Bernard Hanouzet

# Régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du deuxième ordre

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1968-1969, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 9, p. 1-59
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___1_A9_0>

# REGULARITE POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES DU DEUXIEME ORDRE

par

Bernard HANOUZET

On étudie un opérateur différentiel elliptique d'ordre deux dégénérant sur le bord d'un ouvert relativement compact de $R^n$, suffisamment régulier ; le bord $\partial\Omega$ de $\Omega$ est une variété de dimension n-1, à bord de dimension n-2, On obtient un résultat maximum de régularité quand le second membre est dans $L^2(\Omega)$. Des résultats analogues sont obtenus pour un opérateur différentiel elliptique non dégénéré par M. S. HANNA et K.T. SMITH [4]. Les idées suivent de près celles de M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC [2].

En I on introduit un espace de Sobolev avec poids dans un dièdre. cet espace permet d'étudier localement l'espace $\mathcal{V}(\Omega)$ défini au II. Le problème est posé sous forme variationnelle dans II où l'on donne aussi le résultat principal de régularité ; ce dernier est énoncé sans démonstration dans [5] .Les III et IV sont consacrés à l'étude de la régularité au voisinage d'un point singulier de la frontière de $\Omega$. Le IV traite aussi de façon indépendante la régularité pour un problème dégénéré dans $\mathbb{R}^2_{++} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$.

## I - Espace $V(\mathbb{R}^n_{++})$

$\mathbb{R}^n_{++}$ désigne le dièdre : $\{X \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

On note $x = x_1$, $y = x_2$, $x' = (x_3,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-2}$.

On pose aussi : $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ et si $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$.

Définition 1.1.

*On désigne par* $V(\mathbb{R}^n_{++})$ *l'espace :*

$$\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_{++}) \;/\; \sqrt{xy}\; D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++}) \;;\; |\alpha| \le 1\}.$$

Il est immédiat que :

Propriété 1.1.

$V(\mathbb{R}^n_{++})$ *est un espace de Hilbert pour la norme :*

$$|u|_V = \{ \sum_{|\alpha|\le 1} |\sqrt{xy}\; D^\alpha u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_{++})} \}^{1/2}$$

Les trois propositions qui suivent donnent des propriétés de $V(\mathbb{R}^n_{++})$.

Proposition 1.1.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ *est dense dans* $V(\mathbb{R}^n_{++})$.

La démonstration s'inspire de [3]. Nous en donnons les grandes lignes.

Première étape :

On se propose de démontrer que $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$ est dense dans $V(\mathbb{R}^n_{++})$.

Par tronquature on vérifie d'abord que les éléments de V, à supports compacts dans $\overline{\mathbb{R}^n_{++}}$ sont denses dans V. Pour $u \in V$, à support compact dans $\overline{\mathbb{R}^n_{++}}$, et $h > 0$ on définit ensuite $u_h \in H^1(\mathbb{R}^n_{++}) \quad V(\mathbb{R}^n_{++})$ par :

$$u_h(x,y,x') = u(x+h, y+h, x')$$

et on montre que $u_h$ tend vers u dans V quand h tend vers zéro. Pour $u \in H^1(\mathbb{R}^n_{++})$, à support compact dans $\overline{\mathbb{R}^n_{++}}$, il existe une suite $u_p$, $u_p \in \quad (\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$, de limite u dans $H^1(\mathbb{R}^n_{++})$ avec $u_p$ et u à supports dans un compact fixé. Par suite $u_p$ tend vers u dans $V(\mathbb{R}^n_{++})$.

<u>Deuxième étape.</u>

Soit u dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$, on va montrer qu'il existe une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ de limite u dans $V(\mathbb{R}^n_{++})$. On choisit une fonction $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2_{++})$ vérifiant :

$$\Psi = 0 \text{ pour } x \leq 1 \text{ ou } y \leq 1,\ \Psi = 1 \text{ pour } x \geq 2 \text{ et } y \geq 2,\ 0 \leq \Psi \leq 1,$$

et on pose :

$$u_\varepsilon = \Psi_\varepsilon\, u \text{ avec } \Psi_\varepsilon(x,y) = \Psi(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}).$$

Il est immédiat que, quand $\varepsilon$ tend vers zéro :

$\sqrt{xy}\, u_\varepsilon$ tend vers $\sqrt{xy}\, u$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$ ;

$\sqrt{xy}\, D_i\, u_\varepsilon$ tend vers $\sqrt{xy}\, D_i u$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$, $i = 3,\dots,n$.

Etudions les termes ; pour $i = 1,2$ :

$$\sqrt{xy}\, D_i\, u_\varepsilon = \sqrt{xy}\, \frac{1}{\varepsilon}\, (D_i\Psi)(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})u + \sqrt{xy}\, \Psi_\varepsilon\, D_i u.$$

On a encore

$\sqrt{xy}\, \Psi_\varepsilon\, D_i u$ tend vers $D_i u$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_{++})$.

Puisque

$$\int_{R^{n-1}} y|(D_1\Psi)(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})|^2 \; |u|^2 \; dy \; dx'$$

est borné pour $x \in [\varepsilon, 2\,\varepsilon]$,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} xy|(D_1\Psi)(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})|^2 \; |u|^2 \; dx \; dy \; dx' =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} x \; dx \; \int_{\mathbb{R}^{n-1}_+} y|(D_1\Psi)(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})|^2 \; |u|^2 \; dy \; dx'$$

reste bornée et il existe une suite $\varepsilon_i$ telle que

$$\sqrt{xy} \;\; \frac{1}{\varepsilon_i} \; (D_1\Psi)(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})$$

tend faiblement verszéro dans $L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ (Il est immédiat que cette même expression tend vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_{++})$ ).

On extrait ensuite une sous-suite telle que :

$$\sqrt{xy} \;\; \frac{1}{\varepsilon_j} \; (D_2\Psi)(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon}) \; u$$

tend faiblement vers zéro dans $L^2(\mathbb{R}^n_{++})$. On déduit que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ est faiblement dense dans V donc fortement dense. ▨

Nous utilisons maintenant cette proposition pour démontrer deux résultats d'immersion.

Proposition 1.2.

$V(\mathbb{R}^n_{++})$ *est contenu dans* $L^2(\mathbb{R}^n_{++})$, *avec injection continue.*

On prend u dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ et on montre que :

$$|u|_{L^2(\mathbb{R}^n_{++})} \leq \text{Cte } |u|_V .$$

On utilise en passage en coordonnées polaires ; notons que

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(|D_1u|^2 + |D_2u|^2)\, dx\, dy\, dx' =$$

$$\int_{\mathbb{R}_+\times[0,\frac{\Pi}{2}]\times\mathbb{R}^{n-2}} r^3 \sin\Theta \cos\Theta\, (|D_r u|^2 + \frac{1}{r^2}|D_\Theta u|^2) dr d\Theta\, dx'$$

et que

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} |u|^2\, dx\, dy\, dx' = \int_{\mathbb{R}_+\times[0,\frac{\Pi}{2}]\times R^{n-2}} r\, |u|^2\, dr\, d\Theta\, dx' .$$

Soient $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux fonctions $\mathcal{C}\ (0,\frac{\Pi}{2})$ telles que :

$$0 \leq \varphi_1 \leq 1 \ ,\ 0 \leq \varphi_2 \leq 1 \ ,\ \varphi_1 + \varphi_2 = 1.$$

$$\text{supp } \varphi_1 \subset [0,\Theta_1] \text{ et } \Theta_1 < \frac{\Pi}{2}$$

$$\text{supp } \varphi_2 \subset [\Theta_2, \frac{\Pi}{2}] \text{ et } \Theta_2 > 0.$$

D'après l'inégalité de Hardy (voir [8]) :

$$\int_0^{\Pi/2} |\varphi_1 u|^2\, d\Theta \leq C\int_0^{\Pi/2} \Theta^2\, |D_\Theta \varphi_1 u|^2\, d\Theta \leq C_1\int_0^{\Pi/2} \sin\Theta \cos\Theta |D_\Theta\ _1u|^2\, d\Theta$$

où $C_1$ est une constante dépendant de $\varphi_1$ (car $\varphi_1 = 0$ pour $\Theta_1 \leq \Theta \leq \frac{\Pi}{2}$).

De même :

$$\int_0^{\Pi/2} |\varphi_2 u|^2 \, d\Theta \leq C_2 \int_0^{\Pi/2} \sin\Theta \cos\Theta \, |D_\Theta \varphi_2 u|^2 \, d\Theta.$$

On obtient donc en notant $R = \mathbb{R}_+ \times [0,\frac{\Pi}{2}] \times \mathbb{R}^{n-2}$ :

$$\int_R r\,|u|^2 \, drd\Theta\, dx' = \int_R r|\varphi_1 u+\varphi_2 u|^2 \, drd\Theta\, dx'$$

$$\leq C \int_R r(|\varphi_1 u|^2 + |\varphi_2 u|^2) \, drd\Theta\, dx'$$

$$\leq C \int_R r \sin\Theta \cos\Theta \, (|D_\Theta \varphi_1 u|^2 + |D_\Theta \varphi_2 u|^2) \, drd\Theta\, dx'$$

$$\leq C \{\int_R r \sin\Theta \cos\Theta \, ((D_\Theta \varphi_1)^2 + (D_\Theta \varphi_2)^2) \, |u|^2 \, drd\Theta\, dx' \qquad (\alpha)$$

$$+ \int_R r \sin\Theta \cos\Theta \, |D_\Theta \, \varphi_1 \varphi_2| \, |u \, D_\Theta u| \, drd\Theta\, dx' \qquad (\beta)$$

$$+ \int_R r \sin\Theta \cos\Theta \, (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \, |D_\Theta u|^2 \, drd\Theta\, dx'\} \qquad (\gamma)$$

Le terme $(\beta)$ se majore par l'inégalité de Schwarz :

$$(\beta) \leq C(\int_R r \sin\Theta \cos\Theta \, |u|^2 \, drd\Theta\, dx')^{1/2} (\int_r r \sin\Theta \cos\Theta \, |D_\Theta u|^2 \, drd\Theta\, dx')^{1/2}$$

$$\leq C\left\{\int_R r \sin\Theta \cos\Theta \, |u|^2 \, drd\Theta\, dx' + \int_R r \sin\Theta \cos\Theta \, |D_\Theta u|^2 \, drd\Theta\, dx'\right\}.$$

ce qui donne deux termes analogues à $(\alpha)$ et $(\gamma)$.

Le terme $(\gamma)$ donne de façon immédiate :

$$(\gamma) \leq C \int_R r \sin\Theta \cos\Theta \, |D_\Theta u|^2 \, dr d\Theta \, dx' \qquad (\gamma').$$

Reste le terme $(\alpha)$. Par l'inégalité de Hardy, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} r \, |u|^2 \, dr \leq C \int_0^{+\infty} r^3 |D_r u|^2 \, dr$$

et par suite

$$\int_R r \sin\Theta \cos\Theta \, |u|^2 \, dr d\Theta \, dx' \leq C \int_R r^3 \sin\Theta \cos\Theta \, |D_r u|^2 \, dr d\Theta \, dx'. \qquad (\alpha')$$

Les majorations $(\alpha')$ et $(\gamma')$ donnent alors :

$$\int_R r \, |u|^2 \, dr d\Theta \, dx' \leq C \left\{ \int_R r^3 \sin\Theta \cos\Theta \, |D_r u|^2 \, dr d\Theta \, dx' + \int_R r \sin\Theta \cos\Theta \, |D_\Theta u|^2 \, dr d\Theta \, dx' \right\}.$$

ce qui d'après les remarques faites au début donne bien :

$$|u|_{L^2(\mathbb{R}^n_{++})} \leq C \, |u|_{V(\mathbb{R}^n_{++})}$$

pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ ; la proposition 1.1 permet ensuite de conclure.

Nous précisons le résultat de la proposition précédente :

Proposition 1.3.

$V(\mathbb{R}^n_{++})$ *s'injecte continûment dans l'espace :*

$\{u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++}) \ / \ (x^2+y^2)^{1/4} \ u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) \ , \ H^{1/2} \ (\mathbb{R}^{n-2})\}$ (1)

Nous reprenons la démonstration précédente en choisissant $\varphi_1$ et $\varphi_2$ telles que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$.

