PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

A. BRUNEL

Chaînes abstraites de Markov vérifiant une condition de Orey Extension à ce cas d'un théorème de M. Métivier

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 2
« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. n° 1, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___2_A1_0>

CHAINES ABSTRAITES DE MARKOV VERIFIANT UNE CONDITION DE OREY

EXTENSION A CE CAS D'UN THEOREME ERGODIQUE DE M. METIVIER

par

A. BRUNEL

(Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes)

INTRODUCTION.

Nous exposons dans ce travail, l'étude de certaines chaînes abstraites de Markov, sur un espace mesuré, σ-fini $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, c'est-à-dire l'étude de contractions positives T de $\mathbb{L}^1(\Omega)$, pour lesquelles une condition semblable à celle donnée par S. Orey [1] est satisfaite. Nous démontrons aussi, dans ce cas, des théorèmes du type de ceux d'Ornstein [2] et de Métivier [3], à savoir,

1°) l'existence d'une mesure invariante σ-finie, équivalente à μ, soit $\nu = g.\mu$ avec $g = Tg$ et $\{0 < g < +\infty\} = \Omega$

2°) en notant T^* l'opérateur transposé de T,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \Big|\Big| \sum_{j=0}^{n} T^{*j} f \Big|\Big|_\infty \leq C. ||f||_\infty,$$

si $f \in \mathbb{L}^\infty$, $\int f \, d\nu = 0$ et supp f est borné ; un ensemble borné étant un ensemble sur lequel, en gros, le processus induit par (T, Ω) est uniformément récurrent au sens de Orey. La constante C ne dépend que de Supp f.

1. Définitions et notations employées.

Sont donnés , un espace mesuré, σ-fini, $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ et une contraction positive T de $\mathbb{L}^1(\Omega)$, satisfaisant à la condition :

$\mathcal{E}$: le processus (Ω,T) est ergodique et conservatif, c'est-à-dire

$$\forall \varphi \in \mathbb{L}^{\infty}(\Omega) \qquad T^{*} \varphi \leq \varphi \Longrightarrow \varphi = C^{te} \qquad (1)$$

Les majuscules A, B,...,E,.. désigneront des ensembles non négligeables de $\mathcal{F}$.

Etant donné A, nous posons $T_A = T\, I_{A^c}$ et $R_A = I + \sum\limits_{n\geq 1} T_A^n$ désigne l'opérateur potentiel "tabou" correspondant.

L'opérateur $\quad {}^{A}T = I_A\, R_A\, T\, I_A,$

est la contraction induite par T sur $\mathbb{L}^1(A)$ et nous dirons que $(A, {}^{A}T)$ est le processus induit sur A par (Ω,T). Rappelons dans une proposition quelques propriétés de ces noyaux ou potentiels abstraits.

Proposition 1.

Le processus induit sur A est ergodique et conservatif si (Ω,T) possède lui-même les propriétés. En outre, si $E \subset A$ et si ${}^{A}R_E$ est l'opérateur potentiel tabou :

$${}^{A}R_E = I_A + \sum_{n\geq 1} {}^{A}T_E^n \text{ , avec } {}^{A}T_E = {}^{A}T\, I_{A\setminus E} \text{ , on a}$$

(1) $\qquad {}^{A}R_E = I_A\, R_E\, I_A.$

Cette dernière propriété peut se vérifier directement par le calcul suivant :

$$(I_A - {}^{A}T_E)\, R_E\, I_A = (I_A - I_A\, R_A\, T\, I_{A\setminus E})\, R_E\, I_A$$

$$= I_A(R_E - R_A\, T\, I_{A\setminus E}\, R_E) = I_A\, R_A\, I_A = I_A.$$

(1) Nous ne distinguons pas $\mathbb{L}^1(\Omega)$ (resp. $\mathbb{L}^{\infty}(\Omega)$) de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ (resp. $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$), ce qui ne présente aucun inconvénient dans le cas présent et les notations s'en trouvent simplifiées.

Rappelons encore que :

$\forall E \quad R^*_E(1_E) = 1$ (pour un processus conservatif quelconque,

$R^*_E(1_E) = \Psi_E$ potentiel d'équilibre de E).

Lemme 1.

Pour tout E et tout A, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad R^*_E(T^{*n}\, 1_A) \leq R^*_E(1_A) + n$$

Démonstration.

