RAYMOND PAVEC

Un théorème d'existence et d'unicité pour l'équation : $\begin{cases} u' + Au = f \\ \sum_0^p \alpha_k u(t_k) = \xi \end{cases}$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1969-1970, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 4, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970___1_A4_0>

Un théorème d'existence et d'unicité pour l'équation :

$$\begin{cases} u' + A u = f \\ \sum_{0}^{p} \alpha_k u(t_k) = \xi \end{cases}$$

par

Raymond PAVEC

Soient V et H deux espaces de Hilbert. On suppose que V est contenu dans H, est dense dans H et que :

(1°) l'injection de V dans H est compacte.

En identifiant H à son antidual on a alors :

$$V \subset H \subset V' .$$

Soit a une forme hermitienne continue coercive sur V :

- $\forall u \in V , \forall v \in V : |a(u,v)| \leq M ||u||_V ||v||_V$
- $\forall u \in V : |a(u, u)| \geq \alpha ||u||^2_V$.

Il existe alors un isomorphisme A de V sur V' tel que

- $\forall u \in V, \forall v \in V : a(u, v) = < A u , v >_{V' \times V}$

Soit $T > o$. On désigne aussi par A l'isomorphisme de $L^2(0, T, V)$ dans $L^2(0, T, V')$ défini par :

$$u \in L^2(0, T, V) \longrightarrow (A(u(t)) \in L^2(0, T, V').$$

Soit $(f, \xi) \in L^2(0, T, V') \times H$. On considère le problème :

Déterminer u tel que :

$$(I) \begin{cases} u \in L^2(0, T, V) \\ u'(t) + A u(t) = f(t) \quad , \quad \text{ppt} \in [0, T] \\ \sum_{k=0}^{p} \alpha_k u(t_k) = \xi \end{cases}$$

où $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $t_o = o < t_1 < \ldots\ldots < t_p \leq T$. On suppose :

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_o \neq o \\ \forall \lambda \geq \alpha : \sum_{k=o}^{p} \alpha_k e^{-\lambda t_k} \neq o. \end{cases}$$

<u>Théorème 1</u>. Si l'hypothèse (2) est vérifiée, le problème (I) admet une solution u et une seule, et l'application

$$(f , \xi) \longrightarrow u$$

est un isomorphisme de

$$L^2(0, T, V') \times H \longrightarrow W(0, T, V) = \left\{ u \mid u \in L^2(0, T, V), u' \in L^2(0, T, V') \right\} .$$

Soit $D(A) = \left\{ u \in V \mid A\, u \in H \right\}$, muni de la norme du graphe

$$||u||^2_{D(A)} = |u|^2 + |A\, u|^2 \qquad (|u| = |u|_H)$$

L'opérateur $(A, D(A))$ est un opérateur non borné auto-adjoint dans H et son inverse est compact d'après l'hypothèse (1). Le spectre de A est constitué d'une suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\alpha \leq \lambda_i \leq \lambda_{i+1}$, $\lim_{i \to \infty} \lambda_i = + \infty$ et on peut trouver une base orthonormée de H constituée de vecteurs propres $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de A. Si $u \in V'$ on a alors :

$$u = \sum_{i=o}^{\infty} u_i W_i \quad , \text{ avec } u_i = < u, W_i >_{V' \times V}.$$

et l'application $u \longrightarrow (u_i)$ est un isomorphisme entre les espaces suivants :

$$\begin{aligned} D(A) &\longrightarrow D(A_o) = \left\{ (u_i) \in \ell^2 \mid (\lambda_i u_i) \in \ell^2 \right\} \\ V &\longrightarrow V_o = \left\{ (u_i) \in \ell^2 \mid (\sqrt{\lambda_i}\, u_i) \in \ell^2 \right\} \\ H &\longrightarrow H_o = \ell^2 \\ V' &\longrightarrow V'_o = \left\{ (u_i) \in \ell^2 \mid \left(\frac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) \in \ell^2 \right\}. \end{aligned}$$

