JEAN MERRIEN

Idéaux de l'anneau des séries formelles à coefficients réels et variétés associées

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 2
« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. n° 8, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___2_A8_0>

IDEAUX DE L'ANNEAU DES SERIES FORMELLES
A COEFFICIENTS REELS ET VARIETES ASSOCIEES

par

Jean MERRIEN

Introduction.

Le but de cet article est d'étudier certaines propriétés des idéaux de l'anneau $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$ en utilisant des "relèvements" différentiables des séries formelles.

Si X est un fermé de $\mathbb{R}^n$, φ une fonction de classe C^∞ et f sa série de Taylor à l'origine, on dit que f est nulle sur X si $|\varphi(x)|$ décroît plus vite que toute puissance de $||x||$ quand $x \in X$ tend vers zéro. On associe ainsi à tout idéal I de $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$ l'ensemble $\mathcal{V}(I)$ des germes en 0 des fermés de $\mathbb{R}^n$ sur lesquels s'annulent tous les éléments de I. C'est la "variété formelle" de l'idéal I.

Réciproquement, à un ensemble $\mathcal{V}$ de germes en 0 de fermés de $\mathbb{R}^n$ on associe l'idéal $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ des séries formelles nulles sur les éléments de $\mathcal{V}$. Le résultat principal est que, si $I = \mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$, alors I est l'intersection des noyaux des homomorhismes de $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$ dans $\mathbb{R}[[t]]$ qui annulent I. On en déduit, par exemple, qu'un idéal est elliptique (c'est-à-dire de variété réduite à $\{0\}$) si, et seulement si, il n'est annulé que par l'homomorphisme nul.

On donne pour terminer quelques conséquences géométriques de ces résultats.

I On note $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_n$ l'algèbre $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$, $T : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}_n$ l'application qui à une fonction fait correspondre sa série de Taylor à l'origine. On désigne par $\underline{n}$ l'idéal maximal de $\mathcal{F}_n$ et par $\underline{m}$ l'idéal de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions nulles à l'origine.

Le résultat suivant est classique (cf. MALGRANGE [1] où il est démontré dans le cas analytique. Le cas formel se traite de manière identique).

Proposition 1. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{F}_n$, de hauteur k. Alors il existe n formes linéaires indépendantes y_i, $i = 1,\dots,n$, telles que :

a) l'application canonique : $\mathbb{R}[[y_1\dots y_{n-k}]] \longrightarrow \mathcal{F}_n/\mathfrak{p}$ soit injective et fasse de $\mathcal{F}_n/\mathfrak{p}$ un $\mathbb{R}[[y_1\dots y_{n-k}]]$-module de type fini ;

b) il existe un polynôme distingué $P(y';y_{n-k+1}) \in \mathfrak{p}$, où $y' = (y_1\dots y_{n-k})$ de discriminant $\Delta(y') \notin \mathfrak{p}$, et pour tout $f \in \mathcal{F}_n$ il existe un polynôme $Q(y';y_{n-k+1})$ de degré inférieur au degré de P, unique, tel que $\Delta f - Q \in \mathfrak{p}$. Les polynômes correspondants aux éléments y_i, $i = n-k+2,\dots,n$ sont notés Q_i ;

c) il existe un entier m tel que, pour tout $f \in \mathfrak{p}$, $\Delta^m f$ appartient à l'idéal engendré par P et les éléments $\Delta y_i - Q_i$, $i \in [n-k+2,n]$;

d) pour tout $f \notin \mathfrak{p}$, il existe $g \in \mathcal{F}_n$, et $f' \in \mathbb{R}[[y_1,\dots,y_{n-k}]]$, non nul, tels que $f\,g - f' \in \mathfrak{p}$.

Proposition 2. (théorème de Puiseux) :

Soit $P(t,\vartheta) = \vartheta^r + a_1(t)\,\vartheta^{r-1} + \dots + a_r(t)$, où $a_i(t)$ est un élément de $\mathbb{C}[[t^{r!}]]$, de terme constant nul. Alors il existe $\vartheta(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, de terme constant nul, tel que $P(t,\vartheta(t)) = 0$.

De plus, si les coefficients a_i sont analytiques, toutes les solutions $\vartheta(t)$ sont analytiques.

Pour une démonstration voir Walker [3].

Nous nous intéressons aux homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}[[x_1..x_n]]$ dans $\mathbb{R}[[t]]$. Si γ est un tel homomorphisme et si on pose $\gamma(x_i) = \zeta_i(t)$, on a, pour tout $f \in \mathcal{F}_n$, $\gamma(f) = f(\zeta_1(t),\dots,\zeta_n(t))$. Cette correspondance entre γ et $\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_n)$, où $\zeta_i(0) = 0$ pour tout i, est évidemment bijective. On notera $\gamma = \zeta^*$.

Avec les hypothèses et notations de la proposition 1 (en remplaçant cependant y_i par x_i) on a alors :

<u>Proposition 3.</u> <u>Soit γ' un homomorphisme de $\mathcal{F}_{n-k}$ dans $\mathbb{R}[[t^{r!}]]$, où r est le degré de P, défini par $\zeta_i(t)$, $i \in [1,n-k]$. S'il existe une solution $\zeta_{n-k+1}(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ de l'équation $P(\zeta'(t)\ ;\ x_{n-k+1}) = 0$, il existe un homomorphisme γ, de $\mathcal{F}_n$ dans $\mathbb{R}[[t]]$, unique, induisant γ' sur $\mathcal{F}_{n-k}$, et tel que $\gamma(\mathfrak{p}) = \{0\}$,</u> et $\gamma(x_{n-k+1}) = \zeta_{n-k+1}$.

Pour la démonstration voir TOUGERON [2], où le cas complexe est traité.

II Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $C \geq 0$ on note $B(x,C) = \{y, ||x-y|| \leq C\}$.

Soient X un fermé de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{F}_n$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tel que $T\varphi = f$.

