PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MICHEL MÉTIVIER

Sur la construction de mesures aléatoires presque sûrement absolument continues par rapport à une mesure donnée

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1969-1970, fascicule 2
« Séminaire de probabilités et statistiques », , exp. n° 3, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970___2_A3_0>

SUR LA CONSTRUCTION DE MESURES ALEATOIRES

PRESQUE SUREMENT ABSOLUMENT CONTINUES

PAR RAPPORT A UNE MESURE DONNEE

par

Michel METIVIER

(Université de RENNES)

Le but de cet article est, en utilisant des procédés d'interpolation analogues à ceux utilisés dans [3], [5], et [6], de construire une mesure aléatoire sur $[0,1]$, à partir d'une famille (X_t , Y_t) de variables aléatoires, indexées par les dyadiques, à valeurs dans $]0,1] \times [0,1]$, indépendantes et de lois respectives μ_t. Les schémas d'interpolation sont décrits au début des deux paragraphes 2 et 3.

Dans [3] les lois μ_t sont identiques à une même loi μ, quelconque sur $[0,1] \times [0,1]$,l'article de Dubins et Freedman étant une étude détaillée de l'application qui à μ fait correspondre la mesure aléatoire construite par un procédé d'interpolation analogue à celui rappelé au début du § 2 ci-dessous.Il est prouvé en particulier que la mesure aléatoire obtenue, sauf dans le cas trivial où elle est presque sûrement égale à la mesure de Lebesgue, est presque sûrement strictement singulière (i. e. : sa fonction de répartition n'est dérivable en aucun point. Cf. [3] p 197). Nous montrons que, si μ_ι varie par contre de façon convenable en fonction de ι, la mesure aléatoire construite suivant le schéma de Dubins et Freedman est presque sûrement absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et dans un $\mathcal{L}^p$ donné, ($p \geq 1$). C'est l'objet du § 2 et des théorèmes 2 et 3.

Ces derniers résultats généralisent ceux de Kraft ([5]) qui considère une suite de mesures μ_ι de la forme $\mu = \varepsilon_{1/2} \otimes \mu'$ où $\varepsilon_{1/2}$ est la masse de Dirac concentrée en $\frac{1}{2}$ et μ'_ι une loi de probabilité sur $[0,1]$, centrée en $\frac{1}{2}$, et où l'espace $\mathcal{L}^2$ est seul envisagé.

Le § 3 montre comment, en étendant convenablement la construction précédente, on peut construire la mesure aléatoire de telle sorte qu'elle soit presque sûrement absolument continue par rapport à une probabilité α quelconque donnée à priori sur $[0,1]$, et de moyenne α.

Ces résultats sont (sauf dans le cas de mesures à densités dans $\mathbb{L}^1$) conséquences presque triviales de théorèmes de convergence de martingales à valeurs vectorielles que, pour la commodité, nous résumons dans le paragraphe 1.

Ce travail tire son origine de discussions avec Charles H. Kraft à qui j'exprime mon amitié.

1 - NOTATIONS ET RAPPELS.

Soient $\mathbb{V}$ et $\mathbb{V}'$ deux espaces vectoriels tels que $\mathbb{V}'$ puisse être considéré comme le dual de $\mathbb{V}$ pour une topologie localement convexe convenable sur $\mathbb{V}$. On note $< x\ x' >$ la valeur en $x \in \mathbb{V}$ de la forme linéaire $x' \in \mathbb{V}'$. Dans les applications suivantes on aura soit :

- $\mathbb{V}$: espace de Banach $\mathbb{L}^p(\alpha)$ des fonctions réelles p-intégrables par rapport à une mesure α sur $[0,1]$ et $\mathbb{V}'$ son dual, soit

- $\mathbb{V}$: espace $\mathcal{M}$ des mesures bornées sur $[0,1]$, $\mathbb{V}'$ étant alors l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues sur $[0,1]$, $\mathcal{M}$ étant muni de la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{C})$.

On note, d'une façon générale, (Cf. [2] chapitre IV) $\sigma(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$ (resp. $\sigma(\mathbb{V}', \mathbb{V})$) la topologie définie sur $\mathbb{V}$ (resp. sur $\mathbb{V}'$) par la convergence simple sur $\mathbb{V}'$ (resp. sur $\mathbb{V}$) des formes linéaires $x' \rightsquigarrow \langle x, x' \rangle$ sur $\mathbb{V}'$ (resp. $x \rightsquigarrow \langle x, x' \rangle$ sur $\mathbb{V}$).

Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé, si $(\mathcal{F}_n)$ est une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, et si (f_n) est une suite d'applications de Ω dans $\mathbb{V}$, on dit que (f_n) est une martingale faible si les propriétés suivantes (M_1), (M_2) et (M_3) sont vraies : (Cf. [7])

(M_1) Pour tout n, tout $x' \in \mathbb{V}'$ la variable aléatoire $\omega \rightsquigarrow \langle f_n(\omega), x' \rangle$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

(M_2) Pour tout n et tout $F \in \mathcal{F}_n$, l'intégrale faible (Cf. [8]) : $\int_F f_n \, dP$ existe

(i. e. : la forme linéaire $x' \rightsquigarrow \int_F \langle f_n, x' \rangle \, dP$ est définie pour tout x' et s'identifie à un élément de $\mathbb{V}$).

(M_3) Pour tout $n < m$ et tout $F \in \mathcal{F}_n$

$$\int_F f_n \, dP = \int_F f_m \, dP.$$

Si $\mathbb{V}$ est un espace de Banach on dit que (f_n) est une martingale forte si les propriétés (M'_1) et (M'_2) suivantes sont vraies, ainsi que (M_3) :

(M'_1) Pour tout n f_n est fortement $\mathcal{F}_n$-mesurable (i. e. limite presque sûre de fonctions étagées $\mathcal{F}_n$-mesurables) ;

(M'_2) Pour tout n et tout $F \in \mathcal{F}_n$ l'intégrale forte (au sens de Bochner : Cf. [1])

$$\int_F f_n \, dP \text{ existe}$$

Nous utiliserons les deux résultats suivants extraits de [7]

Théorème 0 - 1 Cf. [7] p 180

Soit $(f_n, \mathcal{F}_n)$ *une martingale faible, à valeurs dans* $\mathbb{W}$. *On suppose qu'il existe une partie convexe faiblement compacte* Q *de* $\mathbb{W}$ *telle que* $f_n(\omega) \in Q$ *pour tout* $\omega \in \Omega$.

