PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

G. LEBAUD

P. A. RAVIART

Sur l'approximation du problème de Dirichlet pour les opérateurs elliptiques d'ordre 2

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1967-1968
« Publications des séminaires du département de mathématiques », , exp. nº 7, p. 1-64

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1967-1968____A7_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'APPROXIMATION DU PROBLEME DE DIRICHLET POUR LES OPERATEURS ELLIPTIQUES D'ORDRE 2

par

G. LEBAUD et P.A. RAVIART

INTRODUCTION

On considère dans un ouvert Ω borné de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ l'équation elliptique du 2ème ordre

$$(*) \qquad - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + d_i\, u\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c\, u = T$$

où les coefficients a_i, b_i, d_i et c vérifient

$$a_i \in L_\infty(\Omega) \ , \ b_i, \ d_i \in L_r(\Omega) \ , \ c \in L_{r/2}(\Omega)$$

avec $r > n$ et où le second membre T est "irrégulier". Le but de cet article est d'étudier l'approximation du problème de Dirichlet pour l'équation (*) à l'aide d'une classe de méthodes de différences finies classiques.

La 1ère partie fixe les notations et rappelle des résultats fins de régularité donnés par Stampacchia [8] [9] lorsque $T \in W_p^{-1}(\Omega)$ pour $p \geq 2$. On construit dans la 2ème partie une classe de schémas aux différences finies à 2n+1 points en gardant une relative généralité dans le choix de l'approximation de la condition à la frontière. Signalons que le schéma bien connu de Shortley et Weller rentre dans notre cadre. On démontre l'analogue discret de l'inégalité de Sobolev et on examine quelque peu le problème de la coercivité pour les schémas aux différences envisagés.

La 3ème partie est consacrée au cas où $T \in W_2^{-1}(\Omega)$. On démontre un théorème de convergence des solutions approchées dans $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (ou plus exactement dans un espace "voisin" de $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$) ; on généralise ainsi des résultats de Céa [3] obtenus d'ailleurs dans un cadre plus général.

On examine dans la 4ème partie le cas où $T \in W_p^{-1}(\Omega)$ avec $p > 2$. On démontre des théorèmes de majorations des solutions approchées dans $L_\infty(\Omega)$ si $p > n$ et dans $L_{p^*}(\Omega)$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ si $2 < p < n$ et on obtient les théorèmes de convergences correspondants. La méthode de démonstration utilisée est directement adaptée de Stampacchia [8], [9].

Dans la 5ème partie, on transpose par dualité les résultats précédents. On considère d'abord le cas où $T \in L_q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{2n}{n+2}$, et on prouve des théorèmes de majoration et de convergence dans $\overset{\circ}{W}{}^1_{q^*}(\Omega)$, $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$. Ensuite, en supposant que les coefficients a_i, b_i, d_i, c sont assez réguliers, on étudie le cas où T est une mesure et on démontre un résultat d'approximation dans $\overset{\circ}{W}{}^1_s(\Omega)$, $s < \frac{n}{n-1}$, que l'onutilise pour approcher la fonction de Green.

Signalons que les résultats des 4ème et 5ème parties précisent et généralisent ceux obtenus par Bramble [1] par une autre méthode à propos du problème de Dirichlet pour l'équation

$$- \Delta u = T.$$

Le plan de l'article est le suivant :

1 - LE PROBLEME EXACT.

1.1. Définitions et notations.

On considérera des fonctions à valeurs complexes sauf à partir du N° 4 où on se limitera aux fonctions à valeurs réelles.

Soit Ω un ouvert borné de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ de point générique $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et soit Γ sa frontière. On désigne par $C_o^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, par $C^o(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ muni de la norme

$$(1.1) \qquad \|v\|_{C^o(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)|$$

et par $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, m entier ≥ 0, $0 < \lambda < 1$, l'espace des fonctions m fois continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$ dont toutes les dérivées $m^{\text{ièmes}}$ vérifient une condition de Hölder d'exposant λ.

On désigne par $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, l'espace des (classes de) fonctions v définies sur Ω, mesurables pour la mesure de Lebesgue dx et telles que

$$(1.2) \qquad \|v\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty$$

avec la modification habituelle pour $p = \infty$.