Si $\varphi \in \mathbb{L}^\infty_+$,

$R^*_E\, T^*(\varphi) = R^*_E(T^*_E\, \varphi + 1_E\, T^*\varphi) \leq R^*_E\, \varphi + ||\varphi||_\infty \leq R^*_E\, \varphi + 1$ si φ est une indicatrice. ∎

Nous ferons usage de l'opérateur S = exp T. Plus généralement nous posons, pour $\theta \geq 0$,

$$\exp(\theta\, {}^AT) = I_A + \sum_{n \geq 1} \frac{\theta^n}{n!}\, {}^AT^n .$$

2. Les ensembles bornés.

Nous envisageons dans ce qui suit les sous-classes de $\mathfrak{F}$, éventuellement vides, définies par les conditions,

(i) $\mathcal{B} \ni A$ si $\forall E \subset A \qquad R^*_E(1_A) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$. Les éléments de $\mathcal{B}$ seront dits bornés.

(ii) $\mathcal{B}' \ni A$ si $(I_A - {}^AT)\ \mathbb{L}^1_0(A) = \mathbb{L}^1_0(A)$, $\mathbb{L}^1_0(A)$ étant le sous-espace fermé de $\mathbb{L}^1(A)$ des éléments d'intégrale nulle. [2]

[2] La condition (ii) et l'ergodicité de ${}^AT$ entraînent aussitôt l'existence de $f_\circ \in \mathbb{L}^1(A)$ telle que $f_\circ = {}^AT\, f_\circ$, $\{f_\circ > 0\} = A$ et $f_\circ$ est unique à un facteur près.

(iii) $\mathcal{O} \ni A$ si $\forall E \subset A$ $\quad {}^{A}R_{E}^{*}(1_{A}) \in \mathbb{L}^{\infty}(A)$. Les éléments de $\mathcal{O}$ seront dits bornés au sens de Orey.

(iv) $\mathcal{M} \in A$ s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, tels que :

$$\forall E \subset A \qquad \sum_{j=0}^{p} T^{*j}\, 1_{E} \geq \alpha\, \mu(E).1_{A}.$$

Les ensembles de $\mathcal{M}$ sont les bornés au sens de Métivier.

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.

On a les relations

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{B}' = \mathcal{B} = \mathcal{O}. \qquad (3)$$

La démonstration de ce théorème est assez longue et fera l'objet des paragraphes 3, 4 et 5.

3. Démonstration de $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{O}$.

La relation (1) de la proposition 1 montre que $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$. Il est aussi clair que $A \in \mathcal{B}$ et $A' \subset A \Longrightarrow A' \in \mathcal{B}$.

Soit maintenant $A \in \mathcal{B}'$. Selon la définition (ii) et la note (2), il existe $f_{o} \in \mathbb{L}^{1}(A)$, vérifiant ${}^{A}T\, f_{o} = f_{o}$ et $\{f_{o} > 0\} = A$. Si l'on impose la condition supplémentaire $\int f_{o}\, d\mu = 1$, alors f_{o} est l'unique élément de $\mathbb{L}^{1}(A)$ qui possède ces propriétés, ce qui est une conséquence de l'ergodicité de ${}^{A}T$. Dans ces conditions, l'application $I_{A} - {}^{A}T : \mathbb{L}_{0}^{1}(A) \to \mathbb{L}_{0}^{1}(A)$ est injective. Puisque $\mathbb{L}_{0}^{1}(A)$ est un espace de Banach, la condition (ii) entraîne que $I_{A} - {}^{A}T$ est un isomorphisme de $\mathbb{L}_{0}^{1}(A)$ sur lui-même.

(3) Nous ne savons pas si $\mathcal{O} \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{M} \neq \emptyset$. Le problème reste ouvert.

Posons $\mathcal{H}(A) = \{\varphi \mid \varphi \in \mathbb{L}^\infty(A), \int \varphi \, d\nu = 0\}$,

où $\nu = f_\circ \, \mu$ est une probabilité invariante, équivalente à $\mu|_{A \cap \mathcal{F}}$.