Partant de :

$$|\varphi_1 u|^2 = -\int_\Theta^{\Pi/2} D_\Theta |\varphi_1 u(r,t,x')|^2 \, dt$$
$$\leq 2 \int_\Theta^{\Pi/2} |\varphi_1 u(r,t,x')| \ |D_\Theta \varphi_1 u(r,t,x')| dt \ ,$$

on obtient, par intégration par parties :

$$\int_0^{\Pi/2} |\varphi_1 u|^2 \, d\Theta \leq 2\int_0^{\Pi/2} \Theta |\varphi_1 u(r,t,x')| \ |D_\Theta \varphi_1 u(r,t,x')| d\Theta$$
$$\leq C_1 (\int_0^{\Pi/2} \sin\Theta \cos\Theta \ |\varphi_1 u|^2 \, d\Theta)^{1/2} \ (\int_0^{\Pi/2} \sin\Theta \cos\Theta \ |D_\Theta \varphi_1 u|^2 \, d\Theta)^{1/2}$$

(cette dernière inégalité est obtenue grâce au choix du support de $\varphi_1$, puis par l'inégalité de Schwarz).

Partant de $|\varphi_2 u|^2 = \int_0^\Theta D_\Theta |\varphi_2 u|^2 \, dt$, on obtient une inégalité analogue, c'est-à-dire que l'on a pour $i = 1,2$ :

$$\int_0^{\Pi/2} |\varphi_i u|^2 \, d\Theta \leq C_i (\int_0^{\Pi/2} \sin\Theta \cos\Theta |\varphi_i u|^2 \, d\Theta)^{1/2} \times (\int_0^{\Pi/2} \sin\Theta \cos\Theta \ |D_\Theta \varphi_i u|^2 \, d\Theta)^{1/2}.$$

(1) $H^s$ désigne l'espace de Sobolev habituel, voir [6] par exemple.

Nous notons $\hat{u}(x,y,\xi)$ la transformée de Fourier de u suivant les variables $(x_3,\ldots,x_n)$ ; $(\xi_3,\ldots,\xi_n) = \xi$ désigne la variable duale. La dernière inégalité se conserve en remplaçant u par $\hat{u}$.

Nous avons d'autre part :

$$|(x^2+y^2)^{1/4}\, u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++},H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} = \int_{\mathbb{R}^n_{++}} (x^2+y^2)^{1/2}(1+|\xi|^2)^{1/2}\, \hat{u}(x,y,\xi)|^2 dxdy\, d\xi$$

$$= \int_R r^2(1+|\xi|^2)^{1/2}\, |\hat{u}(r,\Theta,\xi)|^2\, drd\Theta\, d\xi \;.$$

Des inégalités :

$$\int_0^{\Pi/2} r^2(1+|\xi|^2)^{1/2}\, |\varphi_i\hat{u}|^2\, d\Theta$$

$$\leq C_i\Big(\int_0^{\Pi/2} r^3 \sin\Theta\, \cos\Theta(1+|\xi|^2)|\varphi_i\hat{u}|^2\, d\Theta\Big)^{1/2} \Big(\int_0^{\Pi/2} r \sin\Theta\, \cos\Theta\, |D_\Theta\varphi_i\hat{u}|^2\, d\Theta\Big)^{1/2}$$

$$\leq C_i'\Big\{\int_0^{\Pi/2} r^3 \sin\Theta\, \cos\Theta(1+|\xi|^2)|\varphi_i\hat{u}|^2\, d\Theta + \int_0^{\Pi/2} r \sin\Theta\, \cos\Theta\, |D_\Theta\varphi_i\hat{u}|^2\, d\Theta\Big\}.$$

on tire ensuite :

$$\int_0^{\Pi/2} r^2(1+|\xi|^2)^{1/2}\, |\hat{u}|^2\, d\,\Theta$$

$$\leq C\Big\{\int_0^{\Pi/2} r^3 \sin\Theta\, \cos\Theta\, (1+|\xi|^2)\, |\hat{u}|^2\, d\Theta$$

$$+ \int_0^{\Pi/2} r \sin\Theta\, \cos\Theta\, |D_\Theta\varphi_1\hat{u}|^2\, d\Theta + \int_0^{\Pi/2} r \sin\Theta\, \cos\Theta |D_\Theta\varphi_2 u|^2\, d\Theta\Big\}.$$

Après intégration sur R les deux derniers termes se majorent comme à la proposition 1.2 et on obtient en définitive :

$$\int_R r^2(1+|\xi|^2)^{1/2}|\hat{u}|^2 \, dr d\Theta \, d\xi \leq C\left\{\int_R r^3 \sin\Theta \cos\Theta(1+|\xi|^2)|\hat{u}|^2 \, dr d\Theta \, d\xi\right.$$

$$\left. + \int_R r^3 \sin\Theta \cos\Theta \, |D_r \hat{u}|^2 \, dr d\Theta \, d\xi + \int_R r \sin\Theta \cos\Theta \, |D_\Theta \hat{u}|^2 \, dr d\Theta \, d\xi\right\}.$$

En revenant aux variables : $(x,y,\xi)$ cette dernière inégalité s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} (x^2+y^2)^{1/2}(1+|\xi|^2)^{1/2} \, |\hat{u}|^2 \, dx \, dy \, d\xi$$

$$\leq C\left\{\int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(1+|\xi|^2)|\hat{u}|^2 \, dxdy \, d\xi \; + \int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(|D_1\hat{u}|^2+|D_2\hat{u}|^2)dxdy \, d\xi\right\}.$$

donc on a bien :

$$|(x^2+y^2)^{1/4}u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++},H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} \leq C \, |u|_V \, .$$

Nous préparons maintenant l'étude de la régularité en démontrant deux lemmes de commutation voisins de ceux donnés dans [2]. On introduit l'opérateur $T_r$ : si $u(x,y,x') \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_{++})$ et est tempérée en x', on note $\hat{u}(x,y,\xi)$ la transformée de Fourier en x' et on définit $T_r$ par :

$$\widehat{T_r u}(x,y,\xi) = (1+|\xi|^2)^{r/2} \, \hat{u}(x,y,\xi).$$

On démontre (voir [7]) les :

Propriétés 1.2.

i) $u \longrightarrow T_r u$ est linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^2_{++}, H^s(\mathbb{R}^{n-2}))$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_{++}, H^{s-r}(\mathbb{R}^{n-2}))$

ii) si $a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ alors $u \longrightarrow [a, T_r]u$ (2) est linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^2_{++}, H^s(\mathbb{R}^{n-2}))$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_{++}, H^{s-r+1}(\mathbb{R}^{n-2}))$.

Soient maintenant deux fonctions $\zeta$, $\beta \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$, $\zeta$ et $\beta$ à valeurs réelles, et on pose :

$$M = (x^2+y^2)^{1/4}\, \beta\, T_{1/2}\zeta$$

Alors l'adjoint formel $M^*$ de $M$ est :

$$M^* = (x^2+y^2)^{1/4}\, \zeta T_{1/2}\beta$$

On donne ensuite $a \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$ et $P$, $Q$ deux opérateurs différentiels en toutes les variables d'ordre inférieur ou égal à 1 et à coefficients $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$ tels que :

$$\forall\, r \quad : \quad [Q, T_r] = [A, T_r] = 0.$$

Nous noterons dans la suite :

$(\ ,\ )_s$ et $|\ |_s$ le produit scalaire et la norme dans $H^s(\mathbb{R}^n_{++})$. On démontre alors le :

Lemme 1.1.

*Pour tout* $v$ *dans* $H^1_0 \cap H^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$|(aP\, Mv, Q\, M\, v)_0 - (a\, P\, v, Q\, M^*\, M\, v)_0| \leq C|v|_1\, |Mv|_1.$$

(2) $|a, T_r|$ désigne le commutateur de $a$ et $T_r$.

Remarquons que $v \in H_0^1 \cap H^2(\mathbb{R}^n_{++})$ donne un sens aux termes intervenant dans l'inégalité. : (c'est " juste suffisant" pour $Q\, M^* M\, v$).

Nous partons de :

$$(aP\,M\,v, Q\,M\,v)_0 - (a\,P\,v, Q\,M^* M\,v)_0 = ([aP,M]\,v, Q\,M\,v)_0 - (A\,P\,v, [Q,M^*]\,M\,v)_0$$

et nous étudions le premier terme de droite :

$$|([a\,P,M]\,v, Q\,M\,v)_0| \leq |[a\,P,M]\,v|_0\; |Q\,M\,v|_0$$

d'après l'inégalité de Schwarz et d'autre part :

$$|Q\,M\,v|_0 \leq C|M\,v|_1.$$

Il suffit donc de montrer que :

$$|[a\,P,M]\;v|_0 \leq C|v|_1.$$

Pour cela, nous explicitons $[a\,P,M]$ et majorons séparément chacun des termes obtenus.

$$[a,P,M] = a\beta\,[P,(x^2+y^2)^{1/4}]\;T_{1/2}\zeta$$
$$+\; a(x^2+y^2)^{1/4}\;[P,\beta]\;T_{\frac{1}{2}}\,\zeta \;+\; a(x^2+y^2)^{1/4}\;\beta\;T_{1/2}[P,\zeta]$$
$$+\; (x^2+y^2)^{1/4}\;\beta\,[a,T_{1/2}]\,\zeta\;P.$$

Pour les trois derniers termes, puisque $a$ et $\beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$, on a :

$|\qquad|_0 \leq C|v|_1$. En effet pour le deuxième :

$$|a(x^2+y^2)^{1/4}\;[P,\beta]\;T_{1/2}\zeta\;v|_0 \leq C\;|T_{1/2}\zeta\;v|_0$$

$$\leq\; C\;|\zeta\;v|_{L^2(\mathbb{R}^n_{++},H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} \leq C|v|_1$$

Le calcul est identique pour le troisième terme ; pour le quatrième, en utilisant la propriété 1.2,ii, on obtient :

$$|(x^2+y^2)^{1/4}\beta[a,T_{1/2}]\zeta\, P|_0 \leq C|[a,T_{1/2}]\zeta\, P\, v|_0$$

$$\leq C\,|\zeta\, P\, v|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++},H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))} \leq C|P\, v|_0 \leq C|v|_1 .$$

Le premier terme, en posant $P = \sum_{i=0}^{n} p_i\, D_i$, se présente sous la forme :

$$a\,\beta\, p_1 \frac{1}{2}\, x(x^2+y^2)^{-3/4}\; T_{1/2}\zeta + a\,\beta\, p_2 \;\; \frac{1}{2}\, y(x^2+y^2)^{-3/4}\; T_{1/2}\,\zeta$$

et on a alors la majoration :

$$|a\,\beta[P,(x^2+y^2)^{1/4}]\;T_{1/2}\zeta\, v|_0 \leq C|(x^2+y^2)^{-1/4}\;T_{1/2}\zeta\, v|_0$$

car $\qquad x(x^2+y^2)^{-3/4} \leq (x^2+y^2)^{-1/4}$ .

L'utilisation de la propriété :

<u>Propriété 1.3.</u>

Il existe une constante $C > 0$ telle que , $\forall\, v \in H_0^1(\mathbb{R}^n_{++})$, on a ;

$$|(x^2+y^2)^{-1/4}\;T_{1/2}v|_0 \leq C|v|_1$$

permet alors de conclure à :

$$|[a\,P,M]v|_0 \leq C|v|_1.$$

On traite ensuite de la même manière :

$$(a\,P\,v\;,[Q,M^*]M\,v)_0$$

En remplaçant Q par a P, $M^*$ par M on montre que $[Q,M^*]$ est linéaire continu de $H^1(\mathbb{R}^n_{++})$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ donc

$$|(a\,P\,v,[Q,M^*]M\,v)_0| \leq C|v|_1|M\,v|_1 .$$

ce qui termine la démonstration du lemme 1.1. ▨

Reste à vérifier la propriété 1.3 :

Pour $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$, on a, après un passage en coordonnées polaires :

$$\int_0^{+\infty} |\hat{v}|^2\,dr \leq C\int_0^{+\infty} r|\hat{v}|D_r\,\hat{v}|dr$$

$$\leq C\Big(\int_0^{+\infty} r|D_r\hat{v}|^2\,dr\Big)^{1/2}\Big(\int_0^{+\infty} r|\hat{v}|^2\,dr\Big)^{1/2}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} (x^2+y^2)^{-1/2}\,|T_{1/2}v|^2\,dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} (x^2+y^2)^{-1/2}(1+|\xi|^2)^{1/2}|\hat{v}(x,y,\xi)|^2\,dx\,dy\,d\xi =$$

$$\int_{R^{n-2}} (1+|\xi|^2)^{1/2}\,d\xi \int_{\mathbb{R}_+\times[0,\frac{\pi}{2}]} |\hat{v}(x,y,\xi)|^2\,dr d\theta \leq$$

$$C\int_{R^{n-2}} d\xi\Big(\int_{\mathbb{R}_+\times[0,\frac{\pi}{2}]} r|D_r\hat{v}|^2\,dr d\theta\Big)^{1/2}\Big(\int_{R_+\times(0,\frac{\pi}{2})} r(1+|\xi|^2)|\hat{v}|^2\,dr d\theta\Big)^{1/2} \leq$$

$$C\Big\{\int_R r|D_r\hat{v}|^2\,dr d\theta\,d\xi + \int_R r(1+|\xi|^2)\,|\hat{v}|^2\,dr d\theta\Big\} \leq$$

$$C\,|v|_1$$

ce qui fournit la corclusion en tenant compte de la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ dans $H^1_0(\mathbb{R}^n_{++})$. $\blacksquare$

<u>Lemme 1.2.</u>

*Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* $v \in H^1_0 \cap H^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *à support dans un compact fixe de* $\overline{\mathbb{R}^n_{++}}$*, on ait :*

$$|(a\, xy\, P\, M\, v, Q\, M\, v)_0 - (a\, xy\, P\, v, Q\, M^* M\, v)_0| \leq C\, |v|_V\, |M\, v|_V\, .$$

Remarquons que les expressions intervenant dans le premier membre de l'inégalité ne changent pas quand on remplace $v$ par $\beta_1 v$ avec $\beta_1\, \zeta = \zeta$, $\beta_1$ dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_{++}})$. Il est utile de supposer $v$ à support compact pour assurer que $v \in H^1_0 \cap H^2(\mathbb{R}^n_{++})$ entraîne $v \in V(\mathbb{R}^n_{++})$.

