P. BOLLEY
J. CAMUS

Certains résultats de régularité des problèmes elliptiques variationnels d'ordre $2m$ dans des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à points anguleux

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 2, p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___1_A2_0>

CERTAINS RESULTATS DE REGULARITE DES PROBLEMES ELLIPTIQUES VARIATIONNELS D'ORDRE 2m DANS DES OUVERTS DE $\mathbb{R}^2$ A POINTS ANGULEUX

P. BOLLEY et J. CAMUS. Faculté des Sciences de Rennes.

INTRODUCTION.

On considère la classe des opérateurs elliptiques variationnels d'ordre 2m, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$ borné et dont la frontière présente un point anguleux. On obtient certains résultats de régularité en adaptant la méthode classique des quotients différentiels [3] : on remplace le groupe des translations par un groupe d'homothéties.

Quelques-uns de ces résultats sont donnés dans [2] , et sont obtenus par une méthode différente.

1 - NOTATIONS.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, dont la frontière Γ est une courbe simple de classe C^∞ sauf en un point P, en lequel les demi tangentes font un angle θ, $0<\theta<2\pi$, $\theta\neq\pi$. On suppose de plus que chacun des arcs aboutissant au point P est de classe C^∞ jusqu'en ce point.

Le point générique de Ω sera noté (x,y).

Pour tout multientier $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$ appartenant à $\mathbb{N}^2$, on note

$$D^\alpha = D_x^{\alpha_1} D_y^{\alpha_2} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \quad \text{et} \quad |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2.$$

Pour la définition des espaces $H^s(\Omega)$ pour s réel et des espaces $H_0^s(\Omega)$ pour s réel positif, on renvoie à [3].

Soit m appartenant à $\mathbb{N}$, $m\geq 1$.

On considère la forme intégro-différentielle a définie sur $H_0^m(\Omega)$ par : pour u et v appartenant à $H_0^m(\Omega)$:

$$a(u,v) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x,y)\, D^\alpha u(x,y)\, \overline{D^\beta v(x,y)}\, dx\, dy$$

On suppose que les coefficients $a_{\alpha\beta}$ appartiennent à $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et que l'on a la condition de coercivité :

$$\exists\, \alpha>0, \text{ tel que } \forall\, u\in H_0^m(\Omega)\ ,\ \operatorname{Re} a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{H_0^m(\Omega)}$$

Le lemme de Lax Milgram montre alors que :

pour tout f dans $H^{-m}(\Omega)$, il existe u unique dans $H_0^m(\Omega)$ tel que :

$$\forall\, v\in H_0^m(\Omega)\ ,\ a(u,v)=\langle f,\overline{v}\rangle_{H^{-m}(\Omega)\times H_0^m(\Omega)}.$$

2 - UN THEOREME DE REGULARITE.

Soit A l'opérateur différentiel associé à la forme a :

$$A = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} D^{\beta}(a_{\alpha\beta} D^{\alpha})$$

Pour k entier, $k \geq -m$, on définit les espaces suivants :

$$X^{2m+k}(\Omega) = \{u \in H_o^m(\Omega) \ , \ r^j u \in H^{m+j}(\Omega) \ , \ j=0,1,2,\dots,m+k\}$$

muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{X^{2m+k}(\Omega)} = \Big(\sum_{j=o}^{m+k} \|r^j u\|^2_{H^{m+j}(\Omega)}\Big)^{1/2} ,$$

$$Y^k(\Omega) = \{f \in H^{-m}(\Omega) \ , \ r^j f \in H^{-m+j}(\Omega) \ , \ j=0,1,\dots,m+k\}$$

muni de la norme

$$f \longmapsto \|f\|_{Y^k(\Omega)} = \Big(\sum_{j=o}^{m+k} \|r^j f\|^2_{H^{-m+j}(\Omega)}\Big)^{1/2} ,$$

où $r = r(x,y)$ désigne la distance du point (x,y) au point anguleux P de la frontière.

On a le résultat de régularité suivant :

Théorème 2.1. : Pour tout entier k , $k \geq -m$, A est un isomorphisme de $X^{2m+k}(\Omega)$ sur $Y^k(\Omega)$.

En tout point de $\overline{\Omega}$, distinct de P, on a la régularité classique [3]. Pour étudier la régularité au voisinage de P, grâce aux hypothèses faites sur la frontière Γ en ce point, on se ramène au cas où P est l'origine O des axes de coordonnées et où la frontière, au voisinage de ce point, coïncide avec ces axes ; l'angle est alors ramené à $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$. On suppose donc maintenant que l'ouvert Ω vérifie les conditions précédentes.

Avant de démontrer ce théorème de régularité donnons quelques lemmes techniques utiles dans la suite.

3 - QUELQUES LEMMES.

On désigne par ω l'un quelconque des deux ouverts

$$\omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x>o \ , \ y>o\}$$

$$\omega_2 = \mathbb{R}^2 - \bar{\omega}_1 .$$

On donne tout d'abord une variante du lemme 12.3 de [3] : on adapte ce lemme donné dans l'ouvert $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ y>o\}$, à l'ouvert ω.

Lemme 3.1. :

L'espace $K^{1,m}(\omega) = \{u \in L^2(\omega) \ , \ \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\omega) \ , \ \frac{\partial^m u}{\partial y^m} \in H^{-m+1}(\omega)\}$ coïncide avec l'espace $H^1(\omega)$.

Si $\omega = \omega_1$, on considère le prolongement P défini par :

pour une fonction u définie sur ω_1, Pu est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2_+$ de la façon suivante :

$$Pu(x,y) = u(x,y) \text{ si } x>o$$

$$Pu(x,y) = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \ u(-jx,y) \text{ si } x<o$$

où les coefficients $\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+1}$ sont déterminés par les conditions

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \ (-j)^{-k-1} = 1 \quad k = -1,0,1,\ldots,m-1$$

(ce système admet une solution unique, le déterminant étant un déterminant de Vandermonde).

Soit $u \in K^{1,m}(\omega_1)$ alors $Pu \in K^{1,m}(\mathbb{R}^2_+)$ où

$$K^{1,m}(\mathbb{R}^2_+) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2_+) \ , \ \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\mathbb{R}^2_+) \ , \ \frac{\partial^m u}{\partial y^m} \in H^{-m+1}(\mathbb{R}^2_+)\}$$

En effet : (i) $Pu \in L^2(R^2_+)$

(ii) $\frac{\partial}{\partial x} Pu \in L^2(\mathbb{R}^2_+)$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$, on a :

$$\langle \frac{\partial}{\partial x} Pu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)} = - \langle Pu, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)}$$

$$= - \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} u(x,y) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\lambda_j}{j} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(- \frac{x}{j}, y\right)\right) dy$$

or $u \in L^2(o,+\infty;\ L^2(o,+\infty))$ et $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(o,+\infty;\ L^2(o,+\infty))$ donc $u(o,y)$ a un sens et on peut faire une intégration par parties dans l'expression précédente.

Posant

$$\phi(x,y) = \varphi(x,y) - \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j \ \varphi\left(- \frac{x}{j}, y\right) \text{ , on obtient}$$

$$\langle \frac{\partial}{\partial x} Pu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)} = \int_0^{+\infty} dy \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} (x,y) \phi(x,y) dx + u(o,y) \phi(o,y)\right)$$

or $\phi(o,y) = o$ donc

$$\langle \frac{\partial}{\partial x} Pu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)} = \int_{\omega_1} \frac{\partial u}{\partial x} (x,y)\ \phi(x,y)\ dx\ dy$$

et comme $\|\phi\|_{L^2(\omega_1)} \leq C \ \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}$, on déduit que :

$$\left| \langle \frac{\partial}{\partial x} Pu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)} \right| \leq C \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(\omega_1)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}$$

donc $\frac{\partial}{\partial x} Pu \in L^2(\mathbb{R}^2_+)$.

(iii) $\frac{\partial^m}{\partial y^m} Pu \in H^{-m+1}(\mathbb{R}^2_+)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$, on a :

$$\langle \frac{\partial^m}{\partial y^m} Pu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)} = (-1)^m \langle Pu, \frac{\partial^m \varphi}{\partial y^m} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)}$$

$$= (-1)^m \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} u(x,y) \left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial y^m}(x,y) + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\lambda_j}{j} \frac{\partial^m \varphi}{\partial y^m} \left(- \frac{x}{j}, y\right)\right) dy.$$

Posant $\phi(x,y) = \varphi(x,y) + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\lambda_j}{j} \varphi(-\frac{x}{j},y)$, on obtient

$$<\frac{\partial^m}{\partial y^m} Pu, \varphi>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)} = (-1)^m \int_{\omega_1} u(x,y) \frac{\partial^m \phi}{\partial y^m} (x,y)\, dx\, dy$$

Or $\phi \in H_o^m(\omega_1)$ d'après les conditions

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j (-j)^{-k-1} = 1 \text{ pour } k = 0,1,\ldots,m-1$$

Si $\psi \in \mathcal{D}(\omega_1)$, on a :

$$(-1)^m \int_{\omega_1} u(x,y) \frac{\partial^m \psi}{\partial y^m} (x,y)\, dx\, dy = <\frac{\partial^m u}{\partial y^m}, \psi>_{H^{-m+1}(\omega_1) \times H_o^{m-1}(\omega_1)}$$

Soit alors une suite ψ_n de fonctions de $\mathcal{D}(\omega_1)$ qui converge vers ϕ dans $H^m(\omega_1)$; donc, quand n tend vers $+\infty$,