On suppose en outre que $\mathbb{W}'$ *admet un ensemble dénombrable partout dense pour la topologie de la convergence uniforme sur* Q.

Alors, il existe f_∞, *à valeurs dans* Q, *telle que presque sûrement* $f_n(\omega)$ *converge vers* $f(\omega)$ *pour la topologie* $\sigma(\mathbb{W}, \mathbb{W}')$.

En outre, pour tout n *et tout* $F \in \mathcal{F}_n$, *on a :*

$$\int_F f_n \, dP = \int_F f_\infty \, dP$$

Théorème 0 - 2 Cf. [7] (Chap. 5 et th. 4)

Soit $(f_n, \mathcal{F}_n)$ *une martingale forte à valeurs dans un espace de Banach* $\mathbb{W}$, *de dual* $\mathbb{W}'$. *On suppose qu'il existe une famille* $\mathfrak{S}$ *de parties convexes faiblement compactes de* $\mathbb{W}$, *telles que*

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ *et* n_ε *tels que* $P(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon$, *et*

$$\forall \omega \in \Omega_\varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon \qquad f_n(\omega) \in Q_\varepsilon$$

1°/ *Si de plus, pour tout* $x' \in \mathbb{W}'$,

$$\sup_n \int ||f_n|| \, dP < \infty$$

et si $\mathbb{W}'$ *admet un ensemble dénombrable partout dense pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties de* $\mathfrak{S}$, *alors : il existe* f *à valeurs dans* $\mathbb{W}$, *telle que*

$$\textit{presque sûrement} \lim_{n \to \infty} ||f(\omega) - f_n(\omega)|| = 0$$

2°/ *Si la famille* $(||f_n||)$ *est equi-intégrable, alors* f *est fortement intégrable et pour tout* n *et tout* $F \in \mathcal{F}_n$ *on a*

$$\int_F f_n \, d\,P = \int_F f \, d\,P.$$

2. MESURES ALEATOIRES P. S. ABSOLUMENT CONTINUES PAR RAPPORT A LA MESURE DE LEBESGUE

2.1 Procédé d'interpolation

Soit A un intervalle $[a,b]$ (resp. $[a,b[$) de $[o,1]$, on notera T_A l'application affine croissante unique de $[o,1]$ (resp. $[o,1[$) sur $[a,b]$ (resp. $[a,b[$). Si B est une partie quelconque de $[o,1]$, on notera, pour simplifier, $J_A(B)$ l'indicateur de l'ensemble $T_A(B)$.

Soit D l'ensemble des nombres dyadiques de $[o,1]$, le nombre $\frac{i}{2^n}$ étant noté (n,i) pour simplifier.

Soit alors une famille quelconque $\omega = (x_{n,i}, y_{n,i})$ de points de $]o,1[\times [o,1]$. On va associer à cette famille une suite $f_n(\omega_i)$ de fonctions définies par récurrence sur $]o,1]$ de la façon suivante :

$$f_o(\omega,o) = 1$$

$$f_1(\omega,o) = \frac{y_o}{x_o} J_{]o,1]}]o,x_o] + \frac{1-y_o}{1-x_o} J_{]o,1]}]x_o,1]$$

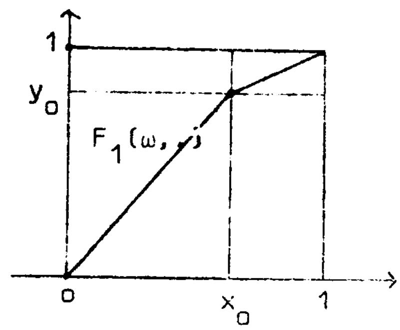

figure 1

et si la fonction f_n est définie par :

$$f_n(\omega,.) = \sum_{i=o}^{2^n-1} a_{n,i} \cdot 1_{A_{n,i}}$$

on pose

$$f_{n+1}(\omega,.) = \sum_{i=o}^{2^n-1} a_{n,i} \cdot \left[\frac{y_{n,i}}{x_{n,i}} J_{A_{n,i}}]o,x_{n,i}] + \frac{1-y_{n,i}}{1-x_{n,i}} J_{A_{n,i}}]x_{n,i},1]\right]$$

On notera $\nu_n(\omega)$ la mesure ayant $f_n(\omega,.)$ pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[o,1]$. On voit immédiatement que la suite des fonctions de répartition $F_n(\omega,.)$ des $\nu_n(\omega,.)$ est obtenue à partir de $\omega = (x_{n,i}, y_{n,i})_{(n,i) \in D}$ par le procédé décrit dans [ ] par L.E. Dubins et D.A. Freedman (cf. également figure 1 ci-dessus).

2.2. Théorèmes de Convergence

Nous avons alors, en notant λ la mesure de Lebesgue sur $[o,1]$ et en identifiant chaque fonction f de $\mathbb{L}^1(\lambda)$ à la mesure de densité f par rapport à λ :

Proposition 1

Si les $(X_{n,i}, Y_{n,i})_{(n,i)\in D}$ sont des variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $]o,1] \times [o,1]$, de lois $\mu_{n,i}$ et telles que

$$(H): \forall (n,i) \qquad E(Y_{n,i}|X_{n,i}) = X_{n,i},$$

la suite (ν_n) de mesures aléatoires obtenue par le procédé ci-dessus, est une martingale forte à valeurs dans le sous-espace $\mathbb{L}^1(o,1)$ de l'espace de Banach $\mathcal{M}$ des mesures bornées sur $[o,1]$, relativement à la suite de tribus $(\mathcal{F}_n)$, où (1)

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{C}\{f_i : i\leq n\} = \mathcal{C}\{(X_{p,i}, Y_{p,i}) : p\leq n \ , \ i\leq 2^p-1\}.$$

Les mêmes conclusions sont vraies si on suppose seulement que pour tout $n<m$ et tout $j\leq 2^m-1$, $X_{m,j}$ est conditionnellement indépendant de $\mathcal{B}_n$, sachant $X_{m,j}$, (H) restant vraie.

