PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN-CLAUDE TOUGERON

# Les théorèmes de transversalité et de quasi-transversalité

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1968-1969, fascicule 2
« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. n° 6, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___2_A6_0>

# LES THEOREMES DE TRANSVERSALITE ET DE QUASI-TRANSVERSALITE

par

Jean-Claude TOUGERON

## Introduction.

Dans cet article, nous démontrons deux variantes, l'une globale (théorème 1), l'autre locale (théorème 2), du théorème de transversalité de R. Thom. Le théorème 2 est la version analytique du théorème de quasi-transversalité démontré dans [3]. Cette version analytique est utilisée dans [4], ce qui justifie le présent article.

§ 1 - Stratifications.

Soit $X$ une variété (différentiable de classe $C^\infty$ ou analytique réelle ou analytique complexe) de faisceau structural $\mathcal{O}$ et de dimension $n$. Si $\mathcal{J}$ est un faisceau d'idéaux localement de type fini sur $X$ et si $x \in X$, on désigne par $V(\mathcal{J})$ le support de $\mathcal{O}|\mathcal{J}$ et par $\mathcal{J}_x$, la fibre de $\mathcal{J}$ en $x$. On note $\bar{\mathcal{J}}$ le faisceau d'idéaux dont la fibre en tout point $x \in X$ est la racine $\bar{\mathcal{J}}_x$ de l'idéal $\mathcal{J}_x$.

Soit $x \in V(\mathcal{J})$ ; nous dirons que $x$ est un point régulier de codimension $k$ de $\mathcal{O}|\mathcal{J}$ si, au voisinage de $x$, $V(\mathcal{J})$ est une variété régulière de codimension $k$ et si $\mathcal{J}_x$ est l'idéal des germes nuls sur $V(\mathcal{J})$.

a) Le faisceau $J_k(\mathcal{J})$. Soit $x \in X$ et soit $(\varphi_1,\dots,\varphi_s)$ une famille de générateurs de l'idéal $\mathcal{J}_x$. Si $(U,(x_1,\dots,x_n))$ est une carte locale de $X$ au voisinage de $x$, on désigne par $J_k(\mathcal{J})_x$ l'idéal de $\mathcal{O}_x$ engendré par $\mathcal{J}_x$ et tous les jacobiens $\dfrac{D(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_k})}{D(x_{j_1},\dots\dots,x_{j_k})}$ où $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq s$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ (on pose $J_0(\mathcal{J})_x = \mathcal{O}_x$ et si $k > n$, $J_k(\mathcal{J})_x = \mathcal{J}_x$). Cet idéal ne dépend pas de la famille de générateurs $(\varphi_i)$ et de la carte locale $(U, \underline{x})$. Les $J_k(\mathcal{J})_x$ définissent un faisceau d'idéaux localement de type fini $J_k(\mathcal{J})$.

b) Le faisceau $\sigma_k(\mathcal{J})$. Soit $\mathcal{M}$ un module de présentation finie sur un anneau local $A$. On a une suite exacte :

$$(*) \qquad A^p \xrightarrow{M} A^q \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow (0)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ ; si $q-p \leq k < q$, on désigne par $\sigma'_k(\mathcal{M})$ l'idéal engendré dans $A$ par les mineurs d'ordre $q-k$ de la matrice $M$ ; si $k < q-p$, on pose

$\sigma'_k(\mathcal{M}) = (0)$ ; si $k \geq q$, $\sigma'_k(\mathcal{M}) = A$. On démontre (cf. [4], chapitre IV, §1) que l'idéal $\sigma'_k(\mathcal{M})$ est indépendant de la présentation (*).

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $\sigma_k(\mathcal{M})$ l'idéal engendré dans A par tous les $\xi$ tels que $\xi.\mathcal{M}$ soit contenu dans un sous-module de $\mathcal{M}$ engendré par k éléments. On montre facilement (cf. [4], chapitre IV, §1) que :

$$\sigma'_k(\mathcal{M}) \subset \sigma_k(\mathcal{M}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\sigma'_k(\mathcal{M})} = \overline{\sigma_k(\mathcal{M})}.$$

Si $\mathcal{J}$ est un faisceau d'idéaux localement de type fini sur X, on pose, $\forall x \in X$ : $\sigma_k(\mathcal{J})_x = \sigma_k(\mathcal{J}_x)$. Les $\sigma_k(\mathcal{J})_x$ définissent un faisceau d'idéaux $\sigma_k(\mathcal{J})$.

Si $\mathcal{J}$ est localement de présentation finie, on définit un faisceau d'idéaux $\sigma'_k(\mathcal{J})$, localement de type fini sur X, en posant, $\forall x \in X$ : $\sigma'_k(\mathcal{J})_x = \sigma'_k(\mathcal{J}_x)$.

c) Le faisceau $\mathcal{R}_k(\mathcal{J})$. Le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}$ étant localement de type fini, on pose : $\mathcal{R}_k(\mathcal{J}) = \overline{J_k(\mathcal{J})} \cap \overline{\sigma_k(\mathcal{J})}$. Supposons que $k \in [1,n]$ : un point x appartient à $V(\mathcal{J}) - V(\mathcal{R}_k(\mathcal{J}))$ si et seulement si $x \in V(\mathcal{J}) - V(\sigma_k(\mathcal{J}))$ (i.e. l'idéal $\mathcal{J}_x$ est engendré sur $\mathcal{O}_x$ par k éléments $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ nuls au point x) et $x \in V(\mathcal{J}) - V(J_k(\mathcal{J}))$ (i.e. il existe un jacobien $\dfrac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{j_1},\dots,x_{j_k})}$ différent de 0 au point x). Cela signifie que x est un point régulier de codimension k de $\mathcal{O}|\mathcal{J}$.

On a $\mathcal{R}_o(\mathcal{J}) = \overline{\sigma_o(\mathcal{J})}$ et $V(\mathcal{J}) - V(\mathcal{R}_o(\mathcal{J})) = \{x \in X \; ; \; \mathcal{J}_x = (0)\}$. Ainsi, pour $k \in [0,n]$, $V(\mathcal{J}) - V(\mathcal{R}_k(\mathcal{J}))$ est l'ensemble des points réguliers de codimension k de $\mathcal{O}|\mathcal{J}$.

<u>Le cas analytique</u>. Si X est analytique, tout faisceau d'idéaux localement de type fini est cohérent (d'après le théorème de cohérence d'OKA), donc localement de présentation finie. Si $\mathcal{J}$ est un faisceau d'idéaux, analytique cohérent, il en sera de même de $J_k(\mathcal{J})$ et $\sigma'_k(\mathcal{J})$, donc aussi de $\overline{J_k(\mathcal{J})}$ et $\overline{\sigma'_k(\mathcal{J})}$ et enfin de $\mathcal{R}_k(\mathcal{J})$. Ainsi, l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{O}|\mathcal{J}$ (i.e. l'ensemble des points $x \in V(\mathcal{J})$ tels que $\mathcal{O}_x | \mathcal{J}_x$ ne soit pas un anneau local régulier) est un sous-ensemble analytique fermé de X, support du faisceau analytique cohérent $\mathcal{O}| \sum_{k=0}^{n} \mathcal{R}_k(\mathcal{J})$

d) <u>Strates et faisceaux stratifiables</u>.

Une <u>strate</u> de X, de codimension k, ou encore une k-strate, est un couple $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ de deux faisceaux d'idéaux localement de type fini sur X, tels que : $\quad \mathcal{J} \subset \overline{\mathcal{J}'} \subset \mathcal{R}_k(\mathcal{J})$.