$W_p^1(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions $v \in L_p(\Omega)$ telles que toutes les dérivées premières (prises au sens des distributions sur Ω) $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_p(\Omega)$ avec la norme

$$(1.3) \qquad \|v\|_{W_p^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L_p(\Omega)}^p + \|v\|_{L_p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

L'espace $W_2^1(\Omega)$ sera noté $H^1(\Omega)$.

On désigne par $W_p(\frac{\partial}{\partial x_i};\Omega)$, $i = 1,\dots,n$, l'espace des (classes de) fonctions $v \in L_p(\Omega)$ telles que $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|v\|_{W_p(\frac{\partial}{\partial x_i};\Omega)} = (\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|^p_{L_p(\Omega)} + \|v\|^p_{L_p(\Omega)})^{1/p} \tag{1.4}$$

On note $H(\frac{\partial}{\partial x_i};\Omega$, l'espace $W_2(\frac{\partial}{\partial x_i};\Omega)$.

On désigne par $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ (resp. $\overset{\circ}{W}_p(\frac{\partial}{\partial x_i};\Omega)$) l'adhérence dans $W_p^1(\Omega)$ (resp. dans $W_p(\frac{\partial}{\partial x_i};\Omega)$) du sous-espace $C_0^\infty(\Omega)$. On pose $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ et $\overset{\circ}{W}_2(\frac{\partial}{\partial x_i};\Omega) = H_0(\frac{\partial}{\partial x_i};\Omega)$. On rappelle que si la frontière Γ est assez régulière -par exemple une variété de classe C^1 et de dimension n-1, Ω étant situé localement d'un seul côté de Γ- on peut définir la trace $\gamma_0 v = v|_\Gamma \in L_p(\Gamma)$ (1) d'une fonction $v \in W_p^1(\Omega)$. Dans ces conditions, $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ est l'espace des fonctions $v \in W_p^1(\Omega)$ telles que $\gamma_0 v = 0$. On peut donner une caractérisation analogue de $\overset{\circ}{W}_p(\frac{\partial}{\partial x_i};\Omega)$: cf [10].

On rappelle également que les fonctions de $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ vérifient l'inégalité de Sobolev

$$\|v\|_{L_{p^*}(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L_p(\Omega)} , \quad 1 \leq p < n, \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}. \tag{1.5}$$

L'espace $W^{-1}_{p'}(\Omega)$ est le dual fort de $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; c'est l'espace des distributions T sur Ω de la forme

$$T = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} , \quad f_i \in L_{p'}(\Omega) , \ i = 0,1,\dots,n, \tag{1.6}$$

la décomposition (1.6) n'étant évidemment pas unique. Remarquons d'ailleurs

---

(1) $L_p(\Gamma)$ est l'espace des fonctions de $p^{\text{ième}}$ sommable pour la mesure superficielle $d\sigma$ sur Γ.

que, d'après l'inégalité de Sobolev (1.5), on peut prendre dans (1.6) $f_o \in L_{p'_o}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p'_o} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{n}$ si $1 \leq p \leq n$ et $p'_o > 1$ si $p = n$. Si $T \in W^{-1}_{p'}(\Omega)$ est de la forme (1.6) et si $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, la dualité entre $W^{-1}_{p'}(\Omega)$ et $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ s'exprime par

$$(1.7) \qquad < T,v > = \int_\Omega f_o . v . dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot dx.$$

De plus

$$(1.8) \qquad \|T\|_{W^{-1}_{p'}(\Omega)} = \sup_{v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} \frac{|< T,v>|}{\|v\|_{W^1_p(\Omega)}} = \min_{f_o + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = T} \left(\sum_{i=0}^n \|f_i\|^{p'}_{L_{p'}(\Omega)} \right)^{1/p'}$$

L'espace $W^{-1}_2(\Omega)$ sera noté $H^{-1}(\Omega)$.