Démonstration

En vertu de l'indépendance des $(X_{n,i}, Y_{n,i})$, l'espérance condionnelle $E(f_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ s'exprime au moyen des $(X_{p,i}, Y_{p,i})$, $p<n$, par

$$(2.2.1)\quad E(f_{n+1}^{(t)}|\mathcal{F}_n) = \sum_{i=o}^{2^n-1} a_{n,i} \int \left(\frac{y}{x} J_{A_{n,i}}]o,x](t) + \frac{1-y}{1-x} J_{A_{n,i}}]x,1](t)\right)\mu_{n,i}(dx,dy)$$

l'hypothèse $E(Y_{n,i}|X_{n,i}) = X_{n,i}$ implique alors immédiatement

$$(2.2.2)\quad E(f_{n+1}(t)|\mathcal{F}_n) = \sum_{i=o}^{2^n-1} a_{n,i}\cdot I_{A_{n,i}}(t) = f_n(t).$$

Pour toute borélienne bornée sur $[o,1]$, pour tout $B\in\mathcal{B}_n$

$$\int_{B_n} \langle f_{n+1}, \varphi \rangle \, dP = \int_{B_n} P(d\omega) \int f_{n+1}(t,\omega)\, \varphi(t)\, dt.$$

---

(1) $\mathcal{C}(X_i : i\in I)$ désigne la tribu engendrée par les variables aléatoires $X_i, i\in I$.

L'évidente mesurabilité de $(t,\omega) \rightsquigarrow f_n(t,\omega)$ justifie l'application du théorème de Fubini :

On en déduit d'abord la $\mathcal{B}_n$-mesurabilité de $\omega \longrightarrow \int f_n(t,\omega)\, \varphi(t)dt = \langle f_n(\omega,.), \varphi\rangle$ pour toute φ borélienne bornée sur $[o,1]$, et ceci implique la mesurabilité forte de $\omega \rightsquigarrow f_n(\omega,.) \in \mathbb{L}^1(\lambda)$, d'après un théorème classique de Pettis. D'où la propriété M_1'. Ensuite :

$$\int_{B_n} \langle f_{n+1}, \varphi\rangle \, dP = \int \varphi(t)dt \int_{B_n} f_{n+1}(t,\omega)\, P(d\omega)$$

et d'après (2.2.2), la propriété (M_3) en résulte :

$$\int_{B_n} \langle f_{n+1}, \varphi\rangle \, dP = \int \varphi(t)dt \int_{B_n} f_n(t,\omega)\, P(d\omega) = \int_{B_n} \langle f_n, \varphi\rangle \, dP.$$

La propriété (M_2') résulte immédiatement de ce que pour tout ω

$$\|\nu_n(\omega)\| = \|f_n(\omega)\|_1 = 1$$

et du critère classique d'intégrabilité Bochner des fonctions fortement mesurables.

La dernière affirmation du théorème résulte de ce qu'avec ces hypothèses élargies on peut encore écrire (2.2.1) et en déduire (2.2.2).

Théorème 1

Avec les hypothèses de la proposition 1, la suite de mesures $\nu_n(\omega)$ *converge presque sûrement faiblement vers une loi de probabilité* $\nu(\omega)$, *faiblement intégrable, la probabilité aléatoire* ν *ayant pour moyenne* λ *(mesure de Lebesgue sur* $[o,1]$*).*

Démonstration

La proposition 1 permet d'appliquer le théorème (o-2) qui donne immédiatement le théorème 1, si on l'applique à la martingale faible $(\nu_n, \mathcal{B}_n)$, à valeurs dans l'espace $\mathcal{M}$ des mesures bornées sur $[o,1]$. On prend pour $\mathbb{V}$ l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues sur $[o,1]$ et pour Q l'ensemble des mesures bornées de norme ≤ 1. On obtient ainsi $\nu(\omega)$. Comme pour tout ω en dehors d'un ensemble de probabilité nulle et pour toute $\varphi \in \mathscr{C}$ on a

$$<\nu(\omega), \varphi> = \lim_n <\nu_n(\omega), \varphi> ,$$

$\nu(\omega)$ est positive et de norme 1 pour presque tout ω.

Enfin, la propriété de martingale implique :

$$\lambda = \int \nu_0(\omega)P(d\omega) = \int \nu_n(\omega)P(d\omega) = \int \nu(\omega)P(d\omega) \text{(au sens de l'intégrale faible)}$$

Théorème 2

1°) *Soit* p, $1<p<\infty$. *Si*

$$\sup_n \int \|f_n(\omega)\|_p \; P(d\omega) < \infty$$

la mesure $\nu(\omega)$ *admet presque sûrement une densité* $f(\omega) \in \mathbb{L}^p(\lambda)$, *par rapport à* λ , *et la suite* $(f_n(\omega))_n$ *converge presque sûrement vers* $f(\omega)$ *dans* $\mathbb{L}^p(\lambda)$.

2°) *Si*

$$\sup_n E(\int f_n(\omega,t) \log^+ f_n(\omega,t)\, dt) < +\infty.$$

la mesure $\nu(\omega)$ *admet presque sûrement une densité* $f \in \mathbb{L}^1$, *par rapport à* λ *et la suite* $(f_n(\omega))$ *converge presque sûrement vers* $f(\omega)$ *dans* $\mathbb{L}^1$.

Démonstration

1°) L'hypothèse implique que, pour tout ε, il existe Ω_ε tel que $P(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et $\sup_{\omega \in \Omega_\varepsilon} \|f_n(\omega)\|_p < +\infty$. Comme $\mathscr{L}^p$ est séparable et réflexif, donc a ses boules faiblement relativement compactes, le théorème o.2 donne immédiatement la conclusion souhaitée. (On utilise en fait ici un théorème plus classique de Scalora sur les martingales à valeurs dans un espace reflexif cf. [9]).