Un faisceau d'idéaux $\mathcal{J}$ est <u>stratifiable</u> s'il existe une suite $\mathcal{J}_j$, $j \in [0,s]$, de faisceaux d'idéaux sur X, telle que $\overline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}_o$, $\mathcal{J}_s = \mathcal{O}$ et $\forall j \in [0,s-1]$, $(\mathcal{J}_j, \mathcal{J}_{j+1})$ est une strate de X. La famille $(\mathcal{J}_j)_{j\in[0,s]}$ est alors une stratification de faisceau d'idéaux $\mathcal{J}$.

<u>Le cas analytique</u>. Supposons que X est analytique et soit $\mathcal{J}$ un faisceau d'idéaux analytique cohérent sur X. Définissons, par récurrence sur j, une chaîne strictement croissante de faisceaux d'idéaux, analytiques cohérents sur X : $\mathcal{J}_o \subset \ldots\ldots \subset \mathcal{J}_j \subset \ldots$ .

On pose $\mathcal{J}_o = \overline{\mathcal{J}}$ ; si $j > 0$, et si $k = ht(\mathcal{J}_{j-1}) = \inf(ht_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{J}_{j-1,x}))$, on pose $\mathcal{J}_j = \mathcal{R}_k(\mathcal{J}_{j-1})$. Si $k \leq n$, i.e. $\mathcal{J}_{j-1} \neq \mathcal{O}$, on a : $ht(\mathcal{J}_j) > ht(\mathcal{J}_{j-1})$ (la vérification est de nature locale ; cf. [3], chap. I,

§ 1). Il existe donc un plus petit entier $s \leq n-\mathrm{ht}(\mathcal{J}_o) + 1$ tel que $\mathcal{J}_s = \mathcal{O}$. La suite $\mathrm{st}(\mathcal{J}) = (\mathcal{J}_j)_{j \in [0,s]}$ définit <u>la stratification primaire de $\mathcal{J}$</u>. Ainsi : <u>tout faisceau d'idéaux, analytique cohérent, est stratifiable</u>.

e) <u>Le faisceau $[\mathcal{J} : \mathcal{J}']$</u>.

Supposons que la variété X est analytique et soient $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$ deux faisceaux d'idéaux, analytiques cohérents sur X. On désigne par $[\mathcal{J} : \mathcal{J}']$ le faisceau transporteur de $\mathcal{J}'$ dans $\mathcal{J}$ ; par définition, $\forall x \in X$, $[\mathcal{J} : \mathcal{J}']_x = [\mathcal{J}_x : \mathcal{J}'_x] = \{a \in \mathcal{O}_x \ ; \ a.\ \mathcal{J}'_x \subset \mathcal{J}_x\}$. Ce faisceau d'idéaux est analytique cohérent.

Dans le cas <u>analytique complexe</u> : $V([\mathcal{J} : \mathcal{J}']) = \overline{V(\mathcal{J}) - V(\mathcal{J}')}$. En effet, si $x \in V(\mathcal{J}) - V(\mathcal{J}')$, $\mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_x$ et $\mathcal{J}'_x = \mathcal{O}_x$, donc $[\mathcal{J} : \mathcal{J}']_x = \mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_x$ et $x \in V([\mathcal{J} : \mathcal{J}'])$. Ainsi : $V([\mathcal{J} : \mathcal{J}']) \supset \overline{V(\mathcal{J}) - V(\mathcal{J}')}$. Réciproquement, si $x \notin \overline{V(\mathcal{J}) - V(\mathcal{J}')}$, on a $V(\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{J}')$ au voisinage de x, donc $\mathcal{J}'_x \subset \mathcal{J}_x$ (d'après le nullstellensatz), i.e. $[\mathcal{J} : \mathcal{J}']_x = \mathcal{O}_x$, i.e. $x \notin V([\mathcal{J} : \mathcal{J}'])$. On en déduit immédiatement que :

- si $V(\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{J}')$ , $\quad [\mathcal{J} : \mathcal{J}'] = \mathcal{O}$.
- si $V(\mathcal{J}) \not\subset V(\mathcal{J}')$ , $\quad \mathrm{ht}([\mathcal{J} : \mathcal{J}']) = \inf\limits_{x \in V(\mathcal{J})-V(\mathcal{J}')} (\mathrm{ht}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{J}_x))$.

## § 2 - <u>Le faisceau d'idéaux $J_k^*(\pi)$</u>.

Soient X, Y deux variétés analytiques réelles (resp. analytiques complexes) de dimensions respectives n, p. On désigne par $J^q(X,Y)$ le fibré sur $X \times Y$ des jets d'ordre q de X dans Y. Soient $(U \ ; x_1,\dots,x_n)$ et $(V \ ; y_1,\dots,y_p)$ des cartes locales de X et Y respectivement. Ces coordonnées définissent naturellement sur $J^q(U, V)$ un système de coordonnées $(x_i, y_j^{\omega})$

$(i \in [1,n]\ ;\ j \in [1,p]\ ;\ \omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \mathbb{N}^n$ et $0 \leq |\omega| = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \leq q)$ de la façon suivante : si $\varphi \in J^q(U,V)$ est un jet d'origine $x° = (x_1^\circ,\dots,x_n^\circ)$ représenté par $f = (f_1,\dots,f_p)$ analytique au voisinage de $x°$, on pose :

$x_i(\varphi) = x_i^\circ\ ;\ y_j^\omega(\varphi) = \dfrac{\partial^{|\omega|}}{\partial x^\omega} f_j\ (x°)$.

Soit $\rho_q$ la projection canonique de $J^{q+1}(X,Y)$ sur $J^q(X,Y)$. Si P est une fonction anlytique sur un ouvert $\Omega'$ de $J^q(U,V)$, on pose :

$$\frac{\partial^* P}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{j,\omega} \frac{\partial P}{\partial y_j^\omega} \cdot y_j^{\omega+[i]}$$

(on désigne par $[i]$ l'élément de $\mathbb{N}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la ième qui est égale à 1). Les fonctions $\dfrac{\partial^* P}{\partial x_i}$ sont analytiques sur $\rho_q^{-1}(\Omega')$. Si $P_1,\dots,P_k$ sont analytiques sur $\Omega'$, on pose :

$$\frac{D^*(P_1,\dots,P_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})} = \det \left| \frac{\partial^* P_\alpha}{\partial x_{i_\beta}} \right| \qquad , \qquad \alpha,\beta \in [1,k]$$

Soit $\pi$ un faisceau d'idéaux, analytique cohérent sur un ouvert $\Omega$ de $J^q(X,Y)$. Nous allons définir un faisceau d'idéaux $J_k^*(\pi)$, analytique cohérent sur $\rho_q^{-1}(\Omega)$ : si $\xi \in \rho_q^{-1}(\Omega)$, soit $\Omega'$ un voisinage ouvert de $\rho_q(\xi)$, contenu dans $\Omega$ et dans une carte $J^q(U,V)$, tel que $\pi_{\rho_q(\xi)}$ soit engendré par les fonctions $P_1,\dots,P_s$ analytiques sur $\Omega'$ ; par définition, $J_k^*(\pi)_\xi$ est l'idéal engendré par $P_1 \circ \rho_q,\dots, P_s \circ \rho_q$ et les $\dfrac{D^*(P_{\alpha_1},\dots,P_{\alpha_k})}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$

$(\alpha_1,\dots,\alpha_k \in [1,s]$ et $i_1,\dots,i_k \in [1,n])$,

(on vérifiera que cet idéal ne dépend pas de la famille $\{P_1,\dots,P_s\}$ de générateurs de l'idéal $\pi_{\rho_q(\xi)}$ et de la carte $J^q(U,V)$).