On introduit maintenant l'espace

$$(1.9) \qquad X_p(\Omega) = L_p(\Omega) \times W_p(\frac{\partial}{\partial x_1};\Omega) \times \ldots\ldots \times W_p(\frac{\partial}{\partial x_n};\Omega)$$

que l'on munit de la norme suivante . Si $\vec{v} = (v_o, v_1, \ldots, v_n) \in X_p(\Omega)$, on pose

$$(1.10) \qquad \|\vec{v}\|_{X_p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|^p_{W_p(\frac{\partial}{\partial x_i};\Omega)} + \|v_o\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

L'adhérence de $(C^\infty_o(\Omega))^{n+1}$ dans $X_p(\Omega)$ n'est autre que l'espace

$$(1.11) \qquad \overset{\circ}{X}_p(\Omega) = L_p(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_p(\frac{\partial}{\partial x_1};\Omega) \times \ldots \times \overset{\circ}{W}_p(\frac{\partial}{\partial x_n};\Omega).$$

On définit ensuite l'opérateur $\vec{\pi} \in \mathcal{L}(W^1_p(\Omega);X_p(\Omega))$ (2) $1 \leq p \leq \infty$, par

$$(1.12) \qquad \vec{\pi} v = (v,v,\ldots,v) \in (W^1_p(\Omega))^{n+1} \subset X_p(\Omega).$$

Il est clair que la restriction de $\vec{\pi}$ à $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ appartient à $\mathcal{L}(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega);\overset{\circ}{X}_p(\Omega))$.

---

(2) $\mathcal{L}(X;Y)$ est l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.

1.2. Théorèmes d'existence et de régularité.

Considérons maintenant l'opérateur différentiel du second ordre

$$A = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + d_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{1.13}$$

où les fonctions a_i, b_i, c et d_i vérifient

$$\begin{cases} a_i \in L_\infty(\Omega) \quad , \; i = 1,\dots,n, \\ b_i,\; d_i \in L_r(\Omega), \; i = 1,\dots,n, \\ c \in L_{r/2}(\Omega). \end{cases} \tag{1.14}$$

On suppose que

$$\operatorname{Re} a_i(x) \geq \alpha > 0, \text{ p.p. dans } \Omega \;, \; i = 1,\dots,n. \tag{1.15}$$

On suppose également que $r = n$ si $n > 2$ et $r > 2$ si $n = 2$. Alors, on peut associer à l'opérateur A la forme sesquilinéaire $a(u,v)$ continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ définie par

$$a(u,v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + d_i u\right) . \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu\right) \overline{v} \right\} dx. \tag{1.16}$$

On dira que la forme $a(u,v)$ est $H_0^1(\Omega)$-elliptique s'il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\operatorname{Re} \; a(v,v) \geq \beta \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad , \; v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.17}$$

Rappelons le résultat classique suivant

Théorème 1.1

Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$: $T = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ *avec*

$$\begin{cases} f_o \in L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega) \text{ si } n > 2, \ f_o \in L_s(\Omega),\ s > 1, \text{ si } n = 2, \\ f_i \in L_2(\Omega) \quad , \quad i = 1,\dots,n. \end{cases} \tag{1.18}$$

Si la forme sesquilinéaire $a(u,v)$ *est* $H_0^1(\Omega)$*-elliptique, il existe une fonction* $u \in H_0^1(\Omega)$ *et une seule vérifiant pour tout* $v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u,v) = \langle T,\overline{v}\rangle = \int_\Omega \{ f_o.\overline{v} - \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} \}\, dx. \tag{1.19}$$

La solution u de (1.19) satisfait aux équations

$$Au = T \quad \text{au sens des distributions sur } \Omega, \tag{1.20}$$

$$\gamma_o u = 0 \quad \text{si la frontière } \Gamma \text{ est assez régulière.} \tag{1.21}$$

Le problème de Dirichlet homogène est ainsi résolu pour l'opérateur A.

Donnons maintenant quelques résultats de régularité pour toute solution de (1.19) lorsque les fonctions considérées sont à valeurs réelles et lorsque dans (1.14) on a $r > n$: cf. [8], [9].