2°) On applique également le théorème o.2 ci-dessus en prenant pour $\mathbb{V}$ l'espace de Banach $\mathbb{L}^1(\lambda)$, de dual $\mathbb{L}^\infty(\lambda)$, et pour σ l'ensemble des parties équi-intégrables de L^1. $\mathbb{L}^\infty$ admet un ensemble dénombrable partout dense pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties de σ (topologie de Mackey $\tau(L^\infty, L^1)$. Nous avons donc seulement à montrer que $\forall \varepsilon$, $\exists\ \Omega_\varepsilon$,

(2) On note $\log^+ x = \max(0, \log x)$.

tel que $P(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et $(f_n(\omega,.))_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \omega \in \Omega_\varepsilon}}$ est équi-intégrable.

Posons $\Phi_n(\omega) = \int f_n(\omega,t) \log^+ f_n(\omega,t)dt$

Comme, pour tout t, $(f_n(.,t) \log^+ f_n(.,t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale positive, il en est de même de Φ_n. La condition du théorème exprime alors que

$$\sup_n E(\Phi_n) < +\infty$$

d'où la convergence de la sous martingale positive (Φ_n) vers une limite p.s. finie. Si on pose

$$F_{n,p} = \{\omega : \Phi_n(\omega) \leq p\}$$

on a donc

$$\forall \varepsilon \ \exists\, p_\varepsilon \qquad P[\liminf_n F_{n,p_\varepsilon}] > 1-\varepsilon$$

Il existe donc n_o tel que

$$n \geq n_o \Longrightarrow P(\bigcap_{n \geq n_o} F_{n,p_\varepsilon}) > 1-\varepsilon$$

Comme l'ensemble

$$\{f_n(\omega,.) : n \geq n_o \ , \ \ \omega \in \bigcap_{n \geq n_o} F_{n,p_\varepsilon}\}$$

est uniformément intégrable, d'après un critère classique, donc relativement compact pour $\sigma(L_1,L_\infty)$, nous avons obtenu ce que nous voulions.

2.3. Conditions suffisantes de convergence dans des cas particuliers

Nour retrouvons et étendons au cas de L^p $(p>1)$ une condition énoncée dans [5] pour $p=2$.

Théorème 3

On considère la famille $(X_{n,i},Y_{n,i})_{(n,i) \in D}$ *de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans* $]0,1[\times [0,1]$ *et la suite* ν_n *de mesures aléatoires associées.*

On suppose que les mesures $\mu_{n,i}$ *sont de la forme*

$$\mu_{n,i} = \varepsilon_{\alpha_{n,i}} \otimes \mu_{n,i}$$

où $\varepsilon_{\alpha_{n,i}}$ *est la mesure de* **Dirac** *concentrée au point* $a_{n,i}$ *et* $\mu'_{n,i}$ *une mesure sur* $[0,1]$.

Posons

$$b_n = \sup_{i\leq 2^n-1} \left(\left[1-E\left(\frac{Y_{k,i}}{a_{k,i}}\right)^p\right] \vee \left[1-E\left(\frac{1-Y_{k,i}}{1-a_{k,i}}\right)^p\right]\right)$$

Alors, si

$$\sum_n b_n < +\infty \, ,$$

La suite (ν_n) *de mesures aléatoires associée à* $(X_{n,i}, Y_{n,i})_{(n,i)\in D}$ *a ses densités* (f_n) *par rapport à la mesure de Lebesgue* λ, *qui convergent dans* $\mathbb{L}^p$ *vers la densité d'une loi de probabilité* $\nu(\omega)$, *presque sûrement.*

Démonstration

Comme (inégalité de Jensen) on a, pour $p\geq 1$

$$E(|X|) \leq (E|X|^p)^{1/p}$$

on a

$$E\left[\left(\int |f(t,\omega)|^p dt\right)^{1/p}\right] \leq \left[E\left(\int |f(t,\omega)^p dt\right)\right]^{1/p}$$

La condition du théorème 2, 1°) est donc satisfaite si

(2.3.1.) $\sup_n \int |f_n(t,\omega)|^p \, dt \, P(d\omega) < \infty .$

Pour tout $t\in [0,1]$ et tout n, il existe un entier unique i(t,n) compris entre 0 et 2^n-1 tel que $t \in A_{n,i}$. Posons

$$\varepsilon(t,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; i(t,n) \text{ impair} \\ 0 & \text{si } \; i(t,n) \text{ pair} \end{cases}$$

On a

$$f_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{y_{k,i(t,k)}}{a_{k,i(t,k)}}\right]^{1-\varepsilon(t,k)} \left[\frac{1-y_{k,i(t,k)}}{1-a_{k,i(t,k)}}\right]^{\varepsilon(t,k)}$$

Compte tenu de l'indépendance des $(Y_{n,i})$ il résulte facilement de la condition $\sum_n b_n < +\infty$ que

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \sup_n E|f_n(t)|^p < +\infty .$$

D'où la relation (2.3.1).

---

(3) $x \vee y = \max(x,y)$.

2.4. Questions de support

Soit $\mathcal{M}^1$ la partie de $\mathcal{M}$ constituée par les probabilités sur $[0,1]$. C'est une partie compacte pour la topologie $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{C})$.

L'application $\omega \rightsquigarrow \nu(\omega)$ des théorèmes 1 et 2 est à valeurs dans $\mathcal{M}^1$ et faiblement mesurable (i.e : l'image réciproque d'un borélien de $\mathcal{M}^1$ muni de la topologie $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{C})$ est un élément de $\mathcal{F}$: ceci résulte de ce que ν est limite simple d'une suite de fonctions étagées sur $\mathcal{F}$). On peut donc parler de la probabilité $\tilde{P}$ sur les boréliens $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{M}^1$, image de P par ν. Comme $\mathcal{M}^1$ est métrisable c'est une mesure borélienne régulière, ou encore une mesure de Radon. On peut donc parler de son support au sens topologique usuel.