Si f est une application analytique (ou $C^\infty$, si les variétés sont réelles) de X dans Y, on note $j^q(f)$ l'application analytique (ou $C^\infty$ si f est $C^\infty$) de X dans $J^q(X,Y)$ qui associe à tout point $x \in X$ le jet d'ordre q, $j^q(f)(x)$, de f au point x. Posons $\underline{f}_q = j^q(f)$. On note $\underline{f}_q^*(\pi)$ le faisceau d'idéaux analytique cohérent (ou différentiable, localement de type fini, si f est $C^\infty$) sur $\underline{f}_q^{-1}(\Omega)$ tel que la fibre en chaque point $\eta$ soit engendrée par les $P \circ \underline{f}_q = \underline{f}_q^*(P)$, où $P \in \pi_{\underline{f}_q(\eta)}$. On vérifie l'égalité :

$$(1) \qquad J_k(\underline{f}_q^*(\pi)) = \underline{f}_{q+1}^*(J_k^*(\pi)).$$

La proposition suivante nous permettra de comparer les faisceaux d'idéaux (analytiques cohérents sur $\rho_q^{-1}(\Omega)$) $\rho_q^*(J_k(\pi))$ et $J_k^*(\pi)$ :

<u>Proposition 1</u>. On a <u>l'inégalité</u> :

$$\text{ht} \ \left[J_k^*(\pi) : \rho_q^*(J_k(\pi))\right] > n.$$

Pour la démonstration, on peut supposer que les variétés X,Y sont <u>analytiques complexes</u> : en effet, le cas réel se déduit immédiatement , par complexification, du cas complexe.

Soit $\xi \in V(J_k^*(\pi)) - \rho_q^{-1}(V(J_k(\pi)))$ ; nous devons vérifier (cf. § 1,e) que :

$$(2) \qquad h = \text{ht}(J_k^*(\pi)_\xi) > n.$$

Puisque $\rho_q(\xi) \notin V(J_k(\pi))$, on peut supposer, en diminuant $\Omega$ si nécessaire, qu'il existe un sous-faisceau $\pi'$ de $\pi$ engendré par k fonctions $P_1,\dots,P_k$ analytiques sur $\Omega$ et telles que $V(J_k(\pi')) = \emptyset$. Puisque $J_k^*(\pi) \supset J_k^*(\pi')$, il suffit de vérifier (2) pour $\pi'$ au lieu de $\pi$. Ainsi, nous pouvons supposer que <u>$\pi$ est engendré par des fonctions analytiques $P_1,\dots,P_k$ sur $\Omega$ et que $V(J_k(\pi)) = \emptyset$.</u>

Il existe des points $\xi'$, appartenant à $\rho_q^{-1}(\Omega)$ et aussi voisins que l'on veut de $\xi$, tels que $V(J_k^*(\pi))$ soit une variété régulière de codimension h, au voisinage de $\xi$. Remplaçant $\xi$ par $\xi'$, nous pouvons donc supposer que $V(J_k^*(\pi))$ est régulière de codimension h au voisinage de $\xi$.

Enfin, on peut admettre (en le diminuant si nécessaire) que $\Omega$ est contenu dans une carte locale $J^q(U,V)$ du point $\rho_q(\xi)$ et que dans la carte $J^{q+1}(U,V)$, les coordonnées de $\xi$ sont :

$$x_1(\xi) = \ldots\ldots = x_n(\xi) = 0$$

et pour $j \in [1,p]$ et $\omega \in \mathbb{N}^n$, $0 \leq |\omega| \leq q+1$, $y_j^\omega(\xi) = \xi_j^\omega$.

Soit $\ell$ un entier $\geq q+1$ ; si $j \in [1,p]$ et $\omega \in \mathbb{N}^n$, $q+1 < |\omega| \leq \ell$, désignons par $\xi_j^\omega$ des nombres complexes arbitraires. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux espaces vectoriels complexes, le premier admettant comme système de coordonnées les $a_j^\mu$ ($\mu \in \mathbb{N}^n$ ; $0 \leq |\mu| \leq \ell$ ; $j \in [1,p]$) ; le second admettant comme système de coordonnées les $b_j^\nu$ ($\nu \in \mathbb{N}^n$ ; $\ell+1 \leq |\nu| \leq \ell+q+2$ ; $j \in [1,p]$). Si $U_\circ$, $\mathbb{A}_\circ$, $\mathbb{B}_\circ$ sont des voisinages respectifs assez petits de l'origine de U, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, on définit une application polynomiale $\Gamma$ :

$$U_\circ \times \mathbb{A}_\circ \times \mathbb{B}_\circ \longrightarrow \rho_q^{-1}(\Omega)$$

en posant : $\Gamma^*(x_1) = x_1$ ; ... ; $\Gamma^*(x_n) = x_n$ et pour $j \in [1,p]$, $\omega \in \mathbb{N}^n$, $0 \leq |\omega| \leq q+1$ :

$$\Gamma^*(y_j^\omega) = \frac{\partial^{|\omega|}}{\partial x^\omega} \left( \sum_{|\mu|=0}^{\ell} (a_j^\mu + \xi_j^\mu) \frac{x^\mu}{\mu!} + \sum_{|\nu|=\ell+1}^{\ell+q+2} b_j^\nu \frac{x^\nu}{\nu!} \right)$$

(si $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $x^\omega = x_1^{\omega_1} \ldots\ldots x_n^{\omega_n}$).

Si $a \in \mathbb{A}$, on désigne par $\iota_a$ l'immersion :

$U_\circ \times \mathbb{B}_\circ \ni (x,b) \longmapsto (x,a,b) \in U_\circ \times \mathbb{A}_\circ \times \mathbb{B}_\circ$ et l'on pose $\Gamma_a = \Gamma \circ i_a$.

Lemme 1. L'application $\Gamma$ est une submersion. L'application $\Gamma_a$ restreinte à $(U_\circ - \{0\}) \times \mathbb{B}_\circ$ est une submersion.

Démonstration. Le jacobien de $\Gamma$ par rapport aux coordonnées $x_1,\ldots,x_n$ et $a_j^\mu$ $(0 \leq |\mu| \leq q+1$ et $j \in [1,p])$ est égal à 1, ce qui démontre la première assertion.

Posons $U_\circ^i = \{x \in U_\circ \; ; \; x_i \neq 0\}$. Désignons par $\underline{\nu}^i$ l'ensemble des multi-indices $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que : $\ell+1 \leq |\nu| \leq \ell+q+2$ et $\nu_i \geq \ell+1$. Puisque $U_\circ - \{0\} = \bigcup_{i=1}^{n} U_\circ^i$, il suffit de montrer que le jacobien de $\Gamma_a$ par rapport aux coordonnées $x_1,\ldots,x_n$ et $b_j^\nu$ (avec $\nu \in \underline{\nu}^i$ et $j \in [1,p]$) est $\neq 0$ en tout point de $U_\circ^i$. Ce jacobien est visiblement égal au jacobien des $\frac{\partial^{|\omega|}}{\partial x^\omega}\left(\sum_{\nu \in \underline{\nu}^i} b_j^\nu \frac{x^\nu}{\nu!}\right)$ par rapport aux $b_j^\nu$ ($\nu \in \underline{\nu}^i$ et $j \in [1,p]$). Puisque

$$\sum_{\nu \in \underline{\nu}^i} b_j^\nu \frac{x^\nu}{\nu!} = x_i^{\ell+1} \cdot \sum_{\nu \in \underline{\nu}^i} b_j^\nu \frac{x^{\nu-[i]}}{\nu!}$$

(on note $[i]$ le multi-indice dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui est égale à $\ell+1$), la formule de Leibnitz montre que ce jacobien est égal au jacobien des

$x_i^{\ell+1} \frac{\partial^{|\omega|}}{\partial x^\omega}\left(\sum_{\nu \in \underline{\nu}^i} b_j^\nu \frac{x^{\nu-[i]}}{\nu!}\right)$ par rapport aux $b_j^\nu$ ($\nu \in \underline{\nu}^i$ et $j \in [1,p]$),

i.e. à $C.\, x_i^{(\ell+1)p \binom{n+q+1}{n}}$, où $C$ est un nombre rationnel non nul. Puisque $x_i \neq 0$, ce jacobien est non nul, c.q.f.d.

