YVES DERRIENNIC

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une mesure invariante

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 2
« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. n[o] 3, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___2_A3_0>

UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR L'EXISTENCE D'UNE MESURE INVARIANTE

par

Yves DERRIENNIC

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de donner une condition nécessaire et suffisante pour que, sur un espace mesuré $(E,\mathcal{F},m)$, il existe une mesure μ équivalente à m, invariante sous un opérateur conservatif T défini sur $L^1(E,\mathcal{F},m)$. Dans [1], Y.N. Dowker a donné une telle condition dans le cas où T est défini à partir d'une transformation de l'espace E (voir le théorème II dans [1]). On se propose ici de généraliser cette condition au cas où l'opérateur T est quelconque. Le rôle joué, dans la démonstration de Y.N. Dowker, par le théorème ergodique de E. Hopf, sera joué ici par le théorème ergodique de Chacon et Ornstein.

I - NOTATIONS ET RESULTAT PRINCIPAL. -

On se donne, une fois pour toutes, un espace mesuré fini $(E, \mathcal{F}, m)$ et un opérateur T sur $L^1(E, \mathcal{F}, m)$. On suppose dans toute la suite que T est markovien (i. e. $\|T\| = 1$) et conservatif (i. e. si $f \in L^1(E, \mathcal{F}, m)$ et $\{ f > 0 \} = E$. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n f = + \infty$ m p.p.). On note T^* l'opérateur adjoint sur $L^\infty(E, \mathcal{F}, m)$.

Soit $\mathcal{M}^+$ l'espace des fonctions, à valeurs réelles positives, définies et mesurables sur $(E, \mathcal{F})$. On rappelle que T et T^* se prolongent à $\mathcal{M}^+$, par passage aux limites monotones.

On dit que deux mesures λ et λ' sur $(E, \mathcal{F})$ sont équivalentes si, pour $A \in \mathcal{F}$, $\lambda(A) = 0$ équivaut à $\lambda'(A) = 0$. Si λ est une mesure sur $(E, \mathcal{F})$, absolument continue par rapport à m, et si $\omega = \frac{d\lambda}{dm}$ (dérivée au sens de Radon - Nikodym), on dit que λ est T - invariante si $T\omega = \omega$, ou, ce qui revient au même, si $\lambda(A) = \int T^* 1_A \, d\lambda$, quel que soit $A \in \mathcal{F}$.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

<u>Théorème</u> :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une mesure σ - finie sur $(E, \mathcal{F})$, T - invariante, équivalente à m, est qu'il existe une fonction $g \in L^\infty(E, \mathcal{F}, m)$, positive strictement m p.p., vérifiant $\|g\|_\infty \leq 1$, telle que pour toute fonction $f \in L^\infty(E, \mathcal{F}, m)$, vérifiant

$$0 \leq f \leq g \text{ , la } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=0}^{n} T^{*i} f}{\sum_{i=0}^{n} T^{*i} g} \right) \text{ existe m p.p.}$$

II - DEMONSTRATION. -

1) Nécessité

Montrons que la condition est nécessaire.

S'il existe une mesure μ , σ - finie, équivalente à m, T -invariante, la densité $h = \frac{d\mu}{dm}$ vérifie T h = h. Considérons alors l'opération T' sur L^1 $(E, \mathcal{F}, m)$ défini par $T'(f) = h.T^*(\frac{f}{h})$ (Voir [4] Chap. V p. 191). C'est un opérateur markovien. Si g est une fonction mesurable positive, majorée par 1, telle que $(g.h) \in L^1(E, \mathcal{F}, m)$, le théorème de Chacon et Ornstein appliqué à T', permet d'écrire que, pour toute fonction $f \in L^\infty(E, \mathcal{F}, m)$, vérifiant $0 \leq f \leq g$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} T'^{i}(f\,h)}{\sum_{i=0}^{n} T'^{i}(g\,h)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} T^{*i}(f)}{\sum_{i=0}^{n} T^{*i}(g)} \quad \text{existe m p.p.}$$

Donc la condition est nécessaire.

2) Suffisance

a) Deux lemmes

La topologie de la convergence en mesure - m, sur $\mathcal{M}^+$, peut être définie par la distance $d(f, f') = \inf\{\delta > 0 \,;\, m\,[|f - f'| > \delta] < \delta\}$

Si K est un réel positif, considérons $\mathcal{K} = \{ f \in L^\infty_+ \,;\, \|f\|_\infty \leq K \}$.

