PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. FARAUT

Calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 3, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___1_A3_0>

CALCUL SYMBOLIQUE SUR LES GENERATEURS INFINITESIMAUX DE SEMI-GROUPES

par J. FARAUT

I - INTRODUCTION.

Un semi-groupe fortement continu de contractions étant donné sur un espace de Banach, à chaque mesure bornée sur $[0,\infty[$, on peut associer un opérateur borné sur cet espace de Banach, cette application étant un homomorphisme d'algèbre pour le produit de convolution des mesures. Ce procédé permet de construire de nouveaux semi-groupes d'opérateurs à partir de semi-groupes de mesures sur $[0,\infty[$. Cet homomorphisme sera étendu à certaines distributions : l'opérateur associé sera alors en général non borné. En particulier, les générateurs infinitésimaux des nouveaux semi-groupes d'opérateurs obtenus ne sont plus en général associés à des mesures, mais à des distributions.

II - HOMOMORPHISME ASSOCIE A UN SEMI-GROUPE FORTEMENT CONTINU DE CONTRACTIONS.

(Schwartz [4], Hille-Phillips [3])

1) Soit $\{P_t\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu de contractions sur un espace de Banach E, c'est-à-dire une application $t \longrightarrow P_t$ de $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$ dans $\mathcal{L}(E)$ vérifiant :

- $P_o = I$, $\forall t,s \geq 0$, $P_{t+s} = P_t\, P_s$
- $||P_t|| \leq 1$
- $\forall x \in E$, $\lim\limits_{t\to 0} ||P_t\, x-x|| = 0$

Il résulte de cette définition que pour tout x de E, l'application $t \longrightarrow P_t\, x$ de $\mathbb{R}_+$ dans E est continue bornée.

Soit $M(\mathbb{R}_+)$ l'espace des mesures bornées sur $\mathbb{R}_+$. $M(\mathbb{R}_+)$ est une algèbre pour le produit de convolution. Si μ est une mesure de $M(\mathbb{R}_+)$, on notera $||\mu||$ la variation totale de μ.

Définition 1.

Soit μ *une mesure de* $M(\mathbb{R}_+)$ *et* x *dans* E, *posons*

$$G(\mu)\, x = \int_0^\infty P_t\, x\, \mu(dt)$$

$$||G(\mu)\, x|| \leq ||\mu||.||x||$$

ce qui définit un opérateur $G(\mu)$ de $\mathscr{L}(E)$ vérifiant $||G(\mu)|| \leq ||\mu||$. Si μ et ν sont deux mesures de $M(\mathbb{R}_+)$,

$$G(\mu * \nu)\, x = \iint P_{t+s}\, x\, \mu(dt)\ \ \nu(ds) = G(\mu)\, G(\nu)\, x$$

Ainsi G est un homomorphisme d'algèbre de norme 1 de $M(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathscr{L}(E)$.

2) Convergence stricte.

Définition 2.

Une suite μ_n *de mesures bornées converge strictement vers* 0 *si :*

- μ_n *converge vaguement vers* 0
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ *compact et* n_0 *tels que*

$$\forall n \geq n_0, \quad |\mu_n|\ (\complement K) \leq \varepsilon$$

Proposition 1.

Si une suite μ_n *de mesures de* $M(\mathbb{R}_+)$ *converge strictement vers* μ, *la suite d'opérateurs* $G(\mu_n)$ *converge fortement vers* $G(\mu)$, *c'est-à-dire*

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n\to\infty} G(\mu_n)\, x = G(\mu)\, x.$$

Cette proposition est une conséquence du résultat suivant : si μ_n converge strictement vers 0 et si f est une fonction continue bornée à valeur dans un espace de Banach, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int f \, d\mu_n = \int f \, d\mu .$$

3) Extension de G aux distributions de $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$.

Définition 3.

$\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ est l'espace des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui sont sommes finies de dérivées de mesures bornées, c'est aussi l'espace des distributions dont les régularisées appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ (Schwartz [6]).

$\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ est l'espace des distributions de $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ dont les supports sont contenus dans $\mathbb{R}_+$.

Définition 4.

Le filtre régularisant $\mathfrak{F}$ est le filtre de base $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$

$$A_\varepsilon = \{\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \alpha \geq 0,\ \int \alpha(t)\,dt = 1,\ \mathrm{Supp}\ \alpha \subset [0,\varepsilon]\}.$$

Définition 5.