Démonstration de la proposition 1.

Appliquons le lemme précédent, avec $\ell = q+1$. Soit $\Pi$ la projection : $U_\circ \times \mathbb{A}_\circ \times \mathbb{B}_\circ \longrightarrow \mathbb{A}_\circ \times \mathbb{B}_\circ$ et posons $\mathcal{V} = \Gamma^{-1}(\rho_q^{-1}(V(\pi)))$ ; $\mathcal{V}^* = \Gamma^{-1}(V(J_k^*(\pi)))$. Puisque $\Gamma$ et $\rho_q$ sont des submersions, $\mathcal{V}$ est une sous-variété régulière de codimension k de $U_\circ \times \mathbb{A}_\circ \times \mathbb{B}_\circ$, définie par les équations $\varphi_1 = 0$ ; ... ; $\varphi_k = 0$, si l'on pose $P_i \circ \rho_q \circ \Gamma = \varphi_i$. De même, $\mathcal{V}^*$ est au voisinage de $\Gamma^{-1}(\xi) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{B}_\circ$ une sous-variété régulière de codimension h. En outre, $\mathcal{V}^*$ est l'ensemble des points de $\mathcal{V}$ en lesquels s'annulent tous les jacobiens $\dfrac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{j_1},\dots,x_{j_k})}$ $(0 < j_1 < \dots < j_k \leq n)$, i.e. $\mathcal{V}^*$ est l'ensemble des points critiques de $\Pi|\mathcal{V}$. D'après le théorème de Sard (B. Malgrange, [1], chapitre I, § 7), l'ensemble $\mathcal{X}$ des points $(a,b) \in \mathbb{A}_\circ \times \mathbb{B}_\circ$ tels que $\Pi^{-1}(a,b) \cap \mathcal{V}^* = \emptyset$, est partout dense dans $\mathbb{A}_\circ \times \mathbb{B}_\circ$.

Puisque la restriction de $\Gamma_\circ$ à $(U_\circ - \{0\}) \times \mathbb{B}_\circ$ est une submersion (lemme 1), $\mathcal{V}_\circ = \mathcal{V} \cap ((U_\circ - \{0\}) \times \{0\} \times \mathbb{B}_\circ)$ est une sous-variété régulière de codimension k de $(U_\circ - \{0\}) \times \{0\} \times \mathbb{B}_\circ$. Soit $\Pi'$ la projection : $\mathcal{V}_\circ \longrightarrow \mathbb{B}_\circ$ et soit $b_\circ$ une valeur non critique de $\Pi'$ (il en existe, d'après le théorème de Sard). Le plan $\Pi^{-1}(0,b_\circ)$ (de dimension n) coupe $\mathcal{V}^*$ au seul point $(0,0,b_\circ)$ et en ce point $\mathcal{V}^*$ est une variété de codimension h ; on a donc $h \geq n$. Si $h = n$, pour tout point $(a,b)$ assez voisin de $(0,b_\circ)$, $\Pi^{-1}(a,b)$ couperait $\mathcal{V}^*$, ce qui est absurde, puisque $\mathcal{X}$ est partout dense dans $\mathbb{A}_\circ \times \mathbb{B}_\circ$. Ainsi : $h > n$, c.q.f.d.

§ 3 - Le théorème de transversalité.

Dans ce paragraphe, nous supposerons que les variétés X,Y sont analytiques réelles. On désigne par $C^{\infty}(X,Y)$ l'espace des applications $C^{\infty}$ de X dans Y. Cet espace sera muni de la topologie fine (ou topologie de Whitney) : une base d'ouverts pour cette topologie est formée de tous les ensembles $\mathfrak{S}(q,U) = \{f \in C^{\infty}(X,Y) \ ; \ j^q(f)\ (X) \subset U\}$ où $q \in \mathbb{N}$ et U décrit l'ensemble des ouverts du fibré $J^q(X,Y)$. On vérifie facilement que $C^{\infty}(X,Y)$ est un espace de Baire (i.e. toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses est partout dense).

Définition 1. Une propriété $(\mathbb{P})$, relative aux éléments de $C^{\infty}(X,Y)$ est générique (au sens de Thom), si elle est vérifiée en tout point d'un ouvert partout dense de $C^{\infty}(X,Y)$.

Si $f \in C^{\infty}(X,Y)$, on rappelle que $\underline{f}_q = j^q(f)$.

Proposition 2. Soit $\Delta$ un sous-ensemble fermé de $J^q(X,Y)$, réunion dénombrable de sous-variétés de codimensions > n. Génériquement, $\underline{f}_q^{-1}(\Delta) = \emptyset$.

Nous démontrons d'abord deux lemmes préliminaires :

Lemme 2. Soit $\Delta$ un sous-ensemble fermé de $J^q(X,Y)$ et soit K un sous-ensemble fermé de X. L'ensemble $\Omega_K = \{f \in C^{\infty}(X,Y) \ ; \ \underline{f}_q^{-1}(\Delta) \cap K = \emptyset\}$ est un ouvert de $C^{\infty}(X,Y)$.

Démonstration. En effet : $\Omega_K = \{f \in C^{\infty}(X,Y) \ ; \ (j^q(f)(K)) \cap \Delta = \emptyset\}$ $= \{f \in C^{\infty}(X,Y) \ ; \ j^q(f)(K) \subset U'\}$, où $U' = J^q(X,Y) - \Delta$ est un ouvert de $J^q(X,Y)$. Soit U" l'ensemble ouvert des points de $J^q(X,Y)$ qui se projettent sur l'ouvert X - K. Posons $U = U' \cup U''$. Il est immédiat que $\Omega_K = \{f \in C^{\infty}(X,Y) \ ;$ $j^q(f)(X) \subset U\}$, ce qui montre que $\Omega_K$ est un ouvert de $C^{\infty}(X,Y)$.

<u>Lemme 3</u>. Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ; $V$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ ; $K$ un compact de $U$ ; $\Delta$ une réunion dénombrable de sous-variétés de codimensions $> n$ de $J^q(U,V)$. Si $f \in C^\infty(U,V)$, $s \in \mathbb{N}$ et si $\eta$ est un nombre réel $> 0$, il existe $g \in C^\infty(U,V)$ telle que $\|f - g\|_K^s < \eta$ et $\underline{g}_q^{-1}(\Delta) \cap K = \emptyset$.

<u>Démonstration</u>. On se ramène au cas $U = \mathbb{R}^n$ ; $V = \mathbb{R}^p$. En effet, soit $\varepsilon$ une fonction $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $\varepsilon = 1$ au voisinage de $K$, $\varepsilon = 0$ sur $\mathbb{R}^n - K'$, où $K'$ est un voisinage compact de $K$, contenu dans $U$. Soit $\tilde{f}$ l'application $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, égale à $\varepsilon.f$ sur $U$ et $0$ sur $\mathbb{R}^n - K'$. Si l'on suppose le lemme démontré lorsque $U = \mathbb{R}^n$ ; $V = \mathbb{R}^p$, il existe $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que $\|\tilde{f} - \tilde{g}\|_{K'}^s < \eta$ et $\tilde{\underline{g}}_q^{-1}(\Delta) \cap K = \emptyset$. En diminuant $\eta$ si nécessaire, on peut supposer que $\tilde{g}(K') \subset V$ ; si $0 \in V$, ce que l'on peut toujours supposer, la convexité de $V$ entraîne alors que $g = \varepsilon.\tilde{g} \mid U \in C^\infty(U,V)$. Visiblement, $\|f - g\|_K^s = \|\tilde{f} - \tilde{g}\|_K^s < \eta$ et $\underline{g}_q^{-1}(\Delta) \cap K = \tilde{\underline{g}}_q^{-1}(\Delta) \cap K = \emptyset$.