Puisque T est markovien, les constantes sont fixes sous T^* et $\mathcal{K}$ est stable sous T^*.

Lemme 1 :

La restriction de T^* à $\mathcal{K}$ est continue pour la topologie de la convergence en mesure.

Démonstration :

Il est suffisant de montrer que T^* est continue en 0 i. e.

$(\forall\varepsilon)\ (\exists\eta)\ (\forall f,\ f \in \mathcal{K})\ (d\ (f,0) < \eta \Longrightarrow d\ (T^* f,0) < \varepsilon\ )$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il lui correspond un $\delta > 0$, tel que $m\ (B) \leq \delta$ implique $\int T^* 1_B\ dm \leq \frac{\varepsilon^2}{2K}$, pour tout $B \in \mathcal{F}$. Posons alors $\eta = \inf\ (\delta\ ,\ \frac{\varepsilon}{2})$. Si $f \in \mathcal{K}$ et $d\ (f,0) < \eta$ posons $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 = f \cdot 1_{\{|f| \leq \eta\}}$ et $f_2 = f \cdot 1_{\{|f| > \eta\}}$. Alors, $\|f_1\|_\infty \leq \eta$ d'où $\|T^* f_1\|_\infty \leq \eta \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, $f_2 \leq K\ 1_{\{|f| > \eta\}}$ d'où $T^* f_2 \leq K\ T^*(1_{\{|f| > \eta\}})$. Comme $\eta < \delta_2$ et que $m\ \{|f| > \eta\} < \eta$ on a $\int T^*(1_{\{|f| > \eta\}})\ dm < \frac{\varepsilon}{2K}$, d'où $m\ \{T^*(1_{\{|f| > \eta\}}) > \frac{\varepsilon}{2K}\} < \varepsilon$.
Comme $T^* f = T^* f_1 + T^* f_2$, on obtient $T^* f < T^* f_1 + K\ T^*(1_{\{|f| > \eta\}})$ et $m\ (\{|T^* f| > \varepsilon\}) < \varepsilon$, c'est à dire $d\ (T^* f,0) < \varepsilon$. Ceci achève la démonstration.

Puisque $\mathcal{K}$ est stable on en déduit que toutes les puissances de T^* sont continues en mesure, en restriction à $\mathcal{K}$.

Si $h \in \mathcal{M}^+$, considérons $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{M}^+\ ;\ 0 \leq f \leq h\}$.

Lemme 3 :

Si $(U_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'applications de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{M}^+$, semi - linéaires (i.e. $U_n\ (f+g) = U_n\ (f) + U_n\ (g)$ si f, g et $f + g \in \mathcal{H}$), continues en mesure, telle que $(U_n f)_{n \geq 0}$ converge en mesure vers Uf dans $\mathcal{M}^+$, quel que soit $f \in \mathcal{H}$, alors l'application limite U, de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{M}^+$, est semi linéaire et continue en mesure.

Ce lemme est dû à Y.N. Dowker ([1] Lemme I)

b) Définition et étude de l'opérateur $\overline{T}$.

On choisit, une fois pour toutes, une application $g \in L^\infty_+$, vérifiant $0 < g < 1$ m p.p. On note $\mathcal{R} = \{f \in L^\infty_+ \,;\, 0 \leq f \leq g\}$. On suppose désormais que la condition (D) suivante est réalisée : "Pour tout $f \in \mathcal{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{n} T^{*i} f}{\sum\limits_{i=0}^{n} T^{*i} g} \right) \text{ existe m p.p. " (D).}$$

Soit $\mathcal{R}_0$ le cône positif engendré par $\mathcal{R}$ dans L^∞. Puisque T^* est linéaire, on voit que, pour tout $f \in \mathcal{R}_0$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{n} T^{*i} f}{\sum\limits_{i=0}^{n} T^{*i} g} \right) \text{ existe m p.p.}$$

Soit $\mathcal{R}_i = \{f \in L_+ \,;\, \text{il existe } h \in \mathcal{R}_0 \text{ tel que } T^{*i} h = f\}$.