Nous procédons comme au lemme 1.1 ; il est aussi utile de noter que $[xy, M] = 0$.

Partant de :

$$(a\, xy\, P\, M\, v, Q\, M\, v)_0 - (axy\, P\, v, Q\, M^* M\, v)_0 =$$

$$= (\sqrt{xy}\, [a\, P, M]\, v, \sqrt{xy}\, Q\, M\, v)_0 - (a\, \sqrt{xy}\, P\, v, \sqrt{xy}\, [Q, M^*]\, M\, v)_0$$

on obtient le lemme en majotant séparément les deux derniers termes. Nous n'étudions que le premier ; il suffit de montrer que :

$$|\sqrt{xy}\, [a\, P, M]\, v|_0 \leq C\, |v|_V\, .$$

Nous avons :

$$\sqrt{xy}\,[a\,P,\tilde{M}] = \sqrt{xy}\,[P,(x^2+y^2)^{1/4}]\,T_{1/2}\zeta$$

$$+ \sqrt{xy}\;a(x^2+y^2)^{1/4}\;[P,\beta]\,T_{1/2}\zeta + \sqrt{xy}\;a(x^2+y^2)^{1/4}\;\beta\;T_{1/2}[P,\zeta]$$

$$+ \sqrt{xy}(x^2+y^2)^{1/4}\;\beta[a,T_{1/2}]\zeta P.$$

La proposition 1.3 permet de majorer les 3 premiers termes :

Pour le premier :

$$|a\;\beta\;p_1\;\frac{1}{2}\sqrt{xy}\;x(x^2+y^2)^{-3/4}\;T_{1/2}\zeta\;v|_0$$

$$\leq C\;(x^2+y^2)^{1/4}\;T_{1/2}\zeta\;v|_0$$

$$\leq C\;|\zeta v|_V \leq C|v|_V.$$

Le deuxième et troisième **sont** immédiats. Reste :

$$|\sqrt{xy}\;(x^2+y^2)^{1/4}\beta[\,a,T_{1/2}]\zeta\;P\;v|_0$$

$$= |\beta[a,\;T_{1/2}](x^2+y^2)^{1/4}\;\sqrt{xy}\;\zeta\;P\;v|_0$$

$$\leq C\;|\sqrt{xy}\;\zeta\;P\;v|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++},H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-2}))}$$

(d'après la propriété 1.2, ii)

$$\leq\;C|\sqrt{xy}\;P\;v|_{L^2(\mathbb{R}^n_{++})} \leq C\;|v|_V\;.$$

On termine ensuite la démonstration comme au lemme précédent. ▨

Nous rappelons maintenant quelques propriétés d'espaces utiles pour la suite.

Désignons par $\mathbb{R}^n_+$ le demi-espace :

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}.$$

Nous introduisons comme dans [2] l'espace :

$$U(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+) \ / \ \sqrt{x_1}\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \ ; \ |\alpha| \leq 1\}.$$

$U(\mathbb{R}^n_+)$ est un espace de Hilbert quand on le munit de la norme :

$$|u|_U = \Big( \sum_{|\alpha| \leq 1} |\sqrt{x_1}\ D^\alpha u|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \Big)^{1/2}$$

et on a les propriétés :

<u>Propriété 1.1'</u>.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ est dense dans $U(\mathbb{R}^n_+)$.

<u>Propriétés 1.2'</u>.

On a l'inclusion topologique :

$$U \subset L^2(\mathbb{R}_+, H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

II - Espace $\mathcal{V}(\Omega)$. Problème variationnel.

On donne p fonctions réelles $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ , $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ et on suppose qu'un ouvert borné $\Omega$ est défini par :

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ \varphi_i(X) > 0 \ ; \ i = 1,\ldots,p\}.$$

On pose $\Phi = \prod_{i=1}^{p} \varphi_i$ et on suppose que :

i) Pour tout point régulier X de $\partial\Omega$, il existe un indice i tel que :

$$\varphi_i(X) = 0 \text{ et } \varphi_j \neq 0,\ j \neq i,\ j = 1,\ldots,p \qquad (2.1)$$

et $d\Phi(X) \neq 0$.

(cette dernière condition équivaut à $d\,\varphi_i(X) \neq 0$).

ii) Pour tout point singulier A de $\partial\Omega$ il existe un couple d'indices (i,j) tel que :

$$\begin{cases} \varphi_i(A) = \varphi_j(A) = 0 \\ \varphi_k(A) \neq 0 \ , \ k \neq i,\ k \neq j,\ k = 1,\ldots,p \\ \operatorname{grad} \varphi_i(A) \wedge \operatorname{grad} \varphi_j(A) \neq 0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Nous introduisons l'espace $\mathcal{V}(\Omega)$ par :

Définition 2.1.

$$(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ / \ \Phi^{1/2}\, D^\alpha u \in L^2(\Omega) \ ; \ |\alpha| \leq 1\}.$$

et on a immédiatement :

$\mathcal{V}(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand on le munit de la norme :

$$\boxed{|u| = \Big( \sum_{|\alpha| \leq 1} |\Phi^{1/2} D^{\alpha} u|_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2}.}$$

Nous utiliserons dans la suite les :

<u>Propriétés 2.1.</u>

1°) $\mathcal{V}(\Omega)$ est contenu dans $H^1_{loc}(\Omega)$ algébriquement et topologiquement.

2°) Si $\Psi$ est une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'application :

$$u \longrightarrow \Psi u$$

est continue de $\mathcal{V}(\Omega)$ dans lui-même .

3°) Pour que u appartienne à $\mathcal{V}$ il faut et il suffit que les trois propriétés suivantes soient réalisées :

i) $u \in H^1_{loc}(\Omega)$.

ii) pour X point régulier de $\partial\Omega$, il existe un ouvert O voisinage de X et un difféomorphisme $\Theta$ de O sur O' (O' boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, centrée à l'origine) vérifiant :

$$\Theta(O \cap \overline{\Omega}) = O' \cap \mathbb{R}^n_+$$

$$\Theta(O \cap \partial\Omega) = O' \cap \partial \mathbb{R}^n_+$$

et tels que, pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$, on ait :

$$\zeta\, u \circ \Theta^{-1} \in U(\mathbb{R}^n_+).$$

iii) Pour X point singulier de $\partial\Omega$, il existe un ouvert O voisinage de X et un difféomorphisme de O sur O' vérifiant :

$$\Theta(O \cap \overline{\Omega}) = O' \cap \mathbb{R}^n_{++}$$

$$\Theta(O \cap \partial\Omega) = O' \cap \partial\, \mathbb{R}^n_{++}$$

et tels que, pour toute $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$ on ait :

$$\zeta u \circ \Theta^{-1} \in V(\mathbb{R}^n_{++}).$$

4°) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{V}(\Omega)$.

5°) $\mathcal{V}(\Omega)$ est contenu algébriquement et topologiquement dans $L^2(\Omega)$.

Tirons deux conséquences avant de démontrer ces propriétés :

Conséquences 2.1.

1°) Le dual $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ est un espace de distributions.

2°) Puisque $\Omega$ est un ouvert borné, la norme :

$$|u| = (|u|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leq 1} |\Phi^{1/2}\, D^\alpha u|_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

est équivalente à la norme $\mathcal{V}$.

Démonstration.

1° et 2° sont immédiats ; remarquons que, pour 2°, il suffirait de prendre $\Psi \in C^1(\overline{\Omega})$.

Le 3° se démontre par partition de l'unité.

Soit X point régulier de $\partial\Omega$, tel que $\varphi_1(X) = 0$ ; on peut prendre dans un voisinage :

$$\Theta \begin{cases} x'_1 = \varphi_1(x) \\ x'_i = \Theta_i(x) \qquad i = 1,\dots,n \end{cases}$$

et on a $\zeta\, u \circ \Theta^{-1} \in U(\mathbb{R}^n_+)$ pour $\zeta \in \mathcal{D}(0 \cap \overline{\Omega})$.

Pour A point singulier de $\partial\Omega$, tel que $\varphi_1(A) = {}_2(A) = 0$ om peut prendre

$$\Theta \begin{cases} x'_1 = \varphi_1(x) \\ x'_2 = \varphi_2(x) \\ x'_i = \Theta_i(x) \qquad i = 3,\dots,n. \end{cases}$$

et on a $\zeta\, u \circ \Theta^{-1} \in V(\mathbb{R}^n_{++})$ pour $\zeta \in \mathcal{D}(0 \cap \overline{\Omega})$.

Les hypothèses (2.1) et (2.2) permettent en effet ce choix. Le 4° s'obtient ensuite à partir des propriétés 1.1, et 1.1' et le 5° à partir des propriétés 1.2 et 1.2'. ▨

Problème variationnel.

On considère la forme intégro-différentielle a définie par :

$$a(u,v) = \sum_{\substack{0 \le |\alpha| \le 1 \\ 0 \le |\beta| \le 1}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(X)\, \Phi(X)\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v}\, dX$$

avec $a_{\alpha\beta}$ dans $C^\infty(\overline{\Omega})$.

La forme a est donc continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. On suppose de plus que a est $\mathcal{V}$-coercitive, c'est-à-dire :

$$\exists\, \gamma > 0 \text{ tel que } \forall\, u \in \mathcal{V} \qquad \operatorname{Re} a(u,u) \ge \gamma |u|^2$$

On associe à a l'opérateur différentiel $A = A(X,D)$ :

$$A = \sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq 1 \\ 0 \leq |\beta| \leq 1}} D^{\beta} a_{\alpha\beta}(X)\, \Phi(X)\, D^{\alpha}$$

L'application du lemme de Lax Milgramm donne alors la :

Proposition 2.1.

*Pour tout* $f \in \mathcal{V}'(\Omega)$, *il existe* $u$ *dans* $\mathcal{V}(\Omega)$ *unique, tel que :*

$$a(u,v) = (f,v)_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \text{ pour tout } v \in \mathcal{V} \qquad (2.3)$$

ou encore

$A$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{V}$ *sur* $\mathcal{V}'$.

Donc pour tout $f$ dans $\mathcal{V}'(\Omega)$ il existe $u$ dans $\mathcal{V}(\Omega)$, unique, telle que $Au = f$. On suppose maintenant que $u$ est dans un espace "plus petit" que $\mathcal{V}'(\Omega)$, on cherche alors dans quel espace se trouve la solution $u$.

On obtient le résultat maximal quand $f$ est dans $L^2(\Omega)$.

Régularité avec second membre dans $L^2(\Omega)$.

On suppose que a possède la propriété d'ellipticité :

$\exists\, \delta > 0$ tel que $\forall\, \xi \in \mathbb{C}^n$ et $\forall\, x \in \overline{\Omega}$:

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha| = |\beta| = 1} a_{\alpha\beta}(X)\, \xi^{\alpha}\, \overline{\xi}^{\beta} \geq \delta |\xi|^2 \qquad (2.4)$$

et on pose :

$\Psi = \Pi(\varphi_i^2 + \varphi_j^2)^{1/2}$ ; le produit $\Pi$ étant étendu aux couples $(i,j)$ définis en (2.2). On introduit ensuite :

Définition 2.2.

$$D = \{u \in L^2(\Omega) \mid \Psi\, u \in H'(\Omega)\ ; \Phi\, u \in H^2(\Omega)\}.$$

D est un espace de Hilbert pour la norme :

$$|u|_D = (|u|^2_{L^2(\Omega)} + |\Psi u|_{H'(\Omega)} + |\Phi u|_{H^2(\Omega)})^{1/2}$$

Pour la commodité des démonstrations nous donnons une définition équivalente de l'espace D.