Supposons donc que $U = \mathbb{R}^n$ ; $V = \mathbb{R}^p$ et posons $f = (f_1,\dots,f_p)$. Désignons par $\mathbb{A}$ l'espace vectoriel réel admettant comme système de coordonnées les $a_j^\mu$ ($\mu \in \mathbb{N}^n$ ; $0 \leq |\mu| \leq q$ ; $j \in [1,p]$). Si $a = (a_j^\mu) \in \mathbb{A}$, soit $f^a = (f_1^a,\dots,f_p^a)$ l'application $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que :

$f_j^a(x) = f_j(x) + \sum_{|\mu|=0}^{q} a_j^\mu \dfrac{x^\mu}{\mu!}$. Soit $\Gamma$ l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{A}$ dans $J^q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ telle que $\Gamma^*(x_i) = x_i$ et $\Gamma^*(y_j^\omega) = \dfrac{\partial^{|\omega|} f_j^a}{\partial x^\omega}$.

Visiblement, le jacobien de $\Gamma$ par rapport aux coordonnées $x_1,\dots,x_n$, $a_j^\mu$ est égal à 1, ce qui montre que $\Gamma$ est une submersion. Soit $\Pi$ la projection canonique : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$. Puisque $\Gamma^{-1}(\Delta)$ est une réunion dénombrable de sous-variétés de codimensions $> n$, $\Pi(\Gamma^{-1}(\Delta))$ est un sous-ensemble de mesure nulle de $\mathbb{A}$ (par exemple, d'après le théorème de Sard). Si $a \in \mathbb{A} - \Pi(\Gamma^{-1}(\Delta))$ est assez voisin de l'origine, en posant $g = f^a$ :

$$\|f - g\|_K^s \leq \|f - g\|_K^q < \eta \text{ et } \underline{g}_q^{-1}(\Delta) = \Pi^{-1}(a) \cap \Gamma^{-1}(\Delta) = \emptyset, \text{ c.q.f.d.}$$

Démonstration de la proposition 2.

Posons $\Omega = \{f \in C^\infty(X,Y) \ ; \ \underline{f}_q^{-1}(\Delta) = \emptyset\}$. D'après le lemme 2 (en prenant $K = X$), $\Omega$ est ouvert dans $C^\infty(X,Y)$. Il reste à prouver que $\Omega$ est partout dense dans $C^\infty(X,Y)$. Soit $f_0 \in C^\infty(X,Y)$. Si $x \in X$, soit $U_x$ un voisinage ouvert relativement compact de $x$, contenu dans une carte locale de $x$ et tel que $f_0(\bar{U}_x)$ soit contenu dans une carte locale convexe de $f_0(x)$. Soit $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert localement fini de $X$, plus fin que le recouvrement $\{U_x\}_{x \in X}$. Il existe des compacts $K_i \subset U_i$ tels que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = X$. Enfin, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f_0(\bar{U}_i)$ est contenu dans une carte locale convexe $V_i$.

Soit $\mathcal{V} = \{f \in C^\infty(X,Y) \ ; \ \forall i \in \mathbb{N}, \ f(\bar{U}_i) \subset V_i\}$ : visiblement, $\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert de $f_0$. Posons $\Omega_{K_i} = \{f \in C^\infty(X,Y) \ ; \ \underline{f}_q^{-1}(\Delta) \cap K_i = \emptyset\}$ ; d'après le lemme 2, les $\Omega_{K_i} \cap \mathcal{V}$ sont des ouverts de $\mathcal{V}$. S'ils sont partout denses dans $\mathcal{V}$ (qui est un ouvert d'un espace de Baire, donc un espace de Baire), $\Omega \cap \mathcal{V} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\Omega_{K_i} \cap \mathcal{V})$ sera partout dense dans $\mathcal{V}$. Il suffit donc de montrer que $\Omega_{K_i} \cap \mathcal{V}$ est partout dense dans $\mathcal{V}$.

Posons $U_i = U$ ; $V_i = V$ ; $K_i = K$ (on identifie $U$ à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ; $V$ à un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$). Soit $K'$ un voisinage compact de $K$, contenu dans $U$, et désignons par $\varepsilon$ une fonction $C^\infty$ sur $U$, à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 au voisinage de $K$ et 0 sur $U - K'$.

Si $f \in \mathcal{V}$, désignons par $f'$ la restriction de $f$ à $U$ : $f' \in C^\infty(U,V)$. D'après le lemme 3, $\forall s \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$, il existe $g' \in C^\infty(U,V)$, telle que :

$||f' - g'||^{s}_{K'} < \eta$ et $\underline{g}'^{-1}_{q}(\Delta) \cap K = \emptyset$. La fonction $g'' = \varepsilon g' + (1-\varepsilon) f'$ appartient à $C^{\infty}(U,V)$ (car V est convexe). Soit g l'élément de $C^{\infty}(X,Y)$ égal à $g''$ sur U et à f sur X - K'. En restriction à U : $f - g = \varepsilon(f' - g')$. En choisissant s assez grand et $\eta$ assez petit, on peut supposer que g est aussi voisin que l'on veut de f. Par construction, $g \in \Omega_K$ (car g = g' au voisinage de K). Ainsi, $\Omega_K \cap \mathcal{V}$ est partout dense dans $\mathcal{V}$, c.q.f.d.

Le théorème suivant est une version algébrique du théorème de transversalité de Thom [2] :

<u>Théorème 1</u>. Soit $\tilde{\pi}$ un faisceau d'idéaux, analytique cohérent sur un ouvert $\tilde{\Omega}$ de $J^q(X,Y)$. Soit $\Omega$ un ouvert de $J^q(X,Y)$ tel que $\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$ et posons $\pi = \tilde{\pi} \mid \Omega$. Si $f \in C^{\infty}(X,Y)$, génériquement :

$$\overline{\underline{f}^{*}_{q}(J_k(\pi))} = \overline{J_k(\underline{f}^{*}_{q}(\pi))}.$$

<u>Démonstration</u>. Posons

$$\Sigma = V([\overline{J^{*}_{k}(\pi)} : \rho^{*}_{q}(J_k(\pi))])$$

$$\tilde{\Sigma} = V([\overline{J^{*}_{k}(\tilde{\pi})} : \rho^{*}_{q}(J_k(\tilde{\pi}))]).$$

L'adhérence $\Delta$ de $\Sigma$ dans $J^{q+1}(X,Y)$ est contenue dans $\tilde{\Sigma}$ et, d'après la proposition 1, $\tilde{\Sigma}$ est une réunion finie de sous-variétés de $J^{q+1}(X,Y)$ de codimensions > n. D'après la proposition 2, génériquement : $\underline{f}^{-1}_{q+1}(\Sigma) = \emptyset$. On déduit de là et de l'égalité (1) du paragraphe 2, les inclusions :

$$\overline{J_k(\underline{f}^{*}_{q}(\pi))} = \overline{\underline{f}^{*}_{q+1}(J^{*}_{k}(\pi))} \supset \underline{f}^{*}_{q+1}(\overline{J^{*}_{k}(\pi)}) \supset \underline{f}^{*}_{q}(J_k(\pi)).$$

D'autre part, on a toujours l'inclusion : $\underline{f}^{*}_{q}(J_k(\pi)) \supset J_k(\underline{f}^{*}_{q}(\pi))$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire 1. En plus des hypothèses du théorème 1, donnons nous un faisceau d'idéaux $\tilde{\pi}'$, analytique cohérent sur $\tilde{\Omega}$ et tel que $(\tilde{\pi},\tilde{\pi}')$ soit une k-strate de $\tilde{\Omega}$.

