PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

Y. KERBRAT

G. LE CALVE

# Classification des états pour un système aléatoire à liaisons complètes

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1968-1969, fascicule 2

« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. nº 2, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___2_A2_0>

# CLASSIFICATION DES ETATS POUR UN SYSTEME ALEATOIRE A LIAISONS COMPLETES

par

Y. KERBRAT et G. LE CALVE

---

Résumé :

Il s'agit de l'étude de l'extension aux chaines à liaisons complètes des théorèmes de classification des états donnés pour les chaines de Markov par Kai-Lai CHUNG [1] .

§ 0. Données. Notations.

1. On se donne deux ensembles mesurables $(\underline{Z}, \mathcal{Z})$ et $(\underline{X}, \mathcal{X})$, une application mesurable T de $\underline{Z} \times \underline{X}$ dans $\underline{Z}$ et une probabilité de passage, p, de $\underline{Z}$ dans $\underline{X}$.

On définit alors des applications mesurables $T_n (n \geq 1)$ de $\underline{Z} \times \underline{X}^{\{1,\ldots,n\}}$ dans $\underline{Z}$ en posant $T_1 = T$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$T_{n+1}(z,x_1,\ldots,x_{n+1}) = T(T_n(z,x_1,\ldots,x_n), x_{n+1})$$
$$= T_n(T(z,x_1), x_2,\ldots,x_{n+1}).$$

2. On sait qu'on peut trouver une famille $(\Omega, \mathcal{F}, P_z)_{z \in \underline{Z}}$ d'espaces probabilisés et deux suites $(Z_n)_{n \geq 0}$ , $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs respectivement dans $\underline{Z}$ et $\underline{X}$ telles que : $(\Omega, \mathcal{F}, (P_z)_{z \in \underline{Z}}, (Z_n)_{n \geq 0})$ soit un processus de Markov et telles que : $\forall z \in \underline{Z} \quad \forall n \geq 1$, $Z_n = T_n(z,X_1,\ldots,X_n)$. ($P_z$ ps). La probabilité de passage $\Pi$ de $\underline{Z}$ dans $\underline{Z}$ associée au processus de Markov en question est définie par :

$\Pi(z, Z) = p(z, T(z,.)^{-1}[Z])$.    $(z \in \underline{Z},\ Z \in \mathcal{Z})$.

3. On posera, pour $Z \in \mathcal{Z}$ (resp. $X \in \mathcal{X}$), $\tau_Z$ = temps d'entrée du processus $(Z_n)$ dans $Z$ (et $\tau_X$ = temps d'entrée de $(X_n)$ dans $X$) c'est-à-dire

$\tau_Z = \mathrm{Inf}\{n \geq 1 \mid Z_n \in Z\}$   (avec $\tau_Z = +\infty$ sur l'ensemble $[\forall n \geq 1,\ Z_n \notin Z]$) et

$\tau_X = \mathrm{Inf}\ \{n \geq 1 \mid X_n \in X\}$.

Enfin on posera $\eta_Z = \sum_{n \geq 1} 1_Z \circ Z_n$ et $\eta_X = \sum_{n \geq 1} 1_X \circ X_n$ (nombre de visites à $Z$ et $X$ respectivement).

## § 1. Ensembles fermés.

On désignera par $\mathfrak{F}$ la classe des $Z \in \mathcal{Z}$ qui sont fermés (sens habituel) pour le processus de Markov $(Z_n)_{n>0}$, c'est-à-dire tels que $[\Pi(.,Z) = 1] \supseteq Z$ (on dira ici : $\Pi$-fermés). On posera en outre :

1) $X_a = [p(.,X) = 1]$  et  $\mathcal{A}(X) = \{Z \in \mathcal{Z} \mid Z \subset X_a\}$

2) $\mathfrak{F}(Z) = \{X \in \mathcal{X} \mid T(Z \times X) \subseteq X_a\}$   (les Z-fermés)

3) $\mathcal{S}(X) = \{Z \in \mathcal{Z} \mid T(Z \times X) \subseteq Z\}$   (les X-stables)

Quelques remarques.

1°) $X \in \mathfrak{F}(X_a) \Longleftrightarrow X_a \in \mathcal{S}(X)$

2°) $\mathcal{A}(X) \cap \mathcal{S}(X) \subseteq \mathfrak{F}$ car si $z \in Z \in \mathcal{A}(X) \cap \mathcal{S}(X)$ on a alors

$$\Pi(z, Z) = \int p(z, dx)\, 1_Z(T(z, x)) \geq \int_X = p(z, X) \text{ car } Z \in \mathcal{S}(X)$$

$$= 1 \qquad \text{car } Z \subseteq X_a$$

3°) Supposons que $Z \in \mathcal{S}(X)$ et $X \in \mathcal{F}(Z)$. Alors $\forall u \in T(Z \times X)$, $\forall n \geq 1$ on a $P_u(X_n \in X) = 1$.

En effet pour $n = 1$ on a $P_u(X_1 \in X) = p(u, X) = 1$ car $u \in T(Z \times X) \subseteq X_a$.

La relation $P_u(X_{n+1} \in X) = \int p(u, dy)\, P_{T(u,y)}[X_n \in X] \geq$

$$p(u, X) \inf_{y \in X} P_{T(u,y)}[X_n \in X]$$

montre avec $p(u, X) = 1$ et $u \in T(Z \times X) \subseteq Z$ que $P_u(X_{n+1} \in X) = 1 \quad \forall u \in T(Z \times X)$ si la relation est vraie à l'ordre n.

<u>Extension de la notion d'ensembles Z-fermés et X-stables.</u>

Posons $\mathcal{F}_w(Z) = \{X \in \mathcal{X} | \ \forall z \in Z,\ P[z\ ;\ X \setminus T(z,.)^{-1}(X_a)] = 0\}$

$$\mathcal{S}_w(X) = \{Z \in \mathcal{Z} | \ \forall z \in Z,\ P(z\ ;\ X \setminus T(z,.)^{-1}(Z)) = 0\}$$

Les remarques faites précédemment sont encore valables, savoir :

1° $X \in \mathcal{F}_w(X_a) \Longleftrightarrow X_a \in \mathcal{S}_w(X)$ puisque ces deux conditions s'expriment par : pour $p(z,.)$ presque tout x de X on a : $T(z, X) \subseteq X_a$ et ce, pour tout $z \in Z$.

2° $\mathcal{A}(X) \cap \mathcal{S}_w(X) \subseteq \mathcal{F}$ car si $z \in Z \in \mathcal{A}(X) \cap \mathcal{S}(X)$ on a :

$$\Pi(z, Z) \geq \int_{x \in X} p(z, dx)\, 1_Z(T(z, x)) = p(z, X) \text{ puisque } Z \in \mathcal{S}_w(X)$$

$$= 1 \qquad \text{car } Z \subseteq X_a.$$

3° Si $Z \in \mathcal{S}_w(X)$ et $X \in \mathcal{F}_w(Z)$ alors $\forall z \in Z$, $P_{T(z,x)}[X_n \in X] = 1$ pour $p(z,.)$ presque tout x de X et ceci pour tout $n \geq 1$.

En effet $P_{T(z,x)}[X_1 \in X] = p(T(z,x),X)$. Mais pour $p(z,.)$ presque tout

$x \in X$ on a $T(z,x) \in Z \cap X_a$ donc $P_{T(z,x)}[X_1 \in X] = 1$ pour $p(z,.)$ presque tout $x$ de $X$.

Supposons que la relation soit vraie pour $n$. Soit $z \in Z$ et $x \in \underline{X}$ tel que $T(z,x) \in Z \cap X_a$. On a alors : $(u = T(z,x))$

$$P_u[X_{n+1} \in X] \geq \int_{y \in X} p(u,dy)\, P_{T(u,y)}\, [X_n \in X] \quad .$$

Comme pour $p(u,.)$ presque tout $y$ de $X$ on a $P_{T(u,y)}[X_n \in X] = 1$ on a alors $P_u[X_{n+1} \in X] \geq p(u,X) = 1$ puisque $u \in X_a$. On a donc $P_{T(z,x)}[X_{n+1} \in X] = 1$ pour tout $x$ tel que $T(z,x) \in Z \cap X_a$ ce qui est le cas pour $p(z,.)$ presque tout $x$ de $X$.

c.q.f.d.

Lemme 1.

Si $z \in X^\circ = [P_{(.)}[\tau_X < \infty] = 0]$ alors $p(z, T_z^{-1}(X^\circ) \setminus X) = 1$ et par suite $X^\circ$ est $\Pi$-fermé si non vide.

Preuve. Si $z \in X^\circ$ on a : $P_z[\tau_X < \infty] = 0 = p(z,X) +$

$$+ \int_{X^c} p(z,dx)\, P_{T(z,x)}[\tau_X < \infty]$$

donc $p(z,X) = 0$ et $\displaystyle\int_{X^c \cap \complement T_z^{-1}(X^\circ)} p(z,dx)\; P_{T(z,x)}\; [\tau_X < \infty] = 0$. Il en résulte que $p(z, X \cup T_z^{-1}(X^\circ)) = 1$ donc, puisque $p(z,X) = 0$, $p(z, T_z^{-1}(X^\circ) \setminus X) = 1$ et aussi $p(z, T_z^{-1}(X^\circ)) = \Pi(z, X^\circ) = 1$.

Lemme 2.

$\forall z \in X^1 = [P_{(.)}\{\tau_X < \infty\} = 1]$. On a : $p(z, X \cup T_z^{-1}(X^1)) = 1$.

Par suite si $X^1 \in \mathcal{G}_w(X)$ alors $X^1 \in \mathfrak{F}$.

Preuve. Si $z \in X^1$ on a alors :

$$1 = P_z[\tau_X < \infty] = p(z,X) + \int_{x\in X^c} p(z,dx)\, P_{T(z,x)}[\tau_X < \infty]$$

donc $p(z,X^c) = \int_{x\in X^c} p(z,dx)\, P_{T(z,x)}[\tau_X < \infty]$ et par suite

$p(z,\{x\in X^c \mid T(z,x)\notin X^1\}) = 0$ c'est-à-dire $p(z,\ X\cup T_z^{-1}(X^1)) = 1$.

Si $X^1\in \mathcal{F}_w(X)$ alors $X \subseteq T_z^{-1}(X^1)$ ($p(z,.)$ presque sûrement).

Donc $1 = p(z,X\cup T_z^{-1}(X^1)) = p(z,T_z^{-1}(X^1)) = \Pi(z,X^1)$ pour tout $z\in X^1$.

<u>Lemme 3</u>.

Les ensembles $X^f = [z\in \underline{Z} \mid P_z(n_X = +\infty) = 0]$ et

$X^\infty = [z\in \underline{Z} \mid P_z(n_X = +\infty) = 1]$ sont $\Pi$-fermés si non vides.

<u>Preuve</u>. Pour tout $z\in \underline{Z}$ on a $P_z(n_X = +\infty) = \int_{x\in \underline{X}} p(z,dx)P_{T(z,x)}(n_X = +\infty)$.

Si $z\in X^f$ ceci est nul donc $p(z,\{x \mid T(z,x)\notin X^f\}) = 0$ c'est-à-dire

$p(z,T_z^{-1}(X^f)) = 1 = \Pi(z,X^f)$.

Si $z\in X^\infty$ on a alors $p(z,T_z^{-1}(X^\infty)) = 1 = \Pi(z,X^\infty)$ c.q.f.d.

## § 2. <u>Ensembles essentiels, inessentiels</u>.

<u>Définitions</u>.

On dira que $X\in\mathfrak{X}$ est inessentiel si $X^f = \underline{Z}$. Les essentiels seront ceux qui ne sont pas inessentiels et forment une classe $\mathcal{E}(\underline{X})$. Dans $\mathcal{E}(\underline{X})$ on distinguera :

a) les X fortement essentiels (classe $\mathcal{E}_s(\underline{X})$) : ceux pour lesquels on a l'implication suivante :

$$X = \bigcup_n X_n \quad (X_n\in\mathfrak{X}) \Longrightarrow \exists\, n_0 \quad \text{tel que } X^\infty_{n_0} \neq \emptyset.$$

b) les $X$ faiblement essentiels (classe $\mathcal{E}_w(\underline{X})$) : ce seront les $X \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_s$ c'est-à-dire les $X \in \mathcal{E}$ qu'on peut écrire $\bigcup_n X_n$ avec, $X_n^\infty = \emptyset$, pour tout $n$.

Remarques.

1°) La classification précédente porte sur les $X \in \mathcal{X}$ mais on pourrait définir les mêmes notions pour les $Z \in \mathcal{Z}$. Toutefois comme $(Z_n)_{n \geq 0}$ est un processus de Markov, K.L. Chung a déjà proposé la classification suivante :

a) Même définition pour $Z$ essentiel ou inessentiel. Posons alors $\mathcal{E}(\underline{Z})$ = classe des essentiels de $(\underline{Z}, \mathcal{Z})$.

b) Un $Z \in \mathcal{E}(Z)$ pourra alors être absolument essentiel (classe $\mathcal{E}_a(\underline{Z})$) ou, sinon, improprement essentiel (classe $\mathcal{E}_i(\underline{Z})$) suivant que la propriété suivante est vérifiée ou non :

$$Z = \bigcup_n Z_n \quad (Z_n \in \mathcal{Z}) \Longrightarrow \exists\, n_\circ \text{ tel que } X_{n_\circ} \in \mathcal{E}(\underline{Z})"$$

Chung démontre que si $Z \in \mathcal{E}_a(\underline{Z})$ alors $Z^\infty = \{z \in \underline{Z} \mid P_z(n_Z = +\infty) = 1\} \neq \emptyset$.

Il résulte de là que l'on a : $\mathcal{E}_a(\underline{Z}) = \mathcal{E}_s(\underline{Z})$ et $\mathcal{E}_i(\underline{Z}) = \mathcal{E}_w(\underline{Z})$.

En effet si $Z \in \mathcal{E}_i(\underline{Z})$ on peut alors trouver $Z_n \in \mathcal{Z}$ $(n \geq 0)$ tels que : $Z = \bigcup_n Z_n$ et tels que, pour tout $n$, $Z_n^f = \underline{Z}$. Alors $Z_n^\infty = \emptyset$ pour tout $n$ donc $Z \in \mathcal{E}_w(\underline{Z})$. Inversement si $Z \in \mathcal{E}_a(\underline{Z})$ et si $Z = \bigcup_n Z_n$ alors $n_\circ$ existe tel que $Z_{n_\circ} \in \mathcal{E}_a(\underline{Z})$ et par suite $Z_{n_\circ}^\infty \neq \emptyset$ ce qui prouve que $Z \in \mathcal{E}_s(\underline{Z})$. Autrement dit les notions de fortement et de faiblement essentiels coïncident, sur $\underline{Z}$, avec celles d'absolument et faiblement essentiels respectivement.

2°) $\mathcal{E}_s$ est héréditaire à droite (donc $\mathcal{E}_w$ à gauche) en ce sens que :

$$[X_1 \subseteq X_2,\ X_1 \in \mathcal{X},\ X_2 \in \mathcal{X},\ X_1 \in \mathcal{E}_s] \Longrightarrow X_2 \in \mathcal{E}_s.$$

3°) Si $X = \bigcup_n X_n \in \mathcal{G}_s^{\varphi}$ alors $\exists$ $n_o$ tel que $X_{n_o} \in \mathcal{G}_s$ car sinon on aurait pour chaque n, $X_n = \bigcup_k X_{n,k}$ avec $X_{n,k}^{\infty} = \emptyset$ et alors $X = \bigcup_{n,k} X_{n,k}$ ne serait pas fortement essentiel.

Proposition.

Pour $Z \in \mathcal{Z}$ et $X \in \mathcal{X}$ on posera :

$$a(Z, X) = \sup_{z \in Z} P_z(\eta_X = +\infty)$$

$$b(Z, X) = \operatorname{Inf}_{z \in Z} P_z[\tau_X < +\infty]$$

On a alors les propriétés suivantes :

1) $a(Z, X) < 1 \Longrightarrow \forall z \in \underline{Z}$, $[\eta_Z = +\infty] \cap [\eta_X = +\infty] = \emptyset$ ($P_z$ ps)

2) $b(Z, X) > 0 \Longrightarrow \forall z \in \underline{Z}$, $[\eta_Z = +\infty] \subseteq [\eta_X = +\infty]$ ($P_z$ ps).

Preuve. La démonstration de ces propriétés est la même que celle des propriétés équivalentes qu'on peut trouver dans l'article de Chung. On peut les rappeler :

Soit $\mathfrak{F}_n$ la tribu sur $\Omega$ engendrée par $Z_o, \ldots, Z_n$. Comme $[\eta_X = \eta_Z = +\infty] \in \mathfrak{F}$ chaque $(P_{Z_n}(\eta_X = \eta_Z = +\infty), \mathfrak{F}_n, P_z)$ est une martingale positive équi-intégrable qui converge $P_z$ presque sûrement vers $1_{[\eta_X = \eta_Z = \infty]}$. Par suite, sur l'ensemble $[\eta_Z = +\infty]$ elle ne peut que converger vers 0 puisque $a(Z, X) < 1$, de sorte que $[\eta_Z = +\infty] \cap [\eta_Z = \eta_X = +\infty] = \emptyset$ ($P_z$ ps) d'où le 1er résultat.

Par ailleurs si $M_n = \bigcup_{k \geq n} [X_k \in X]$ alors $M_n \downarrow [\eta_X = +\infty]$. Pour $k \leq n$ on a donc : $[\eta_B = +\infty] \subseteq M_{n+1} \subseteq M_k$. Il en résulte que $\forall z \in \underline{Z}$ la V. A.

$P_{Z_n}(\tau_X < \infty)$ converge $P_z$-ps vers $1_{[n_X=+\infty]}$. Donc sur $[n_Z = +\infty]$ $P_{Z_n}(\tau_X < \infty)$ ne pouvant converger vers 0 si $b(Z,X) > 0$ elle converge vers 1 c'est-à-dire $[n_Z = +\infty] \subseteq [n_X = +\infty]$ $P_z$ ps).

Conséquences.

1°) $Z \in \mathscr{C}_s(\underline{Z})$ et $b(Z, X) > 0 \Longrightarrow X \in \mathscr{C}_s(\underline{X})$

Supposons en effet que $X = \bigcup_n X_n$ avec $n \to X_n$ croissante. On a alors : $[\tau_{X_n} < +\infty] \uparrow [\tau_X < \infty]$. Pour chaque $z \in \underline{Z}$ on a donc $P_z[\tau_{X_n} < \infty] \uparrow P_z[\tau_X < \infty]$

Pour $z \in Z$ on peut donc trouver

$$n(z) \quad \text{tq} \quad k < n(z) \Longrightarrow P_z[\tau_{X_k} < \infty] < \frac{b(Z, X)}{2}$$

$$\text{et} \quad P_z[\tau_{X_{n(z)}} < \infty] \geq \frac{b(Z, X)}{2}$$

Si on pose $Z_k = [z \in Z \mid n(z) = k]$ on a alors $Z = \bigcup_k Z_k$. On peut donc trouver $k_o$ tel que $Z^\infty_{k_o} \neq \emptyset$ et alors $X^\infty_{k_o} \neq \emptyset$ puisque $b(Z_{k_o}, X_{k_o}) \geq \frac{b(Z, X)}{2} > 0$. Ceci prouve que $X \in \mathscr{C}_s(\underline{X})$.

2°) $\underline{Z} \setminus X^o \in \mathscr{C}_s(\underline{Z}) \Longrightarrow X \in \mathscr{C}_s(\underline{X})$.

En effet $\underline{Z} \setminus X^o = \bigcup_{n \geq 1} \{z \mid P_z[\tau_X < \infty] \geq \frac{1}{n}\} = \bigcup_n Z_n$.

On peut alors trouver $n_o$ tel que $Z_{n_o} \in \mathscr{C}_s(\underline{Z})$ et comme $b(Z_{n_o}, X) \geq \frac{1}{n_o} > 0$ on a, d'après la 1ère conséquence, $X \in \mathscr{C}_s(\underline{X})$.

3°) $a(Z, X) < 1$ et $b(Z, X) > 0 \Longrightarrow Z \notin \mathscr{C}(\underline{Z})$.

On a en effet $[n_Z = +\infty] \subseteq [n_X = +\infty]$ et $[n_Z = +\infty] \cap [n_X = +\infty] = \emptyset$

($P_z$ ps).

On a donc $P_z[n_Z = +\infty] = 0$ $\forall z \in \underline{Z}$ et donc $Z^f = \underline{Z}$ c'est-à-dire E est inessentiel.

4°) $\underline{Z} \setminus X^\circ \cup X^\infty \notin \mathcal{C}_s(\underline{Z})$ (pour tout $X \in \mathfrak{X}$).

On a en effet $Z \setminus X^\circ \cup X^\infty = \bigcup_n Z_n$ avec :

$$Z_n = \{z \mid P_z(\tau_X < \infty) \geq \frac{1}{n} \text{ , } P_z(\eta_X = \infty) \leq 1 - \frac{1}{n}\}$$

Comme $b(Z_n, X) > 0$ et $a(Z_n, X) < 1$ on a $Z_n \notin \mathcal{C}(\underline{Z})$ d'après la 2ème conséquence.

Il en résulte alors que $\forall Z \in \mathcal{C}_s(\underline{Z})$, $Z \cap (X^\circ \cup X^\infty) \in \mathcal{C}_s(\underline{Z})$.

<u>Remarque.</u> En particulier si $\underline{Z} \in \mathcal{C}_s(\underline{Z})$ $X^\circ \cup X^\infty \in \mathcal{C}_s(\underline{Z})$. Si $X^\circ = \emptyset$ alors $X^\infty \in \mathcal{C}_s(\underline{Z})$ et d'après la 1ère conséquence $X \in \mathcal{C}_s(\underline{X})$.

<u>Proposition.</u>

Si $\underline{Z}$ est indécomposable et si $\underline{Z} \in \mathcal{C}_s(\underline{Z})$, les 4 conditions suivantes sont équivalentes :

i) $X \in \mathcal{C}_s(\underline{X})$

ii) $X^\circ = \emptyset$

iii) $X^\infty \neq \emptyset$

iiii) $X^f = \emptyset$

$\underline{Z}$ est dit indécomposable s'il ne contient pas deux ensembles $\Pi$-ferm[és] disjoints. Cette proposition découle immédiatement des 4 conséquences précédentes.

<u>Proposition.</u>

Si $\underline{Z}$ est indécomposable et si $X \in \mathcal{C}_s(\underline{X})$ alors $\forall z \sum_n P^n(z,X) = \infty$.

Si $\underline{Z} \in \mathcal{C}_s(\underline{Z})$ et si $\forall z \sum_n P^n(z,X) > 0$ alors $X \in \mathcal{C}_s(\underline{X})$.

En effet, si $\exists$ z tel que $\sum_n P^n(z,X) < \infty$, $\lim_n P^n(z,X) = 0$ et donc $X^f \neq \emptyset$. Donc $X \notin \mathcal{E}_z(\underline{X})$ d'après la remarque de la quatrième conséquence.

Si maintenant $\forall$ z $\sum_n P^n(z,X) > 0$, alors $X° = \emptyset$ et $X \in \mathcal{E}_s(\underline{X})$ d'après la même remarque.

## BIBLIOGRAPHIE


1. Kai Lai CHUNG : "The general theory of Markov processes according to Doeblin" Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2, 230-254 (1964).

2. LE CALVE G. : "Systèmes aléatoires à liaisons complètes et processus d'adaptation (revue Roumaine Maths Pures et Appl. à paraitre début 1970).

3. IOSIFESCU and THEODORESCU. : "Random Processes and learning (Springer Verlagt 1969).