les variables aléatoires (v.a.) coordonnées $X_o, \ldots, X_n \ldots$ de Ω dans E
- les mesures de probabilité P_x définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $x \in E$.

L'opérateur de translation t est la transformation ponctuelle, $\mathcal{F}$-mesurable, défini sur Ω par $X_{n+1}(\omega) = X_n(t\omega)$.

Une v.a. réelle Y définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite stationnaire si $Y \circ t = Y$. Un évènement $S \in \mathcal{F}$ est dit stationnaire si son indicatrice 1_S est une v.a. stationnaire. Les évènements stationnaires forment une sous-tribu de $\mathcal{F}$ notée $\mathcal{S}$; la mesurabilité par rapport à $\mathcal{S}$ caractérise les v.a. stationnaires. Deux v.a. stationnaires Y et Z sont dites équivalentes si l'ensemble $\{Y \neq Z\}$ est négligeable pour chacune des probabilités $P_x (x \in E)$. L'espace quotient, de l'espace des v.a. stationnaires bornées, par cette relation est un espace de Banach : si Y est une v.a. stationnaire la norme de sa classe est la borne supérieure des bornes essentielles de Y par rapport aux P_x.

Le résultat suivant sera utile dans la suite :

<u>Proposition 1.</u>

La formule $g(x) = \int_\Omega Y(\omega)\, P_x(d\omega)$ définit un isomorphisme positif, isométrique, entre $\mathcal{H}$ et l'espace des classes de v.a. stationnaires bornées de plus la suite $g \circ X_n$ converge P_x p.s. vers Y, pour tout $x \in E$.

Pour la démonstration et les autres résultats élémentaires sur les processus de Markov (propriété de Markov...) on renvoie à [22] chap. V.

2) ENSEMBLES de SEJOUR et EVENEMENTS STATIONNAIRES.

Le paragraphe est consacré à l'étude des fonctions "le long desquelles" les trajectoires convergent. Certains résultats (théorème 1, lemme 1..) sont la traduction dans le langage probabiliste de résultats établis dans [2] pour un opérateur markovien abstrait (contraction d'un espace L^1).

Définition 1.

Si $B \in \mathcal{E}$, les fonctions de $\mathcal{B}$ Ψ_B, σ_B, Θ_B, s_B sont définies par :

$$\Psi_B(x) = P_x \left[\bigcup_{n\geq 0} (X_n \in B)\right] \qquad \sigma_B(x) = P_x \left[\bigcap_{n\geq 0} (X_n \in B)\right]$$

$$\Theta_B(x) = P_x \left[\bigcap_{k\geq 0} \bigcup_{n\geq k} (X_n \in B)\right] \qquad s_B(x) = P_x \left[\bigcup_{k\geq 0} \bigcap_{n\geq k} (X_n \in B)\right] .$$

Si B, $D \in \mathcal{E}$, est définie aussi la fonction $\Theta_{B,D}$:

$$\Theta_{B,D}(x) = P_x \left[\left[\bigcap_{k\geq 0} \bigcup_{n\geq k} (X_n \in B)\right] \cap \left[\bigcap_{k\geq 0} \bigcup_{n\geq k} (X_n \in D)\right]\right] .$$

Dans la suite, pour alléger, on notera $\Delta(B) = \bigcap_{k\geq 0} \bigcup_{n\geq k} (X_n \in B)$.

L'interprétation probabiliste de ces fonctions est facile : par exemple $\Theta_B(x)$ est la probabilité de visiter une infinité de fois B, le départ étant en x, et $s_B(x)$ la probabilité de ne visiter B^c qu'un nombre fini de fois, le départ étant en x.

Les fonctions Θ_B, s_B, $\Theta_{B,D}$ sont harmoniques car les évènements intervenant dans leur définition sont stationnaires (cf. proposition 1). D'autre part la propriété de Markov montre que

- la suite $P^n \Psi_B$ est décroissante et converge vers Θ_B
- la suite $P^n \sigma_B$ est croissante et converge vers s_B.

La fonction de B et D, Θ_{BD}, est monotone et sous-additive en chaque argument la sous-additivité résulte de $\Delta(B \cup D) = \Delta(B) \cup \Delta(D)$.

Lemme 1.

Pour $B, D \in \mathcal{E}$, on a $||\Theta_B|| = ||1_B\ \Theta_B|| = 0$ ou 1
$||s_B|| = ||1_B\ s_B|| = 0$ ou 1 et $||\Theta_{BD}|| = ||1_B\ \Theta_{BD}|| = ||1_D\ \Theta_{BD}|| = 0$ ou 1.

Démonstration.

D'après la proposition 1, $\lim_n \Theta_{B,D} \circ X_n = 1_{\Delta(B) \cap \Delta(D)}$ P_x p.s. pour tout x. D'après la définition de $\Delta(B)$,
$\lim_n \sup(1_B\ \Theta_{B,D}) \circ X_n = \lim_n \Theta_{B,D} \circ X_n$. Si $||1_B\ \Theta_{B,D}|| < 1$, on a
$\lim_n \sup(1_B\ \Theta_{B,D}) \circ X_n < 1$ P_x p.s. pour tout x, donc $P_x(\Delta(B) \cap \Delta(D)) = 0$
pour tout x, et donc $\Theta_{B,D} = 0$. Ceci démontre la seconde partie du lemme.
Le résultat concernant Θ_B en découle car $\Theta_B = \Theta_{B,E}$. Un raisonnement analogue donne le résultat relatif à s.

Lemme 2.

Pour tout $B \in \mathcal{E}$, on a $\Psi_B + \sigma_{B^c} = 1$ et $\Theta_B + s_{B^c} = 1$.

Démonstration.

Ceci résulte de la complémentarité des évènements qui définissent, d'une part Ψ et σ, d'autre part Θ et s.

Définition 2.

On dit qu'un ensemble B de $\mathcal{E}$ est un ensemble de séjour si la suite $(X_n \in B)$ converge P_x p.s. pour tout x.

Il est clair que les ensembles de séjour sont caractérisés par l'une ou l'autre des propriétés suivantes : $\Theta_B = s_B$ ou $\Theta_B + \Theta_{B^c} = 1$ ou $\Theta_{B,B^c} = 0$ (d'après le lemme 2). Ceci signifie que B est un ensemble de séjour s'il n'y a que deux cas possibles, ou bien le nombre de visites à B est fini, ou bien le processus reste dans B après un certain instant. La classe des ensembles de séjour est donc stable par complémentarité. Comme
$\Delta(B \cup D) = \Delta(B) \cup \Delta(D)$ et que

$$\bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{n \geq k} (X_n \in D \cup B) \supset \left[\bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{n \geq k} (X_n \in D)\right] \cup \left[\bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{n \geq k} (X_n \in B)\right]$$

elle est aussi stable par réunion. C'est une algèbre de Boole qui sera notée Σ.

Lemme 3.

Si $B \in \Sigma$, alors $\lim_n P^n 1_B = \Theta_B = s_B$.

Démonstration.

Les inégalités $\Psi_B \geq 1_B \geq \sigma_B$, qui résultent de la définition 1 donnent $P^n \Psi_B \geq P^n 1_B \geq P^n \sigma_B$, pour tout n. Si $B \in \Sigma$, on a alors $\lim_n P^n \Psi_B = \Theta_B = s_B = \lim_n P^n \sigma_B$ et donc $\lim_n P^n 1_B = \Theta_B = s_B$.

Remarquons qu'il n'est pas suffisant que la suite $P^n 1_B$ converge pour que B soit un ensemble de séjour, comme le montre cet exemple : $E = \{0,1\}$, $P(0,1) = P(0,0) = P(1,0) = P(1,1) = 1/2$; la chaîne ainsi définie est récurrente et dans ce cas les ensembles de séjour sont les classes récurrentes ; alors Σ n'est formée que de $\emptyset$ et E ; pourtant $\lim_n P^n 1_{\{0\}} = 1/2\, 1_E$.

Définition 3.

Un ensemble B de $\mathcal{E}$ est dit transitoire si $\Theta_B = 0$. Les ensembles transitoires forment un idéal de Σ : les ensembles B, D de $\mathcal{E}$ sont équivalents pour la relation associée si $\Theta_B = \Theta_D$.

Proposition 2.

L'application $B \longrightarrow \Delta(B)$ définit un isomorphisme de l'algèbre de Boole des classes d'ensembles de séjour sur l'algèbre de Boole des classes d'évènements stationnaires (cf. [22] p. 161).

Démonstration.

Si B, D sont des ensembles de séjour équivalents, $\Delta(B)$ et $\Delta(D)$ sont des évènements stationnaires équivalents. Donc $B \longmapsto \Delta(B)$ définit un homomorphisme de la première de ces algèbres dans la seconde. Si S est un évènement stationnaire, $B = \{x ; P_x(S) > 1/2\}$ est un ensemble de séjour et

$\Delta(B) = S$, car $\lim\limits_n P_{X_n}(S) = 1_S\, P_x$ p.s. pour tout x. Donc cet homomorphisme est surjectif. Il est aussi injectif car, si $B \in \Sigma$, si δ est un réel tel que $0 < \delta < 1$; l'ensemble $D = \{\Theta_B > \delta\}$ est un ensemble de séjour équivalent à B. En effet, on a $\Theta_{B^c \cap D} \leq \Theta_{B^c, D}$ et $1_D\, \Theta_{B^c} = 1_D\,(1-\Theta_B) \leq 1-\delta$, ce qui implique, d'après le lemme 1, $\Theta_{B^c, D} = 0$ d'où $\Theta_{B^c \cap D} = 0$; de la même façon on voit que $\Theta_{D^c \cap B} = 0$.

Corollaire 1.

Les fonctions Θ_B, pour $B \in \Sigma$, sont les points extrémaux de la partie positive de la boule unité de $\mathcal{H}$.

Théorème 1.

Pour une fonction réelle f, définie sur E, et $\mathcal{E}$-mesurable les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\lim\limits_n f \circ X_n$ existe (et est finie ou infinie) P_x p.s. pour tout x,

b) pour tous réels α et $\varepsilon > 0$, $\Theta_{BD} = 0$ où $B = \{f \leq \alpha\}$, $D = \{f \geq \alpha + \varepsilon\}$.

Si de plus f est bornée ces conditions sont équivalentes à :

c) f est limite uniforme d'une suite de fonctions étagées sur Σ.

Démonstration.

a $\Longrightarrow$ b Si $\lim\limits_n f \circ X_n$ existe, alors $\Delta(B) = \limsup\limits_n \{f \circ X_n \leq \alpha\} \subset \{\lim\limits_n f \circ X_n \leq \alpha\}$ et $\Delta(D) \subset \{\lim\limits_n f \circ X_n \geq \alpha+\varepsilon\}$; donc $\Theta_{BD}(x) = P_x(\Delta(B) \cap \Delta(D)) = 0$ pour tout x.

b $\Longrightarrow$ a Pour tous rationnels α, β tels que $\alpha - \beta = \varepsilon > 0$ on a $\{\limsup\limits_n f \circ X_n \geq \alpha \geq \beta \geq \liminf\limits_n f \circ X_n\} \subset \Delta(B) \cap \Delta(D)$ où $B = \{f \geq \alpha - \frac{\varepsilon}{3}\}$ $D = \{f \leq \beta + \frac{\varepsilon}{3}\}$. D'après b) $P_x(\Delta(B) \cap \Delta(D)) = 0$ pour tout x donc $\limsup\limits_n f \circ X_n = \liminf\limits_n f \circ X_n$ P_x p.s. pour tout x.

Plaçons nous maintenant dans le cas où f est bornée.

c ⟹ b Soit (f_k) une suite de fonctions étagées sur Σ telle que $\lim\limits_k ||f-f_k|| = 0$; α et $\varepsilon > 0$ étant donnés, $||f-f_k|| < \frac{\varepsilon}{3}$ implique $B = \{f \leq \alpha\} \subset \{f_k \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{3}\}$, $D = \{f \geq \alpha + \varepsilon\} \subset \{f_k \geq \alpha + \frac{2\varepsilon}{3}\}$. Comme f_k vérifie la condition a) et que a ⟹ b, on obtient $\theta_{B,D} = 0$.

a ⟹ c D'après a) $Y = \lim\limits_n f \circ X_n$ est une v.a. stationnaire bornée. Soit $Y' = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i 1_{S_i}$ une v.a. stationnaire étagée telle que $||Y-Y'|| < \varepsilon$. Si $B_1 \dots B_m$ sont des ensembles de séjour disjoints associés à $S_1 \dots S_m$ par l'isomorphisme de la proposition 2, la fonction $f' = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i 1_{B_i}$ est telle que $P_x(\Delta\{|f-f'| > \varepsilon\}) = 0$ pour tout x. Comme toute partie d'un ensemble transitoire est transitoire, il suffit d'approximer f par une fonction étagée $\mathcal{E}$-mesurable quelconque sur $\{|f-f'| > \varepsilon\}$ pour obtenir le résultat.

Ceci prouve en particulier que les fonctions $f \in \mathcal{B}$, telles que $\lim\limits_n f \circ X_n$ existe P_x p.s. pour tout x, forment une sous-algèbre fermée de $\mathcal{B}$. Cette algèbre sera notée $\mathcal{A}$. D'après la proposition 1, $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$.

La relation d'équivalence définie sur Σ s'étend à $\mathcal{A}$: les fonctions f et g de $\mathcal{A}$ sont équivalentes si $\lim\limits_n f \circ X_n = \lim\limits_n g \circ X_n$ P_x p.s. pour tout x. Les fonctions de $\mathcal{A}$ équivalentes à 0 forment un idéal fermé qui est le noyau de l'application $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{H}$ définie par

$\pi f(x) = \int_\Omega \lim\limits_n (f \circ X_n)\, dP_x$. Celle-ci possède manifestement les propriétés :

- π est une projection, positive ; $||\pi|| = 1$.
- $\pi(f) = \lim\limits_n P^n f$ (d'après le lemme 3 et le théorème 1).

Désormais $\mathcal{H}$ sera considéré comme une algèbre de Banach réelle isomorphe à $\mathcal{A}/\pi^{-1}\{0\}$. Dans ce cas, l'espace des v.a. stationnaires étant muni du produit naturel, l'isomorphisme décrit dans la proposition 1 devient un isomorphisme d'algèbre.

Remarque. La définition des ensembles de séjour donnée ici est différente de celle donnée par Feller dans [15]. D'après Feller, B est un ensemble de séjour si $s_B \neq 0$; mais aussi, B est dit représentatif s'il existe $\alpha > 0$ tel que $s_B \geq \alpha\, 1_B$; et si $s_B \neq 0$ il existe D représentatif tel que $s_B = s_D$. Il est facile de voir que les ensembles de séjour représentatifs sont dans Σ, et puisque les ensembles de séjour n'interviennent que par leurs classes d'équivalence, cette modification n'a pas d'importance. Les ensembles de Σ sont appelés par Neveu "ensembles presque fermés" dans [22] ou "parties régulières" dans [23].

3) CONSTRUCTION DE LA FRONTIERE DE FELLER.

Dans [15] le frontière est décrite comme l'espace compact totalement discontinu associé à l'algèbre de Boole des classes d'ensembles de séjour. Dans [2] elle est décrite comme le spectre de $\mathcal{H}$. Dans la suite il sera commode de pouvoir utiliser les deux formulations. Pour cela nous allons démontrer le résultat très simple suivant :

Lemme 4.

L'espace des homomorphismes d'algèbre, continus, de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence simple, est homéomorphe à l'espace compact totalement discontinu Σ^* associé à Σ (Σ^* est formé des homomorphismes de Σ sur les entiers modulo 2 ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) et est muni de la topologie engendrée par les ensembles $\Sigma^*_B = \{u' \in \Sigma^* \;;\; u'(B) = 1\}$ pour tout $B \in \Sigma$; ces ensembles sont ouverts et fermés, et forment une algèbre de Boole isomorphe à Σ ; cf. [12] p. 41).

Démonstration.

Soit u un homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$. Si $B \in \Sigma$, 1_B est idempotent dans $\mathcal{A}$ donc $u(1_B) = 0$ ou 1. Soit alors $u' : \Sigma \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, défini par

$u'(B) = u(1_B)$. On a les égalités :

- $u'(B \cap D) = u(1_B \cdot 1_D) = u'(B)\, u'(D)$

- $u'\left[(B \cap D^c) \cup (D \cap B^c)\right] = u(1_B)(1-u(1_D)) + u(1_D)(1-u(1_B))$.