Théorème 1.2

Lorsque

$$\begin{cases} f_o \in L_{p_o}(\Omega) \\ f_i \in L_p(\Omega) \ , \ i = 1,\dots,n \end{cases} \quad , \ p \geq 2,\ \frac{1}{p_o} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}, \tag{1.22}$$

Il existe deux constantes K *et* N *telles que, pour toute solution* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de* (1.19), *on ait*

(i) *si* $p > n$

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq K(\|f_o\|_{L_{p_o}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L_p(\Omega)}) + N\|u\|_{L_2(\Omega)}, \tag{1.23}$$

(ii) *si* $2 \leq p < n$

$$\|u\|_{L_{p^*}(\Omega)} \leq K(\|f_o\|_{L_{p_o}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L_p(\Omega)}) + N\|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}. \tag{1.24}$$

La constante N *est nulle si la forme* a(u,v) *est* $H_o^1(\Omega)$*-elliptique.*

Il résulte des théorèmes précédents que l'opérateur de Green G qui résoud le problème de Dirichlet (1.19) vérifie le

<u>Théorème 1.3</u>

Si la forme a(u,v) *est* $H_o^1(\Omega)$*-elliptique,* G *est un opérateur linéaire continu de* $W_p^{-1}(\Omega)$ *dans* $H_o^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ *si* $p > n$ *et de* $W_p^{-1}(\Omega)$ *dans* $H_o^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ *si* $2 \leq p < n$.

2 - LA PROBLEME APPROCHE.

2.1. Définitions et notations

On se propose d'approcher la solution u du problème de Dirichlet à l'aide de méthodes de différences finies. Pour cela, on introduit un paramètre $h > 0$ destiné à tendre vers 0 et on désigne par $\mathcal{R}_h$ l'ensemble des points M de la forme

$$(2.1) \qquad M = (m_1 h, \ldots\ldots, m_n h) \ , \ m_i \in \mathbb{Z}, \ i = 1, \ldots, n,$$

par $\bar{\omega}_h(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, le pavé

$$(2.2) \qquad \bar{\omega}_h(x) = \prod_{i=1}^{n} \left[x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\right[.$$

Soit Ω_h une partie <u>finie</u> de $\mathcal{R}_h$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on définit une partition de Ω_h composée des ensembles suivants :

$$(2.3) \qquad \begin{cases} \Omega_{i,h} = \{M \in \Omega_h \mid M \pm he_i \in \Omega_h\} \quad (3), \\ \Omega^{+}_{i,h} = \{M \in \Omega_h \mid M - he_i \in \Omega_h \ , \ M + he_i \notin \Omega_h\} \ , \\ \Omega^{-}_{i,h} = \{M \in \Omega_h \mid M - he_i \notin \Omega_h \ , \ M + he_i \in \Omega_h\} \ , \\ \Omega^{\pm}_{i,h} = \{M \in \Omega_h \mid M \pm he_i \notin \Omega_h\}. \end{cases}$$

On pose ensuite pour $i = 1, \ldots, n$

$$(2.4) \qquad \begin{cases} K_{i,h} = \{P \in R^n \mid P \pm \frac{h}{2}e_i \in \Omega_h\}, \\ K^{+}_{i,h} = \{P \in R^n \mid P - \frac{h}{2}e_i \in \Omega_h \ , \ P + \frac{h}{2}e_i \notin \Omega_h\} \ , \\ K^{-}_{i,h} = \{P \in R^n \mid P - \frac{h}{2}e_i \notin \Omega_h \ , \ P + \frac{h}{2}e_i \in \Omega_h\} \ . \end{cases}$$

---

(3) e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

A chaque point $P \in K^+_{i,h}$ (resp. $K^-_{i,h}$), on associe un point N de la forme $N = P + \mu^+_i(P)he_i$ (resp. $N = P - \mu^-_i(P)he_i$) avec $\mu^+_i(P) \geq 0$ (resp. $\mu^-_i(P) \geq 0$).
On considère alors les ensembles

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \Gamma^+_{i,h} = \bigcup_{P\in K^+_{i,h}} (P + \mu^+_i(P)he_i) \; , \\ \Gamma^-_{i,h} = \bigcup_{P\in K^-_{i,h}} (P - \mu^-_i(P)he_i) \; , \\ \Gamma_h = \bigcup_{i=1}^{n} (\Gamma^+_{i,h} \cup \Gamma^-_{i,h}). \end{cases}$$