Nous nous contentons de donner une condition suffisante pour que le support de $\tilde{P}$ soit $\mathcal{M}^1$ tout entier.

Théorème 4

Les variables aléatoires $(X_{n,i}, Y_{n,i})$ *étant indépendantes, et les mesures* $\mu_{n,i}$ *étant de la forme*

$$\mu_{n,i} = \varepsilon_{a_{n,i}} \otimes \mu'_{n,i}$$

on suppose que

(i) le support de $\mu'_{n,i}$ *est* $[0,1]$

(ii) les extrémités des intervalles $(A_{n,i})_{(n,i)\in D}$ *forment un ensemble* Δ *dense dans* $[0,1]$ *(ceci a lieu en particulier lorsque* $a_{n,i} = a \in]0,1[$*).*

Alors le support de $\tilde{P}$ *est* $\mathcal{M}^1$.

Démonstration

On peut évidemment prendre pour $(\Omega,\mathcal{F},P)$ l'espace $[0,1]^D$, muni de la tribu produit des tribus boréliennes de $[0,1]$, avec

$$P = \bigotimes_{(n,i)\in D} \mu'_{n,i}$$

Ω est alors un compact et P est une mesure de Radon sur Ω dont le support, d'après (i) est Ω tout entier.

Le théorème 4 résulte alors complètement du lemme suivant :

Lemme :

ν est une surjection continue de Ω, muni de la topologie produit, sur $\mathcal{M}_{+}^{1}$ muni de $\sigma(\mathcal{M}', \mathcal{C})$.

Démonstration du lemme

Comme dans 2.2 ci-dessus nous notons $F_n(\omega)$ la fonction de répartition de la mesure $\nu_n(\omega)$. Si t est l'extrémité droite d'un intervalle $A_{n,i}$, le schéma d'interpolation décrit en 2.1 est tel que pour tout $m \geq n$ on a $F_m(\omega, t) = F_n(\omega, t)$. Pour tout ω et tout $t \in \Delta$ la suite $(F_m(\omega, t))_m$ converge. Soit $G(\omega, t)$ sa limite (définie sur Δ). Si pour tout $s \in [0,1]$ on pose

$$F(\omega, s) = \lim_{\substack{t \downarrow s \\ t \neq s}} G(\omega, t)$$

il est facile de voir que, en tout point de continuité s de $F(\;, .)$, on a

$$\lim_{m} F_m(\omega, s) = F(\omega, s) \quad \text{(ceci utilise la densité de } \Delta \text{ dans } [0,1]).$$

$F(\omega, .)$ est donc la fonction de répartition de $\nu(\omega)$, limite faible de $\nu_n(\omega)$.

Montrons alors que $\omega \rightsquigarrow \nu(\omega)$ est continue. Soit (ω_p) une suite dans Ω, convergeant vers ω. On a, comme conséquence immédiate des définitions, pour tout m,

$$\lim_{p \to \infty} F_m(\omega_p, t) = F_m(\omega, t) \text{ pour tout } t \in \Delta$$

D'où l'on déduit

$$\lim_{p \to \infty} G(\omega_p, t) = G(\omega, t) \text{ pour tout } t \in \Delta,$$

étant donné que $G(\omega_p, t) = F_m(\omega_p, t)$ pour un m assez grand, dépendant uniquement de t, et non de p).

Comme $F(\omega_p, .)$ est la régularisée à droite de $G(\omega_p, .)$ et $F(\omega, .)$ la régularisée à droite de $G(\omega, .)$, d'après ce qui précède, on en déduit aisément que, pour tout point de continuité s de $F(\omega,.)$ on a

$$F(\omega,s) = \lim_{p\to\infty} F(\omega_p,s).$$

Ceci exprime la continuité de $\omega \longrightarrow \nu(\omega)$, pour les topologies voulues.

Que $\omega \longrightarrow \nu(\omega)$ soit une surjection résulte de la remarque suivante : si $F(.)$ est la fonction de répartition d'une loi de probabilité quelconque sur $[0,1]$, il est possible de choisir la famille $\omega = (Y_{i,n})_{(n,i)\in D}$ de telle sorte que pour tout $t \in \Delta$ on ait $F_m(\omega,t) = F(t)$ pour m assez grand ; on a donc pour un tel ω : $F(t) = G(\omega,t)$ pour tout $t \in \Delta$, et par suite $F(t) = G(\omega,t) = F(\omega,t)$ pour tout $t \in \Delta$, $F(.)$ étant par définition continue à droite. Ceci achève de prouver le lemme, et le théorème.

3. EXTENSIONS DES RESULTATS PRECEDENTS.

Dans ce paragraphe, nous étendons les résultats précédents à des mesures aléatoires admettant pour valeur moyenne une loi de probabilité donnée α sur $]0,1[$ et donnons ensuite des conditions suffisantes pour que la mesure aléatoire de moyenne α, ainsi construite, ait presque sûrement sa densité dans $L^p(\alpha)$.

3.1. Probabilité aléatoire de moyenne donnée.

Théorème 5.

Soit $(X_{n,i}, Y_{n,i})_{(n,i)\in D}$ *une famille de variables aléatoires à valeurs dans* $]0,1] \times [0,1]$*, de lois* $\mu_{n,i}$*, telle que pour tout entier* m *et tout entier* $j \leq 2^m-1$*,* $Y_{m,j}$ *est conditionnellement indépendante, sachant* $X_{m,j}$ *, de la famille* $(X_{n,i}, Y_{n,i})_{(n,i)\in D,\ n<m}$*. On désigne par* $\mathcal{G}_n$ *la tribu engendrée par* $(X_{m,i})_{m\leq n}$*, et par* $\mathcal{B}$ *la tribu des boréliens sur* $[0,1]$*. On pose :*

$$h_{n,i}(X_{n,i}) = E(Y_{n,i}|X_{n,i})$$

On considère une famille $(g_{n,i})$ *d'applications de* $\Omega \times [0,1]$ *dans* $]0,1]$*, telles que* g_n *soit mesurable pour* $\mathcal{G}_n \otimes \mathcal{B}$ *et on définit par récurrence la suite* (f_n) *de fonctions aléatoires, à trajectoires étagées sur* $[0,1]$ *:*

$$f_o(\omega,t) = 1$$

la formule de récurrence étant :

$$f_n(\omega,\cdot) = \sum_{i=o}^{2^n-1} a_{n,i}\, 1_{A_{n,i}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f_{n+1}(\omega,.) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_{n,i} \left[\frac{Y_{n,i}(\omega)}{h(X_{n,i}(\omega))} \; J_{A_{n,i}}]0,g_{n,i}(X_{n,i})] + \right.$$

$$\left. + \frac{1-Y_{n,i}(\omega)}{1-h(X_{n,i}(\omega))} \; J_{A_{n,i}}]g_{n,i}(X_{n,i}),\ 1] \right]$$