Ce dernier terme est nul si et seulement si $u(1_B) = u(1_D)$, donc u'est un homomorphisme d'algèbre de Boole.

Montrons que cette correspondance est bijective. Soit $v' \in \Sigma^*$. Si les ensembles $B_1 \dots B_n$, de Σ, forment une partition de E, il existe un indice unique i_o pour lequel $v'(B_{i_o}) = 1$. Alors en posant $v(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{B_i}) = \alpha_{i_o}$ on définit un homomorphisme continu de l'algèbre des fonctions étagées sur Σ, dans $\mathbb{R}$. En le prolongeant par continuité à $\mathcal{A}$, ce qui est permis par le théorème 1, on obtient l'homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ associé à v'. Enfin il est évident que cette correspondance est un homéomorphisme.

Notons de plus que u' est nul sur les ensembles transitoires si et seulement si $u(f) = 0$ quand $\pi(f) = 0$. On peut alors énoncer la :

<u>Définition 4</u>.

La frontière de Feller, notée Φ, du processus est l'espace compact totalement discontinu associé à l'algèbre de Boole des classes d'ensembles de séjour ; ou, ce qui revient au même, l'espace des homomorphismes d'algèbre continus de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence simple.

Remarquons que Φ n'est pas nécessairement un espace Stonien (espace compact extrêmement discontinu cf. [12]). Ceci est pourtant réalisé dans le cas où E est dénombrable ; en effet si ν est une mesure de probabilité sur E qui charge chaque point, la mesure P_ν domine toutes les mesures P_x ; alors l'algèbre de Boole des classes d'évènements stationnaires est complète (cf. [22]) et Φ est Stonien, d'après la proposition 2.

Le résultat fondamental sur la frontière de Feller n'est qu'une conséquence de la définition :

Théorème 2.

Il existe un isomorphisme, positif, isométrique, noté J, de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{C}(\Phi)$ (l'algèbre de Banach des fonctions continues sur Φ).

Démonstration.

On sait que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathcal{C}(\Sigma^*)$; notons J_o cet isomorphisme. (cf. [12] p. 276 théorème 20). Φ est la partie de Σ^* formée des homomorphismes nuls sur les ensembles transitoires. Alors, d'après ce qu'on a vu plus haut, $J_o(f) = 0$ sur Φ si et seulement si $\pi(f) = 0$. Comme $\mathcal{A}/\pi^{-1}(0)$ est isomorphe à $\mathcal{H}$, $\mathcal{C}(\Phi)$ l'est aussi. La relation entre J et J_o s'écrit : $J(\pi(f)) = 1_\Phi \; J_o(f)$ pour $f \in \mathcal{A}$.

La topologie sur $E + \Phi$ (réunion disjointe) engendrée par les ensembles du type $B + \Phi_B$, $B \in \Sigma$; $\Phi_B = \{u \in \Phi \; ; \; u(B) = 1\}$, introduite dans [15], va fournir une nouvelle interprétation des résultats du § 2.

Théorème 3.

Une fonction sur $E + \Phi$ est continue, bornée, si et seulement si elle est du type $f + J(\pi(f))$ pour $f \in \mathcal{A}$.

Démonstration.

Si $B \in \Sigma$, alors $J(\pi(1_B)) = J(\Theta_B) = 1_{\Phi_B}$; donc, si f est étagée sur Σ, $f + J(\pi(f))$ est continue sur $E + \Phi$. (Chacun des ouverts de base est à la fois ouvert et fermé). D'après le théorème 1 la même propriété est encore vraie pour $f \in \mathcal{A}$.

Réciproquement, il suffit de prouver que, si $f \notin \mathcal{A}$, $f + 0$ n'est pas continue. Si $f \notin \mathcal{A}$, d'après le théorème 1 il existe α et $\varepsilon > 0$ tels que

$\Theta_{B_o,B_1} > 0$, avec $B_o = \{f \leq \alpha\}$, $B_1 = \{f \geq \alpha + \varepsilon\}$. Alors il existe $u \in \Phi$ tel que $J(\Theta_{B_o\, B_1})(u) = 1$. (Comme $\Theta_{B_o\, B_1} = \pi(\Theta_{B_o}\Theta_{B_1})$ $J(\Theta_{B_o\, B_1})$ ne prend que les valeurs 0 et 1). Tout voisinage de u contient un voisinage du type $D + \Phi_D$, $D \in \Sigma$; $J(\pi(\Theta_{B_o\, B_1} \cdot \Theta_D))(u) = 1$ donne $\pi(\Theta_{B_o}\,\Theta_D) \geq \pi(\Theta_{B_o\, B_1}\,\Theta_D) > 0$. Comme $D \in \Sigma$, $\pi(\Theta_{B_o}\,\Theta_D) = \Theta_{B_o \cap D}$: on a ainsi prouvé $B_o \cap D \neq \emptyset$ · de la même façon on prouverait $B_1 \cap D \neq \emptyset$. Ceci démontre que $f + 0$ n'est pas continu en u.

Malheureusement il n'est pas possible, en général, de déduire de ce théorème la convergence p.s. des trajectoires dans $E + \Phi$. Pour cela il faudrait que la topologie de $E + \Phi$ soit à base dénombrable, et ceci ne peut être réalisé que dans le cas où Φ est fini.

En général $E + \Phi$ n'est pas un espace séparé. Par exemple, dans le cas d'une chaîne récurrente, à chaque classe récurrente est associé un point unique dans la frontière, et il est impossible de séparer ce point d'un point quelconque de la classe. Dans le cas transitoire la situation est différente.

Définition 5.

Le processus est dittransitoire s'il existe une suite croissante d'ensembles transitoires dont la réunion est E.

Proposition 3.

Si le processus est transitoire et si la tribu $\mathcal{E}$ sépare les points de E, $E + \Phi$ est un espace séparé.

Démonstration.

Sous ces hypothèses, la topologie induite sur E est discrète, donc deux points de E ont deux voisinages disjoints. Soient $x \in E$ et $u \in \Phi$: $\{x\}$ est transitoire, donc $u(\{x\}) = 0$; alors $\{x\}$ et $(E - \{x\}) + \Phi$ sont des voisinages disjoints de x et u. Soient u, $u' \in \Phi$: il existe B, $D \in \Sigma$ tels que

$u \in \Phi_B$, $u' \in \Phi_D$ et $\Phi_B \cap \Phi_D = \emptyset$; alors $B \cap D$ est transitoire et $(B - B \cap D) + \Phi_B$, $(D - B \cap D) + \Phi_D$ sont des voisinages disjoints de u et u'.

D'ailleurs Feldman a montré, dans [14], que dans ce cas $E + \Phi$ est normal. La propriété qui va suivre, donnée dans [15], peut être utile dans des cas particuliers.

Définition 6.

Un ensemble de séjour B est dit minimal si $\Theta_B \neq 0$ et si, pour $D \in \Sigma$, $\Theta_D \leq \Theta_B$ implique $\Theta_B = \Theta_D$ ou $\Theta_D = 0$.

Les ensembles de séjour minimaux correspondent aux évènements stationnaires qui sont des atomes pour chacune des probabilités P_x.

Proposition 4.

Les classes d'équivalence d'ensembles de séjour minimaux sont en correspondance bijective avec les points isolés de Φ.

Démonstration.

Soit B minimal. Soient u, $u' \in \Phi$ tels que $u(B) = 1$ et $u \neq u'$. Il existe $D \in \Sigma$ tel que $u'(D) = 1$, $u(D) = 0$ et $\Theta_B \neq \Theta_D$. Comme B est minimal, on a $u'(B \cap D) = 0$ et donc $u'(B) = 0$. Alors $\Phi_B = \{u\}$ et ce point est isolé dans Φ.

Réciproquement si $\{u\}$ est ouvert, il existe $B \in \Sigma$ tel que $\Phi_B = \{u\}$, d'après la définition de la topologie de Φ. Cet ensemble est minimal.

4) UN EXEMPLE.

Soient $E =]0,1[$, $\mathscr{E}$ la tribu des Boréliens et m la mesure de Lebesgue sur $(E, \mathscr{E})$. On considère sur $(E, \mathscr{E})$ la probabilité de transition définie par

$$P(x,B) = \frac{1}{2x} \int_0^{2x} 1_B \, dm \qquad \text{si } 0 < x \leq 1/2$$

$$= \frac{1}{2(1-x)} \int_{2x-1}^{1} 1_B \, dm \qquad \text{si } 1/2 < x < 1.$$

D'après une méthode suggérée par Feller dans [15], on va démontrer que les seules fonctions harmoniques bornées sont les fonctions affines. Dans [2] Akcoglu et Sharpe ont prouvé le résultat correspondant dans le cas du disque.

Pour cela on va prouver que la frontière de Feller du processus est un espace discret à deux éléments. D'après le théorème 2, on en déduira que $\mathcal{H}$ est de dimension 2, et donc le résultat, puisque, manifestement, les fonctions affines sont harmoniques.

La démonstration s'effectue ainsi :

1) Pour tout $\alpha \in]0,1/2[$, $s_B = 0$ où $B =]\alpha,1-\alpha[$.

Il est clair que $1_B P 1_B \leq (1-\alpha)\, 1_B$. Donc $\sigma_B = \lim\limits_n (1_B P)^n 1_B = 0$ donc $s_B = 0$.

2) $\lim\limits_n X_n = 0$ ou 1 P_x p.s. pour tout x.

La fonction identique est harmonique, donc $\lim\limits_n X_n$ existe P_x p.s. pour tout x. D'après 1) cette limite ne peut être que 0 ou 1.

On note S l'évènement stationnaire $[\lim\limits_n X_n = 1]$.

3) Pour tout $\alpha \in]0,1[$, $]\alpha,1[$ et $]0,\alpha[$ sont des ensembles de séjour qui vérifient $P_x(S) = \Theta_{]\alpha,1[}(x) = x$, $P_x(S^c) = \Theta_{]0,\alpha[}(x) = 1-x$.

Ceci résulte de 2) et de la proposition 2.

4) Si B est un ensemble de séjour, contenu dans $]1/2,1[$, et si $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{m(B \cap]x,1[)}{1-x} = 0$, alors $\Theta_B = 0$.

Comme $P1_B(x) = \dfrac{m(B \cap]2x-1,1[)}{2(1-x)}$, l'hypothèse donne $\lim\limits_{x\to 1} P1_B(x) = 0$.

Si $x > \alpha > \frac{1}{2}$ implique $P1_B(x) \leq 1/2$ on a $P1_{B\cap]\alpha,1[} \leq 1/2$.

Comme $B \cap]\alpha,1[$ est un ensemble de séjour, ceci donne $\Theta_B = \Theta_{B\cap]\alpha,1[} = 0$.

5) Si B est un ensemble de séjour, contenu dans $]1/2,1[$, et si 0 est une valeur d'adhérence de Θ_B quand $x \longrightarrow 1$, alors $\Theta_B = 0$.

Soit $D = \{\Theta_B > 1/2\}$: $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $x_0 > 3/4$ tel que $\Theta_B(x_0) < \varepsilon$. Soit $\alpha \in]x_0,1[$ et $F =]1/2,\alpha[$. D'après la définition de P, $P_x[X_1 \in D \cap]\alpha,1[] = \frac{m(D \cap]\alpha,1[)}{1-\alpha} \; P_x[X_1 \in]\alpha,1[]$ pour tout $x \in F$. Alors par récurrence il est facile de voir que :

$$P_{x_0}[X_1 \in F,\ X_2 \in F,\ldots,X_n \in F,\ X_{n+1} \in D \cap]\alpha,1[] =$$

$$\frac{m(D \cap]\alpha,1[)}{1-\alpha} \; P_{x_0}[X_1 \in F,\ X_2 \in F,\ldots,\ X_n \in F,\ X_{n+1} \in]\alpha,1[]$$

Alors, si τ est le premier instant de sortie de F, du processus, on a :

$$P_{x_0}[X_\tau \in D \cap]\alpha,1[] = \frac{m(D \cap]\alpha,1[)}{1-\alpha} \quad P_{x_0}[X_\tau \in]\alpha,1[] .$$

D'autre part, d'après 3),

$$P_{x_0}[S^c \cap (X_\tau \in]0,1/2[)] = \int_\Omega (1_{]0,1/2[} \cdot \Theta_{]0,1/2[}) \circ X_\tau \, d P_{x_0}$$
$$\geq \frac{1}{2} \; P_{x_0}[X_\tau \in]0,1/2[] .$$

Ceci donne :

$$\frac{1}{2} \geq 2(1-x_0) = 2\ \Theta_{]0,1/2[}(x_0) = 2\ P_{x_0}[S^c] \geq P_{x_0}[X_\tau \in]0,1/2[] .$$

Comme $P_{x_0}[X_\tau \in]\alpha,1[] + P_{x_0}[X_\tau \in]0,1/2[] = 1$ on obtient $P_{x_0}[X_\tau \in]\alpha,1[] \geq 1/2$.
Enfin, puisque Θ_B est harmonique, tout ceci se résume ainsi :

$$\varepsilon > \Theta_B(x_0) = \int_\Omega \Theta_B \circ X_\tau \, d P_{x_0} \geq \frac{1}{2} P_{x_0}[X_\tau \in D \cap]\alpha,1[] \geq \frac{1}{4} \frac{m(D \cap]\alpha,1[)}{1-\alpha}$$

Ce raisonnement étant valable pour tout $\alpha \in]x_0,1[$, il prouve que $\lim_{\alpha \to 1} \frac{m(D \cap]\alpha,1[)}{1-\alpha} = 0$, et puisque B et D sont des ensembles de séjour équivalents (cf. proposition 2), $\Theta_B = 0$ d'après 4).

6) Si B est un ensemble de séjour contenu dans $]1/2,1[$ (resp. $]0,1/2[$) et si $\Theta_B \neq 0$, alors $\Theta_B(x) = x$ (resp. $\Theta_B(x) = 1-x$).

D'après 5) on peut supposer que 0 n'est pas une valeur d'adhérence de Θ_B quand $x \to 1$. Alors P_x p.s. sur S, $\Theta_B \circ X_n \longrightarrow 1$, pour tout x, donc

B et $]1/2,1[$ sont associés au même évènement stationnaire S, d'où le résultat. (Il est clair que les deux énoncés sont symétriques l'un de l'autre).

On a ainsi prouvé que $]1/2,1[$, $]0,1/2[$ sont des ensembles de séjour minimaux ; c'est-à-dire que l'algèbre de Boole des classes d'ensembles de séjour a quatre éléments : $\emptyset$, $]1/2,1[$, $]0,1/2[$, E. Il est clair alors que la frontière de Feller Φ est un espace discret à deux éléments.

Une question se pose alors naturellement. Est-il possible d'étendre ce raisonnement au cas du disque, et même au cas d'un domaine ouvert suffisamment régulier de $\mathbb{R}^n$; P(x,dy) étant alors la mesure de probabilité équirépartie sur la plus grande boule ouverte, centrée en x, contenue dans le domaine. Pour prouver que les harmoniques bornées pour P sont les harmoniques, au sens classique, il suffirait de prouver, (à l'aide du lemme de Fatou !...) que, par le noyau de Poisson, il correspond à chaque fonction indicatrice, borélienne, sur le bord, une fonction du type θ ; et réciproquement. C'est justement ce qu'on vient de faire dans le cas de l'intervalle.

5) MESURES TERMINALES.

Le but de ce paragraphe est d'étudier les mesures définies sur la frontière, et de donner une représentation intégrale des fonctions harmoniques bornées.

A chaque mesure ν sur $(E,\mathcal{E})$ on peut associer les mesures de Radon $\tilde{\nu}$ et $\bar{\nu}$ sur Σ^* et Φ, définies par :

$$\tilde{\nu}(f) = \int_E J_o^{-1}(f)\, d\nu \text{ si } f \in \mathcal{C}(\Sigma^*) \cdot \bar{\nu}(g) = \int_E J^{-1}(g)\, d\nu \text{ si } g \in \mathcal{C}(\Phi).$$

Si ν est une mesure de probabilité, $\tilde{\nu}$ et $\bar{\nu}$ le sont aussi. Dans ce cas $\bar{\nu}$ est appelée "mesure terminale" du processus de loi initiale ν. En effet on a:

Proposition 5.