$(-1)^m \int_{\omega_1} u(x,y) \frac{\partial^m \psi_n}{y^m} (x,y)\, dx\, dy$ tend vers $(-1)^m \int_{\omega_1} u(x,y) \frac{\partial^m \phi}{\partial y^m} (x,y)\, dx\, dy$

et $<\frac{\partial^m u}{\partial y^m}, \psi_n>_{H^{-m+1}(\omega_1) \times H_o^{m-1}(\omega_1)}$ tend vers $<\frac{\partial^m u}{\partial y^m}, \phi>_{H^{-m+1}(\omega_1) \times H_o^{m-1}(\omega_1)}$

donc, a la limite :

$$(-1)^m \int_{\omega_1} u(x,y) \frac{\partial^m \phi}{\partial y^m} (x,y)\, dx\, dy = <\frac{\partial^m u}{\partial y^m}, \phi>_{H^{-m+1}(\omega_1) \times H_o^{m-1}(\omega_1)}$$

donc :

$$<\frac{\partial^m}{\partial y^m} Pu, \varphi>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)} = <\frac{\partial^m u}{\partial y^m}, \phi>_{H^{-m+1}(\omega_1) \times H_o^{m-1}(\omega_1)}$$

or $|\phi|_{H^{m-1}(\omega_1)} \leq C \|\varphi\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^2_+)}$, donc :

$$|<\frac{\partial^m}{\partial y^m} Pu, \varphi>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)}| \leq C \left\|\frac{\partial^m u}{\partial y^m}\right\|_{H^{-m+1}(\omega_1)} \|\varphi\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^2_+)}$$

ce qui prouve que $\frac{\partial^m Pu}{\partial y^m} \in H^{-m+1}(\mathbb{R}^2_+)$.

Ainsi, si $u \in K^{1,m}(\omega_1)$, $Pu \in K^{1,m}(\mathbb{R}^2_+)$. Le lemme 12.3 de [3] montre que $K^{1,m}(\mathbb{R}^2_+) = H^1(\mathbb{R}^2_+)$. Par restriction à ω_1, on déduit que $u \in H^1(\omega_1)$.

Si $\omega = \omega_2$, par restrictions, on se ramène à deux problèmes connus.

Soient $\omega_2' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x<o,\ y>o\}$ et $\omega_2'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y<o\}$. Pour une fonction u définie sur ω_2, on désigne par u' la restriction de u à ω_2' et par u" la restriction de u à ω_2''. L'opération restriction étant continue, il est clair que si $u \in K^{1,m}(\omega_2)$, $u' \in K^{1,m}(\omega_2')$ et u" $K^{1,m}(\omega_2'')$ (avec des notations évidentes).

L'étude du cas où $\omega = \omega_1$, nous permet de dire que $u' \in H^1(\omega_2')$ et le lemme 12.3 de [3] nous permet de dire que $u'' \in H^1(\omega_2'')$. On veut en déduire que $u \in H^1(\omega_2)$. Pour cela, il suffit de montrer que $\frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\omega_2)$ et même si u"' est la restriction de u à l'ouvert $\omega_2''' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x<o\}$, il suffit de montrer que $\frac{\partial u'''}{\partial y} \in L^2(\omega_2''')$. Pour cela en considérant le prolongement P introduit précédemment, on montre que $Pu''' \in K^{1,m}(\mathbb{R}^2)$ qui s'identifie à $H^1(\mathbb{R}^2)$ (voir la démonstration du lemme 12.3 de [3]) et donc $u''' \in H^1(\omega_2''')$.

On a donc démontré que $K^{1,m}(\omega)$ est inclus dans $H^1(\omega)$, l'inclusion inverse est facile. D'où le lemme 3.1.

<u>Lemme 3.2.</u> : Pour tout entier m, $m \geq o$, il existe une constante C telle que :

$$\forall\ u \in H^m_o(\omega)\ ,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^2\ ,\quad |\alpha| \leq m \text{ on a :}$$

$$\left\| \frac{D^\alpha u}{r^{m-|\alpha|}} \right\|_{L^2(\omega)} \leq C\ \|u\|_{H^m(\omega)}\ ,\ \text{où } r = r(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}.$$

La démonstration de ce lemme est une adaptation de celle du lemme 3.1 de [1].

<u>Lemme 3.3.</u> : Pour tout m et k entiers positifs, pour tout polynôme P en x et y homogène de degré k, il existe une constante C (=C(m,k,P)) telle que :

(i) $\forall\ u \in H_o^m(\omega)$, $\|\frac{P}{r^k}u\|_{H^m(\omega)} \leq C\ \|u\|_{H^m(\omega)}$

(ii) $\forall\ f \in H^{-m}(\omega)$, $\|\frac{P}{r^k}f\|_{H^{-m}(\omega)} \leq C\ \|f\|_{H^{-m}(\omega)}$

Avant de démontrer ce lemme, on donne un résultat utile pour la suite : pour tout multientier $\beta \in \mathbb{N}^2$, et pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq o$,

$D^\beta(r^m) = r^{m-|\beta|}\ \frac{P_\beta}{r^{|\beta|}}$, où P_β est un polynôme homogène de degré $|\beta|$. La vérification de ce résultat se fait par récurrence sur $|\beta|$.

(i) on fait la démonstration par récurrence sur k.

. k=1 , on considère le cas d'un monôme, par exemple $P(x,y) = x$, le cas général s'en déduit immédiatement.

si m=o, la majoration est facile car $|x| \leq r$

si $m \geq 1$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq m$

on a :

$$D^\alpha(\frac{x}{r}\varphi) = \sum_{o \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}\ D^\beta(\frac{x}{r})\ D^{\alpha-\beta}\varphi$$

Or $\quad D^\beta(\frac{x}{r}) = \sum_{o \leq \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha}\ r^{-1-|\gamma|}\ \frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}}\ D^{\beta-\gamma}(x)$

donc $r^{|\beta|}\ D^\beta(\frac{x}{r})$ est borné sur ω par une constante C_β, en effet :

si $|\beta-\gamma| = o \qquad r^{|\beta|-1-|\gamma|}\ \frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}}\ D^{\beta-\gamma}\ x = \frac{x}{r}\ \frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}}$ qui est borné

si $|\beta-\gamma| = 1 \qquad r^{|\beta|-1-|\gamma|}\ \frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}}\ D^{\beta-\gamma}\ x = \frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}}$ si $D^{\beta-\gamma} = D_x$

$= o$ si $D^{\beta-\gamma} = D_y$

si $|\beta-\gamma| > 1 \qquad r^{|\beta|-1-|\gamma|}\ \frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}}\ D^{\beta-\gamma}\ x = o$

donc :

$$\|D^\alpha(\frac{x}{r}\varphi)\|_{L^2(\omega)} \leq \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_\beta \|\frac{D^{\alpha-\beta}\varphi}{r^{|\beta|}}\|_{L^2(\omega)}$$

$$\leq C(\alpha) \quad \|\varphi\|_{H^{|\alpha|}(\omega)} \quad \text{d'après le lemme 3.2}$$

$$\leq C(m) \quad \|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

. $k>1$, on fait l'hypothèse de récurrence suivante :

pour tout entier h, $0\leq h\leq k-1$ et pour tout polynôme Q homogène de degré h, il existe une constante $C(h,m,Q)$ telle que :

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\omega)\ ,\ \|\frac{Q}{r^h}\varphi\|_{H^m(\omega)} \leq C(h,m,Q) \quad \|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

Soit P un polynôme homogène de degré $k+1$. Pour simplifier, nous le supposerons de la forme xQ, où Q est homogène de degré k. On a :

$$\|\frac{P}{r^k}\varphi\|_{H^m(\omega)} \leq C(m,1)\ \|\frac{Q}{r^{k-1}}\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

$$\leq C(m,1)\ C(k-1,m,Q) \quad \|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

(ii) soit $f \in H^{-m}(\omega)$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$

$$<\frac{P}{r^k} f, \varphi>_{\mathcal{D}'(\omega)\ \times\ \mathcal{D}(\omega)} = <f, \frac{P}{r^k}\varphi>_{H^{-m}(\omega)\ \times\ H^m(\omega)}$$

d'après (i) on déduit :

$$|<\frac{P}{r^k} f, \varphi>_{\mathcal{D}'(\omega)\ \times\ \mathcal{D}(\omega)}| \leq C\ \|\varphi\|_{H^m(\omega)} \quad \|f\|_{H^{-m}(\omega)}$$

donc $\frac{P}{r^k} f \in H^{-m}(\omega)$, avec la majoration cherchée.

<u>Lemme 3.4.</u> : Pour tout m et k entiers positifs, $0\leq k\leq m$, il existe une constante $C(=C(m,k))$ telle que :

(i) $\forall\, u \in H_o^m(\omega)$, $\|\frac{u}{r^k}\|_{H^{m-k}(\omega)} \leq C\, \|u\|_{H^m(\omega)}$

(ii) $\forall\, f \in H^{-m+k}(\omega)$, $\|\frac{f}{r^k}\|_{H^{-m}(\omega)} \leq C\, \|f\|_{H^{-m+k}(\omega)}$.

(i) la démonstration se fait par récurrence sur k

. k=1 , soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq m-1$. On a :

$$D^\alpha(\frac{\varphi}{r}) = \sum_{o\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta(\frac{1}{r})\, D^{\alpha-\beta}\varphi = \sum_{o\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\, r^{-1-|\beta|}\, \frac{P_\beta}{r^{|\beta|}}\, D^{\alpha-\beta}(\varphi)$$

où P_β est un polynôme homogène de degré $|\beta|$. $\frac{P_\beta}{r^{|\beta|}}$ est donc borné sur ω

et d'après le lemme (3.2) :

$$\|\frac{D^{\alpha-\beta}\varphi}{r^{|\beta|+1}}\|_{L^2(\omega)} \leq C\, \|\varphi\|_{H^{|\alpha|+1}(\omega)} \leq C\, \|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

donc $\|\frac{\varphi}{r}\|_{H^{m-1}(\omega)} \leq C\, \|\varphi\|_{H^m(\omega)}$.

. $1<k\leq m$, on fait l'hypothèse de récurrence suivante : pour tout entier h, $o\leq h<k$, il existe une constante $C(h,m)$ telle que :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\omega) \ ,\ \|\frac{\varphi}{r^h}\|_{H^{m-h}(\omega)} \leq C(h,m)\, \|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

donc pour $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$:

$$\|\frac{\varphi}{r^k}\|_{H^{m-k}(\omega)} \leq C(k-1,m)\, \|\frac{\varphi}{r}\|_{H^{m-1}(\omega)} \leq C(k-1,m)\, C(1,m)\, \|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

(ii) soit $f \in H^{-m+k}(\omega)$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$

$$<\frac{f}{r^k}, \varphi>_{\mathcal{D}'(\omega)\times\mathcal{D}(\omega)} = <f, \frac{\varphi}{r^k}>_{H^{-m+k}(\omega)\times H_o^{m-k}(\omega)}$$

d'après (i)

$$|<\frac{f}{r^k}, \varphi>_{\mathcal{D}'(\omega)\times\mathcal{D}(\omega)}| \leq C\, \|f\|_{H^{-m+k}(\omega)}\, \|\varphi\|_{H^m(\omega)}\ ,$$

donc $f/_{r^k} \in H^{-m}(\omega)$ et on a la majoration cherchée.

<u>Lemme 3.5.</u> : Pour tout m et k entiers positifs, pour tout réel positif R, il existe une constante C (=C(m,k,R)) telle que :

(i) $\forall\ u \in H_0^m(\omega)$, à support dans le disque de centre 0 et de rayon R,

$$\| r^k u \|_{H^m(\omega)} \leq C \, \| u \|_{H^m(\omega)}$$

(ii) $\forall\ f \in H^{-m}(\omega)$, à support dans le disque de centre 0 et de rayon R,

$$\| r^k f \|_{H^{-m}(\omega)} \leq C \, \| f \|_{H^{-m}(\omega)}$$

(i) soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq m$, on a :

$$D^\alpha (r^k \varphi) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} r^{k-|\beta|} \frac{P_\beta}{r^{|\beta|}} D^{\alpha-\beta} \varphi$$

donc

$$\| D^\alpha (r^k \varphi) \|_{L^2(\omega)} \leq \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_\beta \left\| \frac{D^{\alpha-\beta} \varphi}{r^{|\beta|}} \cdot r^k \right\|_{L^2(\omega)}$$

Si φ est à support dans le disque de centre 0 et de rayon R

$$\left\| r^k \frac{D^{\alpha-\beta} \varphi}{r^{|\beta|}} \right\|_{L^2(\omega)} \leq C R^k \, \| \varphi \|_{H^m(\omega)} ,$$

d'après le lemme 3.2.

donc $\| D^\alpha (r^k \varphi) \|_{L^2(\omega)} \leq C \, \| \varphi \|_{H^m(\omega)}$

(ii) Soit $f \in H^{-m}(\omega)$, à support dans le disque de centre 0 et de rayon R soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ et soit $\Psi \in \mathcal{D}(\omega)$ à support contenu dans le disque de centre 0 et de rayon 2R, et telle que $\Psi(x,y) = 1$ pour $r(x,y) \leq R$

$$\begin{aligned} \langle r^k f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\omega) \times \mathcal{D}(\omega)} &= \langle r^k f, \Psi \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\omega) \times \mathcal{D}(\omega)} \\ &= \langle f, r^k \Psi \varphi \rangle_{H^{-m}(\omega) \times H_0^m(\omega)} \end{aligned}$$

d'après le lemme (3.5) (i)

$$|\langle r^k f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\omega)\times\mathcal{D}(\omega)}| \leq C(m,k,2R)\, \|f\|_{H^{-m}(\omega)}\, \|\psi\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

$$\leq C_1\, \|f\|_{H^{-m}(\omega)}\, \|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

donc $r^k f \in H^{-m}(\omega)$ et on a la majoration cherchée.

Lemme 3.6. : Soient m et k deux entiers positifs. Pour toute distribution T de $\mathcal{D}'(\omega)$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $r^k T \in H^{-m}(\omega)$

(ii) pour tout entier p, $o\leq p\leq k$, $x^p\, y^{k-p}\, T \in H^{-m}(\omega)$.

(i) ⟹ (ii)

Supposons donc que $r^k T \in H^{-m}(\omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ et soit p un entier tel que $o\leq p\leq k$, on a :

$$\langle x^p\, y^{k-p} T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\omega)\times\mathcal{D}(\omega)} = \langle r^k T, \frac{x^p\, y^{k-p}}{r^k}\varphi\rangle_{H^{-m}(\omega)\times H_o^m(\omega)}$$

donc d'après le lemme (3.3) (i)

$$|\langle x^p\, y^{k-p} T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\omega)\times\mathcal{D}(\omega)}| \leq C\, \|r^k T\|_{H^{-m}(\omega)}\, \|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

donc $x^p\, y^{k-p} T \in H^{-m}(\omega)$

(ii) ⟹ (i)

Supposons donc que pour tout entier p, $o\leq p\leq k$, $x^p\, y^{k-p} T \in H^{-m}(\omega)$ soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, on a :

$$\langle r^k T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\omega)\times\mathcal{D}(\omega)} = \langle r^{2k} T, \frac{\varphi}{r^k}\rangle_{\mathcal{D}'(\omega)\times\mathcal{D}(\omega)}$$

$$= \sum_{p=o}^{k} C_k^p \langle x^{2p}\, y^{2(k-p)} T, \frac{\varphi}{r^k}\rangle_{\mathcal{D}'(\omega)\times\mathcal{D}(\omega)}$$

$$= \sum_{p=o}^{k} C_k^p \langle x^p\, y^{k-p} T, \frac{x^p\, y^{k-p}}{r^k}\varphi\rangle_{H^{-m}(\omega)\times H_o^m(\omega)}$$

donc d'après le lemme 3.3. (i)

$$|\langle r^k T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\omega) \times \mathcal{D}(\omega)}| \leq (C \sum_{p=o}^{k} \|x^p\, y^{k-p} T\|_{H^{-m}(\omega)}) \, \|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

donc :

$$r^k T \in H^{-m}(\omega).$$

4. UN AUTRE ENONCE DU THEOREME DE REGULARITE.

Pour k entier, $k \geq -m$, on définit les espaces suivants :

$$X_*^{2m+k}(\Omega) = \{u \in H_o^m(\Omega) \ , \ r^j \, D^{\alpha_j} u \in L^2(\Omega) \ , \quad |\alpha_j| = m+j \ , \ j=0,1,2,\ldots,m+k\}$$

muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{X_*^{2m+k}(\Omega)} = (\|u\|^2_{H^m(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m+k} \sum_{|\alpha_j|=m+j} \|r^j \, D^{\alpha_j} u\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

Pour k entier, $k \geq -m+1$, on définit les espaces suivants :

$$Y_*^k(\Omega) = \{f \in H^{-m}(\Omega) \ , \ r^j \, D^{\alpha_j} f \in H^{-m+1}(\Omega) \ , \quad |\alpha_j| = j-1 \ , \ j=1,2,\ldots,m+k\}$$

muni de la norme :

$$f \longmapsto \|f\|_{Y_*^k(\Omega)} = (\|f\|^2_{H^{-m}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m+k} \sum_{|\alpha_j|=j-1} \|r^j \, D^{\alpha_j} f\|_{H^{-m+1}(\Omega)})^{1/2}$$

De plus, on définit $Y_*^{-m}(\Omega)$ comme étant l'espace $H^{-m}(\Omega)$.

On se propose maintenant de démontrer le théorème suivant :

<u>Théorème 4.1.</u> : Pour tout entier k, $k \geq -m$, A est un isomorphisme de $X_*^{2m+k}(\Omega)$ sur $Y_*^k(\Omega)$.

La démonstration se fait par récurrence sur k.

On rappelle que A est un isomorphisme de $H_o^m(\Omega)$ $(=X_*^m(\Omega))$ sur $H^{-m}(\Omega)$ $(=Y_*^{-m}(\Omega))$.

$1^{\text{ère}}$ Etape : $k=-m+1$

On peut localiser le problème en 0

On se propose alors de démontrer que si $u \in H_0^m(\omega)$, à support contenu dans $\overline{\Omega}$, si $f \in Y_*^{-m+1}(\omega)$ et vérifient $Au = f$ dans ω, alors $u \in X_*^{m+1}(\omega)$ (les définitions des espaces sur ω se déduisent immédiatement de celles données sur Ω). Pour cela, on adapte la méthode des quotients différentiels [3] en remplaçant le groupe des translations par un groupe d'homothéties $(G_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définies de la façon suivante :

. pour une fonction u définie sur ω, la fonction $G_t u$ est définie sur ω par :

$$G_t u(x,y) = u(e^t x,y)$$

. pour une distribution T définie sur ω, la distribution $G_t T$ est définie sur ω par :

$$G_t\, T : \varphi \longmapsto e^{-t} \langle T, G_{-t}\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\omega) \times \mathcal{D}(\omega)} \quad : \mathcal{D}(\omega) \longmapsto \mathbb{C}.$$

On vérifie que le générateur infinitésimal du groupe $(G_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est l'opérateur $x \frac{\partial}{\partial x}$.

On forme donc pour $t \in \mathbb{R}$, $t \neq o$:

$$A \frac{G_t u-u}{t} = \frac{G_t f-f}{t} + \frac{A\, G_t u-G_t\, Au}{t}$$

On va montrer que $\left\| A \frac{G_t u-u}{t} \right\|_{H^{-m}(\omega)}$ reste borné quand t tend vers zéro.

<u>Lemme 4.1.</u> : Si $f \in Y_*^{-m+1}(\omega)$, $\left\| \frac{G_t f-f}{t} \right\|_{H^{-m}(\omega)}$ reste borné quand t tend vers zéro.

ie : il existe une constante C, indépendante de t, telle que pour t suffisamment voisin de 0, on a :

$$\left\|\frac{G_t f-f}{t}\right\|_{H^{-m}(\omega)} \leq C$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, on a :

$$\left\langle\frac{G_t f-f}{t}, \varphi\right\rangle_{H^{-m}(\omega) \times H_0^m(\omega)} = \left\langle f, \frac{e^{-t}\, G_{-t}\varphi - \varphi}{t}\right\rangle_{H^{-m}(\omega) \times H_0^m(\omega)}$$

$$= e^{-t} \left\langle f, \frac{G_{-t}\varphi - \varphi}{t}\right\rangle_{H^{-m}(\omega) \times H_0^m(\omega)} + \frac{e^{-t}-1}{t} \langle f, \varphi\rangle_{H^{-m}(\omega) \times H_0^m(\omega)}$$

Pour le premier terme, on écrit :

$$\frac{G_{-t}\varphi - \varphi}{t}(x,y) = \frac{1}{t}\int_1^{e^{-t}} x\, \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x\xi,y)\, d\xi$$

donc :

$$e^{-t}\left\langle f, \frac{G_{-t}\varphi-\varphi}{t}\right\rangle_{H^{-m}(\omega) \times H_0^m(\omega)} = e^{-t}\left\langle xf, \frac{1}{t}\int_1^{e-t} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x\xi,y)d\xi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\omega) \times \mathcal{D}(\omega)}$$

$$= -e^{-t}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}(xf), \frac{1}{t}\int_1^{e^{-t}} \frac{1}{\xi}\varphi(x\xi,y)d\xi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\omega)\times\mathcal{D}(\omega)}$$

or d'après le lemme 3.6, puisque $f \in Y_*^{-m+1}(\omega)$ ie : en particulier $rf \in H^{-m+1}(\omega)$, alors $xf \in H^{-m+1}(\omega)$ et donc $\frac{\partial}{\partial x}(xf) \in H^{-m}(\omega)$, de sorte qu'il nous suffit de montrer que

$$\left\|\frac{1}{t}\int_1^{e^{-t}} \varphi(x\xi,y)\, \frac{d\xi}{\xi}\right\|_{H^m(\omega)} \quad \text{reste borné quand t tend vers zéro.}$$

On a :

$$D_x^\alpha\, D_y^\beta\left(\frac{1}{t}\int_1^{e^{-t}} \varphi(x\xi,y)\, \frac{d\xi}{\xi}\right) = \frac{1}{t}\int_1^{e^{-t}} (D_x^\alpha\, D_y^\beta\, \varphi)(x\xi,y)\, \xi^{\alpha-1}\, d\xi$$

donc

$$\int_\omega \left|D_x^\alpha\, D_y^\beta\left(\frac{1}{t}\int_1^{e^{-t}} \varphi(x\xi,y)\frac{d\xi}{\xi}\right)\right|^2 dxdy \leq$$

$$\leq \frac{|1-e^{-t}|}{t^2}\int_\omega \left|\int_1^{e^{-t}} |(D_x^\alpha\, D_y^\beta\, \varphi)(x\xi,y)|^2\, \xi^{2(\alpha-1)} d\xi\right|\, dx\, dy$$

pour tout t voisin de zéro, e^{-t} est voisin de 1, donc $0 < \xi^{2(\alpha-1)} \leq C$,

donc :

$$\int_\omega |D_x^\alpha D_y^\beta (\frac{1}{t}\int_1^{e^{-t}} \varphi(x\xi,y)\frac{d\xi}{\xi})|^2 \, dx\, dy \leq$$

$$\leq C \frac{|1-e^{-t}|}{t^2} \int_\omega \left| \int_1^{e^{-t}} |(D_x^\alpha D_y^\beta \varphi)(x\xi,y)|^2 \, d\xi \right| dx\, dy$$

on fait le changement de variables $X = x\xi$, après avoir permuté les signes d'intégration, ce qui donne finalement :

$$\int_\omega |D_x^\alpha D_y^\beta (\frac{1}{t}\int_1^{e^{-t}} \varphi(x\xi,y)\frac{d\xi}{\xi})|^2 \, dx\, dy \leq$$

$$\leq C \frac{|1-e^{-t}|}{t} \int_\omega |(D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x,y))|^2 \, dx\, dy$$

Donc pour t suffisamment voisin de zéro, on a :

$$|e^{-t} \langle f, \frac{G_{-t}\varphi-\varphi}{t}\rangle_{H^{-m}(\omega)\times H_0^m(\omega)} \leq C\,\|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

où C est une constante indépendante de t.

Pour le deuxième terme $\frac{e^{-t}-1}{t} \langle f,\varphi\rangle_{H^{-m}(\omega)\times H_0^m(\omega)}$, pour t voisin de zéro, on a :

$$|\frac{e^{-t}-1}{t} \langle f,\varphi\rangle_{H^{-m}(\omega)\times H_0^m(\omega)}| \leq C\,\|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

où C est une constante indépendante de t.

Donc pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, on a :

$$|\langle \frac{G_t f-f}{t},\varphi\rangle_{H^{-m}(\omega)\times H_0^m(\omega)}| \leq C\,\|\varphi\|_{H_0^m(\omega)} \text{, pour t voisin de zéro.}$$

d'où le lemme 4.1.

Lemme 4.2. : Si $u \in H_0^m(\omega)$, alors

$$\left\| \frac{A\, G_t u - G_t\, Au}{t} \right\|_{H^{-m}(\omega)} \text{ reste borné quand } t \text{ tend vers zéro.}$$

Pour montrer cela, on développe l'opérateur A, et on l'écrit sous la forme :

$$A = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha\, D^\alpha$$

On est amené à montrer que pour $|\alpha| \leq 2m$,

$$\left\| \frac{a_\alpha\, D^\alpha G_t u - G_t\, a_\alpha D^\alpha u}{t} \right\|_{H^{-m}(\omega)} \text{ reste borné quand } t \text{ tend vers zéro.}$$

Posant $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ il vient :

$$\frac{a_\alpha\, D^\alpha\, G_t u - G_t (a_\alpha D^\alpha u)}{t} = \frac{e^{\alpha_1 t}\, a_\alpha\, G_t (D^\alpha u) - (G_t\, a_\alpha)(G_t (D^\alpha u))}{t}$$

$$= \frac{e^{\alpha_1 t}\, a_\alpha - G_t\, a_\alpha}{t}\quad G_t\, D^\alpha u$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, on a :

$$\left\langle \frac{a_\alpha D^\alpha (G_t u) - G_t (a_\alpha\, D^\alpha u)}{t}, \varphi \right\rangle_{H^{-m}(\omega) \times H_0^m(\omega)} = \left\langle G_t\, D^\alpha u, \frac{e^{\alpha_1 t}\, a_\alpha - G_t\, a_\alpha}{t} \varphi \right\rangle_{H^{-m}(\omega) \times H_0^m(\omega)}$$

donc :

$$\left| \left\langle \frac{a_\alpha\, D^\alpha (G_t u) - G_t (a_\alpha\, D^\alpha u)}{t}, \varphi \right\rangle_{H^{-m}(\omega) \times H_0^m(\omega)} \right| \leq \| G_t D^\alpha u \|_{H^{-m}(\omega)} \left\| \frac{e^{\alpha_1 t}\, a_\alpha - G_t\, a_\alpha}{t} \varphi \right\|_{H^m(\omega)}$$

Or on a le :

Lemme 4.3. : Soit $a \in C^\infty(\bar{\omega})$ telle que :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^2 , \quad \sup_{(x,y) \in \omega} |x\, D^\alpha a(x,y)| < +\infty$$

Pour tout m et p, entiers positifs, il existe une constante C (=C(a,p,m))

telle que :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\omega) , \left\| \frac{a\, e^{pt} - G_t a}{t} \varphi \right\|_{H^m(\omega)} \leq C\, \|\varphi\|_{H^m(\omega)} .$$

Il suffit de majorer des termes de la forme

$$\left\| D^{\alpha} \frac{ae^{pt} - G_t a}{t} \; D^{\beta} \varphi \right\|_{L^2(\omega)} \quad \text{avec } |\alpha|+|\beta| \leq m$$

Posant $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$ on a :

$$D^{\alpha} \frac{ae^{pt}-G_t a}{t} = \frac{D^{\alpha}a \; e^{pt}-e^{\alpha_1 t} \; G_t \; D^{\alpha}a}{t}$$

$$= \frac{e^{pt}-1}{t} D^{\alpha}a + \frac{D^{\alpha}a-G_t \; D^{\alpha}a}{t} + \frac{1-e^{\alpha_1 t}}{t} G_t \; D^{\alpha}a$$

$$= \frac{e^{pt}-1}{t} D^{\alpha}a + \frac{1-e^{\alpha_1 t}}{t} G_t \; D^{\alpha}a - x \; e^{\Theta t} \; D_x \; D^{\alpha}a(e^{\Theta t}x,y) \quad \text{avec } 0<\Theta<1$$

de l'hypothèse faite sur les dérivées de a on déduit :

$$\sup_{(x,y)\in\omega} \left| D^{\alpha} \frac{ae^{pt}-G_t a}{t} (x,y) \right| \leq C,$$

où C est une constante indépendante de t, pour t voisin de zéro.

Donc :

$$\left\| D^{\alpha} \frac{ae^{pt}-G_t a}{t} D^{\beta} \varphi \right\|_{L^2(\omega)} \leq C \left\| D^{\beta} \varphi \right\|_{L^2(\omega)}$$

d'où l'on déduit le lemme 4.3. Remarquons que ce résultat est valable pour des fonctions $\varphi \in H^m(\omega)$.

On revient à la démonstration du lemme 4.2 : du lemme 4.3, on déduit :

$$\left| \left\langle \frac{a_{\alpha} D^{\alpha}(G_t u)-G_t (a_{\alpha} D^{\alpha}u)}{t}, \varphi \right\rangle_{H^{-m}(\omega) \times H^m_0(\omega)} \right| \leq C \, \|\varphi\|_{H^m(\omega)}$$

(car $\|G_t \; D^{\alpha}u\|_{H^{-m}(\omega)} \leq C \, \|D^{\alpha}u\|_{H^{-m}(\omega)}$, où C est une constante indépendante de t pour t voisin de 0).

Donc pour tout α, $|\alpha| \leq 2m$

$$\left\| \frac{a_{\alpha} D^{\alpha} \; G_t u-G_t \; a_{\alpha} \; D^{\alpha}u}{t} \right\|_{H^{-m}(\omega)} \text{ reste borné quand t tend vers zéro}$$

d'où l'on déduit le lemme 4.2.

Ainsi, les lemme (4.1) et (4.2) montrent que si $u \in H_o^m(\omega)$, à support compact contenu dans $\bar{\Omega}$, si $f \in Y_*^{-m+1}(\omega)$ et vérifient $Au = f$ dans ω, alors

$$A\,\frac{G_t u-u}{t} \text{ reste dans un borné de } H^{-m}(\omega), \text{ quand } t \text{ tend vers zéro,}$$

et donc

$$A\,\frac{G_t u-u}{t} \text{ reste dans un borné de } H^{-m}(\Omega), \text{ quand } t \text{ tend vers zéro}$$

A étant un isomorphisme de $H_o^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega)$, il en résulte que :

$$\frac{G_t u-u}{t} \text{ reste dans un borné de } H_o^m(\Omega) \text{ quand } t \text{ tend vers zéro,}$$

d'où l'on déduit que $x\,\frac{\partial u}{\partial x} \in H_o^m(\Omega)$. De même, on montre que $y\,\frac{\partial u}{\partial y} \in H_o^m(\Omega)$. De ce premier résultat, on va déduire que $u \in X_*^{m+1}(\Omega)$. Il nous reste pour cela, à montrer que :

$$r\,D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = m+1$$

ou ce qui est équivalent que :

$$x\,D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ et } y\,D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = m+1$$

De la relation $x\,D_x u \in H_o^m(\Omega)$, on déduit que pour $|\beta| = m$ on a :

$$x\,D^\beta\,D_x u \in L^2(\Omega)$$

Il suffit donc de montrer que

$$x\,D_y^{m+1}\,u \in L^2(\Omega).$$

Pour cela, on montre que $v = x\,D_y^m u \in K^{1,m}(\omega)$ ($=H^1(\omega)$ d'après le lemme 3.1) : on a en effet :

- $v \in L^2(\omega)$ (car $u \in H_o^m(\Omega)$)
- $D_x v \in L^2(\omega)$ (car $x\,D_x u \in H_o^m(\Omega)$)
- $D_y^m v \in H^{-m+1}(\omega)$: pour cela on revient à l'équation :

$$x\,a_{o,2m}(x,y)\,D_y^{2m}u(x,y) = xf(x,y) + \sum_{|\alpha|\leq 2m-1} x\,a_\alpha(x,y)\,D^\alpha\,D_x u(x,y)$$

d'après ce qui précède et d'après les lemmes 3.5 et 3.6, on déduit d'abord que

$$x\, a_{o,2m}(x,y)\, D_y^{2m}\, u(x,y) \in H^{-m+1}(\omega).$$

Appliquant ensuite une réciproque de l'inégalité de Garding [o], on déduit ensuite que

$$x\, D_y^{2m}\, u (= D_y^m\, v) \in H^{-m+1}(\omega),$$

donc $v \in K^{1,m}(\omega) = H^1(\omega)$ et, en particulier $D_y\, v = x\, D_y^{m+1} u \in L^2(\Omega)$.

De la même façon, on montrerait que $y\, D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| = m+1$.

Ainsi on a montré que si $u \in H_o^m(\Omega)$ et $Au \in Y_*^{-m+1}(\Omega)$, alors $u \in X_*^{m+1}(\Omega)$.

Inversement, on se propose de montrer que si $u \in X_*^{m+1}(\Omega)$, alors $Au \in Y_*^{-m+1}(\Omega)$ et pour cela, il suffit évidemment de montrer que si $u \quad X_*^{m+1}(\Omega)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq 2m$, $D^\alpha u \in Y_*^{-m+1}(\Omega)$.

Pour $|\alpha| \leq m+1$, $r\, D^\alpha u \in L^2(\Omega) \subset H^{-m+1}(\Omega)$, car $u \in X_*^{m+1}(\Omega)$.

Supposons que pour j tel que $1 \leq j \leq k < m$, on a :

$$r\, D^{\alpha_j}\, u \in H^{-j+1}(\Omega) \text{ pour } |\alpha_j| = m+j$$

Montrons la propriété pour $k+1$ ie :

$$r\, D^\alpha u \in H^{-k}(\Omega) \quad \text{pour } |\alpha| = m+k+1.$$

D'après l'hypothèse de récurrence pour $|\beta| = m+k$

$$D(r\, D^\beta u) \in H^{-k}(\Omega), \text{ où } D = D^\gamma \text{ avec } |\gamma| = 1$$

ie : $D(r)\, D^\beta u + r\, D^\beta\, Du \in H^{-k}(\Omega)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

$$\langle D^\beta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} = \langle r\, D^\beta u, \frac{\varphi}{r} \rangle_{H^{-k+1}(\Omega) \times H_o^{k-1}(\Omega)}$$

d'après le lemme 3.4 (i) on a :

$$|\langle D^{\beta}u,\varphi\rangle|_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \leq C\,\|r\,D^{\beta}u\|_{H^{-k+1}(\Omega)}\,\|\varphi\|_{H^{k}(\Omega)}$$

donc $D^{\beta}u \in H^{-k}(\Omega)$ et d'après le lemme 3.3. (ii), $D(r)\,D^{\beta}u \in H^{-k}(\Omega)$.

Par différence, on déduit que $r\,D^{\beta}\,Du \in H^{-k}(\Omega)$ pour $|\beta| = m+k$.

On a donc montré que A est un isomorphisme algébrique de $X_{*}^{m+1}(\Omega)$ sur $Y_{*}^{-m+1}(\Omega)$, mais les calculs faits montrent que c'est un isomorphisme topologique.

<u>$2^{\text{ème}}$ étape</u> : Soit k entier, $k\geq -m+1$. On se propose de montrer que A est un isomorphisme de $X_{*}^{2m+k+1}(\Omega)$ sur $Y_{*}^{k+1}(\Omega)$. On raisonne par récurrence en supposant que pour tout entier h, $-m\leq h\leq k$, A est un isomorphisme de $X_{*}^{2m+h}(\Omega)$ sur $Y_{*}^{h}(\Omega)$.

On aura besoin des lemmes suivants :

<u>Lemme 4.4.</u> : Si $f \in Y_{*}^{k+1}(\Omega)$, alors $x\,Df$, $y\,Df$, $r\,Df \in Y_{*}^{k}(\Omega)$.

On démontre cette propriété par récurrence sur k

. $k=-m$, soit $f \in Y_{*}^{-m+1}(\Omega)$ ie $f \in H^{-m}(\Omega)$ et $rf \in H^{-m+1}(\Omega)$, d'après le lemme 3.6, xf et yf sont dans $H^{-m+1}(\Omega)$, donc $D(rf)$, $D(xf)$, $D(yf)$ sont dans $H^{-m}(\Omega) = Y_{*}^{-m}(\Omega)$.

Or $D(rf) = r\,Df + D(r)f$ et $D(r)f \in H^{-m}(\Omega)$, d'après le lemme 3.3. donc par différence $r\,Df \in Y_{*}^{-m}(\Omega)$. De même $x\,Df$ et $y\,Df$ appartiennent à $Y_{*}^{-m}(\Omega)$.

. $k>-m$, on suppose que pour tout entier h, $-m\leq h\leq k-1$ on a :

si $f \in Y_{*}^{h+1}(\Omega)$, alors $x\,Df$, $y\,Df$, $r\,Df \in Y_{*}^{h}(\Omega)$.

soit donc $f \in Y_*^{k+1}(\Omega)$, d'après l'hypothèse de récurrence $r\,Df \in Y_*^{k-1}(\Omega)$ de sorte qu'il reste à établir que $r^{m+k}\ D^{\alpha}(r\ Df) \in H^{-m+1}(\Omega)$ pour $|\alpha| = m+k-1$ (on étudierait de même $x\ Df$ et $y\ Df$).

Or : $r^{m+k}\ D^{\alpha}(r\ Df) = \sum\limits_{o\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \dfrac{P_\beta}{r^{|\beta|}}\ r^{m+k+1-|\beta|}\ D^{\alpha-\beta}(Df)$.

Comme $f \in Y_*^{k+1}(\Omega)$, $r^{m+k+1-|\beta|}\ D^{\alpha-\beta}\ D\ f \in H^{-m+1}(\Omega)$ et d'après le lemme 3.3

$$\frac{P_\beta}{r^{|\beta|}}\ r^{m+k+1-|\beta|}\ D^{\alpha-\beta}\ Df \in H^{-m+1}(\Omega).$$

<u>Lemme 4.5.</u> : Si $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$, alors pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq 2m$, $D^{\alpha}u \in Y_*^{k}(\Omega)$, et pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq 2m-1$, $D^{\alpha}u \in Y_*^{k+1}(\Omega)$.

On démontre cette propriété par récurrence sur k.

. $k=-m+1$, le résultat a été démontré dans la 1ère étape (pour vérifier que $A\ (X_*^{m+1}(\Omega)) \subset Y_*^{-m+1}(\Omega))$.

. $k \geq -m+1$, on suppose que pour tout entier h, $-m+1 \leq h \leq k$ on a : si $u \in X_*^{2m+h}(\Omega)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq 2m$, $D^{\alpha}u \in Y_*^{h}(\Omega)$.
Soit donc $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega)$, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq 2m$, $D^{\alpha}u \in Y_*^{k}(\Omega)$, de sorte qu'il reste à établir que :

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^2,\ |\alpha| \leq 2m,\ r^{m+k+1}\ D^{\beta}\ (D^{\alpha}u) \in H^{-m+1}(\Omega) \text{ pour } |\beta| = m+k.$$

Or $r^j\ D^{\alpha_j}\ (D^{\alpha}u) \in H^{-m+1}(\Omega)$ pour $|\alpha_j| = j-1$, $j = 1,2,\ldots,m+k$.
puisque Ω est borné, le lemme 3.5 (ii) montre que :

$$r^{m+k+1}\ D^{\alpha_j+\alpha}\ u \in H^{-m+1}(\Omega)$$

pour $o \leq |\alpha_j + \alpha| \leq 3m+k-1$, de sorte qu'il reste à établir que :

$$r^{m+k+1}\ D^{\alpha}u \in H^{-m+1}(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = 3m+k.$$

Comme $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega)$, $r^{m+k+1}\ D^{\beta}u \in L^2(\Omega)$ pour $|\beta| = 2m+k+1$, donc pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = 3m+k$

$$r^{m+k+1}\ D^{\alpha}u + \sum_{0<\gamma\leq\alpha-\beta} \binom{\alpha-\beta}{\gamma} r^{m+k+1-|\gamma|}\ \frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}}\ D^{\alpha-\gamma}\ u \in H^{-m+1}(\Omega).$$

Quand $|\gamma|$ varie entre 1 et $|\alpha-\beta|$, $m+k+1-|\gamma|$ varie entre k+2 et m+k.

. Si $k+2 \leq m+k+1-|\gamma| \leq o$, comme $D^{\alpha-\gamma}\ u \in H^{-2m-k+|\gamma|}(\Omega)$

le lemme 3.4. (ii) montre que :

$$r^{m+k+1-|\gamma|}\ \frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}}\ D^{\alpha-\gamma}\ u \in H^{-m+1}(\Omega)$$

. Si $1 \leq m+k+1-|\gamma| \leq m+k$, comme d'après l'hypothèse de récurrence $r^j\ D^{\alpha_j}\ u \in H^{-m+1}(\Omega)$ pour $j = 1,2,\ldots,m+k$ et $|\alpha_j| = 2m+j-1$ en particulier, et que $|\alpha-\gamma| = 3m+k-|\gamma| = 2m+(m+k+1-|\gamma|)-1$, on a :

$$r^{m+k+1-|\gamma|} D^{\alpha-\gamma} u \in H^{-m+1}(\Omega)$$

et le lemme 3.3. (ii) montre que :

$$r^{m+k+1-|\gamma|}\ \frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}}\ D^{\alpha-\gamma} u \in H^{-m+1}(\Omega)$$

Par différence, on en déduit que $r^{m+k+1}\ D^{\alpha}u \in H^{-m+1}(\Omega)$ pour $|\alpha| = 3m+k$.

On a donc démontré que si $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$, alors pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq 2m$, $D^{\alpha}u \in Y_*^k(\Omega)$.

On en déduit que si $|\alpha| \leq 2m-1$, $D^{\alpha}u \in Y_*^{k+1}(\Omega)$: il suffit en effet de vérifier que :

$$r^{m+k+1}\ D^{\gamma}(D^{\alpha}u) \in H^{-m+1}(\Omega) \text{ pour } |\gamma| = k+m \text{ et } |\alpha| \leq 2m-1.$$

or $r^{m+k}\ D^{\delta}u \in H^{-m+1}(\Omega)$ pour $|\delta| \leq 3m+k-1$, donc $r^{m+k}\ D^{\gamma}(D^{\alpha}u) \in H^{-m+1}(\Omega)$ pour $|\gamma| = k+m$ et $|\gamma| \leq 2m-1$.

Le lemme 3.5 permet de conclure.

Ceci étant, on se propose maintenant de démontrer que si $u \in H_0^m(\Omega)$, si $Au\ (=f) \in Y_*^{k+1}(\Omega)$, alors $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega)$.

On peut localiser le problème en 0. En effet, pour toute fonction Ψ, $[A,\Psi]$ est un opérateur d'ordre 2m-1 et d'après l'hypothèse de récurrence, $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$, donc le lemme 4.5 montre que $[A,\Psi]\ u \in Y_*^{k+1}(\Omega)$.

On se propose donc de montrer que si $u \in H_0^m(\omega)$ à support compact dans $\overline{\Omega}$, si $Au\ (=f) \in Y_*^{k+1}(\Omega)$, alors $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega)$. En particulier, $f \in Y_*^{-m+1}(\omega)$, donc d'après la $1^{\text{ère}}$ étape $x\ D_x u$, $y\ D_y u$, sont dans $H_0^m(\Omega)$.

On forme :

$$A(x\ D_x u) = x\ D_x f + [A, x\ D_x]\ u$$

D'après le lemme 4.4., $x\ D_x f \in Y_*^k(\Omega)$.

L'opérateur $[A, x\ D_x]$ est un opérateur différentiel à coefficients dans $C^\infty(\overline{\Omega})$ d'ordre 2m, donc d'après le lemme 4.5 et le fait que $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$, on déduit que $[A, x\ D_x]\ u \in Y_*^k(\Omega)$.

D'après l'hypothèse de récurrence $x\ D_x u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$ et de même on montrerait que $y\ D_y u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$. Pour montrer que $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega)$, il nous reste à montrer que :

(4.1) $\qquad r^{m+k+1}\ D^{\alpha}u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| = 2m+k+1$

ou ce qui est équivalent que :

(4.2) $x.r^{m+k}\ D^{\alpha}u \in L^2(\Omega)$ et $y.r^{m+k}\ D^{\alpha}u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| = 2m+k+1$.

Or $x\, D_x u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$, donc en particulier

$$r^{m+k}\, D^\alpha(x\, D_x u) \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = 2m+k$$

Comme $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$, on en déduit que :

$$x\, r^{m+k}\, D^\alpha\, D_x u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = 2m+k$$

Pour avoir (4.2), il nous reste à montrer que

(4.3) $$x\, r^{m+k}\, D_y^{2m+k+1}\, u \in L^2(\Omega)$$

ce qui équivaut à

(4.4) $$x\, D_y\, (r^{m+k}\, D_y^{2m+k}\, u) \in L^2(\Omega)$$

En effet :

$$x\, D_y(r^{m+k}\, D_y^{2m+k} u) = x\, r^{m+k}\, D_y^{2m+k+1} u + (m+k)\, \frac{xy}{r}\, r^{m+k-1}\, D_y^{2m+k} u.$$

Or $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$, donc $r^{m+k}\, D_y^{2m+k}\, u \in L^2(\Omega)$, donc

$$yx\, r^{m+k-2}\, D_y^{2m+k}\, u \in L^2(\Omega).$$

On pose $v = x\, r^{m+k}\, D_y^{2m+k}\, u$, on va montrer que $v \in K^{1,m}(\Omega)$ et donc d'après le lemme 3.1, $D_y\, v \in L^2(\Omega)$.

(i) $v \in L^2(\Omega)$ car Ω est borné et $r^{m+k}\, D_y^{2m+k} u \in L^2(\Omega)$

(ii) $D_x v \in L^2(\Omega)$. En effet :

$$D_x v = r^{m+k}\, D_y^{2m+k} u + (m+k)\, x^2\, r^{m+k-2}\, D_y^{2m+k} u + x\, r^{m+k}\, u \in L^2(\Omega)$$

(iii) $D_y^m v \in H^{-m+1}(\Omega)$. En effet :

$$D_y^m v = x\, r^{m+k}\, D_y^{3m+k}\, u + x \sum_{0<\beta\leq m} \binom{m}{\beta} \frac{P_\beta}{r^\beta}\, r^{m+k-}\quad D_y^{3m+k-\beta} u$$

Pour $1\leq\beta\leq m$, puisque $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$, $r^{m+k-\beta}\quad D_y^{3m+k-\beta} u \in H^{-m+1}(\Omega)$ d'après le lemme 4.5. Donc d'après les lemmes 3.3, 3.5 et 3.6, on déduit que :

$$x \sum_{1\leq\beta\leq m} \binom{m}{\beta} \frac{P_\beta}{r^\beta}\, r^{m+k-\beta}\, D_y^{3m+k-\beta} u \in H^{-m+1}(\Omega).$$

Il nous reste donc à montrer que :

$$x\, r^{m+k}\, D_y^{3m+k}\, u \in H^{-m+1}(\Omega)$$

Pour cela on forme :

$$A(D_y^{m+k} u) = D_y^{m+k} f + [A, D_y^{m+k}]\, u.$$

Comme $f \in Y_*^{k+1}(\Omega)$, $r^{m+k+1}\, D_y^{m+k}\, f \in H^{-m+1}(\Omega)$ donc, d'après le lemme 3.6, $x\, r^{m+k}\, D_y^{m+k}\, f \in H^{-m+1}(\Omega)$

L'opérateur $[A, D_y^{m+k}]$ est un opérateur différentiel d'ordre 3m+k-1, à coefficients dans $C^\infty(\bar{\Omega})$. Puisque $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$, le lemme 4.5 montre que :

(4.5) $\quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^2 \; , \; |\alpha| \leq 3m+k-1 \; , \; r^{m+k+1}\, D^\alpha u \in H^{-m+1}(\Omega)$

Le lemme (3.6) permet d'en déduire que :

(4.5)' $\quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^2 \; , \; |\alpha| \leq 3m+k-1 \; , \; x\, r^{m+k}\, D^\alpha u \in H^{-m+1}(\Omega)$

Donc :

(4.6) $\quad x\, r^{m+k}\, A(D_y^{m+k} u) \in H^{-m+1}(\Omega).$

Pour $|\alpha| = 2m+k$, $x\, r^{m+k}\, D^\alpha\, D_x u \in L^2(\Omega)$ donc

(4.7) $\quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^2 \; , \; \forall\, \beta \in \mathbb{N}^2 \; , \; |\beta| = m-1 \; , \; |\alpha| = 2m+k$

$$x\, r^{m+k}\, D^{\beta+\alpha}\, D_x u + \sum_{o<\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma(x\, r^{m+k})\, D^{\beta+\alpha-\gamma}\, D_x u \in H^{-m+1}(\Omega)$$

La démonstration du lemme (4.5) montre que, puisque $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$,

(4.8) $\quad \forall\, \beta \in \mathbb{N}^2 \; , \; |\beta| = m-1 \; , \; o<\gamma\leq\beta \; , \; r^{m+k+1-|\gamma|}\, D^{\beta+\alpha-\gamma}\, D_x u \in H^{-m+1}(\Omega).$

De plus $D^\gamma(x\, r^{m+k})$ est de la forme :

$$x\, \frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}}\, r^{m+k-|\gamma|} + \varepsilon\, \frac{P_{\gamma-1}}{r^{|\gamma|-1}}\, r^{m+k-|\gamma|+1}$$

où $\varepsilon = o$ si $\gamma_1 = o$ et $\varepsilon = 1$ sinon (avec $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$).

En utilisant les lemmes 3.3 et 3.6, et la relation (4.8), on déduit que :

$\forall\ \beta \in \mathbb{N}^2$, $|\beta| = m-1$, $0<\gamma\leq\beta$, $D^\gamma(x\ r^{m+k})\ D^{\beta+\alpha-\gamma}\ D_x u \in H^{-m+1}(\Omega)$

et donc :

$$\sum_{0<\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma(x\ r^{m+k})\ D^{\beta+\alpha-\gamma}\ D_x u \in H^{-m+1}(\Omega)$$

et par différence, la relation (4.7) montre que :

(4.9) pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq 3m+k-1$ $\quad x\ r^{m+k}\ D^\alpha\ D_x u \in H^{-m+1}(\Omega)$.

Des relations (4.5)', (4.6), (4.9) on déduit que :

$$x\ r^{m+k}\ a_{o,2m}(x,y)\ D_y^{3m+k} u \in H^{-m+1}(\Omega)$$

D'après une réciproque de l'inégalité de Garding [O], on déduit que :

$$x\ r^{m+k}\ D_y^{3m+k} u \in H^{-m+1}(\Omega)$$

c'est ce qui nous restait à montrer pour en déduire que $v \in K^{1,m}(\Omega)$ donc on a

(4.4) $\quad x\ D_y(r^{m+k}\ D_y^{2m+k}\ u) \in L^2(\Omega)$.

En conclusion si $u \in H_o^m(\Omega)$, $Au\ (=f) \in Y_*^{k+1}(\Omega)$ alors $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega)$.

Inversement si $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega)$, le lemme (4.5) montre que $Au \in Y_*^{k+1}(\Omega)$.

Donc A est un isomorphisme algébrique et topologique d'après les calculs faits de $X_*^{2m+k}(\Omega)$ sur $Y_*^k(\Omega)$ pour k entier $\geq -m$.

5 - Identité des espaces $X_*^{2m+k}(\Omega)$ (resp $Y_*^k(\Omega)$) et $X^{2m+k}(\Omega)$ (resp $Y^k(\Omega)$).

Lemme 5.1 : Les espaces $X_*^{2m+k}(\Omega)$ et $X^{2m+k}(\Omega)$, pour $k \geq -m$, sont identiques algébriquement et topologiquement.

On fait la démonstration par récurrence sur k. Pour $k=-m$, il n'y a rien à démontrer, car par définition :

$$X_*^{-m}(\Omega) = X^{-m}(\Omega) = H_o^m(\Omega)$$

. $k=-m+1$.

On démontre d'abord l'inclusion $X^{m+1}(\Omega) \subset X_*^{m+1}(\Omega)$.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = m+1$ et pour $u \in X^{m+1}(\Omega)$ on a :

$$(5.1) \qquad r\, D^\alpha u + \sum_{o<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta r\, D^{\alpha-\beta} u = D^\alpha (ru) \in L^2(\Omega)$$

Pour $o<\beta\leq\alpha$, $D^\beta r\, D^{\alpha-\beta}u = \dfrac{P_\beta}{r^{|\beta|}} \cdot \dfrac{D^{\alpha-\beta}u}{r^{|\beta|-1}} \in L^2(\Omega)$ d'après le lemme 3.2.

(car $u \in H_o^m(\Omega)$).

Donc $r\, D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = m+1$.

On démontre maintenant l'inclusion $X_*^{m+1}(\Omega) \subset X^{m+1}(\Omega)$.

Soit $u \in X_*^{m+1}(\Omega)$. On veut montrer que $ru \in H^{m+1}(\Omega)$ ie : $ru \in H^m(\Omega)$ et $D^\alpha(ru) \in L^2(\Omega)$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = m+1$.

Or $u \in H_o^m(\Omega)$, donc d'après le lemme 3.5 $ru \in H^m(\Omega)$.

La relation (5.1) et les calculs précédents montrent que $D^\alpha(ru) \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| = m+1$.

Les inclusions algébriques que l'on vient de vérifier, sont aussi topologiques.

. <u>$k > -m+1$</u>

Supposons que pour tout entier h, $-m \leq h \leq k$, $X_*^{2m+h}(\Omega) = X^{2m+h}(\Omega)$.
On démontre d'abord l'inclusion $X^{2m+k+1}(\Omega) \subset X_*^{2m+k+1}(\Omega)$.

Soit $u \in X^{2m+k+1}(\Omega)$, donc $u \in X_*^{2m+k}(\Omega) = X^{2m+k}(\Omega)$. Il suffit pour montrer que $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega)$, de vérifier que

$$\text{pour } \alpha \in \mathbb{N}^2,\ |\alpha| = 2m+k+1,\ r^{m+k+1}\, D^\alpha u \in L^2(\Omega).$$

Par hypothèse

$$D^\alpha(r^{m+k+1}u) = r^{m+k+1}\, D^\alpha u + \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{P_\beta}{r^{|\beta|}}\, r^{m+k+1-|\beta|}\, D^{\alpha-\beta} u \in L^2(\Omega)$$

Comme $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$, $r^j\, D^{\alpha_j} u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha_j| = m+j$, $j = 0,1,\dots,m+k$

donc pour les β tels que :

$$.\ 0 < |\beta| \leq m+k+1 \ ,\qquad \frac{P_\beta}{r^{|\beta|}}\, r^{m+k+1-|\beta|}\, D^{\alpha-\beta} u \in L^2(\Omega).$$

Pour les β tels que :

. $m+k+1 < |\beta| \leq 2m+k+1$, puisque $u \in H_0^m(\Omega)$, le lemme 3.2 permet de dire que $\dfrac{P_\beta}{r^{|\beta|}}\, r^{m+k+1-|\beta|}\, D^{\alpha-\beta} u \in L^2(\Omega)$.

Donc par différence $\qquad r^{m+k+1}\, D^\alpha u \in L^2(\Omega)$.

On démontre maintenant l'inclusion inverse $X_*^{2m+k+1}(\Omega) \subset X^{2m+k+1}(\Omega)$.
Soit $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega) \subset X_*^{2m+k}(\Omega) = X^{2m+k}(\Omega)$. Il suffit, pour montrer que $u \in X^{2m+k+1}(\Omega)$, de vérifier que :

$$r^{m+k+1} u \in H^{2m+k+1}(\Omega)$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \text{(i)} \ r^{m+k+1} \ u \in H^{2m+k}(\Omega) \\ \text{(ii)} \ D^{\alpha}(r^{m+k+1}u) \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^2, \ |\alpha| = 2m+k+1. \end{cases}$$

La condition (ii) se déduit des calculs faits précédemment, du fait que $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$ et du fait que $r^{m+k+1} \ D^{\alpha}u \in L^2(\Omega)$, pour $|\alpha| = 2m+k+1$.

Pour la condition (i), on forme pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq 2m+k$:

$$D^{\alpha}(r^{m+k+1}u) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} r^{m+k+1-|\beta|} \frac{P_\beta}{r^{|\beta|}} D^{\alpha-\beta}u$$

Or $u \in X_*^{2m+k}(\Omega)$ donc pour $m \leq |\alpha-\beta| \leq 2m+k$,

$$r^{|\alpha-\beta| -m} D^{\alpha-\beta}u \in L^2(\Omega).$$

Comme $r^{m+k+1-|\beta|} \dfrac{P_\beta}{r^{|\beta|}} D^{\alpha-\beta}u = r^{2m+k-|\alpha|+1} \dfrac{P_\beta}{r^{|\beta|}} r^{|\alpha-\beta|-m} D^{\alpha-\beta}u$ et que $2m+k-|\alpha|+1 \geq 0$ et que Ω est borné, on en déduit que :

$$r^{m+k+1-|\beta|} \frac{P_\beta}{r^{|\beta|}} D^{\alpha-\beta}u \in L^2(\Omega) \text{ pour } m \leq |\alpha-\beta| \leq 2m+k$$

Pour $0 \leq |\alpha-\beta| < m$, comme $u \in H_0^m(\Omega)$ le lemme 3.2, montre que

$$r^{|\alpha-\beta|-m} D^{\alpha-\beta}u \in L^2(\Omega)$$

et on termine comme précédemment.

Donc $\quad D^{\alpha}(r^{m+k+1}u) \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq 2m+k$ i.e : $r^{m+k+1} u \in H^{2m+k}(\Omega)$.

Les inclusions algébriques que l'on vient de vérifier, sont aussi topologiques

<u>Lemme 5.2.</u> : Pour tout entier k, $k \geq -m$, les espaces $Y_*^k(\Omega)$ et $Y^k(\Omega)$ sont identiques algébriquement et topologiquement.

On fait la démonstration par récurrence sur k. Pour $k = -m$ il n'y a rien à démontrer car par définition :

$$Y_*^{-m}(\Omega) = Y^{-m}(\Omega) = H^{-m}(\Omega)$$

. <u>$k = m+1$</u>

D'après la définition même des espaces :

$$Y^{-m+1}(\Omega) = Y_*^{-m+1}(\Omega) = \{f \in H^{-m}(\Omega),\ rf \in H^{-m+1}(\Omega)\}.$$

. <u>$k \geq -m+1$</u>

On suppose que pour tout entier h, $-m \leq h \leq k$, on ait :

$$Y^{h}(\Omega) = Y_*^{h}(\Omega).$$

On démontre d'abord l'inclusion $Y^{k+1}(\Omega) \subset Y_*^{k+1}(\Omega)$. Soit $f \in Y^{k+1}(\Omega) \subset Y^{k}(\Omega) = Y_*^{k}(\Omega)$. Il suffit donc, pour montrer que $f \in Y_*^{k+1}(\Omega)$ de vérifier que :

$$\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^2,\ |\alpha| = m+k,\ r^{m+k+1}D^{\alpha}f \in H^{-m+1}(\Omega)$$

Or $f \in Y_{+}^{k\ 1}(\Omega)$, donc $r^{m+k+1}\ f \in H^{k+1}(\Omega)$, donc

$$D^{\alpha}(r^{m+k+1}f) = r^{m+k+1}D^{\alpha}f + \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{P_{\beta}}{r^{|\beta|}}\ r^{m+k+1-|\beta|}\ D^{\alpha-\beta}\ f \in H^{-m+1}(\Omega)$$

Or $f \in Y_*^{k}(\Omega)$, donc pour $0 < \beta \leq \alpha$, $r^{|\alpha|-|\beta|+1}\ D^{\alpha-\beta}u \in H^{-m+1}(\Omega)$ (car $0 \leq |\alpha-\beta| \leq m+k-1$) et d'après le lemme (3.3)

$$\frac{P_{\beta}}{r^{|\beta|}}\ r^{m+k+1-|\beta|}\ D^{\alpha-\beta}u \in H^{-m+1}(\Omega).$$

Par différence, on déduit que $r^{m+k+1}\, D^\alpha f \in H^{-m+1}(\Omega)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = m+k$.

On démontre maintenant l'inclusion $Y_*^{k+1}(\Omega) \subset Y^{k+1}(\Omega)$.

Soit $f \in Y_*^{k+1}(\Omega) \subset Y_*^{k}(\Omega) = Y^k(\Omega)$. Il suffit donc, pour montrer que $f \in Y^{k+1}(\Omega)$ de vérifier que $r^{m+k+1}\, f \in H^{k+1}(\Omega)$.

A étant un isomorphisme de $X_*^{2m+k+1}(\Omega)$ sur $Y_*^{k+1}(\Omega)$ il existe $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega)$ tel que $Au = f$. Pour simplifier on suppose A homogène d'ordre 2m. On est donc ramené à montrer que :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^2,\ |\alpha| = 2m,\ r^{m+k+1}\, D^\alpha u \in H^{k+1}(\Omega)$$

On examine les différents cas :

. <u>$k+1 \leq 0$.</u>

Comme $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega)$, $r^{m+k+1}\, D^\beta u \in L^2(\Omega)$ pour $|\beta| = 2m+k+1$.

Supposons que pour tout entier j, $0 \leq j \leq \ell$ où $\ell < -k+1$, on ait montré que :

$$r^{m+k+1}\, D^\gamma u \in H^{-j}(\Omega) \text{ pour } |\gamma| = 2m+k+1+j$$

et on le montre pour $\ell+1$.

Soit γ tel que $|\gamma| = 2m+k+1+\ell$. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$D(r^{m+k+1}\, D^\gamma u) \in H^{-\ell-1}(\Omega)$$

i.e $r^{m+k+1}\, D^\gamma\, Du + \frac{P_1}{r}\, r^{m+k}\, D^\gamma u \in H^{-\ell-1}(\Omega)$. Il suffit de montrer que $r^{m+k}\, D^\gamma u \in H^{-\ell-1}(\Omega)$ (le lemme 3.3 permettra de conclure).

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle r^{m+k} D^\gamma u , \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \langle r^{m+k+1} D^\gamma u, \frac{\varphi}{r} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}$$

or d'après l'hypothèse de récurrence $r^{m+k+1} D^\gamma u \in H^{-\ell}(\Omega)$ donc

$$|\langle r^{m+k} D^\gamma u,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}| \leq \|r^{m+k+1} D^\gamma u\|_{H^{-\ell}(\Omega)} \, \|\frac{\varphi}{r}\|_{H^{\ell}(\Omega)}$$

et d'après le lemme 3.4

$$|\langle r^{m+k} D^\gamma u, \;\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}| \leq C \, \|r^{m+k+1} D^\gamma u\|_{H^{-\ell}(\Omega)} \, \|\varphi\|_{H^{\ell+1}(\Omega)}$$

ce qui prouve que :

$$r^{m+k} D^\gamma u \in H^{-\ell-1}(\Omega).$$

En particulier on en déduit que : $r^{m+k+1} D^\alpha u \in H^{k+1}(\Omega)$ pour $|\alpha| = 2m$.

. <u>$k+1 > 0$</u>.

On doit montrer que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = 2m$, $|\beta| \leq k+1$:

$$D^\beta (r^{m+k+1} D^\alpha u) \in L^2(\Omega),$$

i.e. $$\sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}} \, r^{m+k+1-|\gamma|} D^{\alpha+\beta-\gamma} u \in L^2(\Omega).$$

Or $u \in X_*^{2m+k+1}(\Omega)$ donc $r^j D^{\alpha_j} u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha_j| = m+j$, $j = 1,2,\ldots,m+k+1$.

Or ici, pour $|\alpha| = 2m$, $|\beta| \leq k+1$ et $0 \leq \gamma \leq \beta$

$$2m \leq |\alpha+\beta-\gamma| \leq 2m+k+1$$

donc $$r^{|\alpha+\beta-\gamma|-m} D^{\alpha+\beta-\gamma} u \in L^2(\Omega)$$

De plus $m+k+1-|\gamma| = (|\alpha+\beta-\gamma|-m) + k+1-|\beta|$ et $k+1-|\beta| \geq 0$ donc comme Ω est borné :

$$\frac{P_\gamma}{r^{|\gamma|}} r^{m+k+1-|\gamma|} D^{\alpha+\beta-\gamma} u \in L^2(\Omega) \text{ pour } 0 \leq \gamma \leq \beta \text{ et } |\beta| \leq k+1.$$

On en déduit donc que $r^{m+k+1} D^\alpha u \in H^{k+1}(\Omega)$ pour $|\alpha| = 2m$.

Les inclusions algébriques que l'on vient de démontrer, sont aussi des inclusions topologiques.

Remarque :

La méthode des homothéties utilisée ici, permet d'obtenir certains résultats de régularité en dimension n, avec n > 2.

BIBLIOGRAPHIE

[0] S. AGMON - Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand Mathematical studies. Princeton.

[1] M. S. HANNA - K. T. SMITH - Some remarks on the Dirichlet problem in piecewise smooth domains. C.P.A.M. Vol. XX. 575-593. 1967.

[2] KONDATREV - Trudy Mosk. 1967 Tome 16.

[3] J. L. LIONS - E. MAGENES - Problèmes aux limites non homogènes et applications. Tome 1. Dunod, 1968.