<u>Définitions</u>. 1) On dit que f est elliptique sur X s'il existe un nombre $\alpha > 0$ et un voisinage Ω de 0 tel que :

$$\forall x \in \Omega \cap X, \qquad |\varphi(x)| \geq ||x||^{\alpha}$$

2) On dit que f est nulle sur X si pour tout $\alpha > 0$ il existe un voisinage Ω de 0 tel que :

$$\forall x \in \Omega \cap X, \qquad |\varphi(x)| \leq ||x||^{\alpha} .$$

On vérifie immédiatement que ces propriétés sont bien indépendantes de φ, tel que $T\varphi = f$. D'autre part, elles ne dépendent que du germe en 0 du fermé X, ce qui permet de définir la notion de série formelle elliptique (resp. nulle) sur un germe de fermé à l'origine.

Remarques ; a) on voit que : $f = 0 \Longleftrightarrow$ f est nulle sur le germe de $X = \mathbb{R}^n$

$f \in \underline{n} \Longleftrightarrow$ f est nulle sur le germe de $X = \{0\}$.

b) Si f est elliptique sur le germe de $\mathbb{R}^n$, on dit que f est elliptique.

c) Si f n'est pas elliptique sur X, il existe $Y \subset X$, $Y \supsetneq \{0\}$, tel que f soit nulle sur Y.

d) Si $f \in \underline{n}$ n'est pas nul sur X, il existe $Y \subset X$, $Y \supsetneq \{0\}$, tel que f soit elliptique sur Y.

Lemme 1. Soient $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de points dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\lim_{p\to\infty} x^p = 0$, et $f \in \mathcal{F}_n$, tels que f soit elliptique sur $X = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{x^p\}$. Alors il existe un nombre $\rho > 0$, tel que f soit elliptique sur $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} B(x^p, ||x^p||^\rho)$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $T\varphi = f$.

Il existe par hypothèse un nombre $\alpha > 0$ tel que pour p assez grand $|\varphi(x^p)| \geq ||x^p||^\alpha$. D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $M > 0$ tel que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M||x-y||$, d'où $|\varphi(y)| \geq |\varphi(x)| - M||x - y||$, pour tout couple de points voisins de 0. Il suffit alors de prendre $\rho > \alpha$.

Lemme 2. Soient $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de points, telle que $x^p \neq 0$ pour tout p et $\lim_{p\to\infty} x^p = 0$, $f \in \mathcal{F}_n$ et ρ un nombre > 0. Si f est nulle sur $\bigcup_p B(x^p, ||x^p||^\rho)$, f est nulle.

<u>Démonstration</u>. Posons $B_p = B(x^p, ||x^p||^\rho)$, $B'_p = B(x^p, \frac{1}{2}||x^p||^\rho)$.

Il suffit de montrer que l'hypothèse entraîne que toute dérivée partielle première $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est nulle sur $\bigcup_p B'_p$. En effet, par récurrence, $\frac{\partial^{|\omega|}f}{\partial x^\omega}$ sera nulle sur $\bigcup_p B(x^p, \frac{1}{2^{|\omega|}}||x^p||^\rho)$ et f sera nulle.

Soient $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $T\varphi = f$, et $\beta > 0$.

Il existe un nombre $M > 0$ tel que :

$$|\varphi(x') - \varphi(x) - \sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)| \leq M||x - x'||^2 \tag{1}$$

pour tout couple (x,x') de points assez voisins de 0.

Fixons $i \in [1,n]$ et soit $\sigma > \rho$. Si p est assez grand, pour tout $x \in B'_p$ il existe $x' \in B_p$ tel que : $x_j = x'_j$ si $j \neq i$ et $|x_i - x'_i| = ||x||^\sigma$.

Pour deux tels points on déduit de (1) :

$$|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)| \quad |x'_i - x_i| \leq M||x - x'||^2 + |\varphi(x')| + |\varphi(x)| \tag{2}.$$

Soit alors $\alpha > \sigma$. Par hypothèse, pour p assez grand, $|\varphi(x)| \leq ||x||^\alpha$ pour tout $x \in B_p$. On déduit alors de (2) :

$$|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)| \leq M||x||^\sigma + \frac{||x'||^\alpha + ||x||^\alpha}{||x||^\sigma}$$

et puisque $||x'|| \leq 2||x||$ on a pour p assez grand :

$$\forall i \quad \forall x \in B'_p \quad |\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)| \leq M||x||^\sigma + (2^\alpha + 1)\ ||x||^{\alpha-\sigma} \tag{3}.$$

Le nombre β étant fixé, si on a choisi α et σ tels que $\alpha - \sigma > \beta$ et $\alpha > \beta$, il existe p_0 tel que :

$$\forall i \in [1,n] \quad , \quad \forall p \geq p_0 \, , \quad \forall x \in B'_p : \quad |\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)| \leq ||x||^\beta \quad .$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est bien nul sur $\bigcup_p B'_p$ pour tout $i \in [1,n]$.

Lemme 3. Soit $\varphi(t,u) = u^r + a_1(t)\, u^{r-1} + \dots + a_r(t)$, où $a_i(t)$ est une fonction de classe C^∞, paire, nulle à l'origine. On suppose que $f = T\varphi$ est sans facteur multiple, donc que son discriminant $\Delta(t)$ est non nul, et que $T\, a_i \in \mathbb{R}[[t^{r!}]]$. Si pour $t \neq 0$ l'équation $\varphi(t,u) = 0$ admet p racines réelles, il existe p fonctions de classe C^∞, $u_i(t)$, $t \in [1,p]$, de séries formelles distinctes, telles que $\varphi(t,u_i(t)) = 0$. L'équation $f(t,u) = 0$ admet alors p solutions distinctes dans $\mathbb{R}[[t]]$.