Si, α étant une probabilité sur $[0,1]$, les fonctions g_n ont pu être choisies de telle sorte que

(H) $$\frac{\alpha(A_{n+1,2i})}{\alpha(A_{n,i})} = h(X_{n,i}) \qquad \text{p.s.}$$

la suite $\nu_n(\omega)$ de mesures de densité $f_n(\omega,.)$ par rapport à α est une suite de lois de probabilité, convergeant presque sûrement dans $\mathcal{M}^1$ (pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}^1,\mathcal{C})$) vers une loi de probabilité $\nu(\omega)$, la mesure aléatoire ν ayant alors pour moyenne α.

Démonstration.

En reprenant, mot pour mot, le début de la démonstration de la proposition 1, on voit que pour tout $t \in]0,1]$, la suite $(f_n(t))$ est une martingale réelle par rapport aux tribus $\mathcal{F}'_n$ ($\mathcal{F}'_n$ désignant la tribu engendrée par $(X_{n,i}, Y_{n,i})$, $m \leq n$).

Si on considère la suite (ν_n), on voit, également comme dans la démonstration de la proposition 1, que c'est une martingale forte à valeurs dans $\mathcal{M}$.

La condition (H) entraîne par récurrence sur n, que pour presque tout ω, on a :

$$\|\nu(\omega)\| = 1,$$

car, d'une part $\|\nu_0(\omega)\| = \|\alpha\| = 1$ trivialement et d'autre part

$$\|\nu_{n+1}(\omega)\| = \|\nu_n(\omega)\| \quad \text{en vertu de :}$$

$$\int_{A_{n,i}} f_{n+1}(\omega,t)\ \alpha(dt) = a_{n,i}\ \alpha(A_{n,i})$$

$$\left[\frac{Y_{n,i}(\omega)}{h(X_{n,i}(\omega))}\ \frac{\alpha(A_{n+1,2i})}{\alpha(A_{n,i})} + \frac{1-Y_{n,i}(\omega)}{1-h(X_{n,i}(\omega))}\ \frac{\alpha(A_{n,i}) - \alpha(A_{n+1,2i})}{\alpha(A_{n,i})}\right]$$

soit :

$$\int_{A_{n,i}} f_{n+1}(\omega,t)\ \alpha(dt) = a_{n,i}\ \alpha(A_{n,i}) \tag{3.1.1}$$

Le théorème (5) découle donc alors immédiatement du théorème 0.1, exactement comme le théorème 1.

La condition (H) du théorème ci-dessus est évidemment un peu obscure. Nous donnons deux cas dans lesquels elle est vérifiée.

Proposition 2.

L'hypothèse (H) du théorème 5 est vérifiée en particulier dans les deux cas suivants :

1er cas :

$\alpha = \lambda$ (mesure de Lebesgue)

$g_n(\omega,x) = h(x)$ (indépendant de ω).

2ème cas :

Les $\mu_{n,i}$ sont de la forme $\varepsilon_{a_{n,i}} \otimes \mu'_{n,i}$ où $\varepsilon_{a_{n,i}}$ est la mesure de Dirac en $a_{n,i}$ et $\mu'_{n,i}$ une loi de probabilité sur $[0,1]$, les $(Y_{n,i})$ étant indépendantes.

On prend $g(\omega,x) = x$ et la suite $(A_{n,i})$ étant indépendante de ω, on suppose que

$$h(X_{n,i}) = h_{n,i} = \frac{\alpha(A_{n+1,2i})}{\alpha(A_{n,i})}$$

(On donnera une valeur quelconque à h si $\alpha(A_{n,i}) = 0$).

Démonstration.

La vérification de la propriété (H) est triviale dans chacun des deux cas ci-dessus.

3.2. Probabilités aléatoires à densités dans $L^p(\alpha)$.

Théorème 6.

Soit $(X_{n,i}, Y_{n,i})$ *et* (ν_n) *comme dans le théorème 5, toutes les hypothèses de ce théorème étant supposées réalisées. Notons* $\| \ \|_p$ *la norme dans* $\mathbb{L}^p(\alpha)$ *avec* $p \geq 1$.

1°) Si pour un p, $1 < p < \infty$, *on a :*

$$\sup_n \int \|f_n(\omega)\|_p \quad P(d\omega) < \infty$$

la mesure $\nu(\omega)$ *admet presque sûrement une densité* $f(\omega) \in \mathbb{L}^p(\alpha)$, *par rapport à* α, *et la suite* $(f_n(\omega))$ *converge presque sûrement vers* $f(\omega)$ *dans* $\mathbb{L}^p(\alpha)$.

2°) Si

$$\sup_n E\left(\int f_n(\omega,t) \text{ Log}^+ f_n(\omega,t) \ \alpha(dt)\right) < +\infty$$

la mesure $\nu(\omega)$ *admet presque sûrement une densité* $f \in \mathbb{L}^1(\alpha)$, *par rapport à* α, *et la suite* $(f_n(\omega))$ *converge presque sûrement vers* $f(\omega)$ *dans* $\mathbb{L}^1(\alpha)$.

Démonstration. On peut reprendre, mot pour mot, la démonstration du théorème 2.