Soit T une distribution de $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, l'opérateur (non borné en général) $(D_{G(T)}, G(T))$ est défini par :

Le domaine $D_{G(T)}$ est l'ensemble des x de E tels que $\lim_{\mathfrak{F}} G(T * \alpha)\, x$ existe, et $G(T)\, x$ est égal à cette limite.

Conséquences de la définition :

- Pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, dont le support est contenu dans $[0,\infty[$, $G(\varphi)\, x$ appartient à $D_{G(T)}$ et

$$G(T)\, G(\varphi)\, x = G(T * \varphi)\, x .$$

En effet,

$$G(T * \alpha)\, G(\varphi)\, x = G(\alpha)\, G(T * \varphi)\, x$$

et quand α tend vers δ, masse de Dirac à l'origine, suivant le filtre $\mathfrak{F}$, le second membre a une limite, donc le premier aussi, d'où le résultat.

- Le domaine $D_{G(T)}$ est dense dans E.

  En effet pour tout x de E

$$x = \lim_{\mathfrak{F}} G(\alpha)\, x$$

- L'opérateur $(D_{G(T)}, G(T))$ est fermé.

  En effet soit x_n une suite d'éléments de $D_{G(T)}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$$\lim_{n\to\infty} G(T)\, x_n = y.$$

Soit α une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans $[0,\infty[$,

$$G(T * \alpha)\, x_n = G(\alpha)\, G(T)\, x_n$$

en passant à la limite quand n tend vers l'infini :

$$G(T * \alpha)\, x = G(\alpha)\, y$$

et quand α tend vers δ suivant le filtre régularisant le second membre a pour limite y, donc

$$x \in D_{G(T)} \quad \text{et} \quad G(T)\, x = y.$$

Le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{P_t\}_{t\geq 0}$ est l'opérateur (D_A, A) défini par

$$x \in D_A \Longleftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{P_t x - x}{t} \text{ existe}$$

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{P_t x - x}{t}$$

On démontre facilement que $(D_A, A) = (D_{G(\delta')}, G(-\delta'))$.

III - SEMI-GROUPES DE MESURES (Faraut [1]).

Définition III.1.

Une famille $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ *de mesures de* $M(\mathbb{R}^m)$ *est un semi-groupe de mesures de type* H *si :*

$$\begin{cases} - \mu_o = \delta, \quad \forall t, s \geq 0 \qquad \mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s \\ - ||\mu_t|| \leq 1 \\ - \lim\limits_{t \to 0} \mu_t = \delta \ \text{strictement.} \end{cases}$$

Soit $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de mesures de type H dont les supports sont contenus dans $\mathbb{R}_+$,

posons $Q_t = G(\mu_t)$, $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de contractions sur E. L'objet de la suite de l'exposé est de déterminer le générateur infinitésimal de ce semi-groupe.

1) Principe du maximum du module.

Soit X un espace localement compact, Co(X) l'espace des fonctions continues sur X tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme $||f|| = \operatorname{Sup}|f|$.

Définition III.2.

Un opérateur (D_A, A) *sur* Co(X) *vérifie le principe du maximum du module si* $\quad f \in D_A,\ f(x) = ||f|| \Longrightarrow \operatorname{Re} Af(x) \leq 0.$

Proposition III.1.

Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions sur Co(X) *vérifie le principe du maximum du module.*

D'autre part nous avons la réciproque suivante.

Proposition III.2.

Soit (D_A, A) *un opérateur sur* $Co(X)$ *vérifiant le principe du maximum du module, de domaine dense et tel que*

$$\forall \lambda > 0, \quad (\lambda I - A)\, D_A \text{ dense}$$

alors (D_A, A) *est préfermé, et le plus petit prolongement fermé de* (D_A, A) *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions sur* $Co(X)$.

2) Cône P

Définition III.3.

P *désigne l'ensemble des distributions de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ *vérifiant*

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m),\ \forall x \in \mathbb{R}^m,\ |\varphi(x)| \leq \varphi(0) \Longrightarrow \operatorname{Re} \langle T, \varphi\rangle \leq 0$$

P est un cône convexe fermé de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Proposition III.3.

Une distribution T *de* P *peut s'écrire*

$$T = S + \sigma$$

où σ *est une* **mesure** *bornée, et* S *une distribution dont le support est contenu dans un voisinage arbitraire de* 0.

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{Supp}(\alpha) \subset B(0, \varepsilon)$ boule de centre 0 et de rayon $\varepsilon > 0$, $\alpha(0) = 1$, $|\alpha| \leq 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{Supp}(\varphi) \subset \complement B(0, \varepsilon)$, $M = \operatorname{Sup}|\varphi|$, c nombre complexe de module 1 tel que $\langle T, c\,\varphi\rangle$ soit réel positif. Posons

$$\Psi = M\alpha + c\,\varphi, \qquad |\Psi(x)| \leq \Psi(0)$$

$$\operatorname{Re} \langle T, \Psi\rangle = M \operatorname{Re} \langle T, \alpha\rangle + |\langle T, \varphi\rangle| \leq 0$$

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \operatorname{Re} \langle -T, \alpha\rangle \operatorname{Sup} |\varphi|$$

Il en résulte que la restriction de T à $B(0, \varepsilon)$ est une mesure bornée.

Soit $\beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\beta = 1$ sur $B(0, \varepsilon)$

$$T = \beta\, T + (1 - \beta)\, T$$

$S = \beta\, T$ est une distribution à support compact et $\sigma = (1 - \beta)\, T$ est une mesure bornée.

Corollaire III.1.

a) *Le cône* P *est contenu dans* $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^m)$

b) *La transformée de Fourier d'une distribution de* P *est une fonction continue de partie réelle négative.*

3) Semi-groupe de mesures.

Proposition III.4.

Soit T *une distribution de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *la distribution* T *appartient à* P,

b) T *est limite dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ *de mesures du type* $k(\mu-\delta)$, $k > 0$, $||\mu|| \leq 1$.

c) *il existe un semi-groupe de mesures* $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ *de type* H *tel que*

$$T = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\mu_t - \delta) \text{ (dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)\text{)}.$$

Il est clair que c) entraîne b) et que b) entraîne a).

Montrons que a) entraîne c).

Soit T une distribution de P. Considérons sur $C_0(\mathbb{R}^m)$ l'opérateur (D_A, A) défini par $D_A = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^m$ qui tendent vers 0 à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées, et $Af = T * f$. (D_A, A) vérifie le principe du maximum du module, D_A est dense.

Soit Ψ la transformée de Fourier de T, d'après le corollaire III.1., Ψ est une fonction continue de partie réelle négative et donc

$$\forall \lambda > 0, \forall y \in \mathbb{R}^m, \lambda - \Psi(y) \neq 0,$$

il en résulte que, pour $\lambda > 0$, $(\lambda I - A) D_A$ contient l'espace des transformées de Fourier des fonctions continues à support compact, qui est dense dans $Co(\mathbb{R}^m)$. D'après la proposition III.2., le plus petit prolongement fermé de (D_A, A) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions sur $Co(\mathbb{R}^m)$. Chaque opérateur P_t de ce semi-groupe commute avec les translations donc est défini par une mesure bornée μ_t, $||\mu_t|| \leq 1$:

$$P_t f = \mu_t * f$$

Il reste à montrer que μ_t converge strictement vers 0 quand t tend vers 0.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $|\varphi| \leq 1$, $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset \complement B(0, \varepsilon)$ et posons $M_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$, soit c_t nombre complexe de module 1 tel que $<\mu_t, c_t \varphi>$ soit réel positif, et posons

$$\Psi_t(x) = M_\varepsilon \frac{1}{1+|x|^2} - c_t \varphi(x)$$

$$|\Psi_t(x)| \leq M_\varepsilon = \Psi_t(0)$$

donc

$$\mathrm{Re} <(\mu_t - \delta), \Psi_t> \leq 0$$

$$|<\mu_t, \varphi>| \leq M_\varepsilon \mathrm{Re} <(\delta - \mu_t), \frac{1}{1+|x|^2}> = O(t)$$

il en résulte

$$|\mu_t| (\complement B(0, \varepsilon)) = O(t).$$

4) Semi-groupe de mesures de $M(\mathbb{R}_+)$.

Définition III.4.