Démonstration. Appelons $\mathcal{H}(f)$ (resp. $\mathcal{H}(\varphi)$) l'idéal de $\mathfrak{F}_2$ (resp. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$) engendré par $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial u}$ (resp. $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$). D'après TOUGERON [2], $f \in \overline{\mathcal{H}(f)}$, racine de $\mathcal{H}(f)$. Comme Δ est combinaison de f et $\frac{\partial f}{\partial u}$ on en déduit que $\Delta \in \overline{\mathcal{H}(f)}$. Donc il existe dans $\mathcal{H}(f)$ un élément non nul indépendant de u. Il en résulte que cet idéal est un idéal de définition de $\mathfrak{F}_2$, c'est-à-dire contient une puissance de l'idéal maximal. Donc $\mathcal{H}(\varphi)$ contient une puissance de l'idéal $\underline{m}$ des fonctions nulles en 0.

Soient k et ℓ deux entiers. On pose $b_i = T^k a_i$ (polynôme de Taylor de degré k), $\varphi'(t,u) = u^r + b_1 u^{r-1} + \dots + b_r$ et $f' = T\varphi'$. Les b_i sont des éléments de $\mathbb{R}[t^{r!}]$, nuls en 0. D'après ce qui précède on voit que, pour ℓ fixé, on peut trouver k tel que $\varphi' - \varphi \in \underline{m}^\ell\, \mathcal{H}(\varphi)^2$. D'après TOUGERON [2] proposition 2, chapitre II, il existe alors $\alpha(t,u)$ et $\beta(t,u)$ éléments de $\underline{m}^\ell\, \mathcal{H}(\varphi)$ tels que :

$$\varphi(t,u) = \varphi'(t + \alpha(t,u),\, u + \beta(t,u)).$$

Si k a été choisi assez grand le discriminant Δ' de f est non nul. L'équation $\varphi'(t,u) = 0$ a alors, pour $t \neq 0$, q racines réelles distinctes, où q est indépendant de t. D'après la proposition 2 il existe q fonctions analytiques réelles distinctes $\nu_i(t)$, au voisinage de 0, telles que : $\nu_i(0) = 0$ et $\varphi'(t,u) = 0$ est équivalent à $u = \nu_i(t)$ pour un certain i.

Par le théorème des fonctions implicites, il existe q fonctions $\mu_i(t)$, de classe C^∞, au voisinage de 0, avec $\mu_i(0) = 0$ et T μ_i deux à deux distincts, telles que $u + B(t,u) = \nu_i(t + \alpha(t,u))$ est équivalent à $u = \mu_i(t)$.

On a alors p = q et les solutions de $\varphi(t,u) = 0$ sont les fonctions $\mu_i(t)$.

En effet : $\varphi(t,u) = 0 \iff \varphi'(t + \alpha(t,u),\ u + \beta(t,u)) = 0$

$\iff u + \beta(t,u) = \nu_i(t + \alpha(t,u))$ pour un certain $i \in [1,q]$

$\iff \exists i \in [1,q]\ ,\ u = \mu_i(t)$.

III On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des germes en 0 des fermés de $\mathbb{R}^n$.

<u>Définition</u>. Pour tout idéal I de $\mathcal{F}_n$, on pose :

$\mathcal{V}(I) = \{X \in \mathcal{H}\ ,\ \forall f \in I,$ f est nulle sur $X\}$. L'ensemble $\mathcal{V}(I)$ est appelé la variété formelle de l'idéal I.

Pour tout $\mathcal{W} \subset \mathcal{H}$, on pose : $\mathcal{J}(\mathcal{W}) = \{f \in \mathcal{F}_n, \forall X \in \mathcal{W},$ f est nulle sur $X\}$.

$\mathcal{J}(\mathcal{W})$ est manifestement un idéal dans $\mathcal{F}_n$.

Les propriétés suivantes sont immédiates :

$$I_1 \subset I_2 \Longrightarrow \mathcal{V}(I_1) \supset \mathcal{V}(I_2)$$

$$\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2 \Longrightarrow \mathcal{J}(\mathcal{W}_1) \supset \mathcal{J}(\mathcal{W}_2)$$

$$\mathcal{J}(\mathcal{V}(I)) \supset I \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(\mathcal{J}(\mathcal{W})) \supset \mathcal{W}.$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{W}))) = \mathcal{I}(\mathcal{W}) \text{ et } \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))) = \mathcal{V}(I).$$

<u>Définition</u>. Un idéal I est elliptique si $\mathcal{V}(I) = \{0\}$.

Il est alors immédiat que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) I est elliptique

b) I contient un élément elliptique

c) $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \underline{n}$.

On a aussi :

$$\mathcal{V}(I_1 + I_2) = \mathcal{V}(I_1) \cap \mathcal{V}(I_2), \quad \mathcal{I}(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) = \mathcal{I}(\mathcal{V}_1) \cap \mathcal{I}(\mathcal{V}_2)$$

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\overline{I}) \text{ où } \overline{I} \text{ est la racine de } I.$$

<u>Notation.</u> Si $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ sont deux parties de $\mathcal{H}$ on pose :

$$\mathcal{W}_1 \vee \mathcal{W}_2 = \{X \in \mathcal{H},\ \exists X_1 \in \mathcal{W}_1,\ \exists X_2 \in \mathcal{W}_2,\ X = X_1 \cup X_2\}.$$

Avec cette notation on a :

$$\mathcal{V}(I_1 \cap I_2) = \mathcal{V}(I_1\ I_2) = \mathcal{V}(I_1) \vee \mathcal{V}(I_2).$$

En effet il est immédiat que $\mathcal{V}(I_1\ I_2) \supset \mathcal{V}(I_1 \cap I_2) \supset \mathcal{V}(I_1) \vee \mathcal{V}(I_2)$. Réciproquement, soit X un fermé dont le germe appartient à $\mathcal{V}(I_1\ I_2)$. Soient alors f_i, $i \in [1,p]$ (resp. g_j, $j \in [1,q]$) un système de générateurs de I_1 (resp. I_2), et $\varphi_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (resp. Ψ_j), tels que $T\ \varphi_i = f_i$ (resp. $T\ \Psi_j = g_j$).