Définition 2.2'.

$$D = \left\{u \in L^2(\Omega) \mid \begin{array}{l} \Psi\, D^\alpha u \in L^2(\Omega)\ ;\ |\alpha| = 1 \\ \Phi\, D^\alpha u \in L^2(\Omega)\ ;\ |\alpha| = 2 \end{array}\right\}$$

Notons pour l'instant :

$$\Delta = \left\{u \in L^2(\Omega) \mid \begin{array}{l} \Psi\, D^\alpha\, u \in L^2(\Omega)\ ;\ |\alpha| = 1 \\ \Phi\, D^\alpha\, u \in L^2(\Omega)\ ;\ |\alpha| = 2 \end{array}\right\}$$

et posons I l'ensemble des couples (i,j) de finis par (2.2).

1°) Montrons tout d'abord que $\Delta \hookrightarrow D$.

Puisque $\Psi$ et $\Phi$ sont bornées sur $\Omega$, on a tout d'abord :

$$|\Psi u|_{L^2(\Omega)} \leq C\, |u|_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad |\Phi u|_{L^2(\Omega)} \leq C |u|_{L^2(\Omega)} \qquad (\alpha)$$

Majorons ensuite $|D_1\, \Psi u|_{L^2(\Omega)}$ ; on a :

$$D_1(\Psi u) = (D_1\, \Psi)\, u + \Psi\, D_1 u$$

et

$$|D_1\ \Psi| = \left|\sum_{(i,j)\in I} \frac{\Psi}{(\varphi_i^2+\varphi_j^2)^{1/2}} \times \frac{\varphi_i D_1\varphi_i + \varphi_j D_1\varphi_j}{(\varphi_i^2+\varphi_j^2)^{1/2}}\right|$$

Puisque

$$\frac{|\varphi_i D_1\varphi_i+\varphi_j D_1\varphi_j|}{(\varphi_i^2+\varphi_j^2)^{1/2}} \leq C\ \frac{|\varphi_i|+|\varphi_j|}{(\varphi_i^2+\varphi_j^2)^{1/2}} \leq C\ \sqrt{2}$$

on déduit que $|D_1\ \Psi|$ est borné sur $\Omega$ donc que :

$$|D_1\ \Psi u|_{L^2(\Omega)} \leq C|u|_{L^2(\Omega)} + |\Psi D_1 u|_{L^2(\Omega)} \qquad (\beta)$$

On étudie ensuite les termes de $|\Phi u|_{H^2(\Omega)}$ :

$$D_1(\Phi u) = (D_1\Phi)\ u + \Phi\ D_1 u$$

donc :

$$|D_1(\Phi u)|_{L^2(\Omega)} \leq C|u|_{L^2(\Omega)} + \left|\frac{\Phi}{\Psi}\ \Psi D_1 u\right|_{L^2(\Omega)}$$

D'autre part : $\frac{\Phi}{\Psi}$ reste borné sur $\Omega$ ; en effet $\Psi$ ne s'annule que pour les points singuliers de la frontière de $\Omega$, soit A un de ces points défini par $\varphi_i(A) = \varphi_j(A) = 0$, alors

$$\frac{\varphi_i\ \varphi_j}{(\varphi_i^2+\varphi_j^2)^{1/2}} \leq \frac{1}{2}\ \sqrt{\varphi_i^2+\varphi_j^2} \text{ est borné.}$$

On obtient donc :

$$|D_1(\Phi\ u)|_{L^2(\Omega)} \leq C(|u|_{L^2(\Omega)} + |\Psi\ D_1 u|_{L^2(\Omega)}) \qquad (\gamma)$$

Il suffit maintenant de majorer le terme :

$$|D_1^2(\Phi u)|_{L^2(\Omega)} \leq |(D_1^2\Phi)u|_{L^2(\Omega)} + |2\, D_1\Phi\, D_1 u|_{L^2(\Omega)}$$

$$+ |\Phi\, D_1^2\, u|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C(|u|_{L^2(\Omega)} + |\frac{D_1\Phi}{\Psi} . \Psi\, D_1 u|_{L^2(\Omega)} + |\Phi\, D_1^2 u|_{L^2(\Omega)})$$

Puisque $\frac{D_1\Phi}{\Psi}$ ne contient que des termes de la forme :

$$\prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} \varphi_k \cdot \frac{\varphi_i D_1\varphi_j + \varphi_j D_1\varphi_i}{(\varphi_i^2+\varphi_j^2)^{1/2}} \times \frac{(\varphi_i^2+\varphi_j^2)^{1/2}}{\Psi}$$

$\frac{|D_1\Phi|}{\Psi}$ est borné sur $\Omega$ donc :

$$|D_1^2(\Phi u)|_{L^2(\Omega)} \leq C(|u|_{L^2(\Omega)} + |\Psi D_1 u|_{L^2(\Omega)} + |\Phi D_1^2\, u|_{L^2(\Omega)}) \qquad (\gamma)$$

Les inégalités $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $(\delta)$ donnent alors :

$$|u|_D \leq C|u|_\Delta$$

2°) Nous montrons maintenant que $D \hookrightarrow \Delta$. On a immédiatement :

$$|\Psi\, D_1 u|_{L^2(\Omega)} \leq |D_1(\Psi u)|_{L^2(\Omega)} + |(D_1\Psi)\, u|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C(|\Psi u|_{H^1(\Omega)} + |u|_{L^2(\Omega)}) .$$

et de même :

$$|\Phi\, D_1^2 u|_{L^2(\Omega)} \leq |D_1^2(\Phi u)|_{L^2(\Omega)} + 2|D_1\Phi . D_1 u|_{L^2(\Omega)} + |(D_1^2\Phi)\, u|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C\, (|\Phi u|_{H^2(\Omega)} + |\Psi\, D_1 u|_{L^2(\Omega)} + |u|_{L^2(\Omega)})$$

Les deux dernières inégalités fournissent :

$$|u|_\Delta \leq C|u|_D \,.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal :

THEOREME 1.

*Si* f *est dans* $L^2(\Omega)$*, la solution* u *du problème :*

$$a(u,v) = (f,v)_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \text{ pour tout } v \in \mathcal{V} \qquad (2.3)$$

*est dans* D.

ou encore :

*L'opérateur* A *est un isomorphisme topologique de* D *sur* $L^2(\Omega)$

Démonstration.

1°) A est un opérateur linéaire continu de D dans $L^2(\Omega)$. En effet :

$$|D^\beta(a_{\alpha\beta}\ \Phi\ D^\alpha u)|_{L^2(\Omega)} \leq |(D^\beta\ a_{\alpha\beta}).\ \Phi\ D^\alpha u|_{L^2(\Omega)} +$$

$$|a_{\alpha\beta}(D^\beta\ \Phi)D^\alpha u|_{L^2(\Omega)} + |a_{\alpha\beta}\ \Phi\ D^{\alpha+\beta}\ \ |_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C|u|_D.$$

(Il suffit d'utiliser les propriétés qui ont permis de démontrer l'équivalence des définitions 2.2 et 2.2').

2°) Réciproquement nous allons demontrer que si $u \in \mathcal{V}$ et $A(X,D)\,u \in L^2(\Omega)$ alors u est dans $D(A)$.

Le théorème sera alors une conséquence du théorème de Banach. Nous faisons une étude locale en distinguant les points intérieurs, les points réguliers et les points singuliers du bord.

a) Régularité intérieure :

Soit $\Omega'$ un ouvert contenu ainsi que son adhérence dans $\Omega$. Puisque A est elliptique sur $\Omega'$, on a :

pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega')$, $\zeta\, u \in H^2(\Omega)$.

b) Régularité au bord - cas d'un point régulier.

Soit par exemple X un point régulier de la portion de $\partial\Omega$ défini par $\varphi_1(X) = 0$. Si O est un ouvert convenable voisinage du point X, on a, pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$ :

$$\begin{cases} \zeta\, u \in H^1(O \cap \overline{\Omega}) \\ \varphi_1\, \zeta\, u \in H^2(O \cap \overline{\Omega}). \end{cases}$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans [2].

c) Régularité au bord - cas d'un point singulier.

Soient $(i,j) \in I$ et X un point de $\partial\Omega$ défini par $\varphi_i(X) = \varphi_j(X) = 0$. Pour O ouvert convenable voisinage de X, on a, pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$ :

$$(\varphi_i^2 + \varphi_j^2)^{1/2}\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \overline{\Omega}) \;;\; |\alpha| = 1$$

$$\varphi_i \varphi_j\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \overline{\Omega}) \qquad ;\; |\alpha| = 2$$

Ce résultat sera démontré par la suite (voir les propositions 3.3 et 4.6)

Ecrivons de nouveau les résultats a - b - c en introduisant les fonctions $\Psi$ et $\Phi$.

a) $\zeta\, u \in L^2(\Omega')$

$|\alpha| = 1$ $\quad \Psi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(\Omega')$ $\quad$ car $C_1 \leq \Psi \leq C_2$ sur $\Omega'$

$|\alpha| = 2$ $\quad \Phi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(\Omega')$ $\quad$ car $C_1 \leq \Phi \leq C_2$ sur $\Omega'$

b) $\zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$

$|\alpha| = 1$ $\quad \Psi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$ $\quad$ car $C_1 \leq \Psi \leq C_2$ sur $O \cap \Omega$

$|\alpha| = 2$ $\quad \Phi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$ $\quad$ car $C_1 \leq \dfrac{\Phi}{\varphi_1} \leq C_2$ sur $O \cap \Omega$

c) $\zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$

$|\alpha| = 1$ $\quad \Psi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$ $\quad$ car $C_1 \leq \dfrac{\Psi}{(\varphi_i^2 + \varphi_j)^{1/2}} \leq C_2$ sur $O \cap \Omega$

$|\alpha| = 2$ $\quad \Phi\, D^\alpha \zeta\, u \in L^2(O \cap \Omega)$ $\quad$ car $C_1 \leq \dfrac{\Phi}{\varphi_i\, \varphi_j} \leq C_2$ sur $O \cap \Omega$

A l'aide d'une partition de l'unité convenable, on obtient donc :

$$u \in L^2(\Omega) \;;\; \Psi\, D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = 1 \;;$$
$$\Phi\, D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = 2$$

ce qui montre que $u \in D$ et termine la démonstration. ∎

## III - Régularité - Cas des variables tangentielles.

Supposons qu'un point singulier A de $\partial\Omega$ est tel que :

$$\varphi_1(A) = \varphi_2(A) = 0 \text{ (donc } \varphi_i(A) \neq 0,\ i \geq 3).$$

Si O est un ouvert convenable voisinage de A, on peut définir un difféomorphisme $\Theta$ de $O \cap \Omega$ sur $O' \cap \mathbb{R}^n_{++}$ par :

$$\begin{cases} x = \varphi_1(X) \\ y = \varphi_2(X) \\ x'_i = \Theta_i(X) \qquad i = 3,\ldots,n \end{cases}$$

et, si $u \in \mathcal{V}(\Omega)$, pour toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$ on a : $\zeta\ \ u \circ \Theta^{-1} \in V(\mathbb{R}^n_{++})$. Pour simplifier nous notons aussi $\zeta\, u$ la fonction $\zeta u \circ \Theta^{-1}$ ainsi que son prolongement par 0 dans $\mathbb{R}^n_{++}$ dans tous les cas où il n'y a pas ambiguité. On démontre maintenant la :

**Proposition 3.1.**

*Si* $f \in L^2(\Omega)$, *la solution du problème* (2.3) *vérifie :*

$$(x^2+y^2)^{1/4}\ T_{1/2}\zeta u \in V(\mathbb{R}^n_{++})$$

*Nous tirons immédiatement la conséquence*

$$(x^2+y^2)^{1/2}\ D\,\zeta\, u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$$

*avec* $D = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x'_i}$ , *dérivée tangentielle quelconque*

On utilise comme dans [1] une régularisation elliptique. On a l'inclusion algébrique et topologique :

$$H_0^1(\ ) \subset \mathcal{V}(\Omega)$$

et $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{V}(\Omega)$, donc $\mathcal{V}'(\Omega) \quad H^{-1}(\Omega)$. Soit $\varepsilon_j$ une suite de nombres positifs de limite 0 ; on définit la forme intégro différentielle régularisée $a_j$ par :

$$a_j(u,v) = a(u,v) + \varepsilon_j (u,v)_1$$

Les formes $a_j$ sont continues sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$-coercitives. Si $f \in L^2(\Omega)$, la solution $u_j$ du problème variationnel régularisé :

$$a_j(u,v) = (f,v)_0 \text{ pour tout } v \text{ dans } \ (\Omega)$$

appartient à $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ (voir [4])

et les deux expressions :

$$\sqrt{\varepsilon_j} \quad |u_j|_{H^1(\Omega)} \quad ; \quad |u_j|_{\mathcal{V}(\Omega)} \qquad (3.1)$$

restent bornées quand j varie.