Si $f = T^{*i} h$, on a :

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{m} T^{*j} f}{\sum\limits_{j=0}^{m} T^{*j} g} = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m} T^{*j} g} \left(\sum_{j=0}^{m} T^{*j} h + \sum_{j=m+1}^{m+i} T^{*j} h - \sum_{j=0}^{i-1} T^{*j} h \right)$$

Comme $\left\| \sum\limits_{j=m+1}^{m+i} T^{*j} h - \sum\limits_{j=0}^{i-1} T^{*j} h \right\|_\infty \leq 2i \, \|h\|$ et que $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} T^{*j} g = +\infty$ m p.p. , puisque T est conservatif, on a :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} T^{*j} f}{\sum\limits_{j=0}^{m} T^{*j} g} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} T^{*j} h}{\sum\limits_{j=0}^{m} T^{*j} g} .$$

Soit $\hat{\mathcal{R}}$ le cône positif engendré dans L^∞ par $(\bigcup_{i \geq 0} \mathcal{R}_i)$; $\hat{\mathcal{R}}$ est stable sous T^*. Les considérations précédentes permettent de définir une application $\overline{T}$ de $\hat{\mathcal{R}}$ dans L_+^∞ par $\overline{T}(h) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{j=0}^{n} T^{*j} h}{\sum_{j=0}^{n} T^{*j} g}$, et qui possède les propriétés suivantes :

i) $\overline{T}$ est semi-linéaire, c'est-à-dire si α et β sont des réels positifs, si f et $h \in \hat{\mathcal{R}}$, $\overline{T}(\alpha f + \beta h) = \alpha\overline{T}(f) + \beta\overline{T}(h)$.

ii) $\overline{T}(g) = 1$ m p.p.

iii) $\overline{T}$ est T^* invariante, c'est-à-dire $\overline{T}(T^* f) = \overline{T}(f)$ avec f .

iv) Si $\Theta \in L_+^\infty$ vérifie $T^*\Theta = \Theta$, si f et $f.\Theta \in \hat{\mathcal{R}}$ on a $\overline{T}(f.\Theta) = \Theta\overline{T}(f)$.

En effet, on sait que, si Θ vérifie $T^* \Theta = \Theta$, $T^{*n}(\Theta.h) = T^{*n}(h)$ pour tout $h \in L_+$ et pour tout entier n.

Pour tout entier naturel q, posons $(q.\mathcal{R}) = \{f \in L_+^\infty ; \frac{1}{q} f \in \mathcal{R}\}$.

Soit U l'application de $(q.\mathcal{R})$ dans L_+^∞ , définie par :

$$U_n(f) = \frac{\sum_{i=0}^{n} T^{*i} f}{\sum_{i=0}^{n} T^{*i} g} .$$

D'après le lemme 1, on voit que U_n est continue pour la topologie de la convergence en mesure - m. En restriction à $(q.\mathcal{R})$, $\overline{T}$ est la limite m p.p. de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$. Comme la convergence m p.p. implique la convergence en mesure - m , le lemme 2 donne :

v) la restriction à $(q.\mathcal{R})$ de $\overline{T}$ est continue en mesure - m et ceci quel que soit l'entier q.

c) Définition de la mesure invariante.

Posons, pour tout entier naturel, $k > 1$, $A_k = \{\frac{1}{k-1} \geq g > \frac{1}{k}\}$. Si $B \in \mathcal{F}$ et $B \subseteq A_k$, on a $1_B < k\, g$ donc $1_B \in (k.\mathcal{R})$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties mesurables de E, contenues dans une réunion finie d'ensembles de la suite $(A_k)_{k>1}$. Si A et $B \in \mathcal{A}$, on a $A \cup B \in \mathcal{A}$ et $(A-B) \in \mathcal{A}$ donc $\mathcal{A}$ est un anneau de parties de E, contenu dans la tribu $\mathcal{F}$. Comme $\bigcup_{k>1} A_k = E$, $\mathcal{A}$ engendre la tribu $\mathcal{F}$. Quel que soit $A \in \mathcal{A}$, il existe un entier naturel j, tel que $1_A \in (j\,\mathcal{R})$. Ceci nous permet de définir sur $\mathcal{A}$ une fonction μ', à valeurs réelles, par la formule :

$$\mu'(A) = \int \overline{T}(1_A)\, dm \text{ si } A \in \mathcal{A}.$$

Cette fonction a les propriétés suivantes :

1) μ' est positive et additive, d'après i).

2) μ' est σ-additive sur $\mathcal{A}$.