Si on pose $X_1 = \{x \in X,\ \sup_i |\varphi_i(x)| \leq \sup_j |\Psi_j(x)|\}$

et $X_2 = \{x \in X,\ \sup_i |\varphi_i(x)| \geq \sup_j |\Psi_j(x)|\}$

on a $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \in \mathcal{V}(I_1)$, $X_2 \in \mathcal{V}(I_2)$.

d'où $\mathcal{V}(I_1\ I_2) \subset \mathcal{V}(I_1) \vee \mathcal{V}(I_2)$.

Définition. Une variété formelle $\mathcal{V}(I)$ est irréductible si $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(I_1) \vee \mathcal{V}(I_2)$ implique $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(I_1)$ ou $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(I_2)$.

Les propriétés suivantes sont alors immédiates :

Une variété formelle $\mathcal{V}(I)$ est irréductible si et seulement si $\mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$ est premier.

Toute variété formelle $\mathcal{V}$ est "union" d'un nombre fini de variétés irréductibles : il existe un entier r et des variétés formelles irréductibles $\mathcal{V}_i$, $i \in [1,r]$ telles que $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2 \dots \vee \mathcal{V}_r$.

De plus si $\mathcal{V}_i \not\subset \mathcal{V}_j$ pour tout $i \neq j$, cette décomposition est unique.

IV On désignera par $\mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \dots$, des sous-ensembles infinis de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers. Si $x = (x_1,\dots,x_n)$, on pose $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$.

Proposition 4. Soient $f \in \mathcal{F}_n$ et $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{R}^n$ telle que $x^p \neq 0$ pour tout p et $\lim\limits_{p \to \infty} x^p = 0$. On suppose f elliptique sur $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} \{x^p\}$. Alors il existe :

a) un fermé F dans $\mathbb{R}^n$, contenant une sous-suite de la suite (x^p) et tel que f est elliptique sur F, et que $F - \{0\}$ soit connexe.

b) une fonction $\xi(t) = (\xi_i(t))$, $i \in [1,n]$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^∞, paire et nulle en 0, telle que $\xi(t) \in F$ pour t voisin de 0 et que $\zeta = T\,\xi$ soit non nul.

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n = 1$ le résultat est évident. Pour passer de n-1 à n nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 4. Soient $P(x';x_n)$ un polynôme distingué à coefficients dans $\mathcal{F}_{n-1}$, sans facteur multiple, et $\Delta \neq 0$ son discriminant. Soit d'autre part $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$

<u>une suite de points de $\mathbb{R}^n$ telle que $x'^p \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to\infty} x^p = 0$ et que P soit elliptique sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$. Il existe alors, pour tout p, une boule B_p de centre x^p telle que</u> :

a) <u>P est elliptique sur $\bigcup_p B_p$</u>

b) <u>il existe $y^p \in B_p$ tel que $y'^p \neq 0$ et Δ est elliptique sur $\bigcup_p \{y'^p\}$.</u>

<u>Démonstration du lemme 4</u>. L'existence des boules B_p, qu'on peut prendre de rayon $||x^p||^\rho$, $\rho > 1$, vérifiant a) résulte du lemme 1.

La projection de B_p sur l'hyperplan $x_n = 0$ contient $B'_p = B(x'^p||x'^p||^\rho)$. Il suffit de montrer qu'il existe $y'^p \in B'_p$ tel que Δ soit elliptique sur $\bigcup_p \{y'^p\}$. Pour cela soit $\delta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que $T\,\delta = \Delta$, et prenons $y'^p \in B'_p$ tel que $|\delta(y'^p)| = \sup_{y'\in B'_p} |\delta(y')|$. Si Δ n'était pas elliptique sur $\bigcup_p \{y'^p\}$, on pourrait extraire de la suite $(y'^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(y'^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ telle que Δ soit nulle sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} \{y'^p\}$. Puisque pour p assez grand, et pour tout $y' \in B'_p$, $||y'^p|| \leq 2||y'||$, Δ serait nul sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} B'_p$. D'après le lemme 2 ceci impliquerait $\Delta = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse, et le lemme 4 est démontré.

Revenons à la démonstration de la proposition 4.

Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ un système de coordonnées tel que f soit régulier en x_n, c'est-à-dire $f(0,\ldots,0,x_n) \neq 0$, et tel que pour une sous-suite convenable $(x^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ de la suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$ on ait $x'^p \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}_1$. Par le théorème de préparation formel ([1]) il existe un polynôme distingué $P(x';x_n)$, de degré m, ne différant de f que par un facteur inversible. On peut supposer que f, et donc P, n'a pas de facteur multiple. Le discriminant Δ de P est donc non nul.

Par le lemme 4 on détermine une suite $(y^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$, $y^p \in B_p$, telle que Δ soit elliptique sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}_1} \{y'^p\}$. L'hypothèse de récurrence, appliquée à Δ et à $(y'^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$, implique qu'il existe dans $\mathbb{R}^{n-1}$, identifié à l'hyperplan d'équation $x_n = 0$ de $\mathbb{R}^n$, un fermé F', $F' - \{0\}$ connexe, contenant une sous-suite $(y'^p)_{p\in\mathbb{N}_2}$ de la suite $(y'^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$, et une fonction $\xi'(t) = (\xi_i(t))$, $i \in [1,n-1]$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$, de classe C^∞, paire, nulle et non plate en 0, telle que $\xi'(t) \in F'$ pour t assez petit.

Soit $\chi(x';x_n)$ un polynôme distingué à coefficients dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$, tel que $T\chi = P$. Si δ est le discriminant de χ, on a $T\delta = \Delta$. Puisque δ est elliptique sur F', l'équation $\chi(x';x_n)$, n'a, pour $x' \in F' - \{0\}$, que des racines simples, et le nombre de ces racines qui sont réelles est un entier ℓ indépendant de x' ($\ell = 0$ s'il n'y a pas de racines réelles).

Soient $r_1(x') < r_2(x') < \ldots < r_\ell(x')$ ces racines réelles, et $\rho_1(x'), \ldots, \rho_{m-\ell}(x')$ les racines complexes. On pose $r_0(x') = -\infty$, $r_{\ell+1}(x') = +\infty$.

Pour $0 \leq i \leq \ell$ on pose $A_i = \{x = (x',x_n) ; x' \in F' - \{0\}, r_i(x') < x_n < r_{i+1}(x')\}$. Il existe $k \in [0,\ell]$ et une sous-suite $(y^p)_{p\in\mathbb{N}_3}$ de la suite $(y^p)_{p\in\mathbb{N}_2}$, tels que : $\forall p \in \mathbb{N}_3$, $y^p \in A_k$.

Nous allons terminer la démonstration de la proposition 4 dans l'hypothèse $k \neq 0$ et $k \neq \ell$. Ces deux cas se traiteraient de manière analogue. On sait (MALGRANGE [1] chapitre IV) que les racines du polynôme distingué vérifient :

$$\begin{aligned} |r_i(x')| &\leq H_1 ||x'||^{\frac{1}{m}} \\ |\rho_j(x')| &\leq H_1 ||x'||^{\frac{1}{m}} \end{aligned} \qquad (1)$$

où H_1 est une constante positive.

Cette inégalité montre en particulier que les racines $r_i(x')$ et $\rho_j(x')$ sont bornées quand x' est voisin de zéro.

Il en résulte, puisque δ est le produit des carrés des différences des racines de χ, qu'il existe une constante $K_1 > 0$ et un voisinage Ω'_1 de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ tels que :

$$\forall x' \in \Omega'_1 \cap F' \quad \forall (i_1, i_2) \ \forall (j_1, j_2) \quad \begin{aligned} |r_{i_1}(x') - r_{i_2}(x')| &\geq K_1 |\delta(x')|^{\frac{1}{2}} \\ |\rho_{j_1}(x') - \rho_{j_2}(x')| &\geq K_1 |\delta(x')|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \qquad (2)$$

D'après l'ellipticité de δ sur F' il existe alors $\alpha_1 > 0$ et un voisinage Ω'_2 tels que :

$$\forall x' \in \Omega'_2 \cap F' \quad \forall (i_1, i_2) \ \forall (j_1, j_2) \quad \begin{aligned} |r_{i_1}(x') - r_{i_2}(x')| &\geq ||x'||^{\alpha_1} \\ |\rho_{j_1}(x') - \rho_{j_2}(x')| &\geq ||x'||^{\alpha_1} \end{aligned} \qquad (3)$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $H_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \quad \forall y \qquad |\chi(x) - \chi(y)| \leq H_2 ||x - y|| \qquad (4)$$

L'ellipticité de χ sur $\bigcup_{p \in \mathbb{N}_3} \{y^p\}$ entraîne qu'il existe $\alpha_2 > 0$ et p_o tels que :

$$\forall p \in \mathbb{N}_3 , \quad p \geq p_o \quad |\chi(y^p)| \geq ||y^p||^{\alpha_2} \qquad (5)$$

On déduit de (4) et (5) :

$$\forall i \in [1, \ell] \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N}_3 \ , \ p \geq p_o$$

$$||y'^p||^{\alpha_2} \leq ||y^p||^{\alpha_2} \leq |\chi(y^p)| = |\chi(y^p) - \chi(y'^p, r_i(y'^p))|$$

$$\leq H_2 \ |y_n^p - r_i(y'^p)| \qquad (6)$$

Pour tout nombre réel a, tout $x' \in F'$ et toute racine $\rho_j(x')$ on a :
$|a - \rho_j(x')| \geq \frac{1}{2} |\rho_j(x') - \overline{\rho_j(x')}|$.
Donc, d'après (3) : $\forall x' \in \Omega'_2 \cap F'$, $\forall j \in [1,m-\ell]$, $|a - \rho_j(x')| \geq \frac{1}{2}||x'||^{\alpha_1}$.

Puisque, pour tout $x' \in F'$ et tout $x_n \in \mathbb{R}$, on a
$\chi(x',x_n) = \prod_{i=1}^{\ell} (x_n - r_i(x')) \prod_{j=1}^{m-\ell} (x_n - \rho_j(x'))$, on obtient :

$$\forall x' \in \Omega'_2 \cap F' \ , \quad \forall x_n \in \mathbb{R} \qquad |\chi(x',x_n)| \geq (\operatorname*{Min}_i |x_n - r_i(x')|)^{\ell} \left(\frac{1}{2} ||x'||^{\alpha_1}\right)^{m-\ell} \tag{7}$$

Choisissons maintenant un nombre $\beta > \mathrm{Sup}(\alpha_1,\alpha_2)$, et soit
$\Omega'_3 = \{x' \in \Omega'_2, \ ||x'||^{\beta} \leq \frac{1}{2} ||x'||^{\alpha_1}\}$.
C'est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$. On définit un fermé F_1 dans $\mathbb{R}^n$ par :

$$F_1 = \{0\} \cup \{x = (x',x_n) \ ; \ x' \in \Omega'_3 \cap (F' - \{0\}),$$
$$||x'||^{\beta} \leq \mathrm{Inf}\ (x_n - r_k(x'), \ r_{k+1}(x') - x_n)\} \ .$$

C'est un fermé connexe d'après (3). Nous allons voir que P, et donc f, est elliptique sur F_1, et que $y^p \in F_1$ pour $p \in \mathbb{N}_3$ assez grand :

Le premier résultat provient de (7) et de (1) car :

$$\forall x = (x',x_n) \in F_1, \ |\chi(x)| \geq (||x'||^{\beta})^{\ell} \ \frac{1}{2^{m-\ell}} \ ||x'||^{\alpha_1(m-\ell)}$$

$$\text{et} \qquad |x_n| \leq \mathrm{Min}(|r_k(x')|, \ |r_{k+1}(x')|) \leq H_1||x'||^{\frac{1}{m}} \ .$$

Le second provient de (6), puisque $\beta > \alpha_2$.