$P(\mathbb{R}_+)$ *désigne l'ensemble des distributions de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *vérifiant :*

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\forall x \geq 0$, $|\varphi(x)| \leq \varphi(0) \Longrightarrow \mathrm{Re} \langle T, \varphi \rangle \leq 0$.

$P(\mathbb{R}_+)$ est un cône convexe fermé contenu dans P, et le support d'une distribution de $P(\mathbb{R}_+)$ est contenu dans $\mathbb{R}_+$.

Proposition III.5.

Soit T *une distribution de* P, *les propriétés suivantes sont équivalentes*

a) *La distribution* T *appartient à* $P(\mathbb{R}_+)$.

b) *Les mesures du semi-groupe "engendré" par* T *appartiennent à* $M(\mathbb{R}_+)$ *(ont leurs supports contenus dans* $\mathbb{R}_+$*).*

Il est clair que b) entraîne a). Soit T une distribution de $P(\mathbb{R}_+)$, posons

$$F(z) = \langle T, e^{-zx} \rangle \quad , \mathrm{Re}\, z > 0$$

puisque, si $\mathrm{Re}\, z > 0$ et $x \geq 0$, $|e^{-zx}| \leq 1$

$$\mathrm{Re}\, F(z) \leq 0.$$

Soit $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ le semi-groupe de mesures "engendré" par T (Proposition III.4). La transformée de Laplace de μ_t est $e^{tF(z)}$, et puisque

$$\forall z, \ \mathrm{Re}\, z > 0, \quad |e^{tF(z)}| \leq 1$$

le support de la mesure μ_t est contenu dans $\mathbb{R}_+$. (Schwartz [5]).

IV - GENERATION DE SEMI-GROUPES DE CONTRACTIONS (Farant [2]).

Soit T une distribution de $P(\mathbb{R}_+)$, $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe de mesures "engendré" par T, $Q_t = G(\mu_t)$.

Proposition IV.1.

Le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ *est l'opérateur* $(D_{G(T)}, G(T))$.

Soit (D_B, B) le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{Q_t\}_{t\geq 0}$.

Posons

$$a_t = \frac{\mu_t - \delta}{t}$$

$$b_t = \frac{1}{t}\int_0^t \mu_s \, ds \text{ (intégrale faible).}$$

Quand t tend vers 0, la mesure b_t converge strictement vers δ, et l'on a :

$$T * b_t = a_t$$

- Soit x un élément de $D_{G(T)}$, α une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans $\mathbb{R}_+$

$$G(a_t)\, G(\alpha)\, x = G(b_t)\, G(T * \alpha)\, x$$

en passant à la limite suivant le filtre régularisant :

$$G(a_t)\, x = G(b_t)\, G(t)\, x$$

et quand t tend vers 0, le second membre a pour limite $G(T)\,x$, donc x appartient à D_B et

$$B\, x = G(T)\, x$$

- Soit **x** un élément de D_B

$$G(\alpha)\, G(a_t)\, x = G(T * \alpha)\, G(b_t)\, x$$

quand t tend vers 0

$$G(\alpha)\ B\ x = G(T * \alpha)\ x$$

et quand α tend vers δ suivant le filtre régularisant, le premier membre a pour limite B x, donc x appartient à $D_{G(T)}$ et

$$B\ x = G(T)\ x.$$

On montre également le résultat suivant :

Soit T une distribution de $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$; pour que $(D_{G(T)}, G(T))$ soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions, quel que soit le semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$ considéré, il faut et il suffit que T appartienne à $P(\mathbb{R}_+)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FARAUT J. — Principe du maximum du module et semi-groupes de mesures. Comptes-rendus 267, série A, 1968, p. 257.

[2] FARAUT J. — Fonctions opérant sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes fortement continus de contractions. Comptes-rendus 267, série A, 1968, p. 871.

[3] HILLE, PHILLIPS — Functional analysis and semi-groups Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 1957, p. 434.

[4] SCHWARTZ L. — Lectures on mixed problems in partial differential equations and representations of semi-groups. Tata Institute, Bombay, 1958, p. 95-106.

[5] SCHWARTZ L. — Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. Hermann, Paris, 1961, p. 249.

[6] SCHWARTZ L. — Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1951, Tome 2, p. 55-56.