Posons $\pi' = \tilde{\pi}' \mid \Omega$. Si $f \in C^{\infty}(X,Y)$, génériquement :

$$(\underline{f}_q^{*}(\pi),\ \underline{f}_q^{*}(\pi')) \text{ est une k-strate de } \underline{f}_q^{-1}(\Omega).$$

Démonstration. Par hypothèse : $\pi \subset \overline{\pi'} \subset \overline{\sigma_k(\pi)} \cap \overline{J_k(\pi)}$.

Pour tout $f \in C^{\infty}(X,Y)$ : $\underline{f}_q^{*}(\overline{\sigma_k(\pi)}) \subset \overline{\sigma_k(\underline{f}_q^{*}(\pi))}$.

D'après le théorème 1, on a génériquement :

$$\overline{\underline{f}_q^{*}(J_k(\pi))} = \overline{J_k(\underline{f}_q^{*}(\pi))}$$

d'où :

$$\underline{f}_q^{*}(\pi) \subset \overline{\underline{f}_q^{*}(\pi')} \subset \overline{\sigma_k(\underline{f}_q^{*}(\pi))} \cap \overline{J_k(\underline{f}_q^{*}(\pi))},\ \text{c.q.f.d.}$$

Corollaire 2. Avec les hypothèses du théorème 1, génériquement $\underline{f}_q^{*}(\pi)$ est un idéal stratifiable.

Démonstration. En effet, soit $(\tilde{\pi}_j)_{j\in[0,s]}$ une stratification de $\tilde{\pi}$ (une telle stratification existe, d'après le paragraphe 1, d) : d'après le corollaire 1, si l'on pose $\pi_j = \tilde{\pi}_j \mid \Omega$, $(\underline{f}_q^{*}(\pi_j))_{j\in[0,s]}$ est une stratification de $\underline{f}_q^{*}(\pi)$, c.q.f.d.

## § 4 - Propriétés généralement vraies.

a. Soient $\underline{k}$ un corps commutatif ; $\mathfrak{F} = \underline{k}[[x_1,\dots,x_n]]$ l'anneau des séries formelles à n indéterminées, à coefficients dans $\underline{k}$ ; $\underline{n}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{F}$. Si p et q sont des entiers ($p \geq 1$, $q \geq 0$), on pose $\mathfrak{F}_q^p = \mathfrak{F}^p/\underline{n}^{q+1}.\mathfrak{F}^p$ : $\mathfrak{F}_q^p$ est un $\underline{k}$-espace vectoriel de dimension $p.\binom{n+q}{n}$. Le point générique de $\mathfrak{F}^p$ sera noté $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ avec $\varphi_j = \sum_{\omega\in\mathbb{N}^n} a_j^{\omega}\dfrac{x^{\omega}}{\omega!}$ (i.e. $a_j^{\omega} = \dfrac{\partial^{|\omega|}\varphi_j(0)}{\partial x^{\omega}}$)

Soit $\Pi_q$ la projection canonique : $\mathfrak{F}^p \to \mathfrak{F}^p_q$ ; si $q' \geq q$, notons $\Pi_{q,q'}$ la projection canonique : $\mathfrak{F}^p_{q'} \to \mathfrak{F}^p_q$. Donnons nous dans chaque $\mathfrak{F}^p_q$ une variété algébrique (au sens ensembliste) $V_q$, de telle sorte que $\Pi_{q,q+1}(V_{q+1}) \subset V_q$, $\forall q \in \mathbb{N}$. Posons $V = \varprojlim V_q$. La suite $d_q = \operatorname{codim}_{\mathfrak{F}^p_q} V_q$ est croissante. Nous dirons que V est une provariété algébrique de codimension égale à $\lim\limits_{q\to\infty} d_q$. Nous réservons le terme de variété à toute provariété de codimension finie.

<u>Remarque</u> : La provariété V est de codimension infinie si et seulement si, $\forall q \in \mathbb{N}$ et $\forall \xi \in \mathfrak{F}^p_q$, $\Pi_q^{-1}(\xi) \not\subset V$. En effet, cette condition est visiblement nécessaire. Réciproquement, soient $V_q^1,\dots,V_q^s$ les composantes irréductibles de $V_q$ et soit $\xi^i \in V_q^i$. Il existe un entier $q' \geq q$ tel que, $\forall i \in [1,s]$, $V_{q'} \not\supset \Pi^{-1}_{q,q'}(\xi^i)$, donc $V_{q'} \not\supset \Pi^{-1}_{q,q'}(V_q)$. Ceci entraîne $\operatorname{codim}_{\mathfrak{F}^p_q} V_q < \operatorname{codim}_{\mathfrak{F}^p_{q'}} V_{q'}$, d'où $\operatorname{codim} V = \infty$.

<u>Définition 2</u>. Soit $\mathfrak{F}^p_*$ une sous-variété algébrique de $\mathfrak{F}^p$. Une propriété $(\mathbb{P})$ relative aux éléments de $\mathfrak{F}^p_*$ est <u>généralement vraie</u>, s'il existe dans $\mathfrak{F}^p_*$ une provariété algébrique de codimension infinie V, telle que tout $\varphi \in \mathfrak{F}^p_* - V$ satisfasse à $(\mathbb{P})$.

b.

<u>Lemme 4.</u> Soit I un idéal de $\mathfrak{F}$. Si $\dim_{\underline{k}} (\mathfrak{F}/I) \leq h$, alors $I \supset \underline{n}^h$.

<u>Démonstration</u>. En effet, supposons que $I \not\supset \underline{n}^h$ ; la chaîne formée des puissances de l'idéal maximal $\underline{n}/I$ de $\mathfrak{F}/I$ : $\mathfrak{F}/I \supset \underline{n}/I \supset \dots \supset \underline{n}^h+I/I \supset 0$ est, d'après le lemme de Nakayama, strictement décroissante. Il en résulte que $\dim_{\underline{k}}(\mathfrak{F}/I) > h$.

Posons $\omega(h) = \dim_{\underline{k}} (\mathcal{F}/\underline{n}^{h+1}) = \binom{n+h}{n}$.

**Corollaire.** Si $\dim_{\underline{k}} (\mathcal{F}/I+\underline{n}^{h+1}) \leq h$ ou de façon équivalente si $\dim_{\underline{k}} (I+\underline{n}^{h+1}/\underline{n}^{h+1}) \geq \omega(h) - h$, alors $I \supset \underline{n}^h$ et $\dim_{\underline{k}} (\mathcal{F}/I) \leq h$.

*Démonstration.* D'après le lemme 4, $I+\underline{n}^{h+1} \supset \underline{n}^h$ ; le lemme de Nokayama entraîne que $I \supset \underline{n}^h$. Il résulte alors de l'hypothèse du corollaire, que $\dim_{\underline{k}}(\mathcal{F}/I) \leq h$.

Soient $\Psi_1,\ldots,\Psi_s$ des séries formelles en $x_1,\ldots,x_n$ à coefficients polynômes en les $a_j^{\omega}$ ($\omega \in \mathbb{N}^n$ et $j \in [1,p]$). Si $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_p) \in \mathcal{F}^p$, on désigne par $\Psi_{i,\varphi}$ l'élément de $\mathcal{F}$ obtenu en faisant dans $\Psi_i$ :

$$a_j^{\omega} = \frac{\partial^{|\omega|}\varphi_{j(0)}}{\partial x^{\omega}}$$

. Soit $I_{\varphi}$ l'idéal engendré dans $\mathcal{F}$ par les $\Psi_{i,\varphi}$.

**Proposition 3.** L'ensemble des $\varphi \in \mathcal{F}^p$ tels que $\dim_{\underline{k}} (\mathcal{F} | I_{\varphi}) < \infty$ est le complémentaire d'une provariété algébrique $\mathcal{W}$.

*Démonstration.* Posons $\mathcal{W}_h = \{\varphi \in \mathcal{F}^p \,;\, \dim_{\underline{k}} (\mathcal{F} \,|I_{\varphi}) > h\} = \{\varphi \in \mathcal{F}^p \,;\, \dim_{\underline{k}} (I_{\varphi} + \underline{n}^{h+1} / \underline{n}^{h+1}) < \omega(h) - h\}$ (d'après le corollaire du lemme 4). Le $\underline{k}$-espace vectoriel $I_{\varphi} + \underline{n}^{h+1}|\underline{n}^{h+1}$ est engendré par les éléments $x^{\mu}\ \Psi_{i,\varphi}$ ($\mu \in \mathbb{N}^n$ et $0 \leq |\mu| \leq h$). Si $\Psi^{\mu'}_{i,\mu,\varphi}$ ($\mu' \in \mathbb{N}^n$ et $0 \leq |\mu'| \leq h$) est la composante de $x^{\mu}\ \ \Psi_{i,\varphi}$ suivant $x^{\mu'}$, on voit que $\varphi \in \mathcal{W}_h$ si et seulement si le rang de la matrice $|\Psi^{\mu'}_{i,\mu,\varphi}|$ (d'indice ligne $(i,\mu)$ et d'indice colonne $\mu'$) est $< \omega(h) - h$, i.e. si et seulement si les mineurs d'ordre $\omega(h) - h$ de cette matrice sont tous nuls. Ainsi $\mathcal{W}_h$ est une sous-variété algébrique de $\mathcal{F}^p$. Visiblement $\mathcal{W}_h \supset \mathcal{W}_{h+1} \supset \ldots$ et $\mathcal{W} = \bigcap_{h=0}^{\infty} \mathcal{W}_h$ est une provariété algébrique.

c. Nous supposerons désormais que $\underline{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $\rho_q : J^{q+1}(\underline{k}^n,\underline{k}^p) \longrightarrow J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)$ la projection canonique. Soit $\mathcal{A}^q$ le faisceau sur $J^q(\underline{k}^n,\underline{k}^p)$ des germes de fonctions analytiques à valeurs dans $\underline{k}$.

Soit $\xi$ un point (fixé une fois pour toutes) de $J^{q+1}(\underline{k}^n,\underline{k}^p)$, de coordonnées $x_1 = \ldots = x_n = 0$ ; $y_j^\omega = \xi_j^\omega$. Posons :

$$\mathfrak{F}^p(\xi) = \{ \varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_p) \in \mathfrak{F}^p \ ; \ \forall j \in [1,p] \ \text{et} \ \forall \omega \in \mathbb{N}^n,$$
$$0 \leq |\omega| \leq q+1 \ , \quad \frac{\partial^\omega \varphi_j(0)}{\partial x^\omega} = \xi_j^\omega\} \quad .$$

Si $\varphi \in \mathfrak{F}^p(\xi)$, on désigne par $\underline{\varphi}^*_{q+1}$ l'homomorphisme de $\mathcal{A}_\xi^{q+1}$ dans $\mathfrak{F}$ obtenu en faisant les substitutions :

$$x_i \rightsquigarrow x_i \quad ; \quad y_j^\omega - \xi_j^\omega \rightsquigarrow \frac{\partial^{|\omega|}\varphi_j}{\partial x^\omega} - \frac{\partial^{|\omega|}\varphi_j(0)}{\partial x^\omega} \quad .$$

Si $\pi_\xi^*$ est un idéal de $\mathcal{A}_\xi^{q+1}$, on désignera simplement par $\underline{\varphi}^*_{q+1}(\pi_\xi^*)$ l'idéal engendré par $\underline{\varphi}^*_{q+1}(\pi_\xi^*)$ dans $\mathfrak{F}$.

<u>Proposition 4</u>. Soit $\pi_\xi^*$ un idéal de $\mathcal{A}_\xi^{q+1}$ tel que $\mathrm{ht}(\pi_\xi^*) \geq n$. En général : $\dim_{\underline{k}} ( \mathfrak{F} \mid \underline{\varphi}^*_{q+1}(\pi_\xi^*)) < \infty$, lorsque $\varphi$ décrit $\mathfrak{F}^p(\xi)$.

<u>Démonstration</u>. Le cas réel se ramène, après complexification, au cas complexe. Nous supposerons donc, pour la démonstration, que $\underline{k} = \mathbb{C}$.

L'idéal $\pi_\xi^*$ est engendré par des fonctions $P_1,\ldots,P_s$ analytiques sur un voisinage $\Omega^*$ de $\xi$ dans $J^{q+1}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^p)$. Soit $\pi^*$ le faisceau d'idéaux, analytique cohérent sur $\Omega^*$, engendré par les $P_i$. En diminuant $\Omega^*$ si nécessaire on peut supposer que, $\forall \eta \in \Omega^*$ :

(1) ht $(\pi_n^*) \geq n$.

Posons $\Psi_{1,\varphi} = \underline{\varphi}^*_{q+1}(P_1), \ldots, \Psi_{s,\varphi} = \underline{\varphi}^*_{q+1}(P_s)$ : les coefficients des séries formelles $\Psi_{1,\varphi}, \ldots, \Psi_{s,\varphi}$ sont des polynômes en les $a_j^\omega = \dfrac{\partial^{|\omega|}\varphi_j(0)}{\partial x^\omega}$. D'après la proposition 3, l'ensemble des $\varphi \in \mathfrak{F}^p(\xi)$ tels que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{F} \mid \underline{\varphi}^*_{q+1}(\pi_\xi^*)) < \infty$ est le complémentaire d'une provariété algébrique $\mathcal{W}$. Il reste à vérifier que $\mathcal{W}$ est de codimension infinie.

Soit $\ell$ un entier $\geq q+1$ et donnons nous pour $j \in [1,p]$ et $\mu \in \mathbb{N}^n$, $q+1 < |\mu| \leq \ell$, des nombres complexes arbitraires $\xi_j^\mu$. D'après la remarque du a) de ce paragraphe, il suffit de trouver des $b_j^\nu$ ($j \in [1,p]$ ; $\nu \in \mathbb{N}^n$ et $\ell+1 \leq |\nu| \leq \ell+q+2$) tels que si :

$$\varphi_j^b = \sum_{|\mu|=0}^{\ell} \xi_j^\mu \frac{x^\mu}{\mu!} + \sum_{|\nu|=\ell+1}^{\ell+q+2} b_j^\nu \frac{x^\nu}{\nu!}$$

on ait $\varphi^b = (\varphi_1^b, \ldots, \varphi_p^b) \notin \mathcal{W}$.

Soit $\mathbb{B}$ l'espace vectoriel complexe, admettant comme système de coordonnées les $b_j^\nu$. Si $U_o$, $\mathbb{B}_o$ sont des voisinages respectifs assez petits de l'origine de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{B}$, on définit une application polynomiale (cf. lemme 1) :

$$\Gamma_o : U_o \times \mathbb{B}_o \rightsquigarrow \Omega^*$$

en posant : $\Gamma_o^*(x_1) = x_1$ ; ... ; $\Gamma_o^*(x_n) = x_n$ et $\Gamma_o^*(y_j^\omega) = \dfrac{\partial^{|\omega|}\varphi_j^b}{\partial x^\omega}$.