On définit maintenant F par $F = F_1 \cup (\bigcup_{p \in \mathbb{N}_3} B_p)$. Il est immédiat que $F - \{0\}$ est connexe et vérifie le a) de la proposition 4.

Montrons qu'on a aussi le b) : par hypothèse de récurrence, il existe une fonction ξ' de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}$, non plate en 0, paire et telle que $\xi'(t) \in F'$ pour t assez petit.

Considérons l'équation $\chi(\xi'(t),x_n) = 0$. Le discriminant de $\chi(\xi'(t),x_n)$ est $\delta(\xi'(t))$. D'après l'ellipticité de δ sur F', et puisque $\xi'(t) \in F'$ et est non plate en 0, la fonction $\delta(\xi'(t))$ est non plate en 0. Il en résulte que $T\,\chi(\xi'(t),x_n)$, de discriminant $T\,\delta(\xi'(t))$, est sans facteur multiple. En remplaçant t par $t^{m!}$ on peut supposer satisfaites les conditions du lemme 3. Il résulte alors de ce lemme qu'il existe deux fonctions de classe C^∞, $\mu(t)$ et $\nu(t)$, telles que : $r_k(\xi'(t)) = \mu(t)$ et $r_{k+1}(\xi'(t)) = \nu(t)$.

Prenons λ, $0 < \lambda < 1$, et définissons $\xi(t) = (\xi'(t),\ \lambda\,\mu(t) + (1-\lambda)\,\nu(t))$.

Pour un tel ξ on a :

$$\min(\xi_n(t) - r_k(\xi'(t)),\ r_{k+1}(\xi'(t)) - \xi_n(t)) = \min(\lambda,\ 1-\lambda)\ (\nu(t) - \mu(t))$$
$$\geq ||\xi'(t)||^{\alpha_1} \min(\lambda,\ 1-\lambda) \text{ d'après (3).}$$

Donc pour t assez petit $\xi(t) \in F_1 \subset F$. D'autre part $T\,\xi \neq 0$.

IV Nous revenons aux notations du III. Pour tout idéal I de $\mathfrak{F}_n$, on désignera par $\Gamma(I)$ l'ensemble des homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbre γ de $\mathfrak{F}_n$ dans $\mathbb{R}[[t]]$ tels que $\gamma(I) = \{0\}$.

<u>Théorème. Soit I un idéal de $\mathfrak{F}_n$ tel que $I = \mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$.</u>

<u>Alors $I = \bigcap_{\gamma\in\Gamma(I)} \operatorname{Ker}\gamma$.</u>

<u>Démonstration</u>. On peut supposer que I est premier.

En effet on a $I = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$ où les $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers des composantes irréductibles de $\mathcal{V}(I)$. Supposons le théorème démontré pour les idéaux premiers et soit $f \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma(I)} \operatorname{Ker}\gamma$. Alors $f \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma(\mathfrak{p}_i)} \operatorname{Ker}\gamma$ pour tout i, et donc $f \in \mathfrak{p}_i$ pour tout i.

Supposons donc $I = \mathfrak{p}$ premier, de hauteur k, et soit $(x_1,\dots,x_n)$ un système de coordonnées satisfaisant aux conditions de la proposition 1. Soit d'autre part $f \notin \mathfrak{p}$. D'après la proposition 1, dont on reprend les notations avec le changement de y_i en x_i, il existe $f' \in \mathfrak{F}_{n-k}$, $f' \neq 0$, et $g \in \mathfrak{F}_n$, tels que $f\,g - f' \in \mathfrak{p}$.

Puisque $f' \notin \mathfrak{p}$ et $\Delta \notin \mathfrak{p}$, $\Delta\, f' \notin \mathfrak{p}$. L'idéal $\mathfrak{p}$ étant l'idéal d'une variété formelle, il existe $X \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ tel que $\Delta\, f'$ ne soit pas nul sur X, et par suite il existe une suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, $x^p \neq 0$ pour tout p, convergeant vers 0, telle que $\Delta\, f'$ soit elliptique sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$. Si $x = (x_1,\dots,x_n)$, on note $x' = (x_1,\dots,x_{n-k+1})$, $x'' = (x_1,\dots,x_{n-k})$. Le cas où f est inversible étant évident, on peut supposer f, et donc f', non inversible. En appliquant alors le théorème des accroissements finis à une fonction $\Psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-k})$, telle que $T\Psi = \Delta f'$, et en utilisant l'ellipticité de $\Delta\, f'$ sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$, on voit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour p assez grand on ait :

$$||x''^p|| \geq ||x^p||^{\alpha} > 0 \qquad (1)$$

Soit $\chi_1 = x_{n-k+1}^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i(x'')\, x_{n-k+1}^i$, $a_i(x'') \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-k})$, $a_i(0) = 0$ et $T\,\chi_1 = P$.

Puisque P est nul sur $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{x^p\}$, la suite $\chi_1(x^p)$ tend vers 0 plus vite que toute puissance de $||x'||^p$ et donc de $||x''^p||$, car de l'inégalité (1) on déduit : $||x''^p|| \geq ||x^p||^{\alpha}$ pour p assez grand.

Il existe alors une sous-suite $(x^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$ de $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$ et une fonction $\varepsilon(x'') \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-k})$, $T\,\varepsilon = 0$, telles que $\varepsilon(x''^p) = -\chi_1(x'^p)$. Si on pose

$\chi_2 = \chi_1 + \varepsilon$ on obtient un polynôme distingué, à coefficients dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-k})$, nul aux points x'^p, $p \in \mathbb{N}_1$ et tel que $T\chi_2 = P$.

