

YVES DERRIENNIC

Solution d'une question posée par Cuculescu et Foias relative à la partie conservative d'une suite d'opérateurs

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 2

« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. n° 4, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969__2_A4_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION D'UNE QUESTION POSEE PAR CUCULESCU ET
FOIAS RELATIVE A LA PARTIE CONSERVATIVE
D'UNE SUITE D'OPERATEURS

par

Yves DERRIENNIC

Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré σ -fini.

Soit $(T_n)_n$ une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $L^1(\mu)$, de norme ≤ 1 , tels que $T_n f \geq T_{n+1} f$ pour chaque $f \geq 0$, $f \in L^1(\mu)$.

Si $f \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$, la suite $(T_n f)_n$ est décroissante. Posons $T_\infty f = \lim_n T_n f$. Pour g quelconque dans $L^1(\mu)$, la relation $T_\infty(g) = T_\infty(g^+) - T_\infty(g^-)$ définit T_∞ comme un opérateur linéaire positif sur $L^1(\mu)$ de norme ≤ 1 .

THEOREME ERGODIQUE DE CUCULESCU ET FOIAS.

Soit $(f_n)_n$ une suite positive dans $L^1(\mu)$ telle que $f_n \leq T_n f_{n-1}$ pour chaque entier n . Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions positives, μ -mesurables, sur X telle que pour chaque $f \in L^1(\mu)$, $0 \leq f \leq g_n$ implique $T_{n+1} f \leq g_{n+1}$, quel que soit n .

Alors sur l'ensemble $\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} g_i > 0 \right\}$, la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_0^+ \dots + f_n}{g_0^+ \dots + g_n}$ existe et est finie μ .p.p.

DEFINITION DE LA PARTIE CONSERVATIVE C DE LA SUITE T_n .

Soit $g \in L^1(\mu)$ telle que $g > 0$ upp. Soit $C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} T_n T_{n-1} \dots T_1 g = +\infty \right\}$

D'après le résultat précédent, cette partie C ne dépend pas du choix de la fonction strictement positive g choisie.

D'autre part, pour tout $n = 1 \dots +\infty$, on note C_n la partie conservative de T_n , c'est-à-dire, si $g \in L^1(\mu)$, $g > 0$ μ p.p., $C_n = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} T_n^i g = +\infty \right\}$; cette partie C_n ne dépend pas du choix de g .

Puisque la suite $(T_n)_n$ est décroissante, on a :

$$T_{\infty}^{n-1} g \leq T_n T_{n-1} \dots T_1 g \quad \text{et} \quad T_{n+i} \dots T_n \dots T_1 g \leq T_n^i (T_n \dots T_1 g)$$

pour tout n et tout i . Donc $C_{\infty} \subset C \subset C_n$ pour chaque $n < +\infty$, et la suite

$$(C_n)_n \text{ est décroissante. Notons } C_0 = \bigcap_{1 \leq n < +\infty} C_n$$

Nous avons $C_{\infty} \subset C \subset C_0$.

Résultat principal.

Les trois parties C_{∞} , C , C_0 sont égales.

Pour démontrer ceci, il suffit de montrer que T_{∞} est conservatif sur C_0 . Ceci est la conséquence de la proposition suivante :

Proposition.

Si $\varphi \in L^{\infty}(\mu)$ et $\varphi \geq 0$ vérifie $\{\varphi > 0\} \subset C_0$ la relation $(I_{C_0} \circ T^*) \varphi \leq \varphi$ implique $I_{C_0} \circ T_{\infty}^* \varphi = \varphi$.

(I_{C_0} désigne l'opérateur qui à f associe $1_{C_0} f$)

Posons $U_n = T_n \circ I_{C_n}$ et $U_{\infty} = T_{\infty} \circ I_{C_0}$. Comme $C_0 = \bigcap_{1 \leq n < +\infty} C_n$ on a, pour chaque $f \in L^1(\mu)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n f = U_{\infty} f$. La suite des opérateurs $(U_n)_n$ est décroissante, et $\|U_n\| \leq 1$ pour chaque n .

Soit $\varphi \in L_+^\infty(\mu)$. Pour chaque $n=1 \dots \infty$, on construit dans $L_+^\infty(\mu)$ la suite croissante $(\phi_n^k)_k$ où $\phi_n^0 = \varphi$ et $\phi_n^{k+1} = \varphi \vee U_n^* \phi_n^k$ ($\varphi \vee U_n^* \phi_n^k$ désigne le sup $(\varphi, U_n^* \phi_n^k)$). Alors $\psi_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_n^k$ est le potentiel d'équilibre de φ relatif à U_n , c'est-à-dire la plus petite des fonctions ψ , majorant φ , vérifiant $U_n^* \psi \leq \psi$.

Propriété 1.

Pour chaque k , la suite $(\phi_n^k)_n$ est décroissante et majore ϕ_∞^k .

Démonstration :

La propriété est évidente pour $k=0$.

Supposons $\phi_n^k \geq \phi_{n+1}^k \geq \phi_\infty^k$. Alors $U_n^* \phi_n^k \geq U_{n+1}^* \phi_{n+1}^k \geq U_\infty^* \phi_\infty^k$ et

$$\phi_n^{k+1} = \varphi \vee U_n^* \phi_n^k \geq \varphi \vee U_{n+1}^* \phi_{n+1}^k \geq \varphi \vee U_\infty^* \phi_\infty^k = \phi_\infty^{k+1}.$$

Donc la propriété est vraie pour tout k .

Propriété 2.

La suite $(\psi_n)_n$ est décroissante et majore ψ_∞ .

Démonstration :

Immédiate d'après la propriété 1 et la définition de ψ_n .

Propriété 3.

Si $(g_n)_n$ est une suite décroissante dans $L_+^\infty(\mu)$ ayant pour limite g_∞ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^* g_n = U_\infty^* g_\infty.$$

Démonstration :

La suite $(U_n^* g_n)_n$ est décroissante donc admet une limite.

De plus, on a :

$$U_\infty^*(g_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_\infty^* g_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} U_n^* g_n \leq U_i^* (\lim_{n \rightarrow \infty} g_n) = U_i^* g_\infty \text{ pour chaque } i \geq 1.$$

Ceci donne aussitôt le résultat.

Propriété 4.

Pour chaque k , $\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j^k = \phi_\infty^k$.

Démonstration :

Pour $k = 0$ c'est évident. Supposons le résultat pour k . La propriété 3 donne : $\lim_{j \rightarrow \infty} U_j^* \phi_j^k = U_\infty^* \phi_\infty^k$, d'où :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j^{k+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} (\varphi \vee U_j^* \phi_j^k) = (\varphi \vee U_\infty^* \phi_\infty^k) = \phi_\infty^{k+1}$$

Propriété 5.

Si pour tout n , $1 \leq n < \infty$, $U_n^* \psi_n = \psi_n$, la suite $(\psi_n - \phi_n^k)$ est décroissante et majore $\psi_\infty - \phi_\infty^k$, pour chaque k .

Démonstration :

Pour $k = 0$, la propriété est une conséquence de la propriété 2).

Supposons $\psi_n - \phi_n^k \geq \psi_{n+1} - \phi_{n+1}^k$.

Alors, d'après l'hypothèse $U_n^* \psi_n = \psi_n$ et $U_n^* \geq U_{n+1}^*$ on a :

$$U_n^* (\psi_n - \phi_n^k) = \psi_n - U_n^* \phi_n^k \geq U_{n+1}^* (\psi_{n+1} - \phi_{n+1}^k) = \psi_{n+1} - U_{n+1}^* \phi_{n+1}^k$$

Sur l'ensemble $\{\psi \leq U_{n+1}^* \phi_{n+1}^k\}$ on a :

$$\psi_n - \phi_n^{k+1} = \psi_n - U_n^* \phi_n^k \geq \psi_{n+1} - U_{n+1}^* \phi_{n+1}^k = \psi_{n+1} - \phi_{n+1}^{k+1}$$

car d'après 1), $U_{n+1}^* \phi_{n+1}^k \leq U_n^* \phi_n^k$.

Sur l'ensemble $\{U_n^* \phi_n^k \leq \varphi\}$ on a :

$$\psi_n - \phi_n^{k+1} = \psi_n - \varphi \geq \psi_{n+1} - \varphi = \psi_{n+1} - \phi_{n+1}^{k+1}$$

Sur l'ensemble $\{U_{n+1}^* \phi_{n+1}^k < \varphi < U_n^* \phi_n^k\}$ on a :

$$\psi_n - \phi_n^{k+1} = \psi_n - U_n^* \phi_n^k \geq \psi_{n+1} - U_{n+1}^* \phi_{n+1}^k \geq \psi_{n+1} - \varphi = \psi_{n+1} - \phi_{n+1}^{k+1}$$

Comme ces trois ensembles recouvrent X , ceci démontre la première propriété.

Enfin $\psi_n - \phi_n^k \geq \psi_{n+j} - \phi_{n+j}^k \geq \psi_\infty - \phi_{n+j}^k$ quel que soit $j \geq 0$.

D'après la propriété 4), on obtient :

$$\psi_n - \phi_n^k \geq \lim_{j \rightarrow \infty} (\psi_\infty - \phi_{n+j}^k) = \psi_\infty - \phi_\infty^k.$$

Propriété 6.

Si pour chaque n , $1 \leq n < +\infty$, $U_n^* \psi_n = \psi_n$ on a :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = \psi_\infty \text{ et } U_\infty^* \psi_\infty = \psi_\infty$$

Démonstration :

D'après la propriété 4), la convergence de ϕ_j^k vers ψ_j , quand $k \rightarrow +\infty$, est uniforme en $j = 1, \dots, \infty$ ceci permet d'écrire :

$$\psi_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_\infty^k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j^k) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_j^k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j$$

Enfin, d'après la propriété 3), $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^* \psi_n = U_\infty^* \psi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi_\infty$

Démonstration de la proposition.

Pour chaque n , $1 \leq n < +\infty$, $\{\varphi > 0\} \subset C_n$ d'où $\{\psi_n > 0\} \subset C_n$,
d'après l'hypothèse $\{\varphi > 0\} \subset C_0$. Puisque C_n est la partie conservative de
 U_n , $U_n^* \psi_n \leq \psi_n$ implique $U_n^* \psi_n = \psi_n$.

L'hypothèse $U_\infty^* \varphi \leq \varphi$ signifie $\psi_\infty = \varphi$. Puisque les hypothèses de la
propriété 6) sont vérifiées, on en tire $U_\infty^* \varphi = \varphi$.

Ceci achève la démonstration de la proposition et du résultat
principal.

REFERENCE

- I. CUCULESCU et C. FOIAS : An individual ergodic theorem for positive
operators. Revue Roumaine de Math. Pures et
Appliquées. Tome XI - N° 5 (1966).