Démonstration :

Considérons une suite $(B_n)_{n\geq o}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, croissante, tel que $\bigcup_{n\geq o} B_n = B \in \mathcal{A}$. Soit p l'entier naturel pour lequel $1_B \leq p.g.$ ou $1_B \in (p.\mathcal{R})$. La suite $(1_{B_n})_{n\geq o}$ converge m p.p. vers 1_B, donc converge en mesure dans $(p.\mathcal{R})$. D'après V), la suite $(\overline{T}(1_{B_n}))_{n\geq o}$ converge en mesure vers $\overline{T}(1_B)$. Comme elle est uniformément majorée par la constante p, cette suite est équi-intégrable, et la convergence a lieu dans $L^1(E,\mathcal{F},m)$. Aussi :

$$\lim_{n\to\infty} \mu'(B_n) = \lim_{n\to\infty} \int \overline{T}(1_{B_n})\, dm = \int \overline{T}(1_B)\, dm = \mu'(B).$$

Ceci montre que μ' est σ-additive sur $\mathcal{A}$.

D'après le théorème de Carathéodory, la fonction μ' se prolonge, de façon unique, en une mesure μ sur $(E,\mathcal{F})$. Cette mesure est définie par :

$$\mu(F) = \sum_{k>1} \mu'(F \cap A_k) \text{ avec } F \in \mathcal{F}.$$

Comme $\mu'(A_k) < k\ m(E)$, pour tout k, la mesure μ est σ-finie. Elle possède de plus les propriétés suivantes :

1) μ est T-invariante.

Démonstration : Si $A \in \mathcal{A}$, on a :

$$\mu(A) = \int 1_A\, d\mu = \int \overline{T}(1_A) dm = \int \overline{T}(T^* 1_A) dm = \int T^* 1_A\, d\mu$$

Car d'après iii) $\overline{T}(T^* 1_A) = \overline{T}(1_A)$

2) μ est ésuivalente à m.

Démonstration :

Si $m(F) = o$, avec $F \in \mathcal{F}$, $m(F \cap A_k) = o$, pour tout k, et $\mu'(F \cap A_k) = \int T(1_{F \cap A_k})\, dm = o$. Alors $\mu(F) = \sum_{k>1} \mu'(F \cap A_k) = o$, d'où $\mu << m$.

Réciproquement montrons que $\mu(F) = o$ implique $m(F) = o$. Pour cela il suffit de montrer que, si $F \in \mathcal{A}$, $\mu'(F) = o$ implique $m(F) = o$. Or $\mu'(F) = o$ signifie $\overline{T}(1_F) = o$ m.p.p. D'après iii) on en déduit $T(T^{*j} 1_F) = o$ m.p.p. pour tout entier j. Posons

$$\varphi_n = \sum_{l=o}^{n} (T^* o I_{F^c})^l o (T^* o I_F)\ (1).$$

Si $\hat{F}$ désigne l'ensemble T^*-invariant engendré par F, on a $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 1_{\hat{F}}$ m.m.p. Par récurrence on obtient $(T^* o I_{F^c})^l o (T^* o I_F)(1) \leq T^{*l+1}(1_F)$, quel que soit l. Donc $\overline{T}(\varphi_n) = o$ m.p.p. quel que soit n. Comme $\|g\|_\infty \leq 1$, on en tire $\overline{T}(g.\varphi_n) = o$ m.p.p. La suite $(g.\varphi_n)_{n \geq o}$ converge m.p.p. en croissant vers $(g.1_{\hat{F}})$. Cette suite converge donc en mesure dans $\mathcal{R}$. La propriété v) donne alors $\overline{T}(g.1_{\hat{F}}) = o$ m.p.p. ; de la propriété iv) on tire $1_{\hat{F}}.\overline{T}(g) = o$ m.p.p. et comme $\overline{T}(g) = 1$ m.p.p., on obtient $m(\hat{F}) = o$ d'où $m(F) = o$.

Ceci montre enfin que la condition (D) énoncée dans le théorème est suffisante pour qu'il existe une mesure T^+-invariante sur $(E, \mathcal{F})$, équivalente à m.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y.N. DOWKER. Finite and σ-finite invariant measures.
Ann. of Math. Vol 54. (1951) pp. 595-608.

[2] E. HOPF. Theory of measure and invariant integrals.
Trans. Amer. Math. Soc. Vol 34 (1932) pp. 373-393.

[3] P.R. HALMOS Invariant Measures
Ann. of Math. Vol 48 (1947) pp. 735-754

[4] J. NEVEU Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités
Masson (1964).