La suite $\widetilde{\nu P^n}$ converge vaguement vers $\bar{\nu}$.

Démonstration.

Pour tout $f \in \mathscr{C}(\Sigma^*)$ on a :

$$\int_{\Sigma^*} f \, d\,\widetilde{\nu P^n} = \int_E J_o^{-1}(f) \, d\, \nu P^n = \int_E P^n(J_o^{-1}(f))\, d\nu.$$

Comme $J_o^{-1}(f) \in \mathcal{A}$, on a $\lim\limits_n P^n(J_o^{-1}(f)) = \pi(J_o^{-1}(f))$, d'après le lemme 3. On obtient donc $\lim\limits_n \int_{\Sigma^*} f \, d\,\widetilde{\nu P^n} = \int_\Phi J(\pi(J_o^{-1}(f)))d\,\overline{\nu}$.
Le résultat est alors une conséquence de la formule, valable pour tout $f \in \mathcal{A}$, $J(\pi(f)) = 1_\Phi\, J_o(f)$.

Le noyau $x \longrightarrow \overline{\overline{\varepsilon_x}}$, de E dans Φ, (ε_x désigne la mesure de Dirac en x) permet d'écrire la formule intégrale suivante :

$$f(x) = \int_\Phi J(f)\, d\,\overline{\overline{\varepsilon_x}} \qquad f \in \mathcal{H}.$$

Cette formule est analogue à la formule, dite de Poisson, établie par Furstenberg dans [16] (p. 374). Elle demande à être précisée.

Proposition 6.

Soient ν_o et ν_1 deux mesures de probabilité sur $(E, \mathscr{E})$. S'il existe un réel $\alpha > 0$ et deux entiers k et ℓ tels que $\nu_o P^k \leq \alpha \sum\limits_{n=0}^{\ell} \nu_1 P^n$, alors $\overline{\nu}_o \leq \alpha\, \ell\, \overline{\nu}_1$ et la densité $\frac{d\,\overline{\nu}_o}{d\,\overline{\nu}_1}$ a une version continue sur Φ.

Démonstration.

Soient P_{ν_o} et P_{ν_1} les mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ associées à ν_o et ν_1. Soit $S \in \mathscr{S}$; soit $B \in \Sigma$, associé à S d'après la proposition 2.
On a :

$$P_{\nu_o}(S) = \int_E \Theta_B \, d\,\nu_o = \int_E \Theta_B \, d\,\nu_o P^k \leq \alpha \sum_{n=1}^{\ell} \int_E \Theta_B \, d\,\nu_1 P^n =$$

$$= \alpha\, \ell \int_E \Theta_B \, d\,\nu_1 = \alpha\, \ell\, P_{\nu_1}(S).$$

Donc, sur $\mathscr{S}$ on a l'inégalité $P_{\nu_o} \leq \alpha\, \ell\, P_{\nu_1}$. Soit alors Y une v.a. stationnaire, bornée par $(\alpha\ell)$, telle que $(Y.P_{\nu_1}) = P_{\nu_o}$ (sur $\mathscr{S}$). Soit $h \in \mathcal{H}$, associée à Y d'après la proposition 1 : alors $J(h) \in \mathscr{C}(\Phi)$,

$||J(h)|| \leq \alpha\, \ell$ et $J(h)$ vérifie, pour tout $f \in \mathscr{C}(\Phi)$:

$$\int_\Phi J(h).f\, d\bar{\nu}_1 = \int_E \pi(h\, J^{-1}(f))\, d\, \nu_1 = \int_\Omega Y.Z\, d\, P_{\nu_1} = \int_\Omega Z\, d\, P_{\nu_o} = \int_\Phi f\, d\bar{\nu}_o$$

où Z est une v.a. stationnaire associée à $J^{-1}(f)$. Donc $J(h)$ est la densité cherchée.

Ce résultat jouera un rôle important dans le chapitre 3. Pour le moment, il permet de prouver une formule intégrale analogue à la formule de Poisson classique :

Supposons donnée sur $(E, \mathscr{E})$ une mesure de probabilité ν telle que, pour tout $x \in E$, il existe un réel $\alpha > 0$ et deux entiers k et ℓ pour lesquels $\varepsilon_x\, P^k \leq \alpha \sum_{n=0}^{\ell} \nu\, P^n$. Sous cette hypothèse le support de $\bar{\nu}$ est Φ, car ν charge chaque ensemble de séjour non transitoire. Alors, d'après la proposition 6, $\frac{d\,\bar{\varepsilon}_x}{d\,\bar{\nu}}$ a une version continue unique sur Φ. Soit $N(x,.)$ cette fonction continue ; $N : E \times \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ joue le rôle du noyau de Poisson pour tout $h \in \mathscr{H}$ on a la formule intégrale :

$$h(x) = \int_\Phi Jh(u)\, N(x,u)\, d\,\bar{\nu}(u) \qquad (x \in E).$$

L'hypothèse est vérifiée, en particulier, dans le cas où $(E, \mathscr{E})$ est un espace discret et où chaque point est chargé par $\sum_{n=0}^{\infty} \nu\, P^n$.

6) RELATIVISATION. FRONTIERE TOTALE.

Par le procédé classique de relativisation, on étudie dans ce paragraphe les fonctions harmoniques non bornées. En particulier, on construit par une nouvelle méthode la frontière totale introduite dans [15].

Définition 7.

Un ensemble B de $\mathscr{E}$ est dit fermé (stochastiquement) si la suite $[X_n \in B]$ est croissante P_x p.s. pour tout x.

Les ensembles fermés sont caractérisés par, soit $\sigma_B = 1_B$, soit $\Psi_{B^c} = 1_{B^c}$. Ce sont des ensembles de séjour.

Lemme 5.

Si h est une fonction harmonique, positive, finie, l'ensemble $B = \{h = 0\}$ est fermé.

Démonstration.

Si $h(x) = 0$, on a $\int_E h(y)\, P(x,dy) = 0$ d'après l'harmonicité de h. Ceci donne aussitôt $1_B\, P1_{B^c} = 0$ et $1_B\, P1_B = 1_B$ donc $\sigma_B = 1_B$.

Le processus relativisé par h (harmonique, positive, finie) a pour espace des états $E^h = \{h > 0\}$ (muni de la tribu induite par $\mathcal{E}$) et pour probabilité de transition $P^h(x,B) = \frac{1}{h(x)} \int_B h(y)\, P(x,dy)$ $(x \in E^h)$ (on a bien $P^h(x,E^h) = 1$). D'après le lemme 5, la suite $[X_n \in E^h]$ est décroissante : alors l'espace des trajectoires du processus relativisé est identique à l'évènement stationnaire $\bigcap_n [X_n \in E^h]$. On peut alors considérer que les mesures $P_x^h (x \in E^h)$ sont définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et vérifient $P_x^h(\bigcap_n [X_n \in E^h]) = 1$, et que, d'autre part, les évènements stationnaires pour le processus relativisé sont les éléments de la tribu $\mathcal{S} \cap (\bigcap_n [X_n \in E^h])$ qui est contenue dans $\mathcal{S}$. Sur les cylindres $P^h_{x_o}$ est donnée par :

$$P^h_{x_o}(X_o \in B_o, \ldots, X_n \in B_n) = \frac{1_{B_o}(x_o)}{h(x_o)} \int_{B_1} h(x_1)\, P(x_o,dx_1) \frac{1}{h(x_1)} \int_{B_2} \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{h(x_{n-1})} \int_{B_n} h(x_n)\, P(x_{n-1},dx_n)$$

$$= \frac{1_{B_o}(x_o)}{h(x_o)} \int_{B_1} P(x_o,dx_1) \int_{B_2} \ldots\ldots \int_{B_n} h(x_n)\, P(x_{n-1},dx_n).$$

On note $\mathcal{H}^h$ l'espace des fonctions harmoniques pour P^h.

Proposition 7.

$f \longmapsto f/h$ (fonction définie seulement sur E^h) définit un isomorphisme, positif, de l'espace vectoriel des fonctions f, harmoniques pour P, pour lesquelles il existe $\alpha > 0$ tel que $|f| \leq \alpha\, h$ sur $\mathcal{H}^h$.

Démonstration.

On vérifie immédiatement que, si f est harmonique et vérifie l'hypothèse, f/h est bornée et harmonique pour P^h.

Les résultats obtenus dans les § 2 et 3 sont encore valables pour le processus relativisé. En particulier $\mathcal{H}^h$ est isomorphe à $\mathcal{C}(\Phi^h)$ par J^h, où Φ^h est la frontière de Feller du processus relativisé. Les fonctions harmoniques comparables à h, sont représentées sur Φ^h par l'intermédiaire de l'isomorphisme de la proposition 7.

On va obtenir la frontière de Feller totale en recollant tous les espaces Φ^h (h harmonique, positive, finie). Le but du recollement est d'identifier les parties de Φ^{h_0} et Φ^{h_1} qui représentent les fonctions harmoniques comparables, à la fois, à h_0 et h_1. On note $\mathcal{A}^h$ et π^h les correspondants de $\mathcal{A}$ et π , pour le processus relativisé.

Lemme 6.

$P_x^{h+1} \geq \frac{1}{h(x)+1} P_x$ pour tout $x \in E$; $\mathcal{A}^{h+1} \subset \mathcal{A}$ et si $f \in \mathcal{A}^{h+1}$, on a $\pi^{h+1}(\frac{f}{h+1}) = \frac{1}{h+1}\, \pi(f)$, $\pi(\pi^{h+1}(f)) = \pi(f)$.

Démonstration.

L'inégalité $P_x^{h+1} \geq \frac{1}{h(x)+1}\; P_x$ est évidente sur les cylindres : elle est donc vraie sur $\mathfrak{F}$. Alors, si $\lim\limits_n\; f \circ X_n$ existe P_x^{h+1} p.s. pour tout x, elle existe P_x p.s. pour tout x. Donc $\mathcal{A}^{h+1} \subset \mathcal{A}$. Si $f \in \mathcal{A}^{h+1}$, alors $\frac{f}{h+1} \in \mathcal{A}^{h+1}$ et $\pi^{h+1}(\frac{f}{h+1}) = \lim\limits_n \;(P^{h+1})^n\; (\frac{f}{h+1}) = \frac{1}{h+1}\; \lim\limits_n P^n\, f = \frac{1}{h+1}\, \pi(f)$.

Enfin, si $f \in \mathcal{A}^{h+1}$, $\pi^{h+1}(f)$ est la fonction harmonique pour P^{h+1} associée à la classe par rapport aux P_x^{h+1} de la v.a. stationnaire $Z = \lim\limits_n f \circ X_n$; $\pi(\pi^{h+1}(f))$ est la fonction harmonique pour P, associée à la classe de Z par rapport aux P_x. Donc $\pi(\pi^{h+1}(f)) = \pi(f)$.

Lemme 7.

$\pi : \mathcal{H}^{h+1} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un homomorphisme d'algèbre de Banach, positif, surjectif.

Démonstration.

Comme $\mathcal{H}^{h+1} \subset \mathcal{L}^{h+1} \subset \mathcal{L}$, π est bien défini sur $\mathcal{H}^{h+1}$; π est linéaire, positif, et $\pi(1) = 1$. Pour prouver que π est multiplicatif il faut prouver que $\pi(\pi^{h+1}(fg)) = \pi(\pi(f)\ \pi(g))$, $f, g \in \mathcal{H}^{h+1}$. D'après le lemme 6, $\pi(\pi^{h+1}(fg)) = \pi(fg)$; l'égalité $\pi(fg) = \pi(\pi(f)\ \pi(g))$ résulte immédiatement de la définition de π. Enfin si $f \in \mathcal{H}$, soit Z une v.a. stationnaire telle que $Z = \lim f \circ X_n$ P_x p.s. pour tout x. A la classe de Z par rapport aux P_x^{h+1} on peut associer un élément de $\mathcal{H}^{h+1}$ dont l'image par π est f.

Ceci implique qu'il existe une injection continue $q : \Phi \longrightarrow \Phi^{h+1}$ qui vérifie, si $f \in \mathcal{H}^{h+1}$, $J(\pi(f)) = J^{h+1}(f) \circ q$. (cf. [12] p. 278). Elle possède la propriété suivante :

Lemme 8.

$q(\Phi)$ est ouvert et fermé dans Φ^{h+1}.

Démonstration.

Pour $f \in \mathcal{H}^{h+1}$, les égalités $J^{h+1}(f) \circ q = 0$ et $\pi(f) = 0$ sont équivalentes. D'après le lemme 6, $\pi(f) = 0$ si et seulement si $\pi^{h+1}(\frac{f}{h+1}) = 0$, autrement dit si et seulement si $J^{h+1}(f).J^{h+1}(\frac{1}{h+1}) = 0$. Donc $q(\Phi)$, qui est évidemment fermé, est identique à l'adhérence de l'ouvert $\{J^{h+1}(\frac{1}{h+1}) > 0\}$. Mais cet ouvert est aussi fermé, car il représente dans Φ^{h+1} l'ensemble de séjour (pour P^h) associé à la classe de l'évènement stationnaire $\{\lim_n (\frac{1}{h+1}) \circ X_n > 0\}$.

Tout ceci est encore valable si on remplace 1 par une fonction harmonique positive, bornée ou non. On note $q_{h_0}^{h_0+h_1}$ l'injection continue de Φ^{h_0}

dans $\Phi^{h_o+h_1}$. Sur l'espace $\Sigma_h \Phi^h$ (réunion disjointe des Φ^h, h étant harmonique positive finie) la relation définie entre x et y si $q_{h_o}^{h_o+h_1}(x) = q_{h_1}^{h_o+h_1}(y)$, $x \in \Phi^{h_o}$, $y \in \Phi^{h_1}$, est une relation d'équivalence. La réflexivité résulte de l'injectivité des fonctions q, la symétrie est évidente, et la transitivité résulte à la fois de l'injectivité et de la relation $q_{h_o}^{h_o+h_1+h_2} = q_{h_o+h_1}^{h_o+h_1+h_2} \circ q_{h_o}^{h_o+h_1}$ qu'il est facile de vérifier.

Définition 8.

La frontière de Feller totale, $\hat{\Phi}$, est l'espace quotient de $\Sigma_h \Phi^h$ par cette relation.

Théorème 4.

$\hat{\Phi}$ est séparé. Si ξ désigne la projection canonique de $\Sigma_h \Phi^h$ sur $\hat{\Phi}$, alors $\xi(\Phi^h)$ est ouvert et fermé dans $\hat{\Phi}$, pour tout h.

Démonstration.

Le saturé de Φ^h, pour la relation, est ouvert et fermé dans $\Sigma_h \Phi^h$, d'après le lemme 8. Donc $\xi(\Phi^h)$ est ouvert et fermé dans Φ. Soient x et y deux points distincts de $\hat{\Phi}$. Soient $u' \in \Phi^{h_o}$, $v' \in \Phi^{h_1}$ tels que $\xi(u') = x$ et $\xi(v') = y$; si $u = q_{h_o}^{h_o+h_1}(u')$ et $v = q_{h_1}^{h_o+h_1}(v')$, on a $u \neq v$ dans $\Phi^{h_o+h_1}$. Soient U et V deux voisinages ouverts, disjoints, de u et v dans $\Phi^{h_o+h_1}$. Leurs saturés sont encore ouverts et disjoints. Donc $\xi(U)$ et $\xi(V)$ sont deux voisinages ouverts disjoints de x et y dans $\hat{\Phi}$.

Notons que, comme ξ est injectif en restriction à Φ^h, $\xi(\Phi^h)$ et Φ^h sont homéomorphes. Notons aussi que pour toute partie $\mathcal{U}$ ouverte et compacte de $\hat{\Phi}$, il existe h telle que $\xi(\Phi^h) = \mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}$ est contenue dans $\xi(\Phi)$, il existe un ensemble de séjour B tel que $J(\Theta_B) = 1_{\xi^{-1}(\mathcal{U}) \cap \Phi}$; il est facile de voir que $\xi(\Phi^{\Theta_B}) = \mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}$ n'est pas contenue dans $\xi(\Phi)$, on peut se ramener facilement à ce cas, car $\mathcal{U}$ est recouvert par un nombre fini d'ensembles du type $\xi(\Phi^h)$.