On peut, comme en 2.3, donner une condition suffisante simple pour que $\nu(\omega)$ admette presque sûrement une densité dans $\mathbb{L}^p(\alpha)$.

Théorème 7.

On suppose qu'on est dans le 2ème cas de la proposition 2.

Posons, pour $p > 1$

$$b_n = \sup_{i \leq 2^n - 1} \left(\left[1 - E\left(\frac{Y_{k,i}}{h(k,i)} \right)^p \right] \vee \left[1 - E\left(\frac{1 - Y_{k,i}}{1 - h(k,i)} \right)^p \right] \right)$$

Alors, si

$$\sum_n b_n < +\infty$$

les fonctions $(f_n(\omega,.)$ *convergent dans* $\mathbb{L}^p(\alpha)$ *presque sûrement vers une fonction* $f(\omega,.)$ *qui est la densité de la probabilité aléatoire* $\nu(\omega)$.

Démonstration.

On reprend la démonstration du théorème 3 en remplaçant dt par $\alpha(dt)$ et $a_{k,i}$ par $h(k,i)$.

3.3. Interprétation géométrique du procédé de construction de ν dans le 2ème cas de la proposition 2.

On suppose donc que les $X_{n,i}$ sont presque sûrement constantes.

On désigne par $F_n^{(\omega)}$ la fonction de répartition de $\nu_n(\omega)$ et par $F(\omega)$, celle de $\nu(\omega)$.

Si G désigne la fonction de répartition de α, on a :

$F_o(\omega) = G.$

La formule de récurrence, et la formule (3.1.1) montrent que si

$A_{n,i} =]\xi_1 , \xi_2]$ on a

$\eta_1 = F_n(\xi_1) = F_{n+1}(\xi_1)$

$\eta_2 = F_n(\xi_2) = F_{n+1}(\xi_2)$

La formule de récurrence et la condition $h_{n,i} = \frac{\alpha(A_{n+1,2i})}{\alpha(A_{n,i})}$ montrent également que si on pose $A_{n+1,2i} =]\xi_1 , \xi']$ le graphe de la fonction F_{n+1} dans l'intervalle $A_{n+1,2i}$ se déduit du graphe de la fonction F_n par la transformation affine $(t,y) \rightsquigarrow (t, F(\xi_1) + \frac{Y_{n,i}}{h(n,i)} (y-F_n(\xi_1))$

Le graphe des (F_n) s'obtient donc par récurrence de la façon suivante : si dans l'intervalle $A_{n,i}$, le graphe de F_n joint les points $B_1(\xi_1, \eta_1)$ et $B_2(\xi_2, \eta_2)$ (cf. fig. 2), on considère le point B" image de $(a_{n,i} , Y_{n,i})$ par l'application $T_{A_{n,i}} \times T_{[\eta_1,\eta_2]}$ de $]0,1] \times [0,1]$ sur $A_{n,i} \times [\eta_1 , \eta_2]$. (cf. 2.1. pour la définition de T_A).

Si on pose $\xi' = T_{A_{n,i}}(a_{n,i})$ et $B' = (\xi', F_n(\xi'))$. On voit que :

a) dans $A_{n+1,2i}$ le graphe de F_{n+1} s'obtient à partir du graphe de F_n, par l'unique application du type $(t,y) \rightsquigarrow (t, a + by)$ conservant B_1 et appliquant B' sur B", si $\alpha(A_{n+1,2i}) \neq 0$ et reste identique au graphe de F_n (segment horizontal) si $\alpha(A_{n+1,2i}) = 0$. (figure 3).

b) dans $A_{n+1,2i+1}$ le graphe de F_{n+1} s'obtient à partir du graphe de F_n par l'unique application du type $(t,y) \rightsquigarrow (t, a + by)$ conservant B_2 et appliquant B' sur B", si $\alpha(A_{n+1,2i+1}) \neq 0$, et reste identique au graphe de F_n (segment horizontal) si $\alpha(A_{n+1,2i+1}) = 0$.

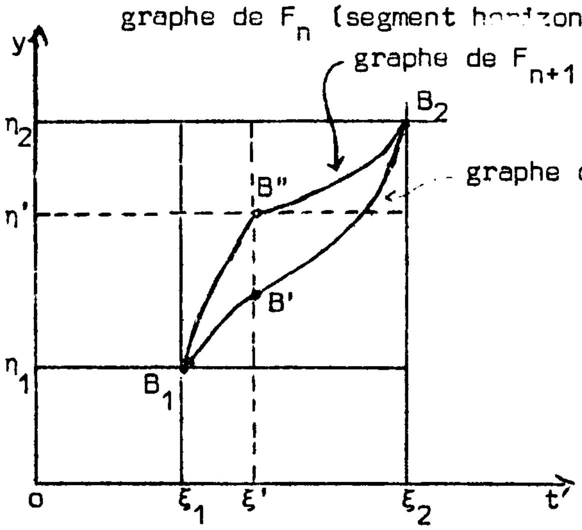

Figure 2

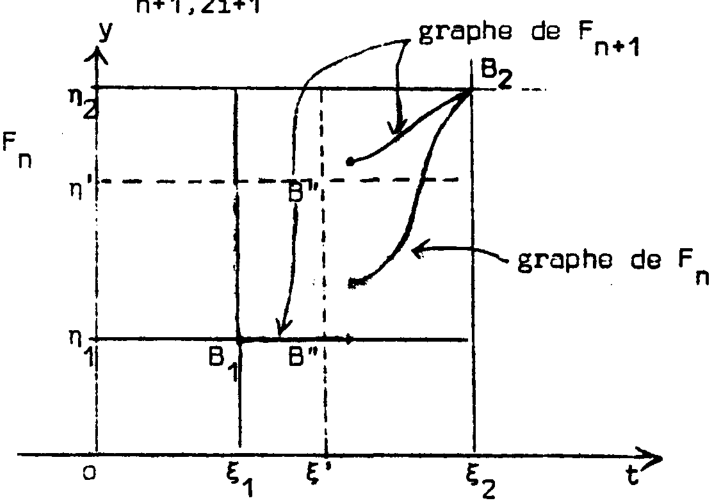

Figure 3

En particulier, lorsque la mesure α est diffuse, le graphe de (F_n) s'obtient en joignant les sommets $B_{n,o}$, $B_{n,1}$ ... $B_{n,2}$ des rectangles construits par récurrence à partir de $[0,1] \times [0,1]$ par le procédé de [3], au moyen d'une courbe qui se déduit du graphe de G par une affinité convenable dans chaque intervalle.