D'après la proposition 4, appliquée dans $\mathbb{R}^{n-k}$ à $\Delta f'$ et $(x''^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$, il existe un fermé $F \subset \mathbb{R}^{n-k}$, $F - \{0\}$ connexe, contenant une sous-suite $(x''^p)_{p\in\mathbb{N}_2}$ de $(x''^p)_{p\in\mathbb{N}_1}$, tel que $\Delta f'$, et à fortiori Δ et f', soit elliptique sur F, et une fonction $\xi''(t) = (\xi_i(t))$, $i \in [1,n-k]$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$, de classe C^∞, non plate et nulle en 0, telle que $\xi''(t) \in F$ pour t assez petit. Puisque le discriminant de χ_2 est elliptique sur F et que l'équation $\chi_2(x''^p, x_{n-k+1}) = 0$ a des solutions réelles pour $p \in \mathbb{N}_2$, l'équation $\chi_2(x'', x_{n-k+1})$ a des solutions réelles pour tout $x'' \in F - \{0\}$ assez voisin de zéro.

En remplaçant, si nécessaire, t par $t^{r!}$ l'équation $\chi_2(\xi''(t), x_{n-k+1}) = 0$ satisfait aux hypothèses du lemme 3, car Δ est elliptique sur F. D'après ce lemme, si on pose $T\xi'' = \zeta''$, il existe $\zeta_{n-k+1}(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ tel que $P(\zeta''(t), \zeta_{n-k+1}(t)) = 0$.

Par la proposition 3 il existe un homomorphisme γ de $\mathcal{F}_n$ dans $\mathbb{R}[[t]]$ tel que $\gamma(\mathfrak{p}) = \{0\}$, et induisant sur $\mathcal{F}_{n-k}$ l'homomorphisme ζ''^*. De $\xi''(t) \in F$ et $\Delta f'$ elliptique sur F on déduit $\zeta''^*(\Delta f') = \gamma(\Delta f') \neq 0$, et à fortiori $\gamma(f') \neq 0$. Comme on a aussi $\gamma(fg) = \gamma(f')$ on a $\gamma(f) \neq 0$. On a donc trouvé un élément γ de $\Gamma(\mathfrak{p})$ qui n'annule pas f ce qui termine la démonstration du théorème.

<u>Corollaire 1.</u> <u>Pour tout idéal I de $\mathcal{F}_n$, on a $\mathcal{J}(\mathcal{V}(I)) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma(I)} \operatorname{Ker}\gamma$.</u>

D'après le théorème il suffit de démontrer que $\Gamma(I) = \Gamma(\mathcal{J}(\mathcal{V}(I)))$.

Soient pour cela $\gamma \in \Gamma(I)$ et $f \in \mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$. Soient d'autre part ζ tel que $\zeta^* = \gamma$ et ξ tel que $T\xi = \zeta$. Si $F = \operatorname{Im} \xi$ le germe de F à l'origine appartient à $\mathcal{V}(I)$. Il en résulte immédiatement que $\gamma(f) = 0$ ce qui montre que $\Gamma(I) \subset \Gamma(\mathcal{J}(\mathcal{V}(I)))$. L'autre inclusion est immédiate.

On note 0 l'homomorphisme associé à $\zeta = 0$. Avec cette notation on a :

<u>Corollaire 2.</u> <u>Un idéal I est elliptique si et seulement si $\Gamma(I) = \{0\}$.</u>

En effet, on a vu, au paragraphe III, que I est elliptique si et seulement si $\mathcal{J}(\mathcal{V}(I)) = \underline{n}$ et il suffit d'appliquer le corollaire 1.

Soient un idéal I de $\mathcal{F}_n$, engendré par des éléments $f_1, \ldots, f_p$, et k un entier positif. On définit les idéaux $J_k(I)$ et $O_k(I)$ de la manière suivante :

$J_k(I)$ est l'idéal engendré par I et les jacobiens $\dfrac{D(f_{i_1}, \ldots, f_{i_k})}{D(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})}$.

On vérifie immédiatement que $J_k(I)$ ne dépend que de I et non du système de générateurs choisis. Si $k > n$ ou $k > s$, $J_k(I) = I$.

$O_k(I)$ est l'idéal engendré par I et par les déterminants :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_{k+1}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_{i_k}}{\partial x_{j_1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_{i_k}}{\partial x_{j_{k+1}}} \\ x_{j_1} & \cdots\cdots & x_{j_{k+1}} \end{vmatrix}$$

Il est encore immédiat que $O_k(I)$ ne dépend pas du système de générateurs choisi. Si $k \geq n$ ou $k \geq s$, $O_k(I) = I$.

On a toujours $O_k(I) \subset J_k(I)$. La proposition suivante précise ce résultat.

Proposition 5. Soit I un idéal de $\mathcal{F}_n$ et k un entier positif.

Alors $\mathcal{V}(J_k(I)) = \mathcal{V}(O_k(I))$.

Démonstration. D'après le corollaire I il suffit de montrer que tout homomorphisme annulant $O_k(I)$ annule $J_k(I)$.

Soit $\gamma = \zeta^*$ un homomorphisme annulant I et n'annulant pas $J_k(I)$.

Supposons par exemple que $\gamma(\dfrac{D(f_1,\ldots,f_k)}{D(x_1,\ldots,x_k)}) = \left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\zeta(t))\right| \neq 0.$

Posons $A = \mathbb{R}[[t]]$ et désignons par $D_t\, f_i$, $i \in [1,k]$, l'élément $(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\zeta(t)))$, $j \in [1,n]$, du A-module libre A^n. Par hypothèse les éléments $D_t\, f_i$ sont indépendants. Si γ annule $O_k(I)$ les éléments $D_t\, f_i$, $i \in [1,k]$, et $\zeta(t)$ sont liés. Donc il existe $\lambda_i(t) \in A$, $i \in [0,k]$, tels que

$$\lambda_o(t)\ \zeta(t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t)\ D_t\ f_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_o(t) \neq 0.$$

L'égalité précédente est équivalente à :

$$\forall j \in [1,n] \qquad \lambda_o(t)\zeta_j(t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t)\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\zeta(t)) = 0.$$