L'opérateur A devient l'opérateur A_o de V_o dans V'_o :

$$(u_i) \in V_o \longrightarrow (\lambda_i u_i) \in V'_o.$$

De même si $u \in L^2(0, T, V')$ en posant

$$u_i(t) = \langle u(t) , W_i \rangle_{V' \times V}$$

on obtient un isomorphisme entre les espaces :

$$L^2(0, T, D(A)) \longrightarrow L^2(0, T, D(A_o))$$
$$L^2(0, T, V) \longrightarrow L^2(0, T, V_o)$$
$$L^2(0, T, H) \longrightarrow L^2(0, T, \ell^2)$$
$$L^2(0, T, V') \longrightarrow L^2(0, T, V'_o).$$

En utilisant ces isomorphismes on montre l'équivalence du problème (I) et du problème (II) suivant :

Trouver $(u_i(t))$ vérifiant :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (u_i(t)) \in L^2(0, T, V_o) \\ u'_i(t) + \lambda_i u_i(t) = f_i(t) \quad , \quad \text{ppt} \in [o,T], \ i \in \mathbb{N}. \\ \sum_{k=o}^{p} \alpha_k \ u_i(t_k) = \xi_i \quad , \quad i \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

où $f(t) = \sum_{o}^{\infty} f_i(t) W_i$, $\xi = \sum_{i=o}^{\infty} \xi_i W_i$.

La résolution du système (II) donne :

$$u_i(t) = e^{-\lambda_i t} (c_i + \int_o^t e^{\lambda_i u} f_i(u) \, du)$$

$$(3) \qquad \sum_{k=o}^{p} \alpha_k \ e^{-\lambda_i t_k} (c_i + \int_o^{t_k} e^{\lambda_i u} f_i(u) \, du) = \xi_i$$

et la dernière équation donne c_i, compte tenu de (2). Il reste donc à montrer que $(u_i(t)) \in L^2(0, T, V_o)$.

Soit v la solution du problème :

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} v \in L^2(0, T, V) \\ v'(t) + A\, v(t) = f(t) \\ v(o) = o \end{cases}$$

En résolvant ce système de la même manière que (I) on trouve :

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t)\, W_i \text{ , avec } v_i(t) = e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{\lambda_i u} f_i(u)\, du$$

et on sait que :

$$||v||^2_{W(0,\, T,\, V)} \leqslant C \; ||f||_{L^2(0,\, T,\, V')}$$

$$v(t_k) \in H \quad , \quad \text{soit } (v_i(t_k)) \in \ell^2.$$

On a donc :

$$u_i(t) = c_i\, e^{-\lambda_i t} + v_i(t)$$

$$c_i = \frac{\xi_i - \sum_{k=0}^{p} \alpha_k\, v_i(t_k)}{\sum_{k=0}^{p} \alpha_k\, e^{-\lambda_i t_k}} = \frac{\xi'_i}{\sum_{k=0}^{p} \alpha_k\, e^{-\lambda_i t_k}}$$

avec $(\xi'_i) = (\xi_i - \sum_{k=0}^{p} \alpha_k\, v(t_k) \in \ell^2.$

On en déduit $(c_i) \in \ell^2$ car le dénominateur est non nul pour tout λ_i et tend vers α_o quand i tend vers l'infini : il est donc minoré par une constante. On a donc :

$$\int_0^T |c_i\, e^{-\lambda_i t}|^2\, dt \leqslant |c_i|^2 \int_0^T e^{-2\lambda_i t}\, dt$$

$$\leqslant \frac{|c_i|^2}{2\lambda_i} \left[1 - e^{-2\lambda_i T}\right]$$

$$\leqslant \frac{|c_i|^2}{2\lambda_i}$$

Ce qui donne :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_0^T |c_i\, e^{-\lambda_i t}|^2\, dt \leqslant \sum_{i \neq 0}^{\infty} \frac{|c_i|^2}{2} \leqslant C(|\xi|^2_H + ||f||^2_{L^2(0,\, T,\, V')})$$

On a donc :

$$(u_i(t)) \in L^2(0,\, T,\, V_o)$$

$$||(u_i(t))||^2_{L^2(0,\ T,\ V_o)} \leq C(|\xi|^2_H + ||f||^2_{L^2(0,\ T,\ V')}).$$

Le problème (I) admet donc une solution et une seule donnée par :

$$u = \sum_{i=o}^{\infty} u_i(t)\ W_i$$

$$u' = f - A\,u \in L^2(0,\ T,\ V')$$

et $||u||^2_{W(0,\ T,\ V)} \leq \ .||f||^2_{L^2(0,\ T,\ V')} + ||Au||_{L^2(0,\ T,\ V')} + ||u||^2_{L^2(0,\ T,\ V)}$

$$\leq \ C \ \ (|\xi|^2_H + ||f||^2_{L^2(0,\ T,\ V')}).$$

L'application

$$(f,\ \xi) \in L^2(0,\ T,\ V') \times H \longrightarrow u \in W(0,\ T,\ V)$$

est donc continue et injective. Elle est surjective car si $u \in W(0,\ T,\ V)$:

$$\begin{cases} u' + A\,u \in L^2(0,\ T,\ V') \\ \sum_o^p \alpha_k \ \ u(t_k) \in H \end{cases}$$

C'est donc un isomorphisme.

<u>Théorème 2.</u> Si $(f,\ \xi) \in L^2(0,\ T, H\ ) \times V$ alors la solution du problème (I) appartient à l'espace :

$$\left\{ u \in L^2(0,\ T,\ D(A))\ ,\ u' \in L^2(0,\ T,\ H) \right\}$$

et l'application $(f,\ \xi) \longrightarrow u$ est un isomorphisme entre ces espaces.

Plus généralement cette application est un isomorphisme de :

$$L^2(0,\ T,\ D(A^s)) \times D(A^{s+\frac{1}{2}}) \longrightarrow \left\{ u \in L^2(0,\ T,\ D(A^{s+1}),\ u' \in L^2(0,T,D(A^s)) \right\}$$

La démonstration du théorème 1 donne :

$$u_i(t) = c_i\ e^{-\lambda_i t} \ + \ v_i(t)$$

et on utilise le fait que si $f \in L^2(0,\ T,\ D(A^s))$

alors $(\lambda_i^{s+\frac{1}{2}} f_i(t) \in L^2(0, T, V'_o)$

<u>Remarques</u> : 1) L'hypothèse (2) peut être remplacée par :

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_o \neq o \\ \sum_{k=o}^{p} \alpha_k e^{-\lambda t_k} \neq o \text{ pour toute valeur propre de A.} \end{cases}$$

2) On suppose $\alpha_o \neq o$. Soit $a(\lambda) = \sum_{k=o}^{p} \alpha_k e^{-\lambda t_k}$.

Quand $\lambda \longrightarrow + \infty$ $a(\lambda)$ tend vers α_o, et donc $a(\lambda)$ est non nul pour λ assez grand. Soit $I \subset \mathbb{N}$ l'ensemble fini des indices i tels que :

$$a(\lambda_i) = o .$$

Pour $i \notin I$ les équations (3) donnent c_i de manière unique, et pour $i \in I$ on obtient :

$$(4) \quad \sum_{k=o}^{p} \alpha_k e^{-\lambda_i t_k} \int_o^{t_k} e^{\lambda_i u} f_i(u) = \xi_i \quad , \quad i \in I.$$

Si ces équations sont vérifiées il y a une infinité de solutions, les c_i étant arbitraires pour $i \in I$. Si l'une au moins des relations (4) n'est pas vérifiée il n'y a pas de solution.