Nous savons aussi que :

la solution u est limite faible dans $\mathcal{V}$ d'une sous-suite extraite de la suite $(u_j)$.

On se donne $\zeta$ et $\beta$ dans $\mathcal{D}(O \cap \overline{\Omega})$ et à valeurs réelles telles que $\beta\,\zeta = \zeta$ et on pose comme au I :

$$M = (x^2+y^2)^{1/4}\ \beta\ T_{1/2}\,\zeta.$$

$M\,u_j$ se lit dans l'ouvert $\Omega$ :

$$(\varphi_1^2+\varphi_2^2)^{1/4}\,\beta\,(T_{1/2}(\zeta\,u_j\circ\Theta^{-1}))\circ\Theta$$

ce qui donne un sens aux expressions :

$$A_j = a_j(M\,u_j, M\,u_j)$$
$$B_j = a_j(u_j, M^* M\,u_j)$$

Nous démontrons le :

<u>Lemme 3.1.</u>

$|M\,u_j|_V$ *reste borné quand* $j$ *varie.*

Puisque la forme a est $\mathcal{V}$-coercitive nous tirons :

$$|A_j| \geq \gamma |M\,u_j|_V^2 + \varepsilon_j\,|M\,u_j|_1^2$$

Nous obtenons une majoration de $|B_j|$ en écrivant que $u_j$ est solution du problème régularisé :

$$|B_j| \leq |f|_0\,|M^* M\,u_j|_0$$

et d'autre part ,

$$|M^* M\,u_j|_0 \leq C|(x^2+y^2)^{1/4}\,M\,u_j|_{L^2(\mathbb{R}^n_{++}, H^{1/2}(R^{n-2}))}$$
$$\leq C|M\,u_j|_{V(\mathbb{R}^n_{++})}$$

L'utilisation des lemmes 1.1 et 1.2 fournit une majoration de $|A_j-B_j|$ :

$$|A_j-B_j| \leq C(\varepsilon_j|u_j|_1\,|M\,u_j|_1 + |u_j|_V\,|M\,u_j|_V)$$

et par (3.1) :

$$|A_j - B_j| \leq C(\sqrt{\varepsilon}_j\, |M\, u_j|_1 + |M\, u_j|_V)$$

En rassemblant les trois inégalités précédentes, l'inégalité :

$$|A_j| \leq |B_j| + |A_j - B_j|$$

fournit :

$$\varepsilon_j |M\, u_j|_1^2 + \gamma |M\, u_j|_V^2 \leq C(\sqrt{\varepsilon}_j\, |M\, u_j|_1 + |M\, u_j|_V)$$

qui montre que les deux expressions :

$$\sqrt{\varepsilon}_j |M\, u_j|_1 \text{ et } |M\, u_j|_V$$

restent bornées quand j varie.

Terminons maintenant la démonstration de la proposition 3.1. Puisque la boule unité de V est faiblement compacte, on peut extraire de la suite $u_j$ une suite telle que ;

$M\, u_j$ converge faiblement vers v quand j tend vers l'infini. Mais, d'autre part, $u_j$ converge faiblement vers u dans V, donc $M\, u_j$ converge faiblement vers $M\, u$ dans $L^2$. On en déduit alors que :

$$M\, u = v \in V.$$

D'après le choix de $\beta$ on a ensuite :

$$(x^2+y^2)^{1/4}\, T_{1/2} \zeta\, u = (x^2+y^2)^{1/4}\, \beta\, T_{1/2} \zeta\, u + (x^2+y^2)^{1/4}\, [\beta, T_{1/2}] \zeta\, u.$$

Il suffit donc de vérifier que le dernier terme est aussi dans V, soit encore que :

$$(x^2+y^2)^{1/4} \; T_{-1/2} \; \zeta \; u \in V$$

puisque $[\beta, T_{1/2}]$ est tangentiel d'ordre $-\frac{1}{2}$.

La dernière propriété tient au fait que, pour les variables tangentielles :

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(x^2+y^2)^{1/4} \; (1+|\xi|^2)^{1/2} \; |\widehat{\zeta u}|^2 \; dxdy \; d\xi$$

$$\leq \; C \int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(1+|\xi|^2) \; |\widehat{\zeta u}|^2 \; dx \; dy \; d\xi \leq C \; |\zeta u|_V$$

et pour les variables normales :

$$\int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(1+|\xi|^2)^{-1/2} \; |D_x (x^2+y^2)^{+1/4} \; \widehat{\zeta u}| \; ^2 \; dxdy \; d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy \; \frac{x^2}{4(x^2+y^2)^{-3/2}} \; (1+|\xi|^2)^{-1/2} |\widehat{\zeta u}|^2 \; dx \; dy \; d\xi$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(x^2+y^2)^{1/4} \; (1+|\xi|^2)^{-1/2} \; |D_x \; \widehat{\zeta u}|^2 \; dxdy \; d\xi$$

$$\leq \; C \; |\zeta u|_V$$

Notons que les constantes intervenant ici ne dépendent pas de u mais dépendent du support de $\zeta$. ▨

Nous utilisons maintenant une méthode de différences finies pour gagner un "cran" de régularité (voir par exemple [9] pour la même méthode appliquée à un problème elliptique).

Proposition 3.2.

*Si* $f \in L^2(\Omega)$, *la solution du problème (2.3) vérifie :*

$\sqrt{xy}\quad D\,\zeta\, u \in V(\mathbb{R}^n_{++})$ *avec* $D$ *dérivée tangentielle.*

Remarquons tout d'abord que $u$ dans $\mathcal{V}(\Omega)$ et $A\,u$ dans $L^2(\Omega)$ entraînent $A(\zeta u) \in L^2(\Omega)$ ; en effet :

$$A(\zeta\, u) = \zeta A u + [A,\zeta]u \text{ et :}$$

$$[A,\zeta]u = \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\ |\beta|\leq 1}} (D^\beta a_{\alpha\beta} \Phi D^\alpha\, \zeta u - \zeta\, D^\beta a_{\alpha\beta} \Phi D^\alpha u)$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\ |\beta|\leq 1}} (D^\beta a_{\alpha\beta} \Phi (D^\alpha \zeta) u + (D^\beta \zeta) a_{\alpha\beta} \Phi D^\alpha u)$$

appartient à $L^2(\Omega)$ puisque $u$ est dans $\mathcal{V}(\Omega)$.

Dans la suite, nous posons, pour simplifier les notations :

$$\zeta u = v$$

$$g = \zeta\, Au + [A,\zeta]u$$

Nous avons donc :

$$Av = g \text{ avec } v \in \mathcal{V}(\Omega)$$

$$g \in L^2(\Omega) \;;\; \operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp} \zeta$$

Soit $\tau_h$ un opérateur de translation tangentiel, c'est-à-dire suivant l'une des variables $x'_3,\dots,x'_n$ de $R^n_{++}$ :

- si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})$ on a :

$$(\tau_h \varphi)(X) = \varphi(x,y,x'_3,\dots,x'_i+h,\dots,x'_n)$$

- si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_{++})$ on définit $\tau_h$ T par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++}) \ , \ <\tau_h T,\varphi>_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = <T,\tau_{-h}\varphi>_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}$$

Nous choisissons $h_o$ tel que, pour $|h| < h_o$, les fonctions intervenant dans la suite garde leur support dans $O' \cap \overline{\mathbb{R}^n_{++}}$ et nous montrons le :

<u>Lemme 3.2.</u>

*Pour* $h \neq 0$, $|h| < h_o$, $\sqrt{xy}\,\dfrac{\tau_h v - v}{h}$ *est dans* $V(\mathbb{R}^n_{++})$

Puisque $v = \widetilde{\zeta\, u \circ \Theta^{-1}}$ est à support compact dans $\mathbb{R}^n_{++}$, on a :

$\sqrt{xy}\ (\sqrt{xy}\ v) \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$

$\sqrt{xy}\ D(\sqrt{xy}\ v) = xy\ D\ v \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ pour D dérivée tangentielle

$\sqrt{xy}\ D_x(\sqrt{xy}\ v) = xy\ D_x\ v + \frac{y}{2}\ v \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$

et d'après le choix de $h_o$ on a les mêmes propriétés pour $\tau_h$ v, d'où le lemme.■

Dans $\overline{\Omega} \cap O$, $\tau_h$ v désigne le prolongement par zéro hors de $\overline{\Omega} \cap O$ de $(\tau_h\ \widetilde{v \circ \Theta^{-1}}) \circ \Theta$, on a alors :

$\sqrt{xy}\ \dfrac{\tau_h v - v}{h}$ est dans $\mathcal{V}(\Omega)$, et puisque A est un isomorphisme de $(\Omega)$ sur $\mathcal{V}'(\Omega)$ :

$$\left|\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v - v}{h}\right|_{\mathcal{V}(\Omega)} \leq C\ \left|A(\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v - v}{h})\right|_{\mathcal{V}'(\Omega)}$$

ce qui donne dans $\overline{\mathbb{R}^n_{++}} \cap O'$ :

$$\left|\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v-v}{h}\right|_{V(\mathbb{R}^n_{++})} \leq C\ \left|A'(\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v-v}{h}\right|_{V'(\mathbb{R}^n_{++})}$$

avec :

$$A' = \sum_{\substack{|i|\leq 1\\ |j|\leq 1}} D^j\ a'_{ij}(x,y,x')\ xy\ D^i$$

(pour définir les coefficients $a'_{ij}$ on remplace $a_{\alpha\beta}$ par $\chi\ a_{\alpha\beta}$ avec supp $\chi \subset O$ et $\chi\ \zeta = \zeta$).

Supposons démontré pour l'instant que :

$$\left|A'(\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v-v}{h}\right|_{V'(\mathbb{R}^n_{++})} \text{ reste borné pour } h \neq 0,\ |h| \leq h_o.$$

Puisque $V(\mathbb{R}^n_{++})$ est un espace de Hilbert, la boule unité de $V(\mathbb{R}^n_{++})$ est faiblement compacte et il existe donc une suite $h_n$ de limite zéro, $|h_n| \leq h_o$, telle que :

$$xy\ \frac{\tau_{h_n} v-v}{h_n} \text{ converge faiblement vers } w \in V(\mathbb{R}^n_{++}).$$

Mais, d'autre part, $\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v-v}{h}$ tend vers $\sqrt{xy}$ D v dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_{++})$ quand h tend vers zéro. On déduit donc :

$$\sqrt{xy}\ D(\zeta\ u) \in V(\mathbb{R}^n_{++}) \text{ donc la proposition 3.2.}$$

Il reste à démontrer que :

$$\left|A'(\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v-v}{h}\right|_{V'(\mathbb{R}^n_{++})} \text{ reste borné pour } h \neq 0,\ |h| < h_o.$$

Nous introduisons :

$$\tau_h\ A' = \sum_{\substack{|i|\leq 1\\ |j|\leq 1}} D^j(\tau_h a'_{ij})\ xy\ D^i$$

et on a :

$$A'(\sqrt{xy}\ \frac{\tau_h v-v}{h}) = h^{-1}(A'-\tau_h A')(\sqrt{xy}\ \tau_h v) +$$

$$+ h^{-1}\sqrt{xy}\ (\tau_h A'\ \tau_h v - A'\ v) + h^{-1}[\tau_h A',\sqrt{xy}]\ (\tau_h\ v-v)$$

$$+ h^{-1}\ [\tau_h\ A'-A',\sqrt{xy}]\ v$$

Nous majorons séparément chacun des termes de cette expression dans les quatre lemmes qui suivent.

Lemme 3.3.

$$\left| \frac{A'-\tau_h A'}{h} \sqrt{xy}\ \tau_h v \right|_{V'(\mathbb{R}^n_{++})} \text{ reste borné pour } h \neq 0,\ |h| < h_o.$$

Puisque $\sqrt{xy}\ \tau_h v$ est dans $V(\mathbb{R}^n_{++})$, on a bien :

$$h^{-1}(A'-\tau_h A')\ \sqrt{xy}\ \tau_h v \in V'(\mathbb{R}^n_{++}).$$

On majore la norme de $V'(\mathbb{R}^n_{++})$ par une somme de termes de la forme :

$$|D^j\ xy\ \frac{\tau_h\ a'_{ij}-a'_{ij}}{h}\ \ D^i(\sqrt{xy}\ \tau_h v)|_{V'(\mathbb{R}^n_{++})}$$

$$= \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++}) \\ |\varphi|_V\le 1}} \left|\langle D^j\ xy\ \frac{\tau_h a'_{ij}-a'_{ij}}{h}\ D^i\sqrt{xy}\ \tau_h v\ ,\varphi\rangle_{V'\times V}\right|$$

$$= \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++}) \\ |\varphi|_V\le 1}} \left|\langle\sqrt{xy}\ D^i\ \sqrt{xy}\ \tau_h v,\ \sqrt{xy}\ \frac{\tau_h a'_{ij}-a'_{ij}}{h}\ D^j\varphi\rangle_{L^2}\right|$$

$$\le\ \ C\ |\sqrt{xy}\ \tau_h\ v|_V \le C\ |v|_V\ . \blacksquare$$

Lemme 3.4.

$$\left| \sqrt{xy} \; \frac{\tau_h A' \tau_h v - A'v}{h} \right|_{V'} = \left| \sqrt{xy} \, \frac{\tau_h g - g}{h} \right|_{V'} \textit{ reste borné pour}$$

$h \neq 0$, $|h| < h_o$.