D'après le lemme 1, en restriction à $U_o - \{0\}) \times \mathbb{B}_o$, l'application $\Gamma_o$ est une submersion. Il résulte de là et de (1) qu'en tout point de $(U_o - \{0\}) \times \mathbb{B}_o$ la codimension de $\Gamma_o^{-1}(V(\pi^*))$ est $\geq n$. Puisque $\{0\} \times \mathbb{B}_o$ est un sous-ensemble analytique de codimension n de $U_o \times \mathbb{B}_o$, $\Gamma_o^{-1}(V(\pi^*))$ est un sous-ensemble analytique de codimension $\geq n$ de $U_o \times \mathbb{B}_o$. Distinguons deux cas :

- s'il existe $b \in \mathbb{B}_o$ tel que $(0,b) \notin \Gamma_o^{-1}(V(\pi^*))$, $\underline{\varphi}_{q+1}^{b*}(\pi_\xi^*) = \mathfrak{F}$ et donc $\varphi^b \notin \mathcal{W}$.

- sinon, $\{0\} \times \mathbb{B}_o \subset \Gamma_o^{-1}(V(\pi^*))$. Puisque la codimension de $\{0\} \times \mathbb{B}_o$ est n, il existe $b \in \mathbb{B}_o$ tel que $\{0\} \times \mathbb{B}_o = \Gamma_o^{-1}(V(\pi^*))$ au voisinage de $(0,b)$. Le germe d'ensemble analytique : $\{\underline{\varphi}_{q+1}^{b*}(P_1) = \dots = \underline{\varphi}_{q+1}^{b*}(P_s) = 0\}$ est donc réduit à l'origine de $\mathbb{C}^n$, ce qui entraîne $\varphi^b \notin \mathcal{W}$, c.q.f.d.

§ 5 - Le théorème de quasi-transversalité.

Dans ce paragraphe, $\underline{k} = \mathbb{R}$. Désignons par $\mathcal{E}$ l'anneau des germes de fonctions numériques, $C^\infty$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. Soit $T : \mathcal{E}^p \longrightarrow \mathfrak{F}^p$ la surjection qui associe à tout germe sa série formelle à l'origine.

Définition 3. Soit $\mathfrak{F}_*^p$ une sous-variété algébrique de $\mathfrak{F}^p$. Une propriété $(\mathbb{P})$ relative aux éléments de $T^{-1}(\mathfrak{F}_*^p)$ est généralement vraie, s'il existe dans $\mathfrak{F}_*^p$ une provariété algébrique de codimension infinie V, telle que tout $f \in T^{-1}(\mathfrak{F}_*^p - V)$ satisfasse à $(\mathbb{P})$.

Revenons aux notations du § 4, c. Posons $\mathcal{E}^p(\xi) = T^{-1}(\mathfrak{F}^p(\xi))$. Si $f \in \mathcal{E}^p(\xi)$, soit $\underline{f}_{q+1}$ le germe à l'origine de $\mathbb{R}^n$ de l'application $C^\infty$ $j^{q+1}(\tilde{f})$, où $\tilde{f}$ est une application $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ induisant le germe f à l'origine de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\underline{f}_{q+1}(0) = \xi$, le germe d'application $\underline{f}_{q+1}$ induit un homomorphisme $\underline{f}_{q+1}^* : \mathcal{O}_\xi^{q+1} \longrightarrow \mathcal{E}$. Si $\pi_\xi^*$ est un idéal de $\mathcal{O}_\xi^{q+1}$, on note simplement $\underline{f}_{q+1}^*(\pi_\xi^*)$ l'idéal engendré par $\underline{f}_{q+1}^*(\pi_\xi^*)$ dans $\mathcal{E}$. Si $\varphi = T(f)$, $\underline{\varphi}_{q+1}^* = T \circ \underline{f}_{q+1}^*$ et donc $\underline{\varphi}_{q+1}^*(\pi_\xi^*) = T(\underline{f}_{q+1}^*(\pi_\xi^*))$. La proposition 4 admet le corollaire immédiat :

Corollaire. Avec les hypothèses de la proposition 4, en général :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{E} \mid \underline{f}^*_{q+1}(\pi^*_\xi)) < \infty \quad , \text{ lorsque } f \text{ décrit } \mathcal{E}^p(\xi).$$

(En effet, si $\mathfrak{J}$ est un idéal de $\mathcal{E}$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}\mid \mathfrak{J}) < \infty$ si et seulement si $\dim_{\mathbb{R}} (\mathfrak{F} \mid T(\mathfrak{J})) < \infty$ ).

Si $f \in \mathcal{E}^p(\xi)$, posons $\underline{f}_q = \rho_q \circ \underline{f}_{q+1}$ : $\underline{f}_q$ est un germe d'application $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $J^q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ qui envoie l'origine sur le point $\eta = \rho_q(\xi)$. Le germe d'application $\underline{f}_q$ induit un homomorphisme $\underline{f}^*_q$ : $\mathcal{O}^q_\eta \longrightarrow \mathcal{E}$. Si $\pi_\eta$ est un idéal de $\mathcal{O}^q_\eta$ on désigne simplement par $\underline{f}^*_q(\pi_\eta)$ l'idéal de $\mathcal{E}$ engendré par $\underline{f}^*_q(\pi_\eta)$.

Le théorème suivant est une version locale du théorème 1 (cf. [3], chapitre I) :

Théorème 2. Soit $\pi_\eta$ un idéal de $\mathcal{O}^q_\eta$. Soient $\underline{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{N}$. Lorsque f décrit $\mathcal{E}^p(\xi)$, en général :

$$\overline{J_k(\underline{f}^*_q(\pi_\eta))} \supset \underline{m} \cdot \underline{f}^*_q(J_k(\pi_\eta)).$$

Démonstration. Soit $\Omega$ un voisinage de $\eta$ dans $J^q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ et soit $\pi$ un faisceau d'idéaux, analytique cohérent sur $\Omega$, tel que $\pi_\eta$ soit la fibre de $\pi$ au point $\eta$. Le faisceau d'idéaux $\pi^* = [\overline{J^*_k(\pi)} : \rho^*_q(J_k(\pi))]$ est analytique cohérent sur $\rho_q^{-1}(\Omega)$. L'idéal $\pi^*_\xi$ vérifie les hypothèses de la proposition 4 (on a $ht(\pi^*_\xi) > n$, d'après la proposition 1).

D'après le corollaire de la proposition 4, en général $\underline{f}^*_{q+1}(\pi^*_\xi)$ contient une puissance de $\underline{m}$. Or :

$$\underline{f}^*_{q+1}(\pi^*_\xi) \subset [\overline{\underline{f}^*_{q+1}(J^*_k(\pi))_\xi} : \underline{f}^*_q(J_k(\pi_\eta))] =$$

$$[\overline{J_k(\underline{f}^*_q(\pi_\eta))} : \underline{f}^*_q(J_k(\pi_\eta))]$$

d'où le théorème.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] B. MALGRANGE — Ideals of differentiable functions, Oxford Uni. Press (1966).

[2] R. THOM — Un lemme sur les applications différentiables, Bol. Soc. Mat. Mexicana, (1956), p. 59-71.

[3] J.Cl. TOUGERON — Idéaux de fonctions différentiables, I, Annales de l'Institut Fourier, Tome XVIII, 1968.

[4] J.Cl. TOUGERON et J. MERRIEN — Idéaux de fonctions différentiables, II, polycopié, Faculté des Sciences de Rennes.