$\mathcal{H}(A)$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{L}^\infty(A)$, invariant sous ${}^A T^*$. $\mathcal{H}(A)$ peut s'identifier au dual fort de $\mathbb{L}^1_0(A)$ avec une norme équivalente, pour les raisons suivantes :

$\mathbb{L}^1(A) = \mathbb{L}^1_0(A) \oplus \mathbb{R}.f_\circ$, aussi tout élément λ de $(\mathbb{L}^1_0(A))'$ peut s'écrire :

$\mathbb{L}^0_1(A) \ni f \longmapsto \langle\lambda, f\rangle = \int \varphi \, f \, d\mu$, pour unique $\varphi \in \mathcal{H}(A)$. Si $||\lambda||$ désigne la norme de λ dans $(\mathbb{L}^0_1(A))'$, on a :

$$||\lambda|| = \inf_{y \in \mathbb{R}} ||\varphi + y||_\infty \leq ||\varphi||_\infty \text{, et aussi,}$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad |y| = \left| \int (\varphi + y) \, d\nu \right| \leq ||\varphi + y||_\infty \text{, donc,}$$

$$||\lambda|| \leq ||\varphi||_\infty \leq 2 \, ||\lambda||$$

Ceci étant, tout $\varphi \in \mathcal{H}(A)$ peut s'écrire :

$$\varphi = (I_A - {}^A T^*) \, \phi \text{ , pour un } \phi \in \mathcal{H}(A).$$

Or $\phi - {}^A T^* \phi = \phi - 1_A \, T^* \, R^*_A \, \phi = (I - T^*) \, (R^*_A \, \phi)$, soit en posant

$$\Psi = R^*_A \, \phi \in \mathbb{L}^\infty(\Omega),$$

$$\varphi = \Psi - T^* \, \Psi \quad \text{avec } \Psi \in \mathbb{L}^\infty(\Omega).$$

En particulier si $E \subset A$ et $t = \nu(E) > 0$, on a $1_E - t1_A \in \mathcal{H}(A)$.

Donc il existe $\Psi \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$ tel que,

$$1_E - t1_A = \Psi - T^*\Psi = \Psi - T^*_E \, \Psi - 1_E \, T^* \, \Psi,$$

d'où l'on tire :

$$t.R^*_E(1_A) = 1 - \Psi + R^*_E \, (1_E \, T^* \, \Psi) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega),$$

ce qui prouve que $A \in \mathcal{B}$ et que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

4. Tout ensemble de $\mathfrak{S}$ contient un ensemble de $\mathfrak{B}'$.

Soit $D \in \mathcal{O}$, un ensemble borné au sens de Orey et considérons le processus induit $(D, {}^D T)$. Pour simplifier les notations, nous allons remplacer $(D, {}^D T)$ par (Ω, T) ce qui revient à faire l'hypothèse suivante selon la définition (iii),

$$\forall E \quad \exists a > 0 \qquad R_E^*(1) \leq a.$$

Puisque $T_E^{*n}\, 1$ est une suite décroissante, $\|T_E^{*n}\, 1\|_\infty \leq \frac{a}{n+1} \downarrow 0$.

Or $1 = R_E^*(1_E) = \sum_{j=0}^{n} T_E^{*j}(1_E) + T_E^{*n+1}(1_E)$, ce qui entraîne que la suite $\sum_{j \geq n} T_E^{*j}(1_E)$ converge uniformément vers 1 (dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$). C'est donc bien là, une formulation abstraite de la notion de processus μ-uniformément récurrent, introduite par Orey [1].

Dans ces conditions, il existe $b > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que : $\sum_{j=0}^{p} T_E^{*j}(1_E) \geq b$ et, à fortiori, $\sum_{j=0}^{p} T^{*j}(1_E) \geq b$.

Cette dernière inégalité prouve l'existence d'un réel $c > 0$, tel que

$$\exp\left(\frac{1}{2}\, T^*\right)(1_E) \geq c.$$

Elle prouve aussi que E n'est pas faiblement errant, donc qu'il existe $f_\circ \in \mathbb{L}^1$, satisfaisant aux conditions $f_\circ = T f_\circ$, $\{f_\circ > 0\} = \Omega$, et $\int f_\circ \, d\mu = 1$. Puisque T est ergodique et conservative, $f_\circ$ est unique. Nous désignerons par $\nu = f_\circ . \mu$ la probabilité invariante sur $(\Omega, \mathcal{F})$, équivalente à μ. En fait, n'oublions pas que $f_\circ$ est définie relativement au processus induit $(D, {}^D T)$, mais $g_\circ = R_D\, T\, f_\circ$ est T-invariante et $\{0 < g_\circ < +\infty\} = \Omega$. La mesure σ-finie $g_\circ . \mu$ est invariante relativement à (Ω, T) et de plus $f_\circ = 1_D . g_\circ$.

Posant $\exp(\frac{1}{2}\,T) = S$, ce qui précède nous permet d'énoncer le

Lemme 2.

Si Ω est borné au sens de Orey,

$$\forall E \qquad \exists c > 0 \qquad S^*(1_E) \geq c.$$

Nous allons en déduire le résultat plus précis donné par la

Proposition 2.

Si $\Omega \in \mathcal{O}$ et $\alpha \in \,]0,1[$, il existe $A \subset \Omega$ et $\beta > 0$, tels que :

$$\forall E \subset A \qquad \nu(E) \geq \alpha.\nu(A) \Longrightarrow \exp(T^*)(1_E) \geq \beta.$$

Cette proposition découle des deux lemmes suivants :

Lemme 3.

Soit $\Omega' \subset \Omega \in \mathcal{O}$, $\nu(\Omega') > 0$. Alors,

$$\exists a,\, b > 0 \qquad \forall E \subset \Omega' \qquad \nu(\Omega' \setminus E) \leq a \Longrightarrow S^*(1_E) \geq b.$$

Sinon il existerait $E_n \subset \Omega'$, $\nu(\Omega' \setminus E_n) \leq 2^{-n-1}\nu(\Omega')$ et $S^*(1_{E_n}) \not\geq \frac{1}{n}$. Soit $E = \bigcap_n E_n \subset \Omega'$. On aurait $\nu(\Omega' \setminus E) \leq \frac{1}{2}\,\nu(\Omega')$ et $S^*(1_E) \leq S^*(1_{E_n})$, pour tout n, contredirait le lemme 2. ∎

Lemme 4.

Soit $r \in \,]0,1[$ et $\Omega' \subset \Omega$, $\nu(\Omega') > 0$. Alors

$$\exists \beta > 0,\ \exists A \subset \Omega',\ \exists B,\ \forall E \subset A \qquad \nu(E) \geq r\,\nu(A) \Longrightarrow S^*(1_E) \geq \beta\, 1_B.$$

Démontrons-le par l'absurde. Partant de $\beta_1 = \frac{b}{4}$ (le b du lemme 3), $A_1 = \Omega'$, $B_1 = \Omega$, il existerait alors $E_1 \subset \Omega'$, $\nu(E_1) \geq r\,\nu(\Omega')$ et $S^*(1_{E_1}) \leq \frac{b}{4}$ sur une partie B_2 de B_1. Prenant ensuite $A_2 = \Omega' \setminus E_1$, $B = B_2$ et $\beta_2 = \frac{b}{8}$, il existerait $E_2 \subset A_2$, $\nu(E_2) \geq r\,\nu(A_2)$ et $S^*(1_{E_2}) \leq \frac{b}{8}$ sur $B_3 \subset B_2$. On pourrait ainsi construire par récurrence les suites E_n, A_n, B_n satisfaisant aux conditions :

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \qquad A_n = \bigcap\limits_{j<n} (\Omega' \setminus E_j),\ E_n \subset A_n,\ \nu(E_n) \geq r\,\nu(A_n)$

et $S^*(1_{E_n}) \leq b\,2^{-n-1}$ sur $B_{n+1} \subset B_n$.

Il est clair que $\lim\limits_n \nu(A_n) = 0$. Choisissant n pour que $\nu(A_n) \leq a$ (le a du lemme 3), et posant $E = \Omega' \setminus A_n$, on aurait

$$S^*(1_E) \leq \frac{b}{2} \text{ sur } B_{n+1} \text{ et } \nu(\Omega' \setminus E) \leq a,$$

ce qui contredirait le lemme 3.

Observons ensuite que $S^*(1_E) \geq \beta\, 1_B \Longrightarrow \exp(T^*) 1_E = S^{*2}(1_E) \geq \beta\, S^* 1_B \geq \gamma$, pour un $\gamma > 0$, fourni par lemme 2.