En effet :

$$\left| \sqrt{xy} \; \frac{\tau_h g - g}{h} \right|_{V'} = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++}) \\ |\varphi|_V \leq 1}} \left| < \sqrt{xy} \; \frac{\tau_h g - g}{h}, \varphi >_{V' \times V} \right|$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++}) \\ |\varphi|_V \leq 1}} \left| < g, \sqrt{xy} \, \frac{\tau_{-h}\varphi - \varphi}{h} >_{L^2} \right|$$

$$\leq |g|_{L^2} \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++}) \\ |\varphi|_V \leq 1}} \left| \sqrt{xy} \; \frac{\tau_{-h}\varphi - \varphi}{h} \right|_{L^2} \leq C |g|_{L^2} \; . \; ▨$$

Lemme 3.5.

$|h^{-1}[\tau_h A', \sqrt{xy}](\tau_h v - v)|_{V'}$ *reste borné pour* $h \neq 0$, $|h| < h_o$.

Exprimons $[A', \sqrt{xy}]$ en posant $A' = \Sigma \; D^j \, a'_{ij} \, xy \, D^i = A^{ij}$. Si $D^i$ et $D^j$ sont distincts de $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}$ alors :

$$[A^{ij}, \sqrt{xy}] = 0$$

Etudions le cas où $D^i$ et $D^j$ sont deux dérivées normales, prenons par exemple $D^i = D^j = D_x$ :

$$[A^{ij}, \sqrt{xy}] = + D_x \, a'_{ij} \, xy \, \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \, a'_{ij} \, xy \, D_x$$

et nous majorons séparément les deux termes :

$$1°)\ \left|h^{-1}\, D_x(\tau_h a'_{ij})\ xy\ \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\ (\tau_h v-v)\right|_{V'} =$$

$$\sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})\\ |\varphi|_V\le 1}} \left|\left\langle D_x(\tau_h a'_{ij})\ \sqrt{xy}\ \frac{\sqrt{y}}{2}\ \frac{\tau_h v-v}{h}, \varphi\right\rangle_{V'\times V}\right| \le$$

$$C \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})\\ |\varphi|_V\le 1}} \left|\left\langle y\,\frac{\tau_h v-v}{h}, \sqrt{xy}\ D_x\varphi\right\rangle_{L^2}\right| \le$$

$$C\left|y\,\frac{\tau_h v-v}{h}\right|_{L^2} \le C\left|(x^2+y^2)^{1/2}\ D\ v\right|_{L^2}$$

La dernière expression est bornée d'après la proposition 3.1.

$$2°)\ \left|\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\ (\tau_h a'_{ij})\ xy\ D_x\,\frac{\tau_h v-v}{h}\right|_{V'}$$

$$= \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++})\\ |\varphi|_V\le 1}} \left|\left\langle \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\ (\tau_h a'_{ij})\ xy\ D_x\,\frac{\tau_h v-v}{h}\ ,\ \ \right\rangle_{V'\times V}\right.$$

$$\le\ C\ \sup\ \left|\left\langle\sqrt{xy}\ \sqrt{y}\ D_x\,\frac{\tau_h v-v}{h}\ ,\ \sqrt{y}\ \tau_h\ a'_{ij}\varphi\right\rangle_{L^2}\right|$$

$$= C\ \sup\left|\left\langle\sqrt{xy}\ \sqrt{y}\ T_{-1/2}\ D_x\,\frac{\tau_h v-v}{h}\ ,\ \sqrt{y}\ T_{1/2}\tau_h\ a'_{ij}\varphi\right\rangle_{L^2}\right|$$

$$\le C\ \sup\ \left|\sqrt{xy}(x^2+y^2)^{1/4}\ T_{-1/2}\ D_x\,\frac{h^{v}-v}{h}\right|_0\ \left|(x^2+y^2)^{1/4}\ T_{1/2}(\tau_h a'_{ij})\varphi\right|_0$$

Par la proposition 1.3 :

$$|(x^2+y^2)T_{1/2}(\ _h\ a'_{ij})\varphi|_o \leq C|(\tau_h a_{ij})|\ _V \leq C|\varphi|_V \qquad \text{donc :}$$

$$\left|\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\ (\tau_h\ a'_{ij})\ xy\ D_x\ \frac{\tau_h v-v}{h}\right|\ V'$$

$$C\ \left|\sqrt{xy}\ (x^2+y^2)^{1/4}\ T_{-1/2}\ D_x\ \frac{\tau_h v-v}{h}\ \right|_o$$

Reste à montrer que cette dernière quantité est bornée indépendamment de h :

$$\left|\sqrt{xy}(x^2+y^2)^{1/4}\ T_{-1/2}\ D_x\ \frac{\tau_h v-v}{h}\ \right|_o \leq$$

$$\underbrace{\left|\sqrt{xy}\ T_{-1/2}\ D_x(x^2+y^2)^{1/4}\ \frac{\tau_h v-v}{h}\ \right|_o}_{L} + \underbrace{\left|\sqrt{xy}\ \frac{x}{2(x^2+y^2)^{3/4}}\ T_{-1/2}\ \frac{\tau_h v-v}{h}\right|_o}_{M}$$

Majorons L :

$$L^2 = \int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(1+|\xi|^2)^{-1/2}\ \frac{|e^{ih\xi_{i}}-1|^2}{h}\ |D_x(x^2+y^2)^{1/4}\ \hat{v}|^2\ dxdy\ d\xi$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n_{++}} xy(1+|\xi|^2)^{1/2}\ |D_x(x^2+y^2)^{1/4}\ \hat{v}|^2\ dxdy\ d\xi$$

$$= C\ |\sqrt{xy}\ D_x(x^2+y^2)^{1/4}\ T_{1/2}v|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_{++})} \qquad \text{donc :}$$

$$L \leq C|(x^2+y^2)^{1/4}\ T_{1/2}v|_V$$

quantité bornée d'après la proposition 3.1.

Pour M on a immédiatement :

$$M \leq C|(x^2+y^2)^{1/4} \; T_{1/2} v|_o \qquad \text{donc}$$

$M \leq C|v|_V$ par la proposition 1.3.

Les autres termes intervenant dans

$$h^{-1}[\tau_h A', \sqrt{xy}] \; (\tau_h v - v)$$

contiennent une dérivée normale, ou une dérivée normale et une dérivée tangentielle, et se majorent de façon plus simple. Le lemme 3.5 apparaît donc comme une conséquence de la proposition 3.1. ▨

Lemme 3.6.

$$|h^{-1}[\tau_h A' - A' \; \sqrt{xy}] v|_{V'}, \textit{ reste borné pour } h \neq 0, \; |h| < h_o.$$

Etudions un terme dans lequel interviennent deux dérivées normales, par exemple :

$$h^{-1} \; [D_x\{(\tau_h \; a'_{ij} - a'_{ij}) \; xy \; D_x\} \; , \; \sqrt{xy}] \, v =$$

$$D_x \; \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} \; xy \; \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \; v + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \; \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} \; xy \; D_x \; v$$

Nous majorons séparément les deux termes de droite :

$$1°) \; |D_x \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} \sqrt{xy} \; \frac{y}{2} \; v|_{V'} \; \leq$$

$$C \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++}) \\ |\varphi|_V \leq 1}} |< \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} \; y \; v \; , \; \sqrt{xy} \; D_x \varphi >_{L^2}|$$

$$\leq C|v|_{L^2}$$

$$2°)\ \left|\frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} \sqrt{xy}\ \frac{\sqrt{y}}{2} D_x v\right|_{V'} \leq$$

$$\leq C \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_{++}) \\ |\varphi|_V \leq 1}} \left|< y \frac{\tau_h a'_{ij} - a'_{ij}}{h} \sqrt{xy}\ D_x v, \varphi >_{L^2}\right|$$

$$\leq C|\sqrt{xy}\ D_x v|_{L^2} \leq C|v|_V$$

les autres termes se majorant de façon analogue. ▨

Tirons les conséquences des propositions 3.1 et 3.2 :

<u>Proposition 3.3.</u>

*Si* $f \in L^2(\Omega)$, *la solution* $u$ *du problème* (2.3) *vérifie :*

*1°)* $(x^2+y^2)^{1/2} D \zeta u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *où* $D$ *est une dérivée tangentielle quelconque.*

*2°)* $xy\ D^\alpha \zeta u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *avec* $|\alpha| = 2$ *et* $D^\alpha$ *contient au plus une dérivée normale.*

Le 1° est conséquence de la proposition 3.1.

Pour le 2°, si $D_1$ et $D_2$ sont deux dérivées tangentielles :

$$xy\ D_1 D_2 \zeta u = \sqrt{xy}\ D_1(\sqrt{xy}\ D_2 \zeta u) \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$$

Si $D$ est une dérivée tangentielle :

$$xy\ D_x D(\zeta u) = \sqrt{xy}\ D_x(\sqrt{xy}\ D \zeta u) - \frac{y}{2} D \zeta u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$$

d'après les propositions 3.1 et 3.2.

En conclusion, par $\zeta u \circ \Theta^{-1} \in V(\mathbb{R}^n_{++})$ et la proposition 3.3, on obtient :

$$\sum_{\substack{|i|=1 \\ |j|=1}} D^j a'_{ij}(x,y,x')\, xy\, D^i \zeta\, u \circ \Theta^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$$

où $D^j$ et $D^i$ désignent seulement les dérivées normales. On est donc ramené à une équation aux dérivées partielles d'ordre 2, en deux variables $(x,y)$. Nous étudions dans IV un problème dégénéré dans $\mathbb{R}^2_{++}$ qui nous permettra d'obtenir la régularité pour les variables normales.

## IV - Régularité - Cas des variables normales.

Nous commençons par étudier un problème élliptique dégénéré dans l'ouvert non borné $\mathbb{R}^2_{++}$ :

$$\mathbb{R}^2_{++} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \;;\; y > 0\}.$$

On notera aussi :

$$\mathcal{B} = \{(s,\Theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \Theta \;\; \frac{\Pi}{2}\}$$

$$D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} \;;\; D_y = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\delta_s = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial s} \;;\; \delta_\Theta = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \Theta}$$

Le schéma de l'étude est le même qu'au II ; on ramènera le problème dans $\mathbb{R}^2_{++}$ à un problème dans $\mathcal{B}$ par un changement de variables du type :

$$x = e^{-s}\cos\Theta;\; y = e^{-s}\sin\Theta.$$

Introduisons les espaces :

<u>Définition 4.1.</u>

$$V_1(R^2_{++}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) \mid \sqrt{xy}\, D_x\, u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) \;;\; \sqrt{xy}\, D_y\, u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++})\}$$

$$W(\mathcal{B}) = \{v \in L^2(\mathcal{B}) \mid \sqrt{\sin\Theta\,\cos\Theta}\;\; \delta_s\, v \in L^2(\mathcal{B}) \;;\; \sqrt{\sin\Theta\,\cos\Theta}\;\; \delta_\Theta\, v \quad L^2(\mathcal{B})\}$$

et on a immédiatement :

les espaces $V_1$ et $W$ sont des espaces de Hilbert pour les normes respectives :

$$|u|_{V_1} = (|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + |\sqrt{xy}\, D_x u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + |\sqrt{xy}\, D_y\, u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})})^{1/2}$$

$$|v|_W = (|v|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |\sqrt{\sin\Theta\,\cos\Theta}\; \delta_s\, v|_{L^2(\mathcal{B})} + |\sqrt{\sin\Theta\,\cos\Theta}\; \delta_\Theta\, v|^2_{L^2(\mathcal{B})})^{1/2}$$

Par une démonstration analogue à celle de la proposition 1.1, on obtient :

<u>Proposition 4.1.</u>

$\mathcal{D}(R^2_{++})$ *est dense dans* $V_1$.

$\mathcal{D}(\mathcal{B})$ *est dense dans* $W$.

Les espaces $V_1$ et $W$ sont liés par :

<u>Proposition 4.2.</u>

*Si on pose :*
$$\begin{cases} x = e^{-s}\cos\Theta \;\;;\;\; y = e^{-s}\sin\Theta \\ u(x,y) = e^{s}\, v(s,\Theta) \end{cases}$$

*alors* $u$ *est dans* $V_1$ *si et seulement si* $v$ *est dans* $W$.