A chaque point $P \in K_{i,h} \cup K^+_{i,h} \cup K^-_{i,h}$, $P = (p_1 h,\dots,p_n h)$, on associe un pavé $\sigma_{i,h}(P)$ de la manière suivante

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \sigma_{i,h}(P) = \varpi_h(P) \quad \text{si } P \in K_{i,h}, \\ \sigma_{i,h}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p_i - \frac{1}{2})h \leq x_i \leq (p_i + \mu^+_i(P))h \; ; \\ \qquad (p_j - \frac{1}{2})h \leq x_j \leq (p_j + \frac{1}{2})h, \; j \neq i\} \text{ si } P \in K^+_{i,h}, \\ \sigma_{i,h}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p_i - \mu^-_i(P))h \leq x_i \leq (p_i + \frac{1}{2})h \; ; \\ \qquad (p_j - \frac{1}{2})h \leq x_j \leq (p_j + \frac{1}{2})h \; , \; j \neq i\} \text{ si } P \in K^-_{i,h}. \end{cases}$$

On définit

$$(2.7)\qquad \Omega(h) = \overbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \Big(\bigcup_{P\in K_{i,h} \cup K^+_{i,h} \cup K^-_{i,h}} \sigma_{i,h}(P)\Big)}^{0}$$

et

$$(2.8)\qquad \Omega'(h) = \overbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \Big(\bigcup_{P\in K_{i,h}} \varpi_h(P)\Big)}^{0} \subset \Omega(h).$$

On désigne par V_h l'espace des suites $v_h = \{v_h(M) \in \mathbb{C} \; ; \; M \in \Omega_h \cup \Gamma_h$

qui s'annulent sur Γ_h.

Pour chaque $h > 0$, on définit un opérateur linéaire $\overrightarrow{p_h}$ de V_h dans $\overset{\circ}{X}_p(\Omega(h))$, $1 \leq p \leq \infty$, de la façon suivante. Pour $M \in \Omega_h$, on pose

(2.9) $$\theta^M_{o;h} = \text{ fonction caractéristique de } \varpi_h(M).$$

Pour $M \in \Omega_{i,h}$, on prend

(2.10) $$\theta^M_{i,h}(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x_i - (m_i-1)h) & , \quad x \in \sigma_{i,h}(M - \frac{h}{2} e_i), \\ \frac{1}{h}(-x_i + (m_i+1)h) & , \quad x \in \sigma_{i,h}(M + \frac{h}{2} e_i), \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Si $M \in \Omega^+_{i,h}$, on a $P = M + \frac{h}{2} e_i \in K^+_{i,h}$ et on choisit

(2.11) $$\theta^M_{i,h}(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x_i - (m_i-1)h) & , \quad x \in \sigma_{i,h}(M - \frac{h}{2} e_i), \\ \dfrac{1}{(\frac{1}{2}+\mu^+_i(P))h} (-x+(m_i + \frac{1}{2} + \mu^+_i(P))h) & , \quad x \in \sigma_{i,h}(P), \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Définitions analogues dans les autres cas $M \in \Omega^-_{i,h}$ et $M \in \Omega^{\pm}_{i,h}$.

On vérifie immédiatement que, pour tout $M \in \Omega_h$ et pour tout $i = 1,\ldots,n$, $\theta^M_{i,h} \in \overset{\circ}{W}_p(\frac{\partial}{\partial x_i} ; \Omega(h))$, $1 \leq p \leq \infty$, et que les fonctions $\theta^M_{i,h}$, $M \in \Omega_h$, sont linéairement indépendantes dans chaque espace $\overset{\circ}{W}_p(\frac{\partial}{\partial x_i};\Omega(h))$.

On pose donc si $v_h \in V_h$

(2.12) $$p_{i,h}v_h = \sum_{M \in \Omega_h} v_h(M)\, \theta^M_{i,h} \; , \; i = 0,1,\ldots,n$$

et

(2.13) $$\overrightarrow{p_h}\, v_h = (p_{o,h}\, v_h\, ,\, p_{1,h}\, v_h\, ,\dots,\, p_{n,h}\, v_h).$$

L'opérateur $\overrightarrow{p_h}$ est linéaire et injectif de V_h dans $\overset{\circ}{X}_p(\Omega(h))$, $1 \leq p \leq \infty$.