Remarque. Ces divers résultats prouvent la proposition 2 et montrent même que dans toute partie Ω' non négligeable de Ω, il existe un A répondant aux conditions imposées par la proposition 2.

Résumons pour la suite de la démonstration ce qui va nous être utile. Si Ω est borné au sens de Orey, il existe en particulier, $A \subset \Omega$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall E \subset A \qquad \nu(E) \geq \frac{1}{2}\,\nu(A) \Longrightarrow \exp\,(T^*)\, 1_E \geq \beta.$$

Notons que $\exp(T^*)\, 1_E \geq \beta \Longrightarrow R_E^*\ \exp\, T^*(1_E) \geq \beta\, R_E^*(1)$ et en vertu du lemme 1,

$$R_E^*(1) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!}\ ,$$

d'où découle le corollaire,

Corollaire 1.

Soit $\Omega \in \mathcal{O}$. Il existe $A \subset \Omega$ et $\rho > 0$ tels que

$$\forall E \subset A\ \nu(E) \geq \frac{1}{2}\,\nu(A) \Longrightarrow ||{}^A R_E^*\, 1||_\infty \leq \rho.$$

Corollaire 2.

Soient $\Omega \in \mathfrak{S}$ et $A \subset \Omega$, satisfaisant aux conditions du corollaire 1. Alors, pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{L}_0^1(A)$, on a

$$(f_n - {}^A T f_n \xrightarrow{\mathbb{L}_0^1(A)} 0) \Longrightarrow (f_n \xrightarrow[-]{\mathbb{L}_0^1(A)} 0)$$

Démonstration.

De toute sous-suite de (f_n), on peut en extraire une autre, soit $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\nu(\{f_{n_i} \geq 0\}) \geq \frac{1}{2}\ \nu(A)$ (ou bien avec $\{f_{n_i} \leq 0\}$). Posons $E_i = \{f_{n_i} \geq 0\}$. On peut écrire : $f_{n_i} - {}^A T(f_{n_i}) = f_{n_i} - {}^A T_{E_i}(f_{n_i}) - {}^A T(f^+_{n_i})$, d'où l'on déduit, ${}^A R_{E_i}({}^A T\ f^+_{n_i}) = f_{n_i} - {}^A R_{E_i}\ (f_{n_i} - {}^A T\ f_{n_i})$, puis

$$\int f^+_{n_i}\ d\nu \leq \int {}^A R_{E_i}\ ({}^A T\ f^+_{n_i})\ d\nu \leq \rho \|f_{n_i} - {}^A T\ f_{n_i}\|_{\mathbb{L}^1(A)}\ , \text{ donc}$$

$$\int f^+_{n_i}\ d\nu \xrightarrow[i \to \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int f^-_{n_i}\ d\nu = - \int f^+_{n_i}\ d\nu \xrightarrow[i \to \infty]{} 0.$$

Ceci prouve que de toute sous-suite de f_n, on peut en extraire une autre qui converge vers 0 dans $\mathbb{L}_0^1(A)$. ■

Nous venons de montrer que l'hypothèse : $\mathfrak{S}$ non vide et $D \in \mathfrak{S}$ entraîne l'existence d'un $A \subset D$ tel que

$$I_A - {}^A T \text{ soit un automorphisme de } \mathbb{L}_0^1(A).$$

En effet $(I_A - {}^A T)\ \mathbb{L}_0^1(A)$ est dense dans $\mathbb{L}_0^1(A)$ et le corollaire 2 prouve que l'image de $I_A - {}^A T$ est fermée. Rappelons aussi que le processus induit $(A, {}^A T)$ admet une mesure invariante finie $\mu|_{A \cap \mathfrak{F}}$. En définitive $D \supset A \in \mathfrak{B}'$. ■

5. Inclusion $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}'$ et égalité $\mathcal{B}' = \mathcal{O}$.

a) $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}'$ Démonstration (selon Métivier).

Soit $A \in \mathcal{M}$. Si $E \subset A$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ (définition iv)) tels que

$$\sum_{j=0}^{n} T^{*j}(1_E) \geq \alpha\, \mu(E).1_A,$$

ce qui donne, en appliquant l'opérateur R_E^* et en tenant compte du lemme 1,

$$R_E^*(1_A) \leq \frac{1}{\alpha}\ \frac{1}{\mu(E)} \sum_{j=1}^{n+1} (j) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2\ \alpha\ \mu(E)}\ ,$$

donc on a bien $R_E^*(1_A) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$ quelque soit $E \subset A$.

Les dernières inégalités montrent aussi que :

$\forall E \subset A \in \mathcal{M} \qquad \nu(E) \geq \frac{1}{2}\ \nu(A) \Longrightarrow \|R_E^*(1_A)\|_\infty \leq \rho$, où ρ est un nombre > 0, ne dépendant que de A.

Autrement dit, les ensembles bornés au sens de Métivier, vérifient les conditions remplies par les ensembles A du corollaire 1, ce qui achève de prouver l'inclusion $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}'$. ■

b) $\mathcal{B}' = \mathcal{O}$.

Supposons pour simplifier l'écriture $\Omega \in \mathcal{O}$. Soit $\alpha \in]0,1[$. Désignons par $\mathcal{A}_\alpha$ la famille des parties A de Ω, satisfaisant à la condition :

$$\exists \beta > 0 \qquad \forall E \subset A \qquad \nu(E) \geq \alpha\nu(A) \Longrightarrow \exp T^*(1_E) \geq \beta.$$

La proposition 2 et la remarque qui suit sa démonstration prouvent que dans toute partie Ω' de Ω, il existe un ensemble de $\mathcal{A}_\alpha$. D'autre part il est clair que $\mathcal{A}_\alpha$ est stable pour l'union d'ensembles disjoints. Un principe général de la théorie de la mesure permet alors d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}_\alpha$ tel que $\nu(A^c) < \varepsilon$. Ceci étant, choisissons dans $\mathcal{A}_{\frac{\alpha}{2}}$ un A tel que $\nu(A^c) \leq \frac{\alpha}{2}$.

$\forall E \subset \Omega \quad \nu(E) \geq \alpha \Longrightarrow \nu(E \cap A) \geq \nu(E) - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2} \quad \nu(A)$, donc

$\exp T^{*}(1_E) \geq \exp T^{*}(1_{E \cap A}) \geq \beta$; β indépendant de E. Ceci prouve que $\Omega \in \mathcal{O}_\alpha$ quelque soit $\alpha > 0$, donc que $\Omega \in \mathcal{B}'$, puisqu'il est possible d'appliquer le corollaire 2 à $\mathbb{L}_0^1(\Omega)$.

6. Extension du théorème de Métivier aux ensembles de $\mathcal{B}'$.

On a montré que si $\mathcal{G} \neq \emptyset$, **il existe** une unique mesure invariante σ-finie ν équivalente à μ (unique à un facteur > 0 près). On peut alors énoncer la

Théorème 2.

Soit donnée $f \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$, vérifiant les conditions :

1) Supp $f = A \in \mathcal{B}$ (ce qui entraîne $f \in \mathbb{L}_\nu^1(A)$),

2) $\int f \, d\nu = 0$.

Il existe dans ces conditions une constante C ne dépendant que de A, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left\|\sum_{j=0}^{n} T^{*j} f\right\|_\infty \leq C\|f\|_\infty .$$

Démonstration.

Les résultats du § 3 montrent l'existence de $F \in \mathcal{K}(A)$ telle que

$$f = (I_A - {}^{A}T^{*})\, F = (I - T^{*})\, (R_A^{*} F).$$

On a aussi

$$\|R_A^{*} F\|_\infty \leq \|R_A^{*}(1_A)\|_\infty \, \|F\|_\infty = \|F\|_\infty \leq \frac{C}{2} \quad \|f\|_\infty ,$$

si $\frac{C}{2} = \|(I_A - {}^{A}T^{*})^{-1}\|_{\mathcal{K}(A)}$.

On tire de là, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{j=0}^{n} T^{*j} f\right\|_\infty = \|(-T^{*})(R_A^{*} F)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty . \quad \blacksquare$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] OREY S. "Limit theorems for Markov chain transition probability functions". Lectures notes. Mimeographed. University of Minnesota.

[2] ORNSTEIN D.S. "Random Walks II".

[3] METIVIER M. "Existence of an Invariant measure and an Ornstein's ergodic theorem." Ann. Math. Stat. 1969, vol. 40, n° 1, pages 79-96.