Ce résultat s'obtient par des calculs élémentaires dont nous donnons les grandes lignes. Des formules :

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -e^{-s}\cos\Theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \Theta} = -e^{-s}\sin\Theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = -e^{-s}\sin\Theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \Theta} = e^{s}\cos\Theta$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -e^{s}\cos\Theta \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = -e^{s}\sin\Theta$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -e^{s}\sin\Theta \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = e^{s}\cos\Theta$$

on tire immédiatement :

$$|D_x u|^2 + |D_y u|^2 = e^{4s}(|v + \delta_s v|^2 + |\delta_\Theta v|^2)$$

$$|\delta_s v|^2 + |\delta_\Theta v|^2 = e^{-2s}|u|^2 + e^{-4s}(|D_x u|^2 + |D_y u|^2) +$$

$$+ 2e^{-3s}\,\mathrm{Re}(u\,D_x u\cos\Theta + u\,D_y u\sin\Theta).$$

Remarquons que, si $f \in L'(\mathbb{R}^2_{++})$ alors $e^{-2s} f \in L'(\mathcal{B})$ et

$$\int_{\mathbb{R}^2_{++}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathcal{B}} e^{-2s} f(s,\Theta)\,ds\,d\Theta .$$

Ceci montre que :

$$\int_{\mathbb{R}^2_{++}} u^2\,dx\,dy = \int_{\mathcal{B}} |v|^2\,ds\,d\Theta$$

donc $u \in L^2(R^2_{++})$ si et seulement si $v \in L^2(\mathcal{B})$.

Nous avons ensuite :

$$\int_{\mathbb{R}^2_{++}} xy(|D_x u|^2 + |D_y u|^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \sin\Theta \cos\Theta\, (|v|^2 + |\delta_s v|^2 + |\delta_\Theta v|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, v\, \delta_s v)\, ds\, d\Theta$$

$$\leq C|v|^2_W$$

et

$$\int_{\mathcal{B}} \sin\Theta \cos\Theta (|\delta_s v|^2 + |\delta_\Theta v|^2)\, ds d\Theta =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2_{++}} \sin\Theta \cos\Theta\, |u|^2\, dx\, dy + \int_{\mathbb{R}^2_{++}} xy(|D_x u|^2 + |D_y u|^2) dx\, dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^2_{++}} 2\,\mathrm{Re}\, e^{-s} \sin\Theta \cos\Theta\, u\, ((D_x u) \cos\Theta + (D_y u) \sin\Theta)\, dx\, dy$$

$$\leq C|u|^2_{V_1} .$$

Introduisons maintenant le :

Problème variationnel.

Pour $u_1$ et $u_2$ dans $V_1$ on considère la forme intégro-différentielle :

$$a(u_1,u_2) = \int_{\mathbb{R}^2_{++}} \sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}(x,y) xy\, D^i u_1\, \overline{D^j u_2}\, dx\, dy + \int_{\mathbb{R}^2_{++}} a_0\, u_1\, \overline{u_2}\, dxdy$$

avec $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^2_{++}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_{++}})$ , ce qui assure la continuité de a sur $V_1 \times V_1$.

On suppose que a est $V_1$-coercitive, c'est-à-dire :

$\exists\ \alpha > 0$ tel que, $\forall\ u \in V_1$ on ait $\mathrm{Re}\ a(u,u) \geq \alpha |u|^2_{V_1}$

et on désigne par A l'opérateur différentiel associé à a :

$$A = \sum_{|i|=|j|=1} D^j\ a_{ij}(x,y) \times y\ D^i + a_o\ I \qquad (4.1)$$

Le lemme de Lax Milgramm fournit la :

Proposition 4.3.

*Pour tout* f *dans* $V_1'$, *il existe* u *unique dans* $V_1$ *tel que :*

$a(u,v) = (f,v)_{V_1' \times V_1}$ *pour tout* v *dans* $V_1$. (4.2)

Nous nous intéressons à la régularité sur la solution u quand f est dans $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$. On suppose que :

$$\begin{cases} a_o \text{ est une constante positive} \\ a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_{++}}) \text{ vérifie } a_{ij}(x,y) = a_{ij}(o,o) \text{ pour } x^2+y^2 \geq R^2\ ; \end{cases}$$

En d'autres termes, les coefficients de A sont "variables au voisinage de (0,0)". Nous transformons le problème dans $\mathbb{R}^2_{++}$ en un nouveau problème dans $\mathcal{B}$, ce dernier sera voisin de celui étudié dans [2]. L'intérêt de la transformation est de permettre l'utilisation de transformations de Fourier suivant la variable tangentielle s.

Proposition 4.4.

*La transformation utilisée à la proposition 4.2 transforme*

$a(u_1,u_2) = (f,u_2)_{L^2}$ ; $u_i \in V_1$ ; $f \in L^2(R^2_{++})$ *en* :

$b(v_1,v_2) = (g,v_2)_{L^2(\mathcal{B})}$ ; $v_i = e^{-s}\, u_i \in W$ ;

$g = e^{-s}\, f \in L^2(\mathcal{B})$ *avec* :

$$b(v_1,v_2) = \int_{\mathcal{B}} \sum_{\substack{|i|\leq 1\\|j|\leq 1}} b_{ij}(s,\Theta)\, \sin\Theta \cos\Theta \;\; \delta^i v_1 \,\overline{\delta^j v_2}\, ds d\Theta$$

$$+ \int_{\mathcal{B}} a_o\, v_1\, \overline{v_2}\, ds\, d\Theta.$$

En effet :

$$a(u_1,u_2) = \int_{\mathbb{R}^2_{++}} \sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}(x,y)xy\, D^i u_1\, \overline{D^j u_2}\;\; dx\, dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^2_{++}} a_o\, u_1\, \overline{u_2}\, dx\;\; dy$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \sum_{\substack{|i|\leq 1\\|j|\leq 1}} b_{ij}(s,\Theta)\, \sin\,\Theta\, \cos\,\Theta\; \delta^i\; v_1\; \overline{\delta^j\, v_2}\, ds\; d\Theta$$

$$+ a_o \int_{\mathcal{B}} v_1\, \overline{v_2}\, dx\;\, d\Theta$$

et

$$(f,u_2)_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} = \int_{\mathbb{R}^2_{++}} f\, \overline{u_2}\, dx\; dy = \int_{\mathcal{B}} e^{-s}\, f\, \overline{v_2}\, ds\; d\Theta$$

$$= (g,v_2)_{L^2(\mathcal{B})}\;. \;\blacksquare$$

Précisons les propriétés de b :

Propriétés 4.

1°) Pour chaque couple d'indices (i,j) il existe une fonction $\beta_{ij}(\Theta) \in C^{\infty}(0,\frac{\Pi}{2})$ telle que :

$$b_{ij} - \beta_{ij} \in C^{\infty}(0,\frac{\Pi}{2} ; \mathcal{S}(R_s))$$

2°) La forme b est W-coercitive.

1°) Puisque a ne contient que des termes d'ordre 0 ou des termes d'ordre 2, $b_{ij}(s,\Theta)$ se présente comme une combinaison linéaire des $a_{ij}(s,\Theta)$ à coefficients des polynômes en sin Θ, cos Θ donc :

$$b_{ij}(s,\Theta) \longrightarrow \beta_{ij}(\Theta) \text{ quand } s \longrightarrow \pm\infty \text{ puisque}$$

$$a_{ij}(x,y) = a_{ij}(o,o) \text{ pour } x^2+y^2 \geq R^2.$$

Il est évident que $\beta_{ij} \in C^{\infty}(0,\frac{\Pi}{2})$ ; reste à vérifier que

$$b_{ij} - \beta_{ij} \in C^{\infty}(0,\frac{\Pi}{2} ; \mathcal{S}(R_s)).$$

Pour $s \leq -\operatorname{Log} R$, $b_{ij}(s,\Theta) - \beta_{ij}(\Theta) = 0$

Pour s tendant vers $+\infty$, pour tout couple m, n

$$s^m \delta_s^n (b_{ij}(s,\Theta) - \beta_{ij}(\Theta)) \text{ tend vers zéro.}$$

En effet pour n = 0

$$s^m(a_{ij}(e^{-s}\cos\Theta,\ e^{-s}\sin\Theta) - a_{ij}(o,o)) \quad \text{se comporte}$$

comme $(-\text{Log } r)^m \times r$ avec $r$ tendant vers 0 et pour $n = 1$

$$s^m \quad \delta_s(a_{ij}(e^{-s} \cos \Theta, e^{-s} \sin \Theta) - a_{ij}(o,o) =$$

$$= -s^m e^{-s}(D_x a_{ij} \cos \Theta + D_y a_{ij} \sin \Theta) \text{ tend vers zéro}$$

quand s tend vers $+\infty$. Il en est de même pour $n \geq 1$.

2°) A la proposition 4.2, on a montré que :

$$|v|_W \leq C|u|_{V_1} .$$

Pour tout v dans W on a donc :

$$\text{Re } b(v,v) = \text{Re } a(u,u) \geq \alpha|u|^2_{V_1} \geq \frac{\alpha}{C} |v|^2_W .$$

Pour le problème dans $\mathcal{B}$ nous avons alors :

<u>Proposition 4.5.</u>

*Pour tout* g *dans* W' *il existe un élément unique* v *dans* W *tel que :*

$$b(v,w) = (g,w)_{W' \times W} \textit{ pour tout } g \in W' \qquad (4.3)$$

*Si de plus* g *est dans* $L^2(\mathcal{B})$ *alors :*

$$v \in H^1(\mathcal{B}) \text{ et } \sin \Theta \cos \Theta \, v \in H^2(\mathcal{B})$$

Comme au III nous utilisons une régularisation elliptique. La démonstration, à quelques détails près, est la même que dans [2]. Nous avons les inclusions d'espaces :

$$H^1_0(\mathcal{B}) \hookrightarrow W(\mathcal{B}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{B})$$

avec densité

Soit $\varepsilon_j$ une suite de nombres positifs de limite zéro, on pose :

$$b_j(v,w) = b(v,w) + \varepsilon_j(v,w)_1$$

alors $b_j(v,w)$ est continue sur $H_0^1(\mathcal{B}) \times H_0^1(\mathcal{B})$ et $H_0^1(\mathcal{B})$ coercitive. Soit ensuite $g_j$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ de limite g dans $L^2(\mathcal{B})$, alors la solution $v_j$ du problème variationnel :

$$b_j(v,w) = (g_j,w) \text{ pour tout } w \text{ dans } \mathcal{D}(\mathcal{B})$$

appartient à $\bigcap_{k\geq 0} H^k(\mathcal{B}) \cap H_0^1(\mathcal{B})$ et de plus :

$$\sqrt{\varepsilon_j}\ \ |v_j|_1 \text{ et } |v_j|_W \text{ estent bornée quand j varie.}$$

On sait aussi que la solution v du problème (4.3) est limite faible dans W d'une sous-suite extraite de $v_j$.

Donnons le schéma de la démonstration de la régularité :

1°) Pour $v(s,\Theta)$ distribution dans $\mathcal{B}$, tempérée en s, on note $\hat{v}(\xi,\Theta)$ la transformée de Fourier partielle en s, et on introduit l'opérateur $T_r$ $(r \in \mathbb{R})$ par :

$$\widehat{T_r v}(\xi,\Theta) = (1+|\xi|^2)^{r/2}\ \hat{v}(\xi,\Theta)$$

Alors si $b(s,\Theta)$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{R} \times [0,\frac{\Pi}{2}])$ telle qu'il existe $\beta(\Theta) \in C^\infty[0,\frac{\Pi}{2}]$ qui assure :

$$s \longrightarrow b(s,\Theta) - \beta(\Theta) \text{ est une fonction de } \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

on a :

l'application $v \longrightarrow [b, T_{1/2}]v$ est continue de :

$$L^2(0,\frac{\pi}{2} ; H^s(\mathbb{R})) \text{ dans } L^2(0,\frac{\pi}{2} ; H^{s-1/2+1}(\mathbb{R})) \qquad \text{(voir [7])}$$

Ces remarques conduisent au premier résultat :

$$T_{1/2}\, v \in W$$

puis, comme $W \hookrightarrow L^2(0,\frac{\pi}{2} ; H^{1/2}(\mathbb{R}_s))$ (voir [2] et le rappel donné au I)

$$\delta_s\, v \in L^2(\mathcal{B})$$

2°) on démontre que : $\sqrt{\sin\Theta\cos\Theta}\;\; \delta_s\, v \in W$ qui fournit

$$\sin\Theta\cos\Theta\;\; \delta_s^2\, v \in L^2(\mathcal{B})$$

$$\sin\Theta\cos\Theta\;\; \delta_\Theta\, \delta_s\, v \in L^2(\mathcal{B})$$

3°) En reportant ces résultats dans l'équation $B\, v = g$ ($B$ opérateur associé à $b$) et en tenant compte de $v \in W$ on obtient

$$\delta_\Theta(\sin\Theta\cos\Theta\; \delta_\Theta\, v) \in L^2(\mathcal{B})$$

L'application du théorème de Hardy donne alors :

$$\delta_\Theta\;\; v \in L^2(\mathcal{B}) \text{ puis}$$

$$\sin\Theta\cos\Theta\; \delta_\Theta^2\, v \in L^2(\mathcal{B}).$$

L'expression $\sin\Theta\cos\Theta$ restant bornée sur l'ouvert (non borné) $\mathcal{B}$, on obtient bien en définitive :

$$v \in H^1(\mathcal{B}) \text{ et } \sin\Theta\cos\Theta\; v \in H^2(\mathcal{B}). \blacksquare$$

Tirons les conséquences de ce résultat pour le problème dans $\mathbb{R}^2_{++}$ :

Proposition 4.5!

*Si* $f \in L^2(\mathbb{R}^2_{++})$, *la solution* $u \in V_1$ *du problème (4.2) vérifie :*

$$\sqrt{x^2+y^2}\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++})\ ;\ |\alpha| = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$xy\ \ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++})\ ;\ |\alpha| = 2 \qquad \text{(ii)}$$

En effet, pour (i) nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^2_{++}} (x^2+y^2)\ (|D_x u|^2 + |D_y u|^2)\ dx\ dy =$$

$$\int_{\mathcal{B}} (|v+\delta_s v|^2 + |\delta_\Theta v|^2) ds\ d\Theta \leq C|v|^2_{H^1(\mathcal{B})}$$

Pour (ii), pour $|\alpha| = 2$, on a :

$$D^\alpha u = (\sum_{|\beta|\leq 2} a_\beta\ \delta^\beta v)e^{3s} \text{ avec } a_\beta \text{ fonctions } C^\infty \text{ bornées dans } \mathcal{B},$$

qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}^2_{++}} x^2 y^2\ |D^\alpha u|^2\ dx\ dy =$$

$$\int_{\mathcal{B}} \sin^2\Theta\ \cos^2\Theta\ |\sum_{|\beta|\leq 2} a_\beta\ \delta^\beta v|^2\ dsd\Theta \leq C|\sin\Theta\ \cos\Theta\ v|^2_{H^2(\mathcal{B})}$$

Pour conclure cette étude, introduisons :

Définition 4.2.

$$S(\mathbb{R}^2_{++}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) | \sqrt{x^2+y^2}\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++})\ ;\ |\alpha| = 1 -$$

$$xy\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^2_{++})\ ;\ |\alpha| = 2 \quad .$$

S est un espace de Hilbert pour la norme :

$$|u|_s = \left(|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + \sum_{|\alpha|\leq 1} \left|\sqrt{x^2+y^2}\, D^\alpha u\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + \sum_{|\alpha|=2} |xy\, D^\alpha u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}\right)^{1/2}$$

et nous avons :

<u>THEOREME 2.</u>

*L'opérateur* A *défini par* (4.1) *est un isomorphisme topologique de* S *sur* $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$.

Vérifions que A est linéaire continu de S dans $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$. En effet, pour u dans S, on a :

$$|Au|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} \leq a_o|u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + \sum_{|i|=|j|=1} |D^j\, a_{ij}\, xy\, D^i\, u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}$$

Considérons un terme de la somme ci-dessus, par exemple,

$$|D_x\, a_{ij}\, xy\, D_x u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} \leq |(D_x\, a_{ij})\, xy\, D_x u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} +$$

$$+|a_{ij}\, y\, D_x u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} + |a_{ij}\, xy\, D^2_x\, u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}$$

Puisque $D_x\, a_{ij} = 0$ pour $x^2+y^2 \geq \mathbb{R}^2$ on a :

$$|D_x\, a_{ij}\, xy\, D_x\, u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} \leq C|u|_S\,.$$

La proposition 4.5' montre que A est surjectif et le théorème est alors une conséquence du théorème de Banach.

Application à la régularité pour les variables normales.

Au III, nous avons vu que, dans la carte locale $(O,\Theta)$ on a :

$$\zeta u \circ \Theta^{-1} \in V(\mathbb{R}^n_{++})$$

$$\sum_{\substack{|i|=1\\|j|=1}} D^j \, a'_{ij}(x,y,x')\, xy\, D^i \, \zeta\, u \circ \Theta^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$$

où $D^j$ et $D^i$ désignent les dérivées normales.

De plus l'hypothèse (2.4) entraîne que :

$$\exists\, \delta > 0 \text{ tel que }, \ \forall\, (x,y,x') \in O' \cap \overline{\mathbb{R}^n_{++}},\ \forall\, \xi \in \mathbb{C}^2 : \tag{4.4}$$

$$\mathrm{Re} \sum_{|i|=|j|=1} a'_{ij}(x,y,x')\, \xi^i \bar{\xi}^j \geq \delta |\xi|^2$$

Lemme 4.1.

*Il existe un "prolongement" des $a'_{ij}$ à $\mathbb{R}^n_{++}$ tel que l'hypothèse (4.4) soit conservée.*

Soient $O'_1$ et $O'_2$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^{n-2}$ respectivement, tels que

$$O'_1 \times O'_2 \subset\subset O'$$

et supposons que :

$$\operatorname{supp} \zeta\, u \circ \Theta^{-1} \subset O'_1 \times O'_2 .$$

On chsoisit d'abord deux fonctions $\varphi_1$ et $\Psi_1$ dans $C(\overline{\mathbb{R}^2_{++}})$ telles que :

$$0 \leq \varphi_1 \leq 1 \ ; \ 0 \leq \Psi_1 \leq 1 \ ; \ \varphi_1 + \Psi_1 = 1 \ ; \ \operatorname{supp} \varphi_1 \in O'_1 \ ;$$

$$\operatorname{supp} \zeta\, u \circ \Theta^{-1} \subset (\operatorname{supp} \varphi_1) \times O'_2 \ ; \ \varphi_1 = 1 \ \text{ sur } \operatorname{supp} \zeta\, u \circ \Theta^{-1} .$$

Nous définissons alors $a''_{ij}$ sur $\mathbb{R}^2_{++} \times O'_2$ par :

$$a''_{ij}(x,y,x') = \varphi_1(x,y)\; a'_{ij}(x,y,x') + \Psi_1(x,y)\; a'_{ij}(0,0,x')$$

On choisit ensuite deux fonctions $\varphi_2$ et $\Psi_2$ dans $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-2})$ telles que :

$$0 \leq \varphi_2 \leq 1 \;;\; 0 \leq \Psi_2 \leq 1 \;;\; \varphi_2 + \Psi_2 = 1 \;;\; \operatorname{supp} \varphi_2 \subset O'_2 \;;$$

$$\operatorname{supp} \zeta\, u \circ \Theta^{-1} \subset O'_1 \times (\operatorname{supp} \varphi_2) \;;\; \varphi_2 = 1 \text{ sur } \operatorname{supp} \zeta\, u \circ \Theta^{-1}.$$

On pose alors :

$$\widetilde{a'_{ij}}(x,y,x') = \varphi_2(x')\; a''(x,y,x') + \Psi_2(x')\; a''(x,y,0).$$

On vérifie immédiatement que, pour tout $(x,y,x') \in \overline{\mathbb{R}^n_{++}}$ et $\xi \in \mathbb{C}^2$ :

$$\operatorname{Re} \sum_{|i|=|j|=1} (x,y,x')\; \xi^i\, \overline{\xi^j} \geq |\xi|^{\;2}$$

Tirons les conséquences de ce lemme ; on pose :

$$a'_{x'}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^2_{++}} \sum_{|i|=|j|=1} \widetilde{a'_{ij}}(x,y,x')\; xy\; D^i u\; \overline{D^j v}\; dx\, dy\; +$$

$$+\; a_o \int_{\mathbb{R}^2_{++}} u\, \overline{v}\; dx\, dy \quad \text{avec } a_o > 0$$

alors $a'_{x'}$ est continue sur $V_1(\mathbb{R}^2_{++}) \times V_1(\mathbb{R}^2_{++})$ et le lemme 4.1 montre que $q'_{x'}$ est $V_1$-coercitive. La continuité et la coercivité sont d'ailleurs uniformes en $x' \in \mathbb{R}^{n-2}$ .

Nous terminons maintenant la démonstration de la régularité par :

<u>Proposition 4.6.</u>

*Si* $f \in L^2(\Omega)$, *la solution* u *du problème* (2.3) *vérifie :*

1°) $(x^2+y^2)^{1/2} D \zeta u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *avec* D *dérivée normale.*

2°) $xy D^\alpha \zeta u \in L^2(\mathbb{R}^n_{++})$ *avec* $|\alpha| = 2$ *et* $D^\alpha$ *formée de deux dérivées normales.*

Désignons par $A'_{x'}$ l'opérateur :

$$A'_{x'} = A'_{x'}(x,y,D) = \sum_{|i|=|j|=1} D^j \widetilde{a'_{ij}}(x,y,x') D^i + a_o I$$

Par le théorème 2, $A'_{x'}$ est un isomorphisme de S sur $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$, donc, il existe une constante $C(x')$ telle que, pour tout u dans S :

$$|u|_S \leq C(x') \; |A'_{x'} u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}$$

Montrons que les constantes $C(x')$ sont bornées quand $x' \in \mathbb{R}^{n-2}$. Pour $u \in S$, $x'_o \in \mathbb{R}^{n-2}$ on a

$$|A'_{x'_o} u|_{L^2} \leq |(A'_{x'_o} - A'_{x'})u|_{L^2} + |A_{x'} u|_{L^2} \}$$

et, puisque les coefficients $a'_{ij}$ sont de classe $C^1$ on a :

$$|(A'_{x'_o} - A'_{x'})u|_{L^2} \leq \varepsilon(|x'-x'_o|) \; |u|_S$$

avec $\varepsilon(|x'-x'_o|)$ tend vers zéro avec $|x-x'_o|$.

On a alors :

$$|u|_S \leq C(x'_o) \; \{\varepsilon(|x'-x'_o|) \; |u|_S + |A_{x'} u|_{L^2}$$

et en choisissant $|x'-x_o|$ suffisamment petit pour que

$$\varepsilon(|x'-x'_o|) \leq \frac{1}{2\,C(x'_o)} \quad \text{on obtient :}$$

$$|u|_S \leq 2\,C\,(x'_o)\,|A_{x'}u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})} .$$

En tenant compte du fait que $\widetilde{a'_{ij}}$ est constant en dehors d'un compact, il vient :

il existe une constante C > 0 telle que, pour tout u dans S :

$$|u|_S \leq C|A'_{x'}\, u|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}$$

Pour la solution du problème (2.3) nous avons : pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^{n-2}$ :

$$\begin{cases} A'_{x'}(\zeta \quad u \circ \Theta^{-1}) \in L^2(\mathbb{R}^2_{++}) \\ \zeta\; u \circ \Theta^{-1} \in V_1(\mathbb{R}^2_{++}) \end{cases}$$

ce qui montre donc que :

$$|\zeta\; u \circ \Theta^{-1}|_{S(\mathbb{R}^2_{++})} \leq C|A'_{x'}(\zeta\; u \circ \Theta^{-1})|_{L^2(\mathbb{R}^2_{++})}$$

La proposition 4.6 s'obtient ensuite en élevant au carré et en intégrant sur $\mathbb{R}^{n-2}$.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] M.S. BAOUENDI - Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Bull. Soc. Math. France. 95 (1967) 45-87.

[2] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC - Etude de la régularité et du spectre d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. C.R.A.S. Paris, 266(1968) 336-338.

[3] P. GRISVARD - Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa - Série 3, 17 (1963) 255-296.

[4] M. S. HANNA et K. T. SMITH - Some Remarks on the Dirichlet Problem in Piecewise smooth domains . Com. on pure and App. Math. 20 (2967) 575-593.

[5] B. HANOUZET - Régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du deuxième ordre. C.R.A.S.Paris, 268 (1969) 1177-1179.

[6] J. L. LIONS et E. MAGENES - Problèmes aux limites non homogènes. Dunod - Paris (1968).

[7] J. J. KOHN et L. NIRENBERG - An Angebra of pseudo-differential operators. Comm. on pure and app. Math. 18 (1965) 269-305.

[8] G. H. HARDY , J. E. LITTLEWOOD , G. POLYA - Inequalities. Cambridge 1952.

[9] J. CEA et C. GOULAOUIC - Cours d'Analyse fonctionnelle et numérique - Faculté des Sciences de Rennes (1967-1968).