On définit ensuite un produit scalaire sur V_h, noté $(\ ,\ )_h$, par

(2.14) $$(u_h, v_h)_h = \int_{\Omega(h)} p_{o,h}\, u_h \cdot p_{o,h}\, \overline{v}_h \cdot dx = h^n \sum_{M\in\Omega_h} u_h(M).\overline{v}_h(M).$$

On considère des normes sur V_h notées $\|\ \|_{h,o,p}$ et $\|\ \|_{h,1,p}$

(2.15) $$\|v_h\|_{h,o,p} = \|p_{o,h}\, v_h\|_{L_p(\Omega(h))}\ ,\ 1 \leq p \leq \infty,$$

(2.16) $$\|v_h\|_{h,1,p} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big\|\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}\, v_h\Big\|^p_{L_p(\Omega(h))} + \|p_{o,h}\, v_h\|^p_{L_p(\Omega(h))}\Big)^{1/p},$$

$$1 \leq p \leq \infty.$$

2.2. Résultats préliminaires.

Le but de ce paragraphe est de démontrer l'analogue discret des inégalités de Sobolev. Nous avons besoin pour cela de faire l'hypothèse suivante

(2.17) $$\begin{cases} \text{il existe une constante } \mu > 0 \text{ indépendante de } h \text{ et de } i \text{ telle que} \\ \mu_i^+(P) \leq \mu \text{ si } P \in K^+_{i,h} \text{ et } \mu_i^-(P) \leq \mu \text{ si } P \in K^-_{i,h}. \end{cases}$$

Dans toute la suite, C désignera diverses constantes indépendantes du paramètre h.

On désigne par $\chi_{i,h} : x_i \longrightarrow \chi_{i,h}(x_i)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $(-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2})$. Si $*$ est le produit de convolution relatif à la variable x_i, on pose pour $v_h \in V_h$

(2.18) $$q_{i,h}\, v_h = \frac{1}{h}\, \chi_{i,h} \overset{i}{*} p_{o,h}\, v_h.$$

Lemme 2.1

Faisons l'hypothèse (2.17). *Si* $v_h \in V_h$, *les normes* $\|p_{i,h}\, v_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ *et* $\|q_{i,h}\, v_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ *sont uniformément équivalentes en* h *pour* $1 \leq p < \infty$ *; elles sont égales à* $\|p_{o,h}\, v_h\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$ *si* $p = \infty$.

Démonstration

On vérifie immédiatement que les fonctions $p_{i,h}\, v_h$ et $q_{i,h}\, v_h$ coïncident sur $\bigcup_{M \in \Omega_{i,h}} (\sigma_{i,h}(M + \frac{h}{2} e_i) \cup \sigma_{i,h}(M - \frac{h}{2} e_i))$. Il suffit donc de comparer $\|p_{i,h}\, v_h\|_{L_p(\sigma_{i,h}(P))}$ pour $P \in K^+_{i,h} \cup K^-_{i,h}$. Le résultat résulte alors de (2.17). La dernière assertion est triviale.

On en déduit le

Lemme 2.2

Sous l'hypothèse (2.17), *on a pour tout* p *tel que* $1 \leq p < \infty$

(2.19) $$\|p_{i,h}\, v_h\|_{L_p(\Omega(h))} \leq C \|v_h\|_{h,o,p}\ ,\quad v_h \in V_h$$

Démonstration

D'après le lemme 2.1, il suffit de vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |q_{i,h}|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{1}{h}\, \chi_{i,h} \overset{i}{*} p_{o,h}\, v_h|^p\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |p_{o,h}\, v_h|^p\, dx.$$

Or cette majoration résulte de l'inégalité de Minkowski.

Corollaire

Sous l'hypothèse (2.17), *on a pour tout* p *tel que* $1 \leq p < \infty$

(2.20) $$\|\vec{p_h}\, v_h\|_{X_p(\Omega(h))} \leq C\, \|v_h\|_{h,1,p} \quad , \quad v_h \in V_h.$$

Lemme 2.3 (cf. [5]).