CHAPITRE II

PROPRIETES ERGODIQUES ET FRONTIERE DE MARTIN CONCRETE

Ce chapitre est consacré à la construction et à l'étude de la frontière de Martin d'un processus possédant certaines propriétés de régularité. Appliquée au cas où l'espace des états est discret, cette construction est identique à la construction classique (cf. [10], [18], [23], [20], [13]). Les limites qui apparaissent dans le théorème de Chacon et Ornstein jouent le rôle des quotients des fonctions de Green. Comme dans le cas discret le résultat fondamental à établir est la convergence des trajectoires le long de ces fonctions. Pour cela on utilisera les méthodes de la théorie ergodique.

On reprend la situation du chapitre précédent. Mais, de plus, on définit, une fois pour toutes, une mesure de probabilité m, sur $(E, \mathcal{E})$, vérifiant $m P \ll m$ ($m P$ absolument continue par rapport à m). Dans ce cas, P induit sur $L^1(E, \mathcal{E}, m)$ un opérateur markovien T : si $f \in L^1(E, \mathcal{E}, m)$, si (fm) désigne la mesure de densité f par rapport à m, on a $Tf = \frac{d(f.m)P}{dm}$.
Son transposé T^*, défini sur $L^\infty(E, \mathcal{E}, m)$ vérifie $T^* g(x) = Pg(x)$ m p.p..
Ces deux opérateurs se prolongent aux fonctions $\mathcal{E}$-mesurables positives par continuité monotone (cf. [22] chapitre V). Désormais notre étude portera sur les fonctions h, définies à une m-équivalence près, bornées ou positives, qui vérifient l'équation $T^* h = h$. Ces fonctions seront encore appelées "harmoniques".

1) QUOTIENT DE LA FRONTIERE DE FELLER PAR LA MESURE m.

Le but de ce paragraphe est demontrer que la construction du chapitre 1 (§ 2 et 3) est "compatible" avec la relation d'équivalence définie sur les fonctions mesurables par la mesure m. Plus précisément on veut prouver que cette construction est encore valide quand on remplace $\mathcal{B}$ par $L^\infty(m)$, P par T^*, et l'expression P_x p.s. pour tout x par P_m p.s.

Proposition 1.

Pour tout $h \in L_+^\infty(m)$, tel que $T^* h = h$, il existe $h' \in \mathcal{H}$ telle que $h = h'$ m p.p. et $||h||_\infty = ||h'||$.

Démonstration.

Soit f un représentant, dans $\mathcal{B}$, de h, tel que $||f|| = ||h||_\infty$. Comme $T^* h = h$, on a Pf = f m p.p.. Par récurrence on définit la suite $f_n = (Pf_{n-1}) \wedge f$ (borne inférieure dans $\mathcal{B}$ de Pf_{n-1} et f). Comme $f_1 \leq f_o$ et que, si $f_n \leq f_{n-1}$, on a $f_{n+1} = (Pf_n) \wedge f \leq (Pf_{n-1}) \wedge f = f_n$, cette suite est décroissante. Soit $h_o = \lim f_n$. Comme $Pf_n \geq f_{n+1}$, on a $Ph_o \geq h_o$ et la suite $P^n h_o$ est croissante. Il est clair que sa limite h' est telle que $h' \in \mathcal{H}$, que h' = h m p.p. et $||h'|| = ||h||_\infty$.

Soit H l'algèbre de Banach réelle, quotient de $\mathcal{H}$ par la relation associée à m. D'après ce résultat $H = \{g \in L^\infty(E, \mathcal{E}, m) \cdot T^* g = g\}$.

Proposition 2.

La formule $g(x) = \int_\Omega Y(\omega) P_x(d\omega)$ m p.p. définit un isomorphisme d'algèbre, positif, isométrique, entre H et $L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P_m)$; de plus la suite $g \circ X_n$ converge P_m p.s. vers Y et $\int_E g\, dm = \int_\Omega Y\, d P_m$.

Démonstration.

Si $g \in H$, on prend pour Y la classe dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P_m)$ de la v.a. stationnaire associée au représentant g' de g donné par la proposition précédente. Ceci n'est pas ambigu, car, si g_o et g_1 sont deux éléments de $\mathcal{H}$ égaux presque partout, les limites $\lim_n g_o \circ X_n$ et $\lim_n g_1 \circ X_n$ données par la proposition 1 (chapitre 1) sont égales P_m p.s.. Ce résultat est donc une conséquence de la proposition 1 (chapitre 1) et de la définition de la structure d'algèbre de H.

Lemme 1.

Pour tout $B \in \mathcal{G}$, tel que $\lim_n 1_B \circ X_n$ existe P_m p.s., il existe $B' \in \Sigma$, tel que $\Theta_{B'} = \Theta_B$ et $B = B'$ m p.p. .

Démonstration.

Dans le cas où $\Theta_B = 0$ m p.p., il suffit de prendre $B' = B \cap \{\Theta_B = 0\}$ · cet ensemble est dans Σ car il vérifie $\Theta_{B'} \leq \Theta_B$ donc $1_{B'} \Theta_{B'} = 0$, donc $\Theta_{B'} = 0$ d'après le lemme 1 du chapitre 1. Dans le cas général, soit $B_o \in \Sigma$ tel que $\Theta_{B_o} = \Theta_B$. Comme $\lim_n 1_B \circ X_n = \lim_n \Theta_B \circ X_n$ P_m p.s., on a $P_m(\Delta(B^c) \cap \Delta(B_o)) = 0$; en effet, sur $\Delta(B^c)$ on a P_m p.s. $\lim \Theta_B \circ X_n = 0$, et sur $\Delta(B_o)$ on a P_m p.s. $\lim \Theta_{B_o} \circ X_n = 1$. D'après l'inclusion $\Delta(B^c \cap B_o) \subset \Delta(B^c) \cap \Delta(B_o)$ on obtient $\Theta_{B^c \cap B_o} = 0$ m p.p. ; de même $\Theta_{B \cap B_o^c} = 0$ m p.p.. Soient B_1 et B_2 les ensembles transients, associés à $B^c \cap B_o$ et $B \cap B_o^c$, trouvés au début. L'ensemble B' cherché est $(B_o - B_1) \cup B_2$.

Proposition 3.

Pour toute fonction f mesurable m-essentiellement bornée telle que $\lim_n f \circ X_n$ existe P_m p.s., il existe $f' \in \mathcal{A}$ telle que $f = f'$ m p.p..

Démonstration.

Le lemme précédent donne le résultat pour une fonction f étagée dans ce cas on peut choisir f' telle que $||f||_\infty = ||f'||$. Si f n'est pas étagée, il est facile de prouver, en adaptant la démonstration du théorème 1 (chapitre 1, a $\Longrightarrow$ c), qu'il existe une suite f_k de fonctions étagées vérifiant $\sum_{k=1}^{\infty} ||f-f_k||_\infty < \infty$ et $\lim_n f_k \circ X_n$ existe P_m p.s.. Soit $g_k' \in \mathcal{A}$, telle que $g'_k = f_{k+1} - f_k$ m p.p. et $||g'_k|| = ||f_{k+1} - f_k||_\infty$. Alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} g'_k$ converge dans $\mathcal{A}$; sa limite est la fonction f' cherchée.

Soit A le quotient de $\mathcal{A}$ par la relation associée à m. D'après ce résultat A est la sous-algèbre fermée de $L^\infty(m)$, formée des éléments f tels que $\lim_n f \circ X_n$ existe P_m p.s..

Soient f, $g \in \mathcal{A}$ vérifiant f = g m p.p. , alors $\pi(f) = \pi(g)$ m p.p. car $\pi(f) = \lim_n P^n f$ et $\pi(g) = \lim_n P^n g$. Donc la projection π passe au quotient. On note encore π la projection ainsi définie de A sur H. Elle possède les propriétés :

- si $g \in A$, alors $\pi(g) = \lim_n T^{*n} g$.
- $\pi g(x) = \int_\Omega \lim_n g \circ X_n \, d P_x$ m p.p. et $||\pi g||_\infty \leq ||g||_\infty$.
- π est multiplicative de A sur H.

Désormais Ψ, σ, Θ, désigneront les classes des fonctions définies dans le chapitre 1 : par "ensemble de séjour" on désignera un élément de Σ défini à un ensemble de mesure nulle près · deux ensembles de séjour B et D seront dits équivalents si $\Theta_B = \Theta_D$ m p.p.. Alors l'algèbre de Boole des classes d'ensembles de séjour est isomorphe à l'algèbre de Boole des classes, pour la mesure P_m, des évènements stationnaires ; d'après la proposition 2 (chapitre 1) et les résultats précédents. L'espace compact, totalement discontinu, associé à cette algèbre de Boole sera encore appelé "frontière de Feller" et noté Φ. (Il est facile de voir que cet espace est le support de la mesure terminale $\bar{m}$) ; J désignera toujours l'isomorphisme positif, isométrique entre H et $\mathcal{C}(\Phi)$. Dans de cas Φ est un espace Stonien (compact, extrêmement discontinu) car l'algèbre de Boole des classes, pour la mesure P_m, des évènements stationnaires est complète.

2) ETUDE DES LIMITES ERGODIQUES.

Le théorème de Chacon et Ornstein (cf. [8]) affirme que, étant donnés $f \in L^1$ $g \in L^1_+$, la $\lim_n \dfrac{\sum_{i=0}^{n} T^i f}{\sum_{i=0}^{n} T^i g}$ existe et est finie m p.p. sur l'ensemble $\{\sum_{i=0}^{\infty} T^i g > 0\}$.

Dans ce paragraphe, on étudie le "comportement à la frontière" de ces fonctions. Comme on le verra, les résultats obtenus généralisent des résultats classiques dans le cas conservatif (cf. [7], [22], [6]). D'ailleurs dans ce cas la situation est particulièrement simple.

Proposition 4.

Si T est conservatif, Σ est égale à la tribu des invariants (modulo m) et A = H. De plus, si $h \in H$, la v.a. $h \circ X_0$ est stationnaire (P_m p.s.), et $h(x) = \int_\Omega h \circ X_0 \, d P_x$ m p.p.

Démonstration.

Soit $\hat{B}$ l'ensemble invariant engendré par B. On a $\Psi_B = 1_{\hat{B}}$ donc $\Theta_B = 1_{\hat{B}}$. Si $B \in \Sigma$, alors $1_B + 1_{\widehat{B^c}} = 1$, donc $B = \hat{B}$ m p.p.. Donc les classes des ensembles de séjour sont les ensembles invariants. Ceci entraîne A = H.

Soit $B \in \Sigma$. On a $P_m[X_0 \in B, X_1 \in B^c] = \int 1_B T^* 1_{B^c} dm = 0$ et de même, $P_m[X_0 \in B^c, X_1 \in B] = 0$. Donc $[X_0 \in B] \in \mathcal{I}$ et $1_B(x) = P_x[X_0 \in B]$ m p.p.. Ceci prouve la seconde partie car $H = L^\infty(E, \Sigma, m)$.

Proposition 5.

Soit $f \in L^1_+$. L'ensemble $\{\sum_{i=0}^{\infty} T^i f > 0\}$ est le plus petit ensemble fermé contenant $\{f > 0\}$.

Démonstration.

Posons $B = \{\sum_{i=0}^{\infty} T^i f > 0\}$. On a les relations :

$$0 = \int_{B^c} \sum_{i=0}^{\infty} T^i f \, dm = \int f \left(\sum_{i=0}^{\infty} T^{*i} 1_{B^c} \right) dm \geq \int f \, \Psi_{B^c} \, dm.$$

L'inégalité $T^* \Psi_{B^c} \leq \Psi_{B^c}$ implique $0 = \int f \, . \, T^{*i} \, \Psi_{B^c} \, dm = \int T^i f \, . \, \Psi_{B^c} \, dm$ pour tout i, d'où $\Psi_{B^c} = 1_{B^c}$. Ceci prouve que B est fermé.

D'autre part, soit $D \supset \{f > 0\}$. Si D est fermé, on a $\Psi_{D^c} = 1_{D^c}$ d'où $0 = \int \Psi_{D^c} \, f \, dm \geq \int \Psi_{D^c} \, T^i f \, dm$, quel que soit i. Ceci prouve $D^c \subset \{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i f = 0\}$ donc $D \supset B$.

Appliqué au cas conservatif, ce résultat donne le résultat classique : <<$\{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i f > 0\}$ est le plus petit ensemble invariant contenant $\{f > 0\}$>>.

Théorème 1.

Soit $f \in L^1_+$. Soit $B = \{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i f > 0\}$. Sur $\Delta(B)$ on a

$\lim_n (\sum_{i=0}^{\infty} T^i f) \circ X_n = + \infty \; P_m$ p.s. , sur $(\Delta(B))^c$ on a

$\lim_n (\sum_{i=0}^{\infty} T^i f) \circ X_n = 0 \; P_m$ p.s. .

Démonstration.

Comme B est fermé on a $\Delta(B)^c = \Delta(B^c)$; sur cet ensemble la limite étudiée est évidemment nulle.

Pour tout $\alpha > 0$, posons $B_\alpha = \{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i f \leq \alpha\} \cap B$. On a :

$$\int_{B_\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} T^i f \, dm = \int f(x) \left(\sum_{i=0}^{\infty} P_x \left[X_i \in B_\alpha\right] \right) dm(x) < \infty$$

Donc $\sum_{i=0}^{\infty} P_x \left[X_i \in B_\alpha\right]$ est fini m p.p. sur $\{f > 0\}$. Comme

$\Theta_{B_\alpha}(x) \leq \sum_{i=\ell}^{\infty} P_x \left[X_i \in B_\alpha\right]$, pour tout entier ℓ, on obtient l'égalité $\Theta_{B_\alpha} = 0$ m p.p. sur $\{f > 0\}$. Comme $\{\Theta_{B_\alpha} = 0\}$ est un ensemble fermé (voir lemme 5, chapitre 1) la proposition 5 implique l'égalité $\Theta_{B_\alpha} = 0$ m p.p. sur B. Alors, d'après le lemme 1 (chapitre 1), on a $\theta_B = 0$ m p.p. et donc $\Delta(B) = \Delta(B^c) \; P_m$ p.s. . Puisque α est arbitraire et que

$\lim\limits_n \inf \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} T^i f\right) \circ X_n \geq \alpha$ sur $\Delta(B_\alpha^c)$, on obtient

$\lim\limits_n \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} T^i f\right) \circ X_n = +\infty$ P_m p.s. sur $\Delta(B)$.

Appliqué au cas conservatif, ce résultat donne le résultat classique :

$$\ll \sum_{i=0}^{\infty} T^i f = 0 \text{ ou } +\infty \quad m \text{ p.p.} \gg .$$

Lemme 2.

L'opérateur de translation t est une transformation non singulière de $(\Omega, \mathfrak{F}, P_m)$. Soit W l'opérateur associé, défini sur $L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P_m)$. Alors $W^i(f \circ X_o) = T^i f) \circ X_o$ pour tout entier i, et tout $f \in L^1(E, \mathcal{E}, m)$.

Démonstration.

Pour prouver la non singularité de t, il faut prouver que $P_m(t^{-1}(F)) = 0$ si $P_m(F) = 0$. $(F \in \mathfrak{F})$. D'après la propriété de Markov, $P_m(t^{-1}(F)) = E_m[E_m[1_F \circ t \mid X_1]] = E_m[E_{X_1}(1_F)]$. Si $P_m(F) = 0$, la fonction $x \longmapsto P_x(F)$ est nulle m p.p. Alors $E_m[E_{X_1}(1_F)] = \int_E (T1)(x) P_x(F)\, m(dx) = 0$.

L'opérateur W est défini ainsi : pour $Y \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P_m)$,

$W(Y) = \dfrac{d\, t(Y \cdot P_m)}{d\, P_m}$ où $t(Y.P_m)$ désigne la mesure image par t de la mesure de densité Y par rapport à P_m. Son adjoint W^* vérifie $W^*(Z) = Z \circ t$, pour $Z \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P_m)$. Pour prouver la formule annoncée il suffit de prouver, pour tout cylindre de $\mathfrak{F}$ $[X_o \in A_o, \ldots, X_n \in A_n]$, l'égalité :

$$\int_{[X_o \in A_o, \ldots, X_n \in A_n]} W(f \circ X_o)\, d\, P_m = \int_{[X_o \in A_o, \ldots, X_n \in A_n]} (Tf) \circ X_o\, d\, P_m .$$

Or $\int_{[X_o \in A_o, \ldots, X_n \in A_n]} W(f \circ X_o)\, d\, P_m = \int_{[X_1 \in A_o, \ldots, X_{n+1} \in A_n]} f \circ X_o\, d\, P_m =$

$$\int f(x_o)\, dm(x_o) \int_{A_o} P(x_o, dx_1) \ldots \int_{A_n} P(x_n, dx_{n+1})$$

$$= \int f(x_o)\, dm(x_o)\, P(1_{A_o}(.) \int_{A_1} P(., dx_1) \ldots \int_{A_n} P(x_n, dx_{n+1}))\,(x_o)$$

$$= \int_{A_o} Tf(x_o)\, dm(x_o) \int_{A_1} P(x_o, dx_1) \ldots \int_{A_n} P(x_{n-1}, dx_n) = \int_{[X_o \in A_o, \ldots, X_n \in A_n]} (Tf) \circ X_o\, d\, P_m .$$

Par récurrence la formule s'étend alors à tout entier i.

Lemme 3.

Soit $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P_m)$. Si Z est une v.a. stationnaire alors $W(Z) = Z.(W1)$.

Démonstration.

Pour tout $F \in \mathcal{F}$ on peut écrire :

$$\int_F W(Z)\, d\, P_m = \int Z(1_F \circ t)\, d\, P_m = \int (Z\, 1_F) \circ t\, d\, P_m = \int_F Z(W1)\, d\, P_m.$$

Lemme 4.

Soit $f \in L^1_+ (E, \mathcal{E}, m)$. Alors $\lim_n t^{-n} \{ \sum_{i=0}^{\infty} W^i (f \circ X_\circ) > 0\} = \{E_m[f \circ X_\circ \mid \mathcal{S}] > 0\}$.

Démonstration.

En appliquant la proposition 5 à l'opérateur W, on voit que la suite $t^{-n} \{ \sum_{i=0}^{\infty} W^i (f \circ X_\circ) > 0\}$ est croissante et que sa limite est le plus petit évènement stationnaire contenant $\{f \circ X_\circ > 0\}$. Le résultat s'en déduit aussitôt.

Théorème 2.

Soient $f \in L^1(E, \mathcal{E}, m)$, $g \in L^1_+(E, \mathcal{E}, m)$, β le temps d'entrée dans $\{\sum_{i=0}^{\infty} T^i g > 0\}$. La suite $\left(\lim_k \frac{\sum_{i=0}^{k} T^i f}{\sum_{i=0}^{k} T^i g}\right) \circ X_{n+\beta}$ converge P_m p.s. vers $\frac{E_m[f \circ X_\circ \mid \mathcal{S}]}{E_m[g \circ X_\circ \mid \mathcal{S}]}$ quand $n \to \infty$, sur $[\beta < \infty]$.

Démonstration.

Comme l'ensemble $\{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i g > 0\}$ est fermé, et que $[\beta < \infty] = \bigcup_n [X_n \in \{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i g > 0\}]$, la suite est bien définie. Sans perdre de généralité, on peut supposer $f \geq 0$.

Plaçons nous d'abord dans le cas où $g = 1$, et notons pour alléger $\lim_k \frac{\sum_{i=0}^{k} T^i f}{\sum_{i=0}^{k} T^i g} = (f/g)_T$. D'après le lemme 2, le résultat annoncé se ramène à

$\lim_n (f \circ X_0/1)_W \circ t^n = E_m[f \circ X_0 \mid \mathcal{S}]$ P_m p.s. . Soit $\varepsilon > 0$ et

$F = \{(f \circ X_0/1)_W \geq (1+\varepsilon)\, E_m[f \circ X_0 \mid \mathcal{S}]\}$. D'après les lemmes 3 et 4 on a :

$$F = \{E_m[f \circ X_0 \mid \mathcal{S}] > 0\} \cap \{(f \circ X_0/E_m[f \circ X_0 \mid \mathcal{S}])_W \geq 1+\varepsilon\} .$$

Soit $G = F \cap \{\limsup_n t^{-n}(F)\}$. En appliquant le lemme ergodique maximal de Brunel (cf. [5], [1]) à l'opérateur W on obtient :

$$\int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} t^{-n}(G)} f \circ X_0 \, d P_m \geq (1+\varepsilon) \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} t^{-n}(G)} E_m[f \circ X_0 \mid \mathcal{S}] \, d P_m .$$

Comme $\bigcup_{n=0}^{\infty} t^{-n}(G) = \{\limsup_n t^{-n}(F)\}$ et que cet évènement est stationnaire, on déduit de la définition de l'espérance conditionnelle l'égalité $P_m\{\limsup_n t^{-n}(F)\} = 0$. Ce raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\limsup_n (f/1)_T \circ X_n \leq E_m[f \circ X_0 \mid \mathcal{S}]$ P_m p.s. Par le même raisonnement, on prouve que $P_m\{\limsup_n t^{-n}(F')\} = 0$ où

$F' = \{(f \circ X_0/1)_W \leq (1-\varepsilon)\, E_m[f \circ X_0 \mid \mathcal{S}]\}$ et on trouve

$\lim_n (f/1)_T \circ X_n = E_m[f \circ X_0 \mid \mathcal{S}]$ P_m p.s.

On passe au cas général en utilisant, d'une part $(f/g)_T = (f/1)_T\, (1/g)_T$ sur $\{\sum_{i=0}^{\infty} T^i g > 0\}$, et d'autre part

$\{E_m[g \circ X_0 \mid \mathcal{S}] > 0\} = [\beta < \infty]$, ceci d'après le lemme 4.

Ce théorème admet plusieurs corollaires importants. Le premier de ceux-ci énonce un résultat, presque équivalent au théorème, qui a été démontré dans [2] par une méthode différente.

<u>Corollaire 1.</u>

Si $g > 0$ m p.p. et si $(f/g)_T \in L^\infty(E, \mathcal{E}, m)$, alors $(f/g)_T \in A$ et, pour tout $h \in H$, $\int h\, f\, dm = \int \pi\, (h(f/g)_T) g\, dm$.

Démonstration.

La première assertion est une conséquence immédiate du théorème 2. D'autre part, si Z est la v.a. stationnaire associée à h, d'après la proposition 2, on peut écrire :

$$\int_E \pi(h(f/g)_T)\, g\, dm = \int_\Omega Z \frac{E_m[f \circ X_o \mid \mathcal{I}]}{E_m[g \circ X_o \mid \mathcal{I}]}\, g \circ X_o\, d\, P_m = \int_\Omega E_m\,[Z.(f \circ X_o) \mid \mathcal{I}]\, dP_m$$

$$= \int_E f(x)\, m(dx) \int_\Omega Z(\omega)\, P_x\, (d\omega) = \int_E h.f\, dm.$$

Appliqué au cas conservatif, le théorème donne la valeur de la limite du théorème de Chacon et Ornstein (cf. [7]).

Corollaire 2.

Si T est conservatif, alors $(f/g)_T = \frac{E[f \mid \Sigma]}{E[f \mid \Sigma]}$.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le théorème 2, la proposition 4, et l'égalité $E[f \mid \Sigma] \circ X_o = E[f \circ X_o \mid \Sigma]$.

Appliqué au cas où l'espace des états est discret et où T est dissipatif, le théorème 2 donne le théorème classique de convergence du processus à la frontière (cf. [10], [18], [23]).

Corollaire 3.

Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace discret et ν une mesure de probabilité telle que $0 < \sum_{i=0}^{\infty} \nu P^i < \infty$. Alors, si K(x,y) désigne

$\dfrac{\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_x P^i(y)}{\sum_{i=0}^{\infty} \nu\, P^i\,(y)}$, la suite $K(x,X_n)$ converge P_ν p.s. pour tout $x \in E$.

Démonstration.

Soit m une mesure de probabilité sur $(E, \mathscr{E})$ qui charge chaque point. Posons $g = \frac{d\nu}{dm}$. On a $\frac{d\nu P^i}{dm} = T^i g$ et $\frac{d\,\varepsilon_x P^i}{dm} = \frac{1}{m(x)} T^i 1_{\{x\}}$, donc $K(x,y) = \frac{1}{m(x)} (1_{\{x\}}/g)_T (y)$. Il est manifeste alors que cet énoncé résulte du théorème.

3) LA FRONTIERE DE MARTIN CONCRETE.

Le calcul qui vient d'être effectué montre qu'il est naturel d'utiliser les limites de Chacon et Ornstein pour obtenir une généralisation de la frontière de Martin. Le théorème 2 jouera dans ce paragraphe un rôle fondamental. On se donne les hypothèses suivantes :

(I) E est un espace topologique localement compact à base dénombrable $\mathscr{E}$ est la tribu des boréliens ; m est une mesure de probabilité qui charge chaque ouvert.

(II) T est dissipatif.

(III) Pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$ (espace des fonctions continues à support compact sur E), $\sum_{i=0}^{\infty} T^i f$ a un représentant continu.

Soit $\varphi \in L^1_+$, la densité par rapport à m de la mesure initiale du processus.

(IV) $\sum_{i=0}^{\infty} T^i \varphi$ a un représentant continu.

(V) $\int \varphi \, dm = 1$; pour tout compact F de E, il existe un réel $\alpha > 0$ et un entier ℓ, tels que $\sum_{i=0}^{\ell} T^i \varphi \geq \alpha$ sur F.

Lemme 5.

Pour $f \in \mathscr{C}_k(E)$, $(f/\varphi)_T$ est bornée.

Démonstration.

On peut supposer $f \geq 0$. Soit F le support de f. Soient α et ℓ les nombres associés à F par (V). On a $f \leq \frac{||f||}{\alpha} \sum_{i=0}^{\ell} T^i \varphi$. Comme

$\sum_{j=0}^{n} T^j \left(\sum_{i=0}^{\ell} T^i \varphi\right) \leq \ell \left(\sum_{i=0}^{n+\ell} T^i \varphi\right)$, et que $\lim_n T^n \left(\sum_{i=1}^{\ell} T^i \varphi\right) = 0$ d'après (II), on obtient l'inégalité $(f/\varphi)_T \leq \frac{||f||}{\alpha} \ell$.

Désormais on note Kf le représentant continu de $(f/\varphi)_T$, donné par les hypothèses (III) et (IV) pour chaque $f \in \mathscr{C}_k(E)$. Ce représentant est unique d'après (I).

<u>Définition 1</u>.

Soit E^* le complété de E par rapport à la structure uniforme la moins fine, compatible avec la topologie, et rendant uniformément continues les fonctions Kf $(f \in \mathscr{C}_k(E))$. La frontière de Martin (concrète) du processus est l'espace $M = E^* - E$. (cette frontière est dite concrète pour la distinguer de la frontière qui sera construite au chapitre 3).

Soit $(f_i)_{i=0,\ldots}$ une suite dense dans $\mathscr{C}_k(E)$. La suite $(Kf_i)_{i=0,\ldots}$ est dense dans $\{Kf \,;\, f \in \mathscr{C}_k(E)\}$ pour le voir il suffit d'utiliser la majoration de Kf donnée au cours de la démonstration du lemme 5. La topologie de E^* peut alors se décrire ainsi : soit d_1 une métrique sur E, compatible avec la topologie, pour laquelle le complété de E est le compactifié d'Alexandrov (elle existe d'après (I)) ; soit d_2 un écart sur E défini par $d_2(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \,|Kf_i(x) - Kf_i(y)|$, où les w_i sont > 0 et tels que $\sum_i w_i ||Kf_i|| < \infty$. E^* est le complété de E pour la métrique $d_1 + d_2$.

D'après le lemme 5 les fonctions Kf sont bornées, et E^* est compact ; E est ouvert dans E^*. Donc M est compact ; d'après ce qu'on vient de voir M est aussi métrisable. Pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$, Kf se prolonge par continuité à E^* ; ce prolongement sera encore noté Kf.

Si E est discret, si la mesure initiale ν vérifie $0 < \sum_{i=0}^{\infty} \nu P^i < \infty$, il suffit de supposer que E est muni de la topologie discrète et que m est une mesure qui charge chaque point pour que les hypothèses (I) (II) (III) (IV) (V) soient vérifiées. La définition de la frontière de Martin donnée ici généralise alors celle donnée par HUNT (cf. [18]).

Comme dans le cas discret on peut énoncer le :

Théorème 3.

Le processus X_n converge (pour la topologie de E^*) vers une v.a. X_∞ à valeurs dans M, P_m p.s.. Si μ est la mesure sur M, image de $P_{(\varphi m)}$ par X_∞, on a $\int_E f\, dm = \int_M Kf\, d\mu$ pour tout $f \in \mathcal{C}_k(E)$.

Démonstration.

Soit F un compact de E. D'après l'hypothèse IV et le théorème 1, le processus sort de F P_m p.s. en un temps fini. D'après le théorème 2, la suite $Kf \circ X_n$ converge P_m p.s. pour tout $f \in \mathcal{C}_k(E)$. Alors, vu la définition de E^*, la suite X_n converge P_m p.s. vers une v.a. X_∞ à valeurs dans M. Si $f \in \mathcal{C}_k(E)$, la formule intégrale s'obtient, à l'aide du théorème 2 :

$$\int_M K\, f\, d\mu = \int_\Omega K\, f \circ X_\infty\, d\, P_{(\varphi m)} = \int_\Omega \frac{E_m[f \circ X_o \mid \mathcal{J}]}{E_m[g \circ X_o \mid \mathcal{J}]} (\varphi \circ X_o)\, d\, P_m =$$

$$\int_\Omega f \circ X_o\, d\, P_m = \int_E f\, dm.$$

La fonction harmonique 1 est donc représentée sur la frontière par la mesure μ. Pour obtenir la représentation des fonctions harmoniques (φm)-intégrables on utilise le procédé de relativisation introduit au § 6 chapitre 1.

Soit h une fonction harmonique positive telle que $\int h\, \varphi\, dm = 1$. Comme $\int h\, \varphi\, dm = \int h\, T^i\, \varphi\, dm$ pour tout i, il résulte de (V) que h est localement m-intégrable. Alors, si $m(B) = 0$, on a $P(x,B) = 0$ m p.p. et aussi $P^h(x,B) = 0$ m p.p. , donc $m\, P^h \ll m$ (on reprend les notations du § 6 chapitre 1). Soit alors T^h l'opérateur sur $L^1(E^h,m)$ associé à P^h. L'opérateur T^h vérifie la formule $h\, T^i(f) = (T^h)^i\, (fh)$ pour tout entier i et tout f tel que

$f\,h \in L^1(m)$, car $(E^h)^c = \{h = 0\}$ est un ensemble fermé (Lemme 5 chapitre 1).

En particulier, si $f \in \mathcal{C}_k(E)$ on a $1_{E^h}(f/\varphi)_T = (fh/\varphi h)_{T^h}$.

Théorème 3 bis.

Le processus X_n converge vers une v.a. X_∞ à valeurs dans M, P^h_m p.s. .

Si μ^h est la mesure sur M, image de $P^h_{(\varphi hm)}$ par X_∞, on a

$\int_E f\,h\,dm = \int_M Kf\,d\mu^h$ pour tout $f \in \mathcal{C}_k(E)$.

Démonstration.

On a l'égalité $\sum_{i=0}^{\infty} (T^h)^i\,(\varphi h) = h\,(\sum_{i=0}^{\infty} T^i\varphi)$. Alors, comme h est localement m-intégrable, le processus sort de chaque compact en un temps fini $P^h_{(\varphi hm)}$ p.s.. Ceci est encore vrai P^h_m p.s., car les mesures $P^h_{(\varphi hm)}$ et P^h_m sont équivalentes en restriction à $\mathcal{G}$, d'après l'hypothèse (V). En appliquant le théorème 2 à l'opérateur T^h, et l'égalité $1_{E^h}(f/\varphi)_T = (fh/\varphi h)_{T^h}$, on voit que la suite $Kf \circ X_n$ converge P^h_m p.s. pour tout $f \in \mathcal{C}_k(E)$. Ceci prouve la convergence de X_n vers X_∞. La formule intégrale est encore une simple application du théorème 2 :

$$\int_M Kf\,d\mu^h = \int_\Omega Kf \circ X_\infty\,d\,P^h_{(\varphi hm)} = \int_\Omega \frac{E^h_m[(fh) \circ X_\circ|\mathcal{G}]}{E^h_m[(\varphi h) \circ X_\circ|\mathcal{G}]}\,(\varphi h) \circ X_\circ\,dP^h_m = \int_E fh\,dm.$$

L'égalité $P^h_{(\varphi hm)} + P^{h'}_{(\varphi h'm)} = P^{h+h'}_{[\varphi(h+h')m]}$ est évidente. Elle permet de prolonger l'application $h \longrightarrow \mu^h$ en un homomorphisme positif de l'espace vectoriel des harmoniques (φm)-intégrables dans l'espace vectoriel des mesures finies sur M ; de plus on a $\int h\,\varphi\,dm = \mu^h(M)$.

Dans ce cadre il ne semble pas possible de montrer l'unicité de la représentation ; ni même de montrer que chaque mesure sur M définit une fonction harmonique. Dans le cas discret, l'unicité de la représentation résulte du théorème de Choquet, cf. [9] car alors il est possible d'identifier les fonctions harmoniques et les mesures ν sur E qui vérifient $\nu(Tf) = \nu(f)$. (cf. [23]). Dans [3] on peut trouver un système d'hypothèses, plus fort que le nôtre, qui permet cette identification et qui donne l'uncité de la représentation.

Néanmoins il est possible de démontrer ici, les résultats suivants, qui sont bien connus dans le cas discret (cf. [23]) :

Théorème 4.

Soit h une fonction harmonique (φm)-intégrable. Soit $\mu^h = u.\mu+\mu_s$ la décomposition de Lebesgue de μ^h par rapport à μ. Alors la suite $h \circ X_n$ converge vers $u \circ X_\infty$ P_m p.s..

Démonstration.

On peut supposer $h \geq 0$. D'abord étudions le cas où $\mu_s = 0$. Pour tout $f \in \mathcal{C}_k(E)$ on peut écrire :

$$\int_E fh\, dm = \int_\Omega (f \circ X_0)(h \circ X_0) d P_m = \int_M Kf\, d\mu^h = \int_\Omega \frac{E_m[f \circ X_0|\mathcal{G}]}{E_m[\varphi \circ X_0|\mathcal{G}]} (u \circ X_\infty) d P_{(\varphi m)}$$

$$= \int_\Omega (f \circ X_0)\ (u \circ X_\infty)\ d P_m.$$

L'égalité $\int_\Omega (f \circ X_0)\ (h \circ X_0)\ d P_m = \int_\Omega (f \circ X_0)\ (u \circ X_\infty)\ d P_m$ est encore valable si on remplace f par $f(T^i\varphi)$ quel que soit l'entier i (car d'après IV $T^i\varphi$ est bornée sur les compacts). En appliquant le lemme 2 on obtient alors : $\int (f \circ X_n)(h \circ X_n)\ d P_{(\varphi m)} = \int (f.T^n\varphi) \circ X_0\ (u \circ X_\infty)\ d P_m =$

$\int (f \circ X_n)(u \circ X_\infty)\ d P_{(\varphi m)}$. Cette égalité prouve $E_{(\varphi m)}\ [u \circ X_\infty \mid X_n] = h \circ X_n$. Comme $E_{(\varphi m)}\ [u \circ X_\infty \mid X_n \ldots X_0] = E_{(\varphi m)}\ [u \circ X_\infty \mid X_n]$, d'après la propriété de Markov, le théorème des martingales donne $\lim_n h \circ X_n = u \circ X_\infty$ $P_{(\varphi m)}$ p.s.. Ceci est encore vrai P_m p.s. car les mesures P_m et $P_{\varphi m}$ sont équivalentes en restriction à $\mathcal{G}$, d'après (V).

Supposons maintenant $u = 0$. La fonction harmonique $\pi(\frac{h}{h+1})$, qui est inférieure à la fois à h et à 1, possède une mesure de représentation qui est inférieure à la fois à μ^h et à μ. Comme ces deux mesures sont étrangères ceci implique $\pi(\frac{h}{h+1}) = 0$. Ceci donne $\lim_n (\frac{h}{h+1}) \circ X_n = 0$ P_m p.s. et donc $\lim_n h \circ X_n = 0$ P_m p.s. .

Pour achever la démonstration, il reste à prouver que, pour tout $u \in L^1(M,\mu)$, il existe h harmonique, (φm)-intégrable, telle que $\mu^h = u.\mu$. Soit $u \in L^1(M,\mu)$. Il est clair que $Z = u \circ X_\infty$ est une v.a. stationnaire telle que $\int_\Omega Z\, d P_{\varphi m} = \int_M u\, d\mu$. La fonction h définie par $h(x) = \int_\Omega Z\, d P_x$ m p.p. est donc harmonique, (φm)-intégrable et l'égalité $\mu^h = u.\mu$ résulte de la formule $\int_E f\, h\, dm = \int_\Omega (f \circ X_o)\, Z\, d P_m$ valable pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$.

Corollaire 4.

L'application $u \longrightarrow u \circ X_\infty$ définit un isomorphisme positif isométrique de $L^1(M,\mu)$ sur $L^1(\Omega, \mathscr{G}, P_{(\varphi m)})$.

Démonstration.

Comme on vient de le voir, $u \longrightarrow u \circ X_\infty$ définit une application linéaire, positive, isométrique de $L^1(M,\mu)$ dans $L^1(\Omega, \mathscr{G}, P_{(\varphi m)})$. Inversement soit $Z \in L^1(\Omega, \mathscr{G}, P_{(\varphi m)})$. La fonction h harmonique, (φm)-intégrable, définie ci-dessus par $h(x) = \int_\Omega Z\, d P_x$ m p.p. vérifie $\int_\Omega (f \circ X_o)(h \circ X_o)\, d P_m = \int_\Omega (f \circ X_o)\, Z\, d P_m$ pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$. Cette formule est encore vraie si on remplace f par $f(T^n \varphi)$; alors, en appliquant le lemme 2, on a :

$$\int_\Omega (f \circ X_n)\, Z\, d P_{(\varphi m)} = \int_\Omega (f.T^n\varphi) \circ X_o(Z)\, d P_m = \int (f(T^n\varphi).h) \circ X_o\, d P_m =$$

$$\int (f \circ X_n)\,(h \circ X_n)\, d P_{(\varphi m)}.$$

Ceci prouve $E_{(\varphi m)}(Z \mid X_n) = h \circ X_n$. Comme Z est stationnaire la propriété de Markov implique $E_{(\varphi m)}[Z \mid X_n \ldots X_o] = E_{(\varphi m)}[Z \mid X_n]$ alors le théorème des martingales donne $\lim_n (h \circ X_n) = Z\ P_{(\varphi m)}$ p.s. .
Si $\mu^h = u\,\mu + \mu_s$, le théorème 4 montre que $\lim_n h \circ X_n = u \circ X_\infty\ P_m$ p.s., et donc finalement que $Z = u \circ X_\infty\ P_{(\varphi m)}$ p.s.

Corollaire 5.

L'application $h \longrightarrow \frac{d\,\mu^h}{d\mu}$ définit un isomorphisme d'algèbre, positif, isométrique de H sur $L^\infty(M,\mu)$.

Démonstration.

D'après le théorème 4, si $u = \frac{d\,\mu^h}{d\mu}$, on a $\lim h \circ X_n = u \circ X_\infty$ P_m p.s. Le corollaire résulte alors immédiatement de la proposition 2.

Ceci implique que l'algèbre de Boole des classes d'ensembles de séjour est isomorphe à l'algèbre de Boole des parties boréliennes de M (définies à une μ-équivalence près) ; (car les éléments idempotents de H et de $L^\infty(M,\mu)$ se correspondent dans l'isomorphisme du corollaire 5).

Les résultats de ce paragraphe sont encore valides si l'hypothèse II est remplacée par l'hypothèse :

(II)* La partie conservative de T est un point isolé e.

Le théorème de convergence des trajectoires le long des limites de Chacon et Ornstein étant valable quelle que soit la nature de T, cette modification n'entraîne pas de difficultés. Il faut alors définir M par $E^* - (E - \{e\})$ pour que e soit un point isolé dans la frontière.

On a recours à cet artifice pour construire la frontière associée à un noyau sous-markovien. On ajoute alors un état e, et on se ramène à l'étude du noyau markovien P' défini par :

$P'(x,B) = P(x,B)$ si $e \notin B$

$P'(x,e) = 1 - P(x,E)$; $P'(e,e) = 1$.

Dans ce cas le point e est la partie conservative du processus les fonctions harmoniques pour l'opérateur initial sont représentées sur la frontière par des mesures qui ne chargent pas e.

CHAPITRE III

LA FRONTIERE DE MARTIN ABSTRAITE

Dans ce chapitre on va donner une nouvelle définition de la frontière de Martin, en utilisant la frontière de Feller totale. Celle-ci ne suppose aucune condition de régularité sur P, et généralise la définition de la frontière de Martin donnée précédemment ; on montrera que, sous les hypothèses de régularité ((I), (II), (III), (IV), (V) § 3 chapitre 2), les deux définitions sont identiques. Cette nouvelle frontière sera appelée abstraite. Le théorème de convergence des trajectoires (théorème 2 chapitre 2) ne jouera plus qu'un rôle annexe.

On reprend les notations des chapitres précédents, et la situation initiale du chapitre 2.

1) LA "PARTIE ATTEINTE" DE LA FRONTIERE ABSTRAITE.

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la partie de la frontière qui représente seulement les fonctions harmoniques bornées. Celle-ci est définie comme un certain quotient de la frontière de Feller. La méthode employée est une modification de celle introduite par Akcoglu et Sharpe dans [2].

On ne suppose vérifiées que les hypothèses (I) et (V) du § 3 chapitre 2 (l'hypothèse (V) signifie seulement que le processus de loi initiale φ, peut atteindre tous les "points" de l'espace). En vertu de l'hypothèse (V), et comme on l'a déjà vu, les mesures P_m et $P_{(\varphi m)}$ sont équivalentes en restriction à $\mathcal{G}$, donc les mesures terminales $\bar{m}$ et $\overline{(\varphi m)}$ sont équivalentes sur la frontière de Feller Φ ; chacune d'elles charge chaque ouvert de Φ (voir § 1 chapitre 2).

Pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$, on note Nf le représentant continu sur Φ de la densité $\frac{d(\overline{fm})}{d(\overline{\varphi m})}$; ce représentant est donné par la proposition 6 (chapitre 1) dont les hypothèses sont vérifiées d'après (V).

<u>Définition 1.</u>

On appelle "partie atteinte" de la frontière de Martin (abstraite) du processus, et on note Γ, l'espace quotient de Φ par rapport aux fonctions Nf $(f \in \mathscr{C}_k(E))$; i.e. par rapport à la relation d'équivalence définie sur Φ par : $z_o \sim z_1$ si $Nf(z_o) = Nf(z_1)$ pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$. On note ρ la projection canonique de Φ sur Γ.

Il est clair que Γ est un espace séparé compact. Mais de plus :

<u>Théorème 1.</u>

Γ est métrisable

<u>Démonstration</u>.

$\mathscr{C}(\Gamma)$ est canoniquement isomorphe à la sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}(\Phi)$ engendrée par les fonctions 1 et $Nf(f \in \mathscr{C}_k(E))$. Pour prouver le théorème il suffit de prouver qu'il existe une suite dense dans $\{Nf \;;\; f \in \mathscr{C}_k(E)\}$.

Soient f, $g \in \mathscr{C}_k(E)$ telles que $||f-g|| < \varepsilon$. Si α et ℓ sont les nombres associés au compact $\operatorname{supp}(|f| + |g|)$ par (V), on a $||Nf - Ng|| < \frac{\varepsilon\ell}{\alpha}$; en effet pour tout ouvert de base Φ_B dans Φ, B étant un ensemble de séjour, on a :

$$\left|\int_{\Phi_B} Nf\, d(\overline{\varphi m}) - \int_{\Phi_B} Ng\, d(\overline{\varphi m})\right| \leq \left|\int_E (f-g)\, \Theta_B\, dm\right| \leq \frac{1}{\alpha}\int_E |f-g|\, \Theta_B\left(\sum_{i=0}^{\ell} T^i\varphi\right)dm$$

$$\leq \frac{\varepsilon\ell}{\alpha} \int_{\Phi_B} d(\overline{\varphi m}).$$

Ceci prouve que, si $(f_i)_{i=0\ldots}$ est une suite dense dans $\mathscr{C}_k(E)$, donnée par l'hypothèse (I) ; la suite $(Nf_i)_{i=0\ldots}$ est dense dans $\{Nf \;;\; f \in \mathscr{C}_k(E)\}$.

Désormais on note λ la mesure $\rho(\overline{\varphi m})$ sur Γ ; (mesure image par ρ de la mesure $(\overline{\varphi m})$). Le théorème donnant la représentation intégrale des fonctions harmoniques bornées sera la conséquence des lemmes suivants :

<u>Lemme 1</u>.

L'application $g \longrightarrow \tau(g) = \frac{d\,\phi\,(\overline{gm})}{d\,\lambda}$ définie sur $L^1(E, \mathscr{E}, m)$ à valeurs dans $L^1(\Gamma,\lambda)$, est une contraction. Elle possède les propriétés :

- $\tau(g) = \tau(Tg)$ pour tout $g \in L^1(E, \mathscr{E}, m)$.
- $\tau(f) \circ \rho = Nf\,\overline{m}$ p.p. sur Φ, pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$.

<u>Démonstration</u>.

Pour tout $g \in L^1(E, \mathscr{E}, m)$, $(\overline{gm})$ est une mesure sur Φ absolument continue par rapport à $\overline{m}$, donc aussi par rapport à $(\overline{\varphi m})$. Donc $\tau(g)$ est bien défini en tant qu'élément de $L^1(\Gamma,\lambda)$; τ est manifestement linéaire et positive ; τ est une contraction car

$$\int_\Gamma \tau(g)\,d\lambda = \int_\Phi d(\overline{gm}) = \int_E g\,dm.$$

La première propriété résulte de l'égalité des mesures terminales $(\overline{gm}) = (\overline{Tg.m})$. Enfin, si $f \in \mathscr{C}_k(E)$, d'après la définition de Γ Nf est une fonction factorisable par ρ : la fonction continue sur Γ, ainsi obtenue, est un représentant de $\tau(f)$.

Ce lemme implique que $\tau(f)$ est borné λ p.p. pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$. Mais, même en restriction à $\mathscr{C}_k(E)$, τ n'est pas obligatoirement un opérateur continu pour la norme $\|\ \|_\infty$.

<u>Lemme 2</u>.

Pour chaque $u \in L^\infty(\Gamma,\lambda)$, $B \longrightarrow \int_\Gamma \tau(1_B)\,u\,d\lambda$ définit sur $\mathscr{E}$ une mesure dont la densité par rapport à m est bornée. Si R(u) désigne cette densité, l'application R est une contraction de $L^\infty(\Gamma,\lambda)$ dans H.

<u>Démonstration</u>.

Soit $u \in L^\infty_+(\Gamma,\lambda)$. Puisque τ est une contraction de $L^1(E, \mathscr{E}, m)$ dans $L^1(\Gamma,\lambda)$, $\int_\Gamma \tau(1_B)\,u\,d\lambda$ définit une fonction d'ensemble positive, additive, telle que :

$$\int_\Gamma \tau(1_B)\,u\,d\lambda \leq \|u\|_\infty \int_\Gamma \tau(1_B)\,d\lambda = \|u\|_\infty\, m(B).$$

Donc c'est une mesure absolument continue par rapport à m, et dont la densité R(u) vérifie $||R(u)||_\infty \leq ||u||_\infty$. Comme R est manifestement linéaire, il ne reste à prouver que $R(u) \in H$. D'après la première propriété de τ donnée par le lemme 1, on a, pour tout $B \in \mathcal{E}$:

$$\int_B R(u)\, dm = \int_\Gamma \tau(1_B)\, u\, d\lambda = \int_\Gamma \tau(T1_B)\, u\, d\lambda = \int_E T1_B . R(u)\, dm$$

donc $R(u) = T^* R(u)$.

Lemme 3.

Pour tout $u \in L^\infty(\Gamma,\lambda)$, $J(R(u)) = u \circ \rho$ $\bar{m}$ p.p. sur Φ.

Démonstration.

Plaçons nous d'abord dans le cas où $u = \tau(f)$ pour $f \in \mathcal{C}_k(E)$. On peut écrire alors, d'après la seconde propriété de τ donnée par le lemme 1, pour tout $B \in \mathcal{E}$:

$$\int_B R(\tau(f))\, dm = \int_\Gamma \tau(1_B)\, \tau(f)\, d\lambda = \int_\Phi (\tau(f) \circ \rho)\, d(\overline{1_B m}) = \int_\Phi Nf\, d(\overline{1_B m})$$

donc $\tau(f) \circ \rho = Nf = J(R(\tau(f)))$ $\bar{m}$ p.p. sur Φ et le lemme est démontré dans ce cas. La multiplication et la convergence dans $L^\infty(\Gamma,\lambda)$ préservent la propriété. Donc elle est vraie pour toute fonction u continue, puisque les représentants continus des $\tau(f)$, pour $f \in \mathcal{C}_k(E)$, engendrent $\mathcal{C}(\Gamma)$, en tant qu'algèbre de Banach. Soient, alors, $u \in L^\infty(\Gamma,\lambda)$ et une suite $(u_n)_{n=0,\dots}$ croissante, de fonctions de $L^\infty(\Gamma,\lambda)$, convergeant vers u λ p.p., possédant la propriété. La suite $R(u_n)$ est croissante et on a $R(u_n) \leq R(u)$ pour tout n. Comme :

$$\int_E R(u_n)\, dm = \int_\Gamma \tau(1)\, u_n\, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Gamma \tau(1)\, u\, d\lambda = \int_E R(u)\, dm$$

on a l'égalité $\lim_n R(u_n) = R(u)$ m p.p. et donc $\lim_n J(R(u_n)) = J(R(u))$ $\bar{m}$ p.p. sur Φ. Ceci donne $\lim_n J(R(u_n)) = J(R(u)) = u \circ \rho$ $\bar{m}$ p.p. sur Φ. Donc la propriété se conserve par continuité monotone et le lemme est démontré.

Il résulte de ce lemme que R est isométrique, et donc injectif.

Lemme 4.

$R : L^{\infty}(\Gamma,\lambda) \longrightarrow H$ est surjectif et multiplicatif.

Démonstration.

Montrons d'abord la surjectivité.

Soit $h \in H$; soit alors u l'élément de $L^{\infty}(\Gamma,\lambda)$ qui est la densité, par rapport à λ, de la mesure image par ρ de la mesure sur Φ de densité $J(h)$ par rapport à $(\overline{\varphi m})$. On a $R(u) = h$, car pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$:

$$\int_E f\, R(u)\, dm = \int_\Gamma \tau(f)\, u\, d\lambda = \int_\Gamma \tau(f)\, d(\rho(J(h).\overline{\varphi m})) = \int_\Phi (Nf)(Jh)\, d(\overline{\varphi m}) = \int_E h\, f\, dm.$$

Pour prouver que R est multiplicatif, il faut prouver que, pour tout u et tout v dans $L^{\infty}(\Gamma,\lambda)$, $R(u\, v) = \pi(R(u)\, R(v))$, ou encore que $J(R(uv)) = J(R(u))\, J(R(v))$ (dans $\mathscr{C}(\Phi)$). Or, d'après le lemme 3, on a :
$J(R\,(uv)) = (uv) \circ \rho = (u \circ \rho)(v \circ \rho) = J(R(u))\, J(R(v))$ $\overline{m}$ p.p. sur Φ.
Comme $\overline{m}$ charge chaque ouvert de Φ, ceci donne $J(R(uv)) = J(R(u))\, J(R(v))$.

Le théorème donnant la représentation intégrale des fonctions harmoniques bornées est ainsi entièrement démontré :

Théorème 2.

L'application $u \longrightarrow R(u)$ est un isomorphisme d'algèbre, isométrique, positif, de $L^{\infty}(\Gamma,\lambda)$ sur H.

L'opérateur τ joue ici le rôle que jouait l'opérateur K dans le chapitre précédent. On peut encore énoncer les résultats suivants, analogues aux corollaires du théorème 4 (chapitre 2).

Corollaire 1.

L'algèbre de Boole des classes d'ensembles de séjour est isomorphe à l'algèbre de Boole des parties boréliennes de Γ, définies à une λ-équivalence près.

Corollaire 2.

Il existe un isomorphisme $u \longrightarrow X(u)$, positif, isométrique, de $L^1(\Gamma,\lambda)$ sur $L^1(\Omega, \mathcal{S}, P_{(\varphi m)})$, qui vérifie, si $u \in L^\infty(\Gamma,\lambda)$:

$$\lim_n \; R(u) \circ X_n = X(u) \qquad P_m \text{ p.s.}$$

Démonstration.

D'après le théorème précédent et la proposition 2 (chapitre 2), la formule $u \longrightarrow \lim_n \; R(u) \circ X_n$ définit un isomorphisme d'algèbre, positif isométrique, de $L^\infty(\Gamma,\lambda)$ sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{S}, P_m)$. Il vérifie, de plus

$$\int_\Gamma u \, d\lambda = \int_\Phi u \circ \rho \; d(\overline{\varphi m}) = \int_\Phi J(R(u)) \, d(\overline{\varphi m}) = \int_E R(u) \, . \varphi \, dm =$$

$\int_\Omega \lim_n \; R(u) \circ X_n \; d P_{(\varphi m)}$ d'après le lemme 3. Donc il se prolonge par continuité en un isomorphisme positif, isométrique, de $L^1(\Gamma,\lambda)$ sur $L^1(\Omega, \mathcal{S}, P_{(\varphi m)})$.

Notons que, dans cette construction, la convergence des trajectoires et en particulier le théorème 2 (chapitre 2) n'interviennent jamais.

2) COMPARAISON DES FRONTIERES CONCRETES ET ABSTRAITES.

Puisque l'espace Γ ne fournit que la représentation des fonctions harmoniques bornées, il n'est pas surprenant de trouver, dans certains cas, Γ différent de la frontière de Martin concrète M.

Exemple. Soit $E = \mathbb{Z}$, le groupe des entiers ; soit P défini par $P(x, x+1) = p$, $P(x,x-1) = q$, avec $p > q > 0$, $p+q = 1$. Soit m une mesure chargeant chaque point de $\mathbb{Z}$. Si la mesure initiale du processus est la mesure de Dirac en 0, on a

$$K(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{m(x)} & \text{si } y \geq x \text{ et } y \geq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{m(x)} \, (q/p)^x & \text{si } y \leq x \text{ et } y \leq 0 \end{cases} .$$

(on note $K(x,y)$ plutôt que $K1_{\{x\}}(y)$; il est clair, dans ce cas, que les hypothèses (I) (II) (III) (IV) (V) sont réalisées (§ 3, chapitre 2)). La frontière de Martin concrète M est donc formée de deux points, qu'on peut noter $+\infty$ et $-\infty$, qui vérifient $K(x,+\infty) = \frac{1}{m(x)}$, $K(x,-\infty) = \frac{1}{m(x)} (q/p)^x$.

D'autre part, un ensemble B, contenu dans $\mathbb{Z}$, est un ensemble de séjour, non transitoire, s'il contient une demi-droite $\{x : x_o \leq x\}$: alors $\Theta_B = 1$. Donc la frontière de Feller est formée d'un seul point, correspondant au point $+\infty$ trouvé plus haut. Alors Γ est identique à la frontière de Feller et est différent de M.

Néanmoins on va montrer que, sous les hypothèses (I) (II) (III) (IV) (V), (§ 3 chapitre 2), c'est-à-dire dans le cas où les deux constructions sont possibles, l'espace Γ est homéomorphe au support compact C_μ de la mesure μ dans M. (μ désigne toujours la mesure qui représente la fonction 1). Ceci justifiera le nom donné à Γ.

Dans [14], Feldman a démontré ce résultat dans le cas discret. Une partie de sa démonstration (les lemmes 5 et 6 suivants) est encore valable ici. Mais la relation d'équivalence qu'il introduit sur Φ peut se définir plus simplement, en utilisant la proposition 6 chapitre 1 : elle est en fait identique à la relation définie par les fonctions $Nf (f \in \mathcal{C}_k(E))$ qui a été utilisée pour définir Γ.

Par l'isomorphisme du corollaire 5 chapitre 2, à chaque borélien V de M, correspond une fonction harmonique du type Θ, et donc, par J, un ensemble ouvert et fermé dans Φ : désormais cet ensemble sera noté Φ_V. Pour chaque $s \in C_\mu$, soit Φ_s l'intersection des ensembles Φ_V, quand V parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de s dans M.

Lemme 5.

Les ensembles Φ_s $(s \in C_\mu)$ sont fermés, non vides, et forment une partition de Φ.

Démonstration.

Soit $s \in C_\mu$. Il est évident que Φ_s est fermé. Si $V_1 \ldots V_n$ sont des voisinages ouverts de s dans M, alors $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ est encore un voisinage ouvert de s, tel que $\mu(V) > 0$. L'ensemble $\Phi_V = \bigcap_{i=1}^{n} \Phi_{V_i}$ est donc non vide. Comme Φ est compact, ceci prouve que Φ_s est non vide. Les ensembles Φ_s sont disjoints, car, si s et s' sont deux points distincts de C_μ, il existe V et V' deux voisinages ouverts de s et s', disjoints : on a alors $\Phi_V \cap \Phi_{V'} = \emptyset$.

Enfin supposons qu'il existe $z \in \Phi$ tel que $z \notin \bigcup_s \Phi_s$. Pour tout $s \in C_\mu$, il existe un voisinage ouvert V_s de s, tel que $z \notin \Phi_{V_s}$. Ces ensembles forment un recouvrement de C_μ. On peut en extraire un recouvrement fini $V_{s_1} \ldots V_{s_n}$. On a alors $\bigcup_{i=1}^{n} \Phi_{V_{s_i}} = \Phi_{\bigcup_{i=1}^{n} V_{s_i}} = \Phi_{C_\mu} = \Phi$ ce qui est contradictoire.

Lemme 6.

C_μ est le quotient de Φ par la partition Φ_s, $s \in C_\mu$.

Démonstration.

Il faut montrer que la topologie de C est la plus fine rendant continue l'application $\eta : \Phi \to C_\mu$ définie par $\eta(z) = s$ si $z \in \Phi_s$. Comme C_μ est compact il suffit de montrer que η est continue. Si O est un ouvert de M, on a $\eta^{-1}(O \cap C_\mu) \subset \Phi_O$. Si F est un fermé de M, on a $\eta^{-1}(F^c \cap C_\mu) = (\eta^{-1}(F \cap C_\mu))^c$ et donc $\eta^{-1}(F \cap C_\mu) = \eta^{-1}(F^c \cap C_\mu)^c \supset \Phi_F$ car $\Phi_{F^c} = (\Phi_F)^c$. Soit $z \in \eta^{-1}(O \cap C_\mu)$, où O est un ouvert de M ; soit F un voisinage fermé de $\eta(z)$, contenu dans O. On a alors :

$$\eta^{-1}(O \cap C_\mu) \supset \eta^{-1}(F \cap C_\mu) \supset \Phi_F \supset \mathring{F} \supset \eta^{-1}(\mathring{F} \cap C_\mu).$$

Ceci implique $z \in \Phi_{\mathring{F}}$ et prouve que η est continue.

Lemme 7.

Soient $f \in \mathscr{C}_k(E)$, et deux nombres réels a, b tels que $a < b$.

Si V est l'ouvert de M, $\{a < KF < b\}$, alors Φ_V est l'adhérence dans Φ de l'ouvert $O = \{a < Nf < b\}$. (i.e. le plus petit ensemble ouvert et fermé le contenant, car Φ est Stonien) (voir § 1 chapitre 2).

Démonstration.

Dans cette démonstration on note $r(1_S)$ la fonction harmonique associée à chaque borélien S de M, par l'isomorphisme du corollaire 5 chapitre 2. Soit $z \in O$. Il existe un voisinage ouvert et fermé de z, U, contenu dans O ; donc il existe un borélien S de M tel que $\Phi_S = U$ et qui vérifie : $\int_S Kf\, d\mu = \int_E r(1_S)\, f\, dm = \int_U Nf\, d(\overline{\varphi m})$.

D'après la définition de O, on obtient :

$$a \int_U d(\overline{\varphi m}) = a\, \mu(S) < \int_S Kf\, d\mu < b\, \mu(S) = b \int_S d(\overline{\varphi m}).$$

Ces inégalités sont encore vérifiées par tout borélien $S' \subset S$ pour le voit il suffit d'appliquer le même raisonnement aux ouverts et fermés $U' = \Phi_{S'}$, qui sont inclus dans U. Ceci implique $S \subset V$ μ p.p., donc $U = \Phi_S \subset \Phi_V$ et donc $z \in \Phi_V$. On a ainsi prouvé $O \subset \Phi_V$.

Inversement, soit $z \in \Phi_V$. Pour tout voisinage ouvert et fermé de z, U, contenu dans Φ_V, il existeun borélien S de M tel que $U = \Phi_S$ et $S \subset V$. On a $\int_S Kf\, d\mu = \int_E r(1_S)\, f\, dm = \int_U Nf\, d(\overline{\varphi m})$. D'après la définition de V on obtient :

$$a\ \mu(S) = a \int_U d(\overline{\varphi m}) < \int_U Nf\, d\, \overline{\varphi m} < b \int_U d\, \overline{\varphi m} = b\, \mu(S).$$

Ceci implique que z est adhérent à O ; car sinon, il existerait un voisinage ouvert et fermé, U', de z, avec soit $U' \subset \{Nf \geq b\}$ soit $U' \subset \{Nf \leq a\}$, ce qui contredirait ces inégalités. Le lemme est ainsi entièrement démontré.

Ces lemmes vont permettre la démonstration de :

Théorème 3.

Sous les hypothèses (I) (II) (III) (IV) (V) (§ 3 chapitre 2) la partie atteinte, Γ, de la frontière abstraite, est homéomorphe au support C_μ, de la mesure μ dans M. De plus les isomorphismes $H \longleftrightarrow L^\infty(M,\mu)$ et $H \longleftrightarrow L^\infty(\Gamma,\lambda)$, donnés par le corollaire 5 chapitre 2 et le théorème 2, sont identiques.

Démonstration.

En vertu du lemme 6, il suffit de prouver, pour prouver la première partie du théorème, que la relation d'équivalence définie sur Φ par les $Nf(f \in \mathscr{C}_k(E))$ est identique à celle définie par la partition $\Phi_s (s \in C_\mu)$. Soient $s \in C_\mu$ et $z \in \Phi_s$; d'après le lemme 7, z est adhérent à l'ouvert $\{Kf(s) - \varepsilon < Nf < Kf(s) + \varepsilon\}$, pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$, et tout $\varepsilon > 0$. Donc $Nf(z) = Kf(s)$; ceci prouve que la première des relations est moins fine que la seconde.

Inversement, soient s et s' deux points distincts de C_μ ; soient $z \in \Phi_s$ et $z' \in \Phi_{s'}$. D'après la définition de M, il existe $f \in \mathscr{C}_k(E)$ telle que $Kf(s) \neq Kf(s')$. Alors, en supposant $Kf(s) = a < b = Kf(s')$, on a $z \in \Phi_V$ où $V = \{|Kf - a| < \frac{b-a}{3}\}$, et aussi $z' \in \Phi_{V'}$, où $V' = \{|Kf-b| < \frac{b-a}{3}\}$. D'après le lemme 7, ceci implique $Kf(z) \neq Kf(z')$ et prouve que les deux relations sont identiques.

Il est évident maintenant que, pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$, $\tau(f) = Kf$ sur $C_\mu = \Gamma$, et que $\mu = \lambda$; donc les représentations intégrales abstraite et concrète, de H, sont identiques.

3) COMPARAISON DE Γ ET DE LA FRONTIERE D'AKCOGLU ET SHARPE.

Dans [2], sans aucune hypothèse sur E ni sur P, et en s'appuyant sur le corollaire 1 (chapitre 2), Akcoglu et Sharpe ont défini la frontière comme le spectre de la sous-algèbre fermée, G, de H, engendrée par :

$\{\pi(g/1)_T\ ;\ g \in L^\infty(E, \mathscr{E}, m)\}$. La représentation intégrale d'une fonction h, harmonique bornée, était fournie par la mesure associée à la forme linéaire sur G : $g \longrightarrow \int_E \pi(gh)\, dm$. La proposition suivante met en évidence la relation entre cette construction et celle du § 1.

Proposition 1.

Pour tout $g \in L^\infty(E, \mathscr{E}, m)$, $J(\pi(g/1)_T)$ est le représentant continu de la densité $\frac{d(\overline{gm})}{d\,\overline{m}}$. En particulier, sous l'hypothèse (I) (§ 3 chapitre 2) et si $\varphi = 1$, $J(\pi(f/1)_T) = Nf$ pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$.

Démonstration.

Ceci résulte immédiatement du corollaire 1, (chapitre 2) car pour tout $h \in H$, on a :

$$\int_\Phi J(h)\, J(\pi(g/1)_T) d\overline{m} = \int_E \pi(h\pi(g/1)_T) dm = \int_E hg\, dm = \int_\Phi J(h)\, d(\overline{gm}).$$

Autrement dit, la frontière d'Akcoglu et Sharpe est le quotient de la frontière de Feller par rapport à tous les représentants continus des densités $\frac{d(\overline{gm})}{d\,\overline{m}}$, pour $g \in L^\infty(E, \mathscr{E}, m)$, (et non plus seulement pour $g \in \mathscr{C}_k(E)$). Notons aussi que, dans ce cas, la mesure de base m et la mesure initiale du processus sont confondues.

Malheureusement, cette définition de la frontière n'est pas conforme à la définition classique. C'est ce que montre l'exemple suivant :

Exemple. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soit P définie par :

$$P((x,y)(x',y')) = \begin{cases} 1 \text{ si } y = y' \text{ et } x' = x+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La mesure initiale du processus est une mesure m qui charge chaque point de E.

L'espace H est formé des fonctions bornées h telles que $h(x,y) = h(x+1,y)$ pour tout x et tout y ; donc H est isomorphe à l'espace des fonctions bornées sur $\mathbb{N}$, et Φ est le compactifié de Stone-Cech de $\mathbb{N}$.

En prenant m pour mesure de base, on a , pour $f \in L^1(E, \mathcal{E}, m)$,

$$T^i f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(x,y)} \; m(x-i,y) \; f(x-i,y) \text{ si } i \le x \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

donc $\sum_{i=0}^{\infty} T^i f(x,y) = \frac{1}{m(x,y)} \sum_{i=0}^{x} m(x-i,y) \, f(x-i,y)$.

Il est clair alors que $h = (h/1)_T$ si h est harmonique bornée, et donc G = H. Le spectre de G est évidemment Φ.

D'autre part, il est clair que les hypothèses (I) (II) (III) (IV) (V) du § 3 chapitre 2 sont réalisées. La frontière de Martin concrète est le complété de E par rapport aux fonctions :

$$K((x,y),(x',y')) = \begin{cases} \dfrac{1}{m(x,y) \sum_{z=0}^{x'} m(z,y)} & \text{si } y = y' \text{ et } x' > x \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(On note $K((x,y)\ (x',y'))$ plutôt que $K1_{\{(x,y)\}}\ (x',y'))$. Il n'y a que deux sortes de suites de Cauchy non constantes dans E : d'une part les suites dont les ordonnées sont constantes à partir d'un certain rang et dont les abscisses tendent vers $+\infty$, d'autre part les suites dont les ordonnées tendent vers $+\infty$. Les suites de ce dernier type convergent toutes vers le même point dans E^* (il ne faut pas oublier que les fonctions Kf, pour $f \in \mathcal{C}_K(E)$ séparent les points de la frontière, dans le cas concret). Donc la frontière de Martin concrète M est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{N}$.

Dans ce cas la représentation intégrale des fonctions harmoniques bornées donnée dans [2], est obtenue trivialement à partir du théorème 2 (chapitre 1) ; il suffit d'utiliser le fait que $L^\infty(\Phi,\bar{m})$ est isomorphe à $\mathcal{C}(\Phi)$, car Φ est Stonien (cf. [12]).

Néanmoins une question reste posée : à quelle conditions les constructions de [2] et du § 1 sont-elles identiques ?

4) RECOLLEMENT DES PARTIES ATTEINTES.

Dans ce paragraphe on va construire la frontière de Martin abstraite (totale) en recollant les parties atteintes Γ^h correspondant aux différents processus relativisés (h étant positive, harmonique, (φm)-intégrable). Ce recollement sera déduit du recollement qui a été utilisé pour définir la frontière de Feller totale $\hat{\Phi}$, car on va montrer que la relation d'équivalence, **définie** sur Φ, qui a fourni Γ, peut s'étendre à $\hat{\Phi}$. On se place encore sous les hypothèses (**I**) et (V).

Comme on l'a vu au cours de l'étude de la frontière de Martin concrète, on peut associer à la probabilité de transition relativisée P^h, définie sur $E^h = \{h > 0\}$, un opérateur T^h sur $L^1(E^h,m)$. On note $H^h = \{g \in L^\infty(E^h,m) \; ; \; (T^h)^* g = g\}$, Φ^h l'espace Stonien associé à H^h (voir **§ 1, chapitre** 2), et J^h l'isomorphisme entre H^h et $\mathscr{C}(\Phi^h)$. Toutes les propriétés du recollement et de la frontière de Feller totale $\hat{\Phi}$, prouvées dans le § 6 (chapitre 1), sont encore valables ici, car l'espace Stonien associé à H^h est une partie de l'espace compact totalement discontinu associé à $\mathscr{H}^h$ (voir § 1 chapitre 2).

L'espace Γ^h est défini comme le quotient de Φ^h par rapport aux fonctions $N^h(f)$ $(f \in \mathscr{C}_K(E))$; $N^h(f)$ est naturellement le représentant continu de la densité de la mesure terminale associée à (fhm), définie sur Φ^h, par rapport à la mesure terminale associée à (φhm). De façon analogue on définit τ^h et λ^h les relativisés de τ et λ ; par exemple λ^h est la mesure image, sur Γ^h, de la mesure terminale associée à (φhm), définie sur Φ^h. Tous les résultats établis dans les § 1 et 2 pour Γ sont encore valables pour Γ^h. En particulier, il existe un isomorphisme d'algèbre R^h, positif et isométrique entre $L^\infty(\Gamma^h,\lambda^h)$ et H^h, qui vérifie :

$$\int_E f.R^h(v)\, h\, dm = \int_{\Gamma^h} v\, \tau^h(f)\, d\lambda^h$$

pour tout $f \in L^1(E^h, m)$ et tout $v \in L^\infty(\Gamma^h, \lambda^h)$. Donc à chaque $v \in L^\infty(\Gamma^h, \lambda^h)$ correspónd la fonction harmonique $R^h(v).h$, qui est (φm)-intégrable.

La méthode de recollement des espaces Γ^h est donnée par le résultat suivant :

Proposition 2.

Pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$, il existe une fonction continue bornée $\hat{N}f$ sur $\hat{\Phi}$ telle que $\hat{N}f \circ \xi = \sum_h N^h f$ (rappelons que ξ désigne la projection canonique de $\sum_h \Phi^h$ sur $\hat{\Phi}$; ici $\sum_h N^h f$ désigne la fonction, définie sur $\sum_h \Phi^h$, qui est égale à $N^h f$ sur chacun des Φ^h).

Démonstration.

Etant donnée la méthode de recollement employée pour construire $\hat{\Phi}$, il suffit de prouver que, quelles que soient h_o et h_1, harmoniques, positives, (φm)—intégrables, $N^{h_o+h_1}(f) \circ q_{h_o}^{h_o+h_1} = N^{h_o}(f)$. Plus concrètement, ceci revient à prouver que les fonctions $N^{h_o}(f)$ et $N^{h_1}(f)$ sont égales sur la partie "commune" à Φ^{h_o} et Φ^{h_1}. D'après la proposition 1, on a :

$$N^{h_o+h_1}(f) = J^{h_o+h_1}(\pi^{h_o+h_1}(f(h_o+h_1)/\varphi(h_o+h_1))_{T^{h_o+h_1}}) \qquad \text{et}$$

$$N^{h_o}(f) = J^{h_o}(\pi^{h_o}(fh_o/\varphi h_o)_{T^{h_o}}) \; .$$

Or d'après l'égalité $h\,T^i(f) = (T^h)^i = (T^h)^i\,(fh)$ il est clair que

$$(f(h_o+h_1)/\varphi(h_o+h_1))_{T^{h_o+h_1}} = 1_{E^{h_o+h_1}}\,(f/\varphi)_T \qquad \text{et}$$

$$(fh_o/\varphi h_o)_{T^{h_o}} = 1_{E^{h_o}}\,(f/\varphi)_T \; .$$

Le lemme 6 (chapitre 1) permet d'écrire alors

$$\pi^{h_o}(\pi^{h_o+h_1}(f(h_o+h_1)/\varphi(h_o+h_1))_{T^{h_o+h_1}}) = \pi^{h_o}(fh_o/\varphi h_o)_{T^{h_o}}$$

ce qui prouve l'égalité cherchée d'après la définition de $q_{h_o}^{h_o+h_1}$. Ces fonctions $\hat{N}f$ sont manifestement continues et bornées, car les fonctions $N^h f$ sont bornées uniformément par la borne de $(f/\varphi)_T$.

On peut alors donner la :

Définition 2.

On appelle "frontière de Martin abstraite" du processus, et on note $\hat{\Gamma}$, l'espace quotient de la frontière de Feller totale $\hat{\Phi}$ par rapport aux fonctions $\hat{N}f$, pour $f \in \mathscr{C}_k(E)$.

Cet espace est localement compact car $\hat{\Phi}$ l'est et que les fonctions $\hat{N}f$ sont bornées. En utilisant les limites de Chacon et Ornstein $(f/\varphi)_T$, il est facile de voir aussi que la suite $(\hat{N} f_i)_{i=0...}$ est dense dans $\{\hat{N}f \; ; \; f \in \mathscr{C}_k(E)\}$ si la suite $(f_i)_{i=0..}$ est dense dans $\mathscr{C}_k(E)$. Donc $\hat{\Gamma}$ est métrisable.

Cet espace est le recollé des "parties atteintes" Γ^h en effet, d'après la définition, Γ^h est identique à la partie de $\hat{\Gamma}$ qui provient de la partie $\xi(\Phi^h)$ de $\hat{\Phi}$. On peut alors considérer que λ^h et $\tau^h(f)$ $(f \in \mathscr{C}_k(E))$ sont définies sur $\hat{\Gamma}$, et portées par Γ^h. Pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$, $\hat{N}f$ est factorisable, et définit sur $\hat{\Gamma}$ une fonction continue $\hat{\tau}(f)$: les fonctions $\tau^h f$ sont alors reliées par la relation suivante :

$$\tau^h(f) = \hat{\tau}(f) \text{ en restriction à } \Gamma^h$$

ceci d'après le lemme 1. On peut alors énoncer le :

Théorème 4.

L'application $h \longrightarrow \lambda^h$ est un homomorphisme, strictement positif, de l'espace des fonctions harmoniques (φm)-intégrables, dans l'espace des mesures finies sur $\hat{\Gamma}$, qui vérifie $\int_E fh \, dm = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{\tau}(f) \, d\lambda^h$ pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$ et $\int_E \varphi h \, dm = \lambda^h(\hat{\Gamma})$.

Cet homomorphisme n'est qu'un "prolongement" de l'isomorphisme R entre H et $L^\infty(\Gamma,\lambda)$ donné par le théorème 2. En effet, si $h \in H$, on a

$\xi(\Phi^h) \subset \xi(\Phi)$ et donc $\Gamma^h \subset \Gamma$; d'autre part λ^h a une densité bornée u par rapport à λ, qui vérifie, pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$:

$$\int_E f\, h\, dm = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{\tau}(f)\, d\lambda^h = \int_{\Gamma} \tau(f)\, u\, d\lambda$$

donc $h = R(u)$.

La construction abstraite généralise la construction concrète. En effet, sous les hypothèses (I) (II) (III) (IV) (V) (§ 3 chapitre 2), en appliquant les résultats du § 2 aux processus relativisés, on voit que Γ^h est identique à C_{μ^h} pour tout h harmonique, (φm)-intégrable. (C_{μ^h} est le support de la mesure μ^h dans la frontière concrète M). De plus $\lambda^h = \mu^h$ et pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$, $\hat{\tau}(f) = Kf$ en restriction à chacune des parties $\Gamma^h = C_{\mu^h}$. Ceci implique que $\hat{\Gamma}$ est identique à $\bigcup_h C_{\mu^h}$, que $\hat{\tau}(f) = Kf$ sur cet ensemble, et que les deux représentations intégrables sont identiques. (le morceau de la frontière concrète qui ne figure pas dans $\hat{\Gamma}$ (i.e. $M - \bigcup_h C_{\mu^h}$ ne présente évidemment aucun intérêt).

Notons qu'il est possible de traiter la relativisation d'une manière légèrement différente. Au lieu de définir l'opérateur T^h, associé à une fonction h harmonique positive, (φm)-intégrable, sur $L^1(E^h, m)$, on aurait pu le définir sur $L^1(E^h, (hm))$; dans ce cas, évidemment, la définition de T^h est différente. Cette méthode est peut-être plus voisine de la méthode classique, mais donne les mêmes résultats.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.A. AKCOGLU — An ergodic lemma.
Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965) 388-392.

[2] M.A. AKCOGLU et R.W. SHARPE — Ergodic theory and boundaries.
Trans. Amer. Math. Soc. (1968) 447-460.

[3] R. AZENCOTT — Marches aléatoires sur les groupes localement compacts.
Comptes-rendus Acad. Sci. Paris 268 (1969) 1406-1409.

[4] M. BRELOT — Eléments de la théorie classique du potentiel.
"Les cours de Sorbonne" C.D.U. Paris.

[5] A. BRUNEL — Sur un lemme ergodique voisin du lemme de E. HOPF et sur une de ses applications.
Comptes-rendus Acad. Sci. Paris 256 (1963) 5481-5484.

[6] A. BRUNEL — Thèse
Paris 1966.

[7] R.V. CHACON — Identification of the limit of operator averages
J. Math. Mech. 11 (1962) 961-968.

[8] R.V. CHACON et D.S. ORNSTEIN — A general ergodic theorem.
Illinois J. Math. 4 (1960) 153-160.

[9] G. CHOQUET et P.A. MEYER — Existence et unicité des représentations intégrales dans les ensembles convexes compacts quelconques.
Ann. Inst. Fourier. Grenoble 13 (1963) 139-154.

[10] J.L. DOOB — Discrete potential theory and boundaries.
J. Math. Mech. 8 (1959) 433-458.

[11] J.L. DOOB — A ratio operator limit theorem.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1 (1963) 288-294.

[12] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ — Linear operators Part. I
Interscience Publ. 1958.

[13] E.B. DYNKIN — Boundary theory of Markov processes (the discrete case).
Russian Math. Surveys 24 n° 2 (1969).

[14] J. FELDMAN — Feller and Martin boundaries for countable sets
Illinois J. Math. 6 (1962) 356-366.

[15] W. FELLER — Boundaries induced by non negative matrices
Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956) 19-54.

[16] H. FÜRSTENBERG — Poisson formula for semi-simple Lie groups
Ann. Math. 77 (1963).

[17] E. HOPF — The general temporally discrete Markov process
J. Rat. Mech. Anal. 3 (1954) 13-45.

[18] G.A. HUNT — Markoff chains and Martin boundaries.
Illinois J. Math. 4 (1960) 313-340.

[19] S. KAKUTANI — Concrete representation of abstract (M)-spaces
Ann. Math. 42 (1941) 994-1024.

[20] J.G. KEMENY, J.L. SNELL and A.W. KNAPP — Denumerable Markov chains.
Van Nostrand 1966.

[21] R.S. MARTIN — Minimal positive harmonic functions
Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941) 137-172.

[22] J. NEVEU — Bases mathématiques du calcul des probabilités
Masson (Paris) 1964.

[23] J. NEVEU — Chaînes de Markov et théorie du potentiel.
Ann. Fac. des Scienes de Clermont-Ferrand
24 (1964) 37-89.