

G. BRAY

**À propos de la généralisation d'un résultat de théorie ergodique
à des espaces uniformément convexes**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1970-1971, fascicule 1

« Probabilités », , p. 155-176

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1970-1971__1_155_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

A PROPOS DE LA GENERALISATION D'UN RESULTAT
DE THEORIE ERGODIQUE A DES ESPACES UNIFORMEMENT CONVEXES

PAR

Monsieur G. BRAY *

INTRODUCTION. -

En théorie ergodique, nous avons le résultat suivant [3].

Soit T une contraction unitaire sur un espace de Hilbert, si la suite $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une projection P alors pour toute suite croissante d'entiers $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la moyenne arithmétique $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} x$ converge fortement vers $P(x)$.

M. Sucheston m'a demandé d'étudier la généralisation de ce résultat au cas d'une contraction opérant sur un espace uniformément convexe.

Ces résultats sont généralisés dans deux cas :

1. A une isométrie inversible sur un espace E uniformément convexe dont le dual E^* est strictement convexe, l'application de dualité J de E dans E^* étant faiblement continue. Nous avons remarqué qu'il était possible dans ce cas de définir le J -adjoint d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$, cette notion présentant des analogies avec la notion d'adjoint dans les espaces de Hilbert. Cette notion est déjà implicitement contenue dans les travaux de Kakutani livrant ([11], [12]).

2. Cas d'une contraction normale sur un espace de Hilbert.

Depuis que cette étude a été commencée, de nombreux résultats dans cette direction ont été obtenus, en particulier par Lee Kenneth Jones [13] et Mustafa Akcoglu et Louis Sucheston [14]. Il semble cependant que la question posée par le Professeur Louis Sucheston reste ouverte.

Le paragraphe IV donne une réponse affirmative à une question posée par le Professeur S. Kakutani au Congrès de théorie ergodique de Paimpol de 1971.

I - NOTION D'OPERATEUR J - ADJOINT
DANS UN ESPACE UNIFORMEMENT CONVEXE

1 - Résultats préliminaires :

1.1 On pourra trouver les définitions et résultats exposés dans ce paragraphe principalement dans [3] [2] et [1]

Définition 1 : Un espace de Banach est strictement convexe si

$$||x + y|| = ||x|| + ||y|| \implies y = \lambda x \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Corollaire 1 : Un espace de Banach E réel est strictement convexe si et seulement si tout $x^* \in E^*$ atteint sa norme en au plus un point de la boule unité de E.

Définition 2 : Un espace de Banach E est uniformément convexe si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que :}$$

$$\forall x, y \in E : ||x|| = ||y|| = 1$$

$$||x - y|| \geq \epsilon \implies ||x + y|| \leq 2(1 - \delta(\epsilon))$$

Définition 3 : Un espace de Banach E est uniformément lisse si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que si } ||x|| = ||y|| = 1$$

$$||x - y|| < \delta(\epsilon) \quad ||x + y|| (1 + \epsilon) \geq ||x|| + ||y||$$

Propriété 1 : Le dual d'un espace de Banach uniformément convexe (resp. uniformément lisse) est uniformément lisse (resp. uniformément convexe).

Propriété 2 : Un espace de Banach E uniformément convexe est réflexif et strictement convexe.

Propriété 3 : Une suite x_n d'éléments d'un espace E uniformément convexe convergeant faiblement vers x_0 converge fortement vers x_0 si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} ||x_n|| = ||x_0||$.

1.2 Applications de dualité :

\mathbb{R}^+ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, E est un espace de Banach, E^* son dual, si $x \in E$ et $x^* \in E^*$ (x^*, x) désigne la dualité entre E^* et E .

Définition 4 : Soit φ une application continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \infty$.

Une application J de E dans E^* est dite application de dualité (associée à φ) si et seulement si

$$\forall u \in E \quad (J(u), u) = -\|J(u)\| \|u\|$$

$$\|J(u)\| = \varphi(\|u\|)$$

Propriétés : a) Pour tout espace de Banach E il existe une application de dualité de E dans E^* (non nécessairement univoque) associée à φ .

b) Si E^* est strictement convexe, il existe exactement une application de dualité J pour toute fonction φ vérifiant les conditions de la définition 4.

c) Si E est réflexif et strictement convexe alors l'application de dualité correspondant à chaque φ est continue de E dans la topologie faible E^* .

Définition 5 : Une application de dualité J sera dite faiblement continue si elle est continue de E muni de sa topologie faible dans E^* muni de sa topologie faible.

Définition 6 : Dans un espace de Banach X x sera dit orthogonal à y si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{C} \quad \|x + ky\| \geq \|x\| \quad (\text{Nous noterons } x \perp y)$$

Cette notion n'est pas symétrique en général.

Propriétés : x est orthogonal à y si et seulement si

$$\text{il existe } x_0^* \in X^* \text{ tel que } (x_0^*, x) = \|x_0^*\| \|x\|$$

$$\text{et } (x_0^*, y) = 0$$

(cf. 7 Th. 2.1 et § 5)

Corollaire : Si E est un espace de Banach et E* strictement convexe alors

$x \perp y$ si et seulement si

$$(Jx, y) = 0$$

Si $x \perp y$ on dira aussi que x est J - orthogonal à y.

2 - Notion d'opérateur J - adjoint dans un espace uniformément convexe.

Soit E un espace uniformément convexe, son dual E* étant strictement convexe. Soit J l'application de dualité de E dans E* associée à une fonction φ possédant les propriétés de la définition 4.

Définition 2.1 : Soit T un opérateur de $\mathcal{L}(E)$; si $J^{-1} {}^t T J$ appartient à $\mathcal{L}(E)$ on dira que $J^{-1} {}^t T J$ est l'opérateur J - adjoint de T (noté \tilde{T}).

Définition 2.2 : Soit T $\in \mathcal{L}(E)$ admettant un opérateur J - adjoint :

$$\tilde{T} = J^{-1} {}^t T J$$

a) T sera dit J - normal $\iff T \tilde{T} = \tilde{T} T$

b) T sera dit J - autoadjoint $\iff T = \tilde{T}$

c) T sera dit J - unitaire $\iff \tilde{T} \tilde{\tilde{T}} = \tilde{\tilde{T}} T = I$

Proposition 2.1 : Si T est une isométrie de E sur E alors T est J - unitaire.

Démonstration : En effet, $J T^{-1} x$ est l'unique forme linéaire de E* telle que

$$(J T^{-1} x, T^{-1} x) = \|J T^{-1} x\| \|T^{-1} x\| = \|J T^{-1} x\| \|x\|$$

et $\|J T^{-1} x\| = \varphi(\|T^{-1} x\|) = \varphi(\|x\|)$

or $({}^t T J x, T^{-1} x) = (J x, x) = \varphi(\|x\|) \|x\|$

et $\|{}^t T J x\| \|x\| < \|J x\| \|x\| = \varphi(\|x\|) \|x\|$

or $\|x\| \|J x\| = (J x, x) = ({}^t T J, x T^{-1} x) \leq \|{}^t T J x\| \|x\| \leq \|J x\| \|x\|$

d'où $\|{}^t T J x\| = \|J x\| = \varphi(\|x\|) \|x\|$

et en vertu de l'unicité de la forme linéaire $J T^{-1} x$:

$$\forall x \in E \quad J T^{-1} x = {}^t T J x$$

d'où $T^{-1} = J^{-1} {}^t T J$ i. e. T est J - unitaire.

Remarque : Cette proposition met en évidence le fait qu'il existe des opérateurs ayant un J - adjoint :

Dans [12] , F.E. Sullivan et H.B. Cchen ont introduit dans un espace de Banach la notion de \mathcal{F} - projection dont nous rappelons la définition.

Définition 2.3 : Soit \mathcal{F} une fonction continue strictement croissante de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , une projection P d'un espace de Banach E dans lui même est une \mathcal{F} - projection si

$$\mathcal{F}(\|x\|) = \mathcal{F}(\|Px\|) + \mathcal{F}(\|(I-P)(x)\|) \quad \forall x \in E$$

Définition 2.4 : Dans un espace de Banach E, un sous espace X sera dit J - orthogonal au sous espace Y (ce que l'on notera $X \perp Y$) si et seulement si :

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \perp y$$

X et Y seront dits orthogonaux si et seulement si $X \perp Y$

et $Y \perp X$.

Proposition 2.2 : Soit E un espace uniformément convexe dont le dual E^* est strictement convexe, alors une projection P de E est une \mathcal{F} - projection (avec $\mathcal{F}(r) = r \varphi(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$) si et seulement si P et I-P sont J - autoadjoints.

Démonstration : Soit P une projection de E telle que P et (I - P) soient J - autoadjoints alors :

$$\begin{aligned} (Jx, x) &= (Jx, Px) + (Jx, (I-P)x) = ({}^t P Jx, Px) + ({}^t (I-P) Jx, (I-P)x) \\ &= (J Px, Px) + (J (I-P)x, (I-P)x) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \|x\| \quad (\|x\|) = \|Px\| \quad (\|Px\|) + \|(I-P)x\| \quad \|(I-P)(x)\|$$

donc P est une \mathcal{F} - projection avec \mathcal{F} telle que

$$\mathcal{F}(r) = r \varphi(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$$

Réciproquement, soit P une \mathcal{F} - projection avec \mathcal{F} comme précédemment alors

$$\forall z \in E \quad \|z\| \varphi(\|z\|) = \|Pz\| \varphi(\|Pz\|) + \|(I-P)z\| \varphi(\|(I-P)z\|)$$

considérant $z = Px + k(I-P)y \quad x, y \in E, k \in \mathbb{C}$

On en déduit que

$$\|Px + k(I-P)y\| \varphi(\|Px + k(I-P)y\|) \geq \|Px\| \varphi(\|Px\|)$$

φ étant croissante ceci équivaut

$$\|Px + k(I-P)y\| \geq \|Px\|$$

d'où $\forall u \in P(E) \quad \forall v \in (I-P)(E)$ et $\forall k \in \mathbb{C}$

$$\|u + kv\| \geq \|u\|$$

Soit $P(E) \xrightarrow{J} (I-P)(E)$. De la même façon, en considérant $z = (I-P)x$

on aurait $(I-P)(E) \xrightarrow{J} P(E)$.

$P(E)$ et $(I-P)(E)$ étant J -orthogonaux

$$\forall x \text{ et } y \in E \quad (J Px, (I-P)y) = 0$$

$$\text{soit } (J Px, y) - ({}^t P J Px, y) = 0 \text{ d'où } J Px = {}^t P J Px \quad \forall x \in E$$

de même en considérant $(I-P)(E) \xrightarrow{J} P(E)$

$$\forall x \text{ et } y \in E \quad (J (I-P)x, Py) = 0$$

$$\text{d'où } (J (I-P)x, (I-P)y) = (J (I-P)(x), y)$$

$$\text{soit } \forall x \in E \quad {}^t (I-P) J (I-P)x = J (I-P)x$$

or P est une \mathcal{F} projection

$$\begin{aligned} (Jx, x) &= (JPx, Px) + (J(I-P)x, (I-P)x) \\ &= ({}^t P J Px, x) + ({}^t (I-P) J (I-P)x, x) \end{aligned}$$

d'où en vertu de l'unicité de Jx

$$Jx = {}^t P J Px + {}^t (I-P) J (I-P)x$$

et compte tenu de ce qui précède $Jx = JPx + J(I-P)x \quad \forall x \in E$

En remarquant que $(I-P)(E) \xrightarrow{J} P(E)$ peut également s'écrire

$$\forall x \in E \quad {}^t P J (I-P)x = 0$$

$$\text{comme } {}^t P J x = {}^t P J (Px + (I-P)x) = {}^t P J Px + {}^t P J (I-P)x$$

$$\text{soit } {}^t P J x = {}^t P J x = {}^t P J Px = J Px$$

ce qui achève la démonstration du fait que , si P est une \mathcal{F} - projection, alors P et (I - P) sont J - autoadjoints.

Corollaire 2.2 : a) Pour toute \mathcal{F} - projection P et tout $x \in E$, on a

$$J x = J P x + J (I - P) x$$

b) Pour toute famille finie de \mathcal{F} - projections $(P_i \mid 1 \leq i \leq n)$

telle que

$$\bigcup_{i=1}^n P_i = P$$

$$P_i \wedge P_j = 0 \quad \forall i \text{ et } \forall j \text{ avec } i \neq j$$

et pour toute suite de nombres complexes $\{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

$$J \left(\sum_{i=1}^n a_i P_i (x) \right) = \sum_{i=1}^n J (a_i P_i (x))$$

Démonstration :

Le a) résulte de la démonstration qui en est donnée dans la proposition 2.2.

$$b) \text{ Soit } y = \sum_{i=1}^n a_i P_i (x)$$

$$P_1 (y) = a_1 P_1 (x) \text{ et } (I - P_1) (y) = \sum_{i=2}^n a_i P_i (x)$$

compte tenu de a).

$$J y = J (a_1 P_1 (x)) + J \left(\sum_{i=2}^n a_i P_i (x) \right)$$

$$\text{comme } P_2 (I - P_1) y = a_2 P_2 (x) \text{ et } (I - P_2) (I - P_1) y = \sum_{i=3}^n a_i P_i (x)$$

on en déduit de proche en proche

$$J y = \sum_{i=1}^n J (a_i P_i (x))$$

Or, d'après un résultat de Browder, E étant uniformément convexe et E^* strictement convexe

$$\forall t \in \mathbb{C} \quad \exists s_w(t) \in \mathbb{C} \text{ tel que } J (tw) = s_w(t) J (w)$$

en effet J (tw) est l'unique forme linéaire telle que

$$(J(tw), tw) = \|J(tw)\| \|tw\| \text{ et } \|J(tw)\| = \varphi(\|tw\|)$$

$$\text{or } (s J (w), tw) = st \|J(w)\| \|w\| \|J(w)\| = \varphi(\|w\|)$$

donc si $t = 0$ prenons $s_w(t) = 0$

et si $t \neq 0$ et $w \neq 0$ $s_w(t) = s = \frac{||J(tw)||}{||J(w)||} \frac{||t||}{t}$

d'où $(s J(w), tw) = ||J(tw)|| ||tw||$

et en vertu de l'unicité $J(tw) = s_w(t) J(w)$

avec $s_w(0) = 0$

$$s_w(t) = \frac{\varphi(||tw||)}{\varphi(||w||)} \frac{|t|}{t} \quad \text{et } s_0(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

Si on considère φ_0 telle que $\varphi_0(r) = r \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$

alors $s_w(t) = \bar{t} \quad \forall w \neq 0$

et dans ce cas

$$J\left(\sum_{i=1}^n a_i P_i(w)\right) = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i J P_i(x)$$

Si on place dans L^p avec $\varphi(t) = r^{p-1} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$

alors $s_w(t) = \frac{|t|^p}{t}$ si $t \neq 0$

De même $\forall t \in \mathbb{C} \exists s'_w(t) \in \mathbb{C}$ tel que

$\forall w \in E^* \quad J^{-1}(tw) = s'_w(t) J^{-1}(w)$

avec $s'_w(t) = \frac{\varphi^{-1}(|tw|)}{\varphi^{-1}(|w|)} \frac{|t|}{t}$

Théorème 2.1 :

Soit dans $\mathcal{L}(E)$ \mathcal{P} une algèbre booléenne complète de \mathcal{F} projections, \mathcal{G} l'algèbre faiblement fermée engendrée par \mathcal{P} . Supposons de plus que $s'_w(t)$ est comme dans les exemples ci dessus une fonction indépendante de w , (notée $s'(t)$), continue de \mathbb{C} dans \mathbb{C} et telle que $s'(0) = 0$

$$\text{Alors } \tilde{T}(x) = \int s[\psi_T(w)] \Lambda(dw)(x)$$

Tout opérateur de \mathcal{G} est J -normal. Si de plus on suppose

$\varphi = \varphi_0$ alors la J -adjonction est involutive.

Démonstration :

Il résulte du théorème A.5 page 358 de [1] que \mathcal{G} est aussi l'algèbre uniformément fermée engendrée par \mathcal{P} et que \mathcal{G} est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{C}(\Omega)$ des fonctions continues sur l'espace de représentation Ω de \mathcal{P} hyperstonien.

cet isomorphisme étant donné par

$$C(\Omega) \ni h \longrightarrow \int_{\Omega} h(w) \Lambda(dw)$$

où $\Lambda(\cdot)$ est une mesure sur Ω telle que pour tout sous ensemble ouvert et

fermé σ de Ω $\Lambda(\sigma) \in \mathcal{P}$. Nous désignerons par \mathcal{B} l'algèbre booléenne des

ouverts et fermés de Ω . Soit $T \in \mathcal{G}$ alors il existe $\psi_T \in C(\Omega)$ telle que

$$Tx = \int_{\Omega} \psi_T(w) \Lambda(dw)(x)$$

La notion d'intégrale utilisée étant celle de Dunford cf [6] p. 340

On remarque que ${}^t T x' = \int_{\Omega} \psi_T(w) {}^t \Lambda(dw)(x')$

en effet $(Tx, x') = (x, {}^t T x') = \int_{\Omega} \psi_T(w) (\Lambda(dw)(x, x'))$
 $= \int_{\Omega} \psi_T(w) (x, {}^t \Lambda(dw)(x'))$

Soit une suite de fonctions g_n avec

$$g_n(w) = \sum_{i=1}^{P_n} a_{i_n} (1_{O_{i_n}})(w) \quad O_{i_n} \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad a_{i_n} \in \mathbb{C}$$

telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(w) = \psi_T(w)$ sauf sur un ensemble de Λ mesure nulle donc rare.

Alors $\int_{\Omega} g_n(w) {}^t \Lambda(dw)(x') = \sum_{i=1}^{P_n} a_{i_n} {}^t \Lambda(1_{O_{i_n}})(x')$

converge fortement vers ${}^t Tx$, d'où il résulte que $J^{-1}(\int_{\Omega} g_n(w) {}^t \Lambda(dw)(x'))$ converge faiblement vers $J^{-1} {}^t Tx'$ lorsque n tend vers l'infini.

Or $J^{-1}(\sum_{i=1}^{P_n} a_{i_n} {}^t \Lambda(1_{O_{i_n}})(x')) = \sum_{i=1}^{P_n} s'(a_{i_n}) J^{-1} {}^t \Lambda(1_{O_{i_n}})(x')$

Compte tenu du fait que les projections sont des \mathcal{F} -projections

$$J^{-1}(\int_{\Omega} g_n(w) {}^t \Lambda(dw)(x')) = \sum_{i=1}^{P_n} s'(a_{i_n}) {}^t \Lambda(1_{O_{i_n}})(J^{-1}x')$$

qui converge faiblement vers $J^{-1} {}^t Tx'$ lorsque n tend vers l'infini.

$g_n(w)$ convergeant vers $\psi_T(w)$ sauf sur un ensemble de Λ mesure nulle,

s' étant continue $s[g_n(w)]$ converge vers $s[\psi(w)]$ lorsque n tend vers

l'infini sauf sur un ensemble de Λ mesure nulle et

$\sum_{i_n=1}^P s' (a_{i_n}) {}^t \Lambda (1_{Q_{i_n}}) (J^{-1} x')$ converge fortement vers

$$\int_{\Omega} s [\psi_T(w)] {}^t \Lambda(dw) (J^{-1} x')$$

d'où $J^{-1} {}^t T x' = \int_{\Omega} s [\psi_T(w)] {}^t \Lambda(dw) (J^{-1} x')$

Posant $J x = x'$

$$\tilde{T} x = J^{-1} {}^t T J x = \int_{\Omega} s [\psi_T(w)] {}^t \Lambda(dw) (x)$$

et $\tilde{T} T(x) = T \tilde{T}(x) = \int_{\Omega} \psi_T(w) s [\psi_T(w)] {}^t \Lambda(dw) (x)$

donc T est J normal.

On remarque que

$$\tilde{\tilde{T}} = \int_{\Omega} s^2 [\psi_T(w)] {}^t \Lambda(dw)$$

et l'opération de J - adjonction est involutive si et seulement si

$$s [\psi_T(w)] = \overline{\psi_T(w)}$$

Remarques :

1. On retrouve ici l'analogie avec la notion d'adjoint telle qu'on la trouve dans les espaces de Hilbert.

2. Etant donné un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ il serait intéressant de répondre aux questions suivantes :

a) Peut-on caractériser la classe des $T \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E)$ et $T \tilde{T} = \tilde{T} T$ où tout du moins est-il possible de donner des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi ?

b) Si $T \in \mathcal{L}(E)$ est J - normal la sous algèbre faiblement fermée de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par T et \tilde{T} est-elle engendrée par une algèbre booléenne complète de \mathcal{F} - projections ?

3. Quelques exemples.

Soit (S, Σ, μ) un espace de probabilité. Considérons les espaces $L^p(S, \Sigma, \mu)$ et $L^\infty(S, \Sigma, \mu)$ que nous noterons respectivement L^p et L^∞ . Soit U une isométrie de L^p sur L^p et $g \in L^\infty$.

a) L'opérateur T_1 de L^p dans L^p défini par $T_1 f = g U f$ pour tout f de L^p est tel que

$$\tilde{T}_1 f = U^{-1} ((J^{-1}g)f) \text{ et } \tilde{T} \in \mathcal{L}(L^p)$$

$$\text{Si de plus } \forall h \in L^\infty \quad \forall v \in L^p \quad U^{-1}(hv) = U^{-1}(h) U^{-1}(v)$$

et si $U^{-1}(g J^{-1}(g)) = g J^{-1}(g)$ l'opérateur est J -normal.

Démonstration :

$$\tilde{T}_1 f = J^{-1} {}^t T_1 f \quad \text{or } {}^t T_1 J f = {}^t U(g J f)$$

$$\text{d'où } \tilde{T}_1 f = J^{-1} {}^t U(g J f)$$

or U est une isométrie de L^p sur L^p donc est J -unitaire

$$\text{d'où } \tilde{T}_1 f = U^{-1} J^{-1}(g J f)$$

or dans L^p si on prend $J f = |f|^{p-1} \text{sgn } f$ alors

$$J^{-1}(g J f) = (J^{-1}g) f$$

$$\tilde{T}_1 f = U^{-1}(f J^{-1}(g))$$

$$\tilde{T}_1 T_1 f = U^{-1}(g J^{-1}(g) f) \text{ et } T_1 \tilde{T}_1 f = g J^{-1}(g) f$$

$$\text{et compte tenu des hypothèses faites } \tilde{T}_1 T_1 = T_1 \tilde{T}_1$$

b) L'opérateur T_2 de L^p dans L^p défini par

$$\forall f \in L^p \quad T_2 f = U^{-1}(g U f) \text{ est } J\text{-normal}$$

$$\text{et } T_2 f = U^{-1}(J^{-1}(g) U f)$$

Le calcul est analogue au calcul précédent. On trouve

$$\tilde{T}_2 T_2 f = T_2 \tilde{T}_2 f = U^{-1}(g J^{-1}(g) U f)$$

II - Un résultat de théorie ergodique. -

Théorème 1 :

Soit E un espace de Banach dont le dual E* est strictement convexe, l'application de dualité de E dans E* étant faiblement continue.

Soit T une isométrie inversible sur E telle que la suite $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un opérateur de projection P sur E lorsque n tend vers l'infini. Alors, pour toute suite croissante d'entiers $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $k_i \in \mathbb{N}$; et pour tout x de E $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} x$ converge fortement vers P(x).

Démonstration :

Il est facile de voir qu'il suffit de se restreindre à $x \in E_0 = \{x \mid Px = 0\}$. En effet des égalités

$$(T^{n+1} x, y) = (T^n Tx, y) = (T T^n x, y) = (T^n x, {}^t T y)$$

il résulte, en faisant tendre n vers l'infini et compte tenu des hypothèses, que

$$T P x = P T x = P x$$

$$\text{ce qui implique } P x = x \iff T x = x$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} x - P x = \frac{\sum_{i=1}^n T^{k_i} (x - P x)}{n} \quad \text{avec } x - P x \in E_0.$$

Soit $x \in E_0$, montrons que

$$\left(J \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} x \right), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} x \right) = \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} x \right\| \varphi \left(\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} x \right\| \right)$$

tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

$$\left(J \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} x \right), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} x \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ({}^t T^{k_i} J \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} x \right), x)$$

Or, d'après la proposition 2.1, T est J -unitaire d'où

$$t_T^{k_j} J = J T^{-k_j}$$

l'expression précédente est donc égale à

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(J \left(\sum_{i=1}^n \frac{T^{k_i - k_j} x}{n} \right) , x \right)$$

lorsque n tend vers l'infini si on fait d'abord tendre i vers l'infini j étant fixé.

$T^{k_i - k_j} x \longrightarrow 0$ (\longrightarrow désigne la convergence faible)
 et $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i - k_j} x \longrightarrow 0$, comme J est faiblement continue

$$\left(J \left(\sum_{i=1}^n \frac{T^{k_i - k_j} x}{n} \right) , x \right) \longrightarrow 0$$

et la moyenne arithmétique de ces quantités tend aussi vers zéro.

La fonction φ qui définit l'application de dualité J étant continue strictement croissante, il en est de même de la fonction \mathcal{F} .

$\mathcal{F}(r) = r \varphi(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$ qui admet une fonction réciproque continue telle que $\mathcal{F}^{-1}(0) = 0$.

On vient de démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F} \left(\left\| \sum_{i=1}^n \frac{T^{k_i} x}{n} \right\| \right) = 0$

Il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n \frac{T^{k_i} x}{n} \right\| = 0$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

III - Cas d'un opérateur normal :

Théorème :

Soit T une contraction normale sur un espace de Hilbert \mathcal{H} telle que la suite $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un opérateur de projection P . Alors pour toute suite croissante d'entiers $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et pour tout $x \in E$, la suite

$$\frac{T^{k_1} x + T^{k_2} x + \dots + T^{k_n} x}{n}$$

converge fortement vers $P x \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

Démonstration :

Soit \mathcal{A} la W^* -algèbre engendrée par T . \mathcal{A} est isomorphe à l'espace des fonctions continues $C(\mathcal{M})$ sur le spectre \mathcal{M} de \mathcal{A} qui est hyperstonien. Soit $\varphi_S \in C(\mathcal{M})$ l'image d'un opérateur S de \mathcal{A} par l'isomorphisme de Gelfand et soit Λ la mesure spectrale sur \mathcal{M} , on a

$$\|S\| = \|\varphi_S\|$$

$$Sx = \int_{\mathcal{M}} \varphi_S(m) \Lambda(dm) x$$

La suite $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers P , alors $P \in \mathcal{A}$ et $P(x) = \int_{\mathcal{M}} 1_0(m) \Lambda(dm) x$ où 0 est un sous ensemble ouvert et fermé de \mathcal{M} .

L'hypothèse se traduit par :

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} [\varphi_T^n(m) - 1_0(m)] \langle \Lambda(dm) x, y \rangle = 0$$

T étant une contraction $|\varphi_T(m)| \leq 1$.

Posons :

$$\mathcal{M}_1 = \{m \mid m \in \mathcal{M} \text{ et } |\varphi_T(m)| = 1\}$$

$$\mathcal{M}_2 = \{m \mid m \in \mathcal{M} \text{ et } |\varphi_T(m)| < 1\}$$

$$\forall m \in \mathcal{M}_2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_T^n(m) = 0$$

L'ensemble m_2 peut être remplacé par un ensemble ouvert et fermé m_2' qui diffère de m_2 par un ensemble rare donc de mesure $\langle \Lambda (dm) x, y \rangle$ nulle pour tout x et tout y de \mathcal{H} . Alors, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{m_2'} \varphi_T^n(w) \langle \Lambda (dm) (x), y \rangle = 0 \quad \forall x \text{ et } y \in \mathcal{H}$$

D'où en désignant par m_1' l'ensemble ouvert et fermé complémentaire de m_2' qui diffère de m_1 par un ensemble rare donc de mesure $\langle \Lambda (dm) x, y \rangle$ nulle pour tout x et tout y .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{m_1'} [\varphi_T^n(m) - 1_0(m)] \langle \Lambda (dm) x, y \rangle = 0$$

(Dans cette formule, on peut d'ailleurs remplacer m_1' par m_1).

Démontrons maintenant que $\forall x \in E_0$ ou $E_0 = \{x \mid x \in \mathcal{H} \text{ p.p. } = 0\}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\sum_{p=1}^n T^{k_p} x}{n} \right\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \langle \sum_{p=1}^n T^{k_p} x, \sum_{p=1}^n T^{k_p} x \rangle = 0 \\ \frac{1}{n^2} \langle \sum_{p=1}^n T^{k_p} x, \sum_{p=1}^n T^{k_p} x \rangle &= \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \langle T^{k_q} T^{k_p} x, x \rangle \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \int_{m_1'} \varphi_T^{k_p}(m) \overline{\varphi_T^{k_q}(m)} \langle \Lambda (dm) x, x \rangle \end{aligned}$$

Etudions d'abord :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \int_{m_2} \varphi_T^{k_p}(m) \overline{\varphi_T^{k_q}(m)} \langle \Lambda (dm) (x), x \rangle$$

or, d'après ce qui précède $m \in m_2 \mid |\varphi_T^{k_p}(m) \overline{\varphi_T^{k_q}(m)}| < 1$

$$\text{et } \lim_{k_q \rightarrow \infty} \varphi_T^{k_p}(m) \overline{\varphi_T^{k_q}(m)} = 0$$

d'où $\lim_{k_q \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}_2} \varphi_T^{k_p}(m) \varphi_T^{-k_q}(m) < \Lambda (dm) x, x >$

Maintenant faisons tendre n vers l'infini

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \left[\frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \int_{\mathcal{M}_2} \varphi_T^{k_p}(m) \varphi_T^{-k_q}(m) < \Lambda (dm) x, x > \right]$$

Le crochet est la moyenne arithmétique de quantités qui tendent vers zéro dont il tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. L'expression qui est une moyenne arithmétique de quantités qui tendent vers zéro tend vers zéro.

Etudions maintenant

$$\frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \left[\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \int_{\mathcal{M}_1} \varphi_T^{k_p}(m) \varphi_T^{-k_q}(m) < \Lambda (dm) x, x > \right]$$

Désignons par $\hat{\varphi}_T$ la restriction de φ_T à \mathcal{M}_1 .

L'expression s'écrit alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \left[\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \int_{\mathcal{M}_1} \hat{\varphi}_T^{k_p - k_q}(m) < \Lambda (dm) x, x > \right]$$

Faisons tendre n vers l'infini et remarquons que d'après l'hypothèse

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}_1} \hat{\varphi}_T^{k_p - k_q}(m) < \Lambda (dm) x, x > = 0 \quad x \in E_0$$

et comme pour l'intégrale étendue à \mathcal{M}_2 , la limite est nulle ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque :

Ce résultat s'étend sans aucune difficulté au cas d'un opérateur J - normal appartenant à la sous - algèbre de $\mathcal{L}(X)$ (où x est uniformément convexe) faiblement fermée engendrée par une famille booléenne de \mathcal{F} - projection. Mais ceci présente peu d'intérêt tant qu'on ne sait pas répondre à la question 2b du Ch. I.

IV - Un théorème d'existence :

La démonstration qui suit est basée sur un lemme de S. Kakutani [15] et est très voisine de la démonstration de son théorème [15] .

Lemme :

Soient E un espace uniformément convexe et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que pour tout n $\|x_n\| \leq M$ et qui converge faiblement vers zéro. Alors, il existe une sous suite $\{x_{m_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $1 < m_1 < m_2 < \dots$ extraite de x_n telle que :

$$\left\| \frac{x_{m_{2n-1}} + x_{m_{2n}}}{2} \right\| \leq \vartheta M \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

où $\vartheta = \max \left(\frac{3}{4}, 1 - \delta \left(\frac{1}{2} \right) \right) < 1$ est une constante indépendante de la suite donnée.

δ est le module d'uniforme convexité défini par la condition :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \max(\|x\|, \|y\|) \leq \delta(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq (1 - \delta(\varepsilon)) \max(\|x\|, \|y\|)$$

Théorème :

Soient E un espace uniformément convexe séparable, T_n une suite de contractions de E telle que pour tout $x \in E$ $T_n x$ converge faiblement vers zéro. Alors, il existe une sous suite croissante d'entiers n_i telle que les moyennes de Césaro $\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p T^{n_i} x$ convergent fortement vers zéro pour tout $x \in E$.

Démonstration :

Soit $S = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite totale dans E avec $\|x_k\| = 1$.

Il suffit de prouver que le théorème est vrai pour tout $x_k \in S$.

Soit la suite

$$T_2 x_1, \dots, T_n x_1, \dots \quad \text{avec} \quad \|T_n x_1\| \leq 1 \quad (\forall n)$$

Alors, il existe une sous suite $\{m_p^1\}_{p \in \mathbb{N}, p \geq 1}$ d'entiers telle que

$$1 < m_1^1 < m_2^1 < \dots < m_p^1 \dots \text{ et qui vérifie :}$$

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \left\| \frac{T_{m_{2p-1}^1} x_1 + T_{m_{2p}^1} x_1}{2} \right\| \leq \theta$$

où θ a été défini dans le lemme.

Pour tout $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, $\lambda \in [0, 1]$ considérons la

suite

$$\frac{T_{m_3^1} x + T_{m_4^1} x}{2}, \dots, \frac{T_{m_{2p-1}^1} x + T_{m_{2p}^1} x}{2},$$

alors il existe une sous suite croissante d'entiers $\{m_p^2\}_{p \in \mathbb{N}}$ extraite

de la suite $\{m_p^1\}_{p \in \mathbb{N}, p \geq 3}$ telle que

$$\left\| \frac{T_{m_{4k+1}}^2 x + T_{m_{4k+2}}^2 x + T_{m_{4k+3}}^2 x + T_{m_{4(k+1)}}^2 x}{4} \right\| \leq \theta M \quad k \in \mathbb{N}$$

avec $M = \sup_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \geq 2}} \left\| \frac{T_{m_{2p-1}}^1 x + T_{m_{2p}}^1 x}{2} \right\|$

où θ est indépendant de la suite donnée donc de x .

si $\lambda = 1 \quad x = x_1$ et $M = \theta$ d'après la première partie

$\lambda = 0 \quad x = x_2$ et $M = 1$

Par conséquent, l'inégalité ci dessus nous donne pour

$$x = x_1 \quad \left\| \frac{T_{m_{4p+1}}^2 x_1 + T_{m_{4p+2}}^2 x_1 + T_{m_{4p+3}}^2 x_1 + T_{m_{4(p+1)}}^2 x_1}{4} \right\| \leq \theta$$

$$x = x_2 \quad \left\| \frac{T_{m_{4p+1}}^2 x_2 + T_{m_{4p+2}}^2 x_2 + T_{m_{4p+3}}^2 x_2 + T_{m_{4(p+1)}}^2 x_2}{4} \right\| \leq \theta$$

pour $x = x_i$ avec $i > 2$, ces sommes de 4 termes sont évidemment majorées par 1.

Poursuivons le raisonnement par récurrence. Supposons que à l'étape n nous ayons trouvé une suite $\{m_p^n\}_{p \in \mathbb{N}}$ telle que les blocs dyadiques de longueur 2^n

$$x_k^n = \frac{T_{m_k^n}^n x + T_{m_k^n}^n x + \dots + T_{m_{(k+1)}^n}^n x}{2^n} \quad k \in \mathbb{N}$$

soient majorés par θ^{n+1-p} pour $x = x_p \quad p = 1, 2, \dots, n$

et par 1 pour $x = x_p \quad p > n$

Considérons alors une suite de tels blocs dyadiques obtenue en supprimant le premier de ces blocs ($k > 0$) et avec

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i x_i \quad \lambda^i \in \mathbb{R}, \quad \lambda^1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^n = 1, \quad 0 \leq \lambda^i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\left\{ x_k^n = \frac{T_{m_k^n} x + T_{m_k^n} x + \dots + T_{m_{(k+1)2^n}^n x}{2^n} \right\} \quad k \geq 1$$

Par application du lemme, il existe une sous suite d'entiers $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

telle que

$$\left\| \frac{x_{k_{2i-1}}^n + x_{k_{2i}}^n}{2} \right\| \leq \theta^M \text{ avec } M = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k^n\|$$

Posons alors :

$$m_1^{n+1} = m_{k_0}^n 2^{n+1}, \dots, m_2^{n+1} = m_{(k_0+1)2^n}^n, m_{2^{n+1}}^{n+1} = m_{k_1}^n 2^{n+1}, \dots, m_{2^{n+1}}^{n+1} = m_{(k_1+1)2^n}^n, m_{12^{n+1}}^{n+1} = m_{k_1}^n 2^{n+1}, \dots, m_{(i+2)2^n}^{n+1} = m_{(k_i+2)2^n}^n, \dots$$

l'inégalité ci dessus s'écrit :

$$\left\| x_k^{n+1} \right\| = \left\| \frac{T_{m_k^{n+1}} x + T_{m_k^{n+1}+2} x + \dots + T_{m_{(k+1)2^{n+1}}^{n+1}} x}{2^{n+1}} \right\| < \theta^M$$

Posons $\lambda^p = 1$ pour $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ alors $x = x_p$ et d'après

l'hypothèse de récurrence $M = \theta^{n+1-p}$, donc pour $x = x_p \quad p \in \{1, 2, \dots, n\}$

le bloc dyadique correspondant noté $x_{p,k}^{n+1}$ est tel que

$$\left\| x_{p,k}^{n+1} \right\| \leq \left\| \frac{T_{m_k^{n+1}} x_p + T_{m_k^{n+1}+2} x_p + \dots + T_{m_{(k+1)2^{n+1}}^{n+1}} x_p}{2^{n+1}} \right\| \leq \theta^{n+2-p}$$

Si $p = n+1$ on a $x = x_{n+1}$ et le bloc dyadique est majoré par θ .

Pour $p > n+1$, les blocs dyadiques sont majorés par 1, ce qui achève ce raisonnement par récurrence.

Construisons alors la sous suite $\{T_{n_p}\}$ en posant

$$n_1^1 = 1, n_2^1 = m_1^1, n_3^1 = m_2^1, \dots, n_{2^p}^1 = m_{2^p}^1, \dots, n_{2^{p+1}-1}^1 = m_{2^p}^1 \dots$$

et montrons que pour tout $x_i \in S$ les moyennes de Césaro

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p T_{n_j} x_i \text{ convergent fortement vers zéro.}$$

Soit p tel que $r 2^q \leq p < (r+1) 2^q$ r et $q \in \mathbb{N}$

alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T_{n_1} x_i + T_{n_2} x_i + \dots + T_{n_p} x_i}{p} \right\| &\leq \left\| \frac{T_{n_1} x_i + \dots + T_{n_{2^q-1}} x_i}{p} \right\| + \\ &\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{r-1} \left\| T_{n_{k2^q}} x_i + T_{n_{k2^q+1}} x_i + \dots + T_{n_{(k+1)2^q-1}} x_i \right\| \\ &+ \frac{1}{p} \left\| T_{n_{r2^q+1}} x_i + \dots + T_{n_p} x_i \right\| \end{aligned}$$

d'où en remarquant que le second terme de cette somme est une somme de $x_{i,k}^q$

avec $k = 1, 2, \dots (r-1)$

on a si $q > i$

$$\|x_{i,k}^q\| \leq \theta^{q+1-i}$$

d'où

$$\left\| \frac{T_{n_1} x_i + T_{n_2} x_i + \dots + T_{n_p} x_i}{p} \right\| \leq \frac{(2^q-1)+(r-1)\theta^{(q+1-i)} + 2^q}{p}$$

Faisons tendre r vers l'infini alors $p \rightarrow \infty$ et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\| \frac{T_{n_1} x_i + \dots + T_{n_p} x_i}{p} \right\| \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(r-1)}{p} \theta^{q+1-i} \leq \theta^{q+1-i}$$

Mais, comme q est arbitraire et que $\theta < 1$ on a

$$\lim_p \left\| \frac{T_{n_1} x_i + \dots + T_{n_p} x_i}{p} \right\| = 0$$

pour tout $x_i \in S$ ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W.G. BADE " On boolean algebras of operators and algebras of operators "
Trans. of the A.M.S. Vol. 80 n° 2 pp. 345-360
- [2] BROWDER F.E. " On a theorem of Beurling and Livingstone "
Canad. J. Math. 17 1965, pp. 367-372
- [3] BROWDER F.E. " Problèmes non linéaires "
Université de Montréal Lectures Notes - Summer 1965
- [4] A. BRUNEL et M. KEANE " Ergodic theorems of operators sequences "
Ergebnisse der Mathematik Springer 1962
- [5] M. DAY " Normed linear spaces "
Ergebnisse der Mathematik Springer 1962
- [6] N. DUNFORD " Spectral operators "
Pacific J. Math. 4 (1964) 321-354
- [7] W.F. EBERLEIN " Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions "
Trans. of the A.M.S. 67 (1949) pp. 217-240
- [8] R.C. JAMES " Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces "
Trans. of the A.M.S. vol. 61 (1947) pp. 265-292
- [9] R.C. JAMES " Inner Products in Normed linear spaces "
- [10] G. KOTHE " Topologische Lineare Räume "
Springer 1960
- [11] F.E. SULLIVAN " A norm characterisation of real L^p spaces "
Doctoral Dissertation University of Pittsburg 1968
- [12] F.E. SULLIVAN and H.B. COHEN " Von Neumann Algebras in Banach Spaces of the type U_S and U_R . "
- [13] Lee KENNETH JONES " A mean ergodic theorem for weakly mixing operators "
- [14] Mustafa AKCOGLU and L. SUCHESTON " An operator convergence in Hilbert space and in Lebesgue space "
- [15] S. KAKUTANI " Weak convergence in uniformly convex spaces "
The Tohoku Mathematical Journal - Vol. 45 - Part. 1
Sept. 1988 - pp. 188-193