On obtient donc, en multipliant chacune de ces égalités par $\dfrac{d\zeta_j}{dt}$ et en sommant :

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_o(t)\ \zeta_j(t)\ \frac{d\zeta_j}{dt} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t)\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\zeta(t))\ \frac{d\zeta_j}{dt}) = 0.$$

Soit $\sum_{j=1}^{n} \lambda_o(t)\, \zeta_j(t) \frac{d\zeta_j}{dt} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (\zeta(t)) \frac{d\zeta_j}{dt}\right) = 0$ (1)

Mais, puisque γ annule I, $f_i(\zeta(t)) = 0$ pour tout i, d'où par dérivation :

$$\forall i \in [1,k] \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (\zeta(t)) \frac{d\zeta_j}{dt} = 0. \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2) on obtient $\lambda_o(t) \sum_{j=1}^{n} \zeta_j(t) \frac{d\zeta_j}{dt} = 0$.

Puisque $\lambda_o(t) \neq 0$ et que A est intègre on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \zeta_j \frac{d\zeta_j}{dt} = 0.$$

Or $\gamma = \zeta^*$ est non nul, donc $\sum_{j=1}^{n} \zeta_j^2 \neq 0$ et n'est pas constant, d'où en dérivant $\sum_{j=1}^{n} \zeta_j \frac{d\zeta_j}{dt} \neq 0$ et on aboutit à une contradiction.

VI Si $\mathfrak{J}$ est un idéal de type fini de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et k un entier positif, on définit $J_k(\mathfrak{J})$ comme dans le cas formel. On appelle $\sigma_k(\mathfrak{J})$ l'idéal engendré par les éléments Ψ de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tels qu'il existe $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ dans $\mathfrak{J}$ tels que $\Psi\mathfrak{J}$ soit contenu dans l'idéal engendré par $\varphi_1,\dots,\varphi_k$.

Nous nous plaçons dans la situation suivante : il existe dans $J_k(\mathfrak{J}) \cap \sigma_k(\mathfrak{J})$ un élément elliptique. Dans cette situation nous voulons étudier l'ensemble $V(\mathfrak{J})$ des zéros de l'idéal $\mathfrak{J}$ au voisinage de l'origine. Si $I = T\mathfrak{J}$, il est immédiat que, sous l'hypothèse précédente, $J_k(I) \cap \sigma_k(I)$ est elliptique.

<u>Proposition 6.</u> <u>Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage Ω de 0 tel que $\Omega \cap V(\mathfrak{J})$ soit connexe et que $(V(\mathfrak{J}) - \{0\}) \cap \Omega$ ait un nombre fini de composantes connexes.</u>

Démonstration. On suppose que $0 \in V(\mathfrak{J})$.

Par hypothèse il existe un voisinage Ω_1 tel que, au voisinage de tout point x_o de $\Omega_1 \cap V(\mathfrak{J}) - \{0\}$, $V(\mathfrak{J})$ soit l'ensemble des zéros de k fonctions $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ de $\mathfrak{J}$, vérifiant $\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}(x_o) \neq 0$ pour un multi-indice $(i_1,\ldots,i_k)$.

Nous allons montrer qu'il existe une boule fermée $\Omega \subset \Omega_1$, telle que pour tout $x_o \in \Omega \cap V(\mathfrak{J}) - \{0\}$ l'espace tangent à $V(\mathfrak{J})$ en x_o ne soit pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{0x_o}$.

Montrons que pour un tel Ω la proposition 6 est vérifiée. Si un point $x \in \Omega \cap V(\mathfrak{J}) - \{0\}$ n'appartenait pas à la composante connexe de 0 dans $V(\mathfrak{J}) \cap \Omega$, il existerait dans la composante connexe C_x de x un point y, tel que $||y||$ soit minimum et $\neq 0$ (parce que C_x est compact). En ce point y, $V(\mathfrak{J})$ est une variété régulière de codimension k, donc l'espace tangent en y n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{0y}$. Ceci montre qu'il existe dans C_y, donc dans C_x, un point z tel que $||z|| < ||y||$, d'où contradiction. De la même manière, si S est une sphère de centre 0 contenue dans Ω, on montre que, pour tout $x \in V(\mathfrak{J}) \cap \Omega - \{0\}$, il existe $y \in S \cap V(\mathfrak{J})$ tel que x et y soient dans la même composante connexe de $\Omega \cap V(\mathfrak{J}) - \{0\}$. La transversalité de $V(\mathfrak{J})$ à S entraîne que $V(\mathfrak{J}) \cap S$ est une sous-variété régulière de codimension k de S. Il en résulte que $V(\mathfrak{J}) \cap S$, qui est compact, n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, ce qui montre la deuxième partie de la proposition.

Montrons donc l'existence de cette boule Ω.

Sinon, on pourrait trouver une suite de points $(x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $V(\mathfrak{J}) \cap \Omega_1 - \{0\}$, convergeant vers 0, telle qu'en tout point x^p l'espace tangent à $V(\mathfrak{J})$ soit orthogonal à $\overrightarrow{0x^p}$. En x^p, pour tout $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de $\mathfrak{J}$, tous les déterminants d'ordre $(k+1)$ extrait de la matrice

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \\ x_1 & \cdots\cdots & x_n \end{vmatrix}$$

sont nuls.

Il en résulte que tout $f \in O_k(I)$ est nul sur $X = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{x^p\}$. D'après la proposition 5 tout $f \in J_k(I)$ est nul sur X. Or $J_k(I)$ est elliptique, donc sa variété formelle est réduite à $\{0\}$ et on obtient ainsi une contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. MALGRANGE — Ideals of differentiable functions, Bombay Tata Institute. Oxford University Press (1966).

[2] J.Cl. TOUGERON — Idéaux de fonctions différentiables I. Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, XVIII, 1, (1968).

[3] R. WALKER — Algebraic curves, Princeton University Press (1950).