Soit E *un ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *et soit* E_i *la projection de* E *sur l'hyperplan* $x_i = 0$. *Soient* $w_1,\dots,w_n$ n ***fonctions*** *telles que*

(2.21) $$\begin{cases} w_i \in L_{n-1}(E) \;,\; i=1,\dots,n, \\ w_i \text{ est indépendante de } x_i. \end{cases}$$

Alors

(2.22) $$\int_E |w_1,\dots,w_n|\, dx \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{E_i} |w_i|^{n-1}\, dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n\right)^{1/n-1}.$$

Théorème 2.1. (Inégalite de Sobolev discrète)

Faisons l'hypothèse (2.17). *Soit* p *tel que* $1 \leq p < n$; *on a pour tout* $v_h \in V_h$.

(2.23) $$\|v_h\|_{h,o,p^*} \leq C \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\, p_{i,h}\, v_h\right\|_{L_p(\Omega(h))} \;,\; \frac{1}{p} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n}.$$

Démonstration

On suit la méthode donnée dans [5]. Soit $v_h \in V_h$; on peut écrire

$$|p_{i,h}\, v_h|^{\frac{(n-1)p}{n-p}} = (p_{i,h}\, v_h \cdot p_{i,h}\, \overline{v}_h)^{\frac{(n-1)p}{2(n-p)}}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\, |p_{i,h}v_h|^{\frac{(n-1)p}{n-p}} = \frac{(n-1)p}{2(n-p)}\, (p_{i,h}v_h \cdot p_{i,h}\overline{v}_h)^{\frac{(n-1)p}{2(n-p)} - 1}\, (p_{i,h}v_h \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}\overline{v}_h +$$

$$+\, p_{i,h}\overline{v}_h \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\, p_{i,h}v_h).$$

Par intégration on obtient

$$(2.24)\qquad |p_{i,h}v_h|^{\frac{(n-1)p}{n-p}} \leq \frac{(n-1)p}{n-p}\int_{-\infty}^{+\infty}|p_{i,h}v_h|^{\frac{(n-1)p}{n-p}-1}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}v_h\right| dx_i.$$

On pose alors

$$(2.25)\qquad w_i(x) = \sup_{x_i}|p_{i,h}v_h(x)|^{\frac{p}{n-p}} = \sup_{x_i}|p_{o,h}v_h(x)|^{\frac{p}{n-p}}.$$

On déduit de (2.24)

$$|w_i(x)|^{n-1} \leq \frac{(n-1)p}{n-p}\int_{-\infty}^{+\infty}|p_{i,h}v_h|^{\frac{n(p-1)}{n-p}}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}v_h\right| dx_i$$

et par intégration

$$(2.26)\quad \begin{cases} \int_{IR^{n-1}}|w_i|^{n-1}\,dx_1\ldots dx_{i-1}\,dx_{i+1}\ldots dx_n \leq \\ \leq \frac{(n-1)p}{n-p}\int_{IR^n}|p_{i,h}v_h|^{\frac{n(p-1)}{n-p}}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}v_h\right| dx \leq \\ \leq \frac{(n-1)p}{n-p}\left(\int_{IR^n}|p_{i,h}v_h|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}v_h\right\|_{L_p(IR^n)}. \end{cases}$$

Il vient en utilisant le lemme 2.3

$$\begin{cases} \int_{IR^n}|p_{o,h}v_h|^{\frac{np}{n-p}}dx \leq \int_{IR^n}\prod_{i=1}^{n} w_i(x)dx \leq \prod_{i=1}^{n}\Big(\int_{IR^{n-1}}|w_i|^{n-1}dx_1\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n\Big)^{\frac{1}{n-1}} \end{cases}$$

On a donc en tenant compte de (2.26) et du lemme 2.2

$$\int_{IR^n}|p_{o,h}v_h|^{\frac{np}{n-p}}dx \leq C\left[\frac{(n-1)p}{n-p}\right]^{\frac{n}{n-1}}\left(\int_{IR^n}|p_{o,h}v_h|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{\frac{n(p-1)}{(n-1)p}}\prod_{i=1}^{n}.$$
$$.\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}v_h\right\|_{L_p(R^n)}^{\frac{1}{1-n}}$$

d'où en élevant les deux membres de l'inégalité précédente à la puissance n-1

(2.27) $$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |p_{o,h} v_h|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{n-1-\frac{n(p-1)}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} v_h \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Il suffit maintenant d'élever (2.27) à la puissance $\frac{1}{n}$ et d'utiliser l'inégalité entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique pour obtenir (2.23).