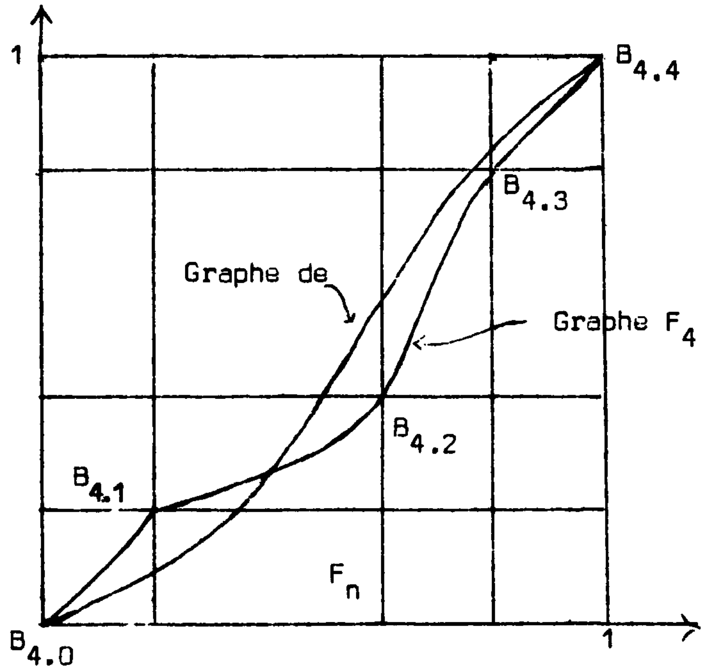

Figure 4.

Il est clair, par ailleurs que, si l'ensemble Δ des extrémités des intervalles $(A_{n,i})$ est dense dans $[0.1]$ (ce qui a lieu en particulier si $a_{n,i} = a \in]0,1[$ pour tout $(n,i)]$, on ne change pas la limite faible des mesures définies par les fonctions (F_n) si on remplace leurs graphes par ceux de fonctions croissantes quelconques joignant les points $B_{n,o} \ldots B_{n,2^n}$. On a donc immédiatement le théorème suivant, comme conséquence de cette remarque et des théorèmes 5 et 6.

<u>Théorème 8.</u> *Soit* $(Y_{n,i})_{(n,i) \in D}$ *une famille de variables aléatoires indépendantes et soit* $(a_{n,i})_{(n,i) \in D}$ *une famille d'éléments de* $]0,1[$ *telle que l'ensemble* Δ *des extrémités des intervalles* $A_{n,i}$ *construits par le procédé de récurrence ci-dessus soit dense dans* $[0.1]$.

(Ceci a lieu en particulier si $a_{n,i} = a \in]0,1[$*). Soit* α *une loi de probabilités,* *__diffuse__,* *sur* $[0,1]$*. On suppose que*

$$E(Y_{n,i}) = h(n,i) = \frac{\alpha(A_{n+1,2i})}{\alpha(A_n)} .$$

Alors la suite $(\nu'_n(\omega))$ *de probabilités dont les fonctions de distributions, linéaires par intervalles, sont définies par le procédé d'interpolation en* *__2.1.__* *ci-dessus, converge faiblement presque sûrement vers une probabilité aléatoire* $\nu(\omega)$*, l'application* $\omega \rightsquigarrow \nu(\omega)$ *ayant pour valeur moyenne la probabilité* α.

En outre, si pour $p > 1$*, on pose :*

$$b_n = \sup_{i \leq 2^n - 1} \left(\left[1 - E\left(\frac{Y_{k,i}}{h(k,i)} \right)^p \right] \vee \left[1 - E\left(\frac{1-Y_{k,i}}{1-h(k,i)} \right)^p \right] \right)$$

la condition $\sum_{n>0} b_n < +\infty$ *implique que* $\nu(\omega)$ *admet presque sûrement une densité dans* $\mathbb{L}^p(\alpha)$.

__Remarque.__

Nous nous sommes attachés à montrer les relations existant entre nos résultats et les résultats précédents de [3] et [5]. Malheureusement, nous n'avons pas réussi à en faire autant pour les intéressants résultats de [4].

Il faut noter également que notre étude très partielle du support de la mesure $\tilde{P}$ (théorème 4 en 2.4) est loin d'être assez complète pour être considérée comme l'analogue dans le cas étudié par nous de l'étude complète faite par Dubins et Freedman dans la situation considérée par eux.

REFERENCES

[1] BOCHNER S. : "Intégration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vectorraümes sind, Fundamenta Mathematicae". Vol. 20 (1933) 262-276.

[2] BOURBAKI N. : "Espaces vectoriels topologiques", Paris, Hermann 1965

[3] DUBINS L.E. et FREEDMAN David : "Random Distribution Functions" V^{th} Berkeley Symposium on probability Theory. Berkeley, p. 183-214.

[4] FERGUSON, THOMAS S. : "A representation of independent increment processes without Gaussian components". A paraître.

[5] KRAFT Ch. : "A class of distribution function processes wich have derivatives". Journal of Application Prob. 1 - p. 385-388 (1964)

[6] KRAFT ch. and VAN EEDEN C. : "Bayesian bio-assay". Ann. Maths Stat. 35 p. 886-890.

[7] METIVIER M. : Martingales à valeurs vectorielles". Annales de l'Institut Fourier. Grenoble, 1967, t. XVII, fascicule 2, p. 171-208.

[8] PETTIS : "On integration in vector spaces". Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), p. 277-304.

[9] SCALORA : "Abstract martingale convergence theorem". Pac. Journal of Math. Vol. II (1961), n° 1, p. 347-374.