Remarque 2.1

Si mes($\Omega(h)$) reste borné indépendamment de h, on a pour n = 2

(2.28) $$\|v_h\|_{h,o,q} \leq C \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} v_h \right\|_{L_2(\Omega(h))}$$

pour tout q tel que $1 \leq q < \infty$.

2.3. Le problème approché.

On définit maintenant une forme sesquilinéaire $a_h(u_h,v_h)$ sur $V_h \times V_h$. Pour cela, on se donne des fonctions

(2.29) $$\begin{cases} a_{i,h} \in L_\infty(\Omega(h)) , & i = 1,\dots,n, \\ b_{i,h}, d_{i,h} \in L_r(\Omega(h)) , & i = 1,\dots,n, \\ c_h \in L_{\frac{r}{2}}(\Omega(h)) & \end{cases}$$

où r = n pour n > 2 et où r > 2 pour n = 2.

On suppose que

(2.30) $$\mathrm{Re}\, a_{i,h}(x) \geq \alpha > 0 , \text{ p.p. dans } \Omega(h) , \ i = 1,\dots,n.$$

Si $u_h, v_h \in V_h$, on pose

$$(2.31)\quad \begin{cases} a_h(u_h,v_h) = \int_{\Omega(h)}\{\sum_{i=1}^{n} a_{i,h}\cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}\, u_h \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}\, \overline{v}_h + \\ \quad + \sum_{i=1}^{n} b_{i,h}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}u_h\cdot p_{o,h}\overline{v}_h + \sum_{i=1}^{n} d_{i,h}\cdot p_{o,h}u_h\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}\overline{v}_h + \\ \quad + c_h \cdot p_{o,h}\, u_h\cdot p_{o,h}\, \overline{v}_h\}dx. \end{cases}$$

On introduit enfin des fonctions

$$(2.32)\quad \begin{cases} f_{o,h} \in L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega(h)) \;,\; n > 2 \text{ (resp. } L_s(\Omega(h)),\ s > 1,\ \text{si } n = 2), \\ f_{i,h} \in L_2(\Omega(h)) \;,\; i = 1,\dots,n. \end{cases}$$

On peut maintenant formuler le problème approché que nous allons désormais étudier.

<u>Problème de Dirichlet approché.</u>

<u>Trouver</u> $u_h \in V_h$ <u>vérifiant pour tout</u> $v_h \in V_h$

$$(2.33)\qquad a_h(u_h,v_h) = \int_{\Omega(h)}\{f_{o,h}\cdot p_{o,h}\overline{v}_h - \sum_{i=1}^{n} f_{i,h}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}\overline{v}_h\}dx.$$

La forme sesquilinéaire $a_h(u_h,v_h)$ définit un opérateur $A_h \in \mathcal{L}(V_h;V_h)$ par

$$(2.34)\qquad (A_h u_h,v_h)_h = a_h(u_h,v_h) \quad,\quad u_h,v_h \in V_h$$

tandis que $f_{o,h},f_{1,h},\dots,f_{n,h}$ définissent un élément $T_h \in V_h$ par

$$(2.35)\qquad (T_h,v_h)_h = \int_{\Omega(h)}\{f_{o,h}\cdot p_{o,h}\overline{v}_h - \sum_{i=1}^{n} f_{i,h}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}\overline{v}_h\}dx \;,\; v_h \in V_h.$$

On a ainsi à résoudre l'équation suivante équivalente à (2.33)

$$(2.36)\qquad A_h\, u_h = T_h.$$

Introduisons de nouvelles notations. Si $\Psi_h \in L_1(\Omega(h))$, on pose

$$\hat{\Psi}_h(M) = \frac{1}{h^n} \int_{\overline{\omega}_h(M)} \Psi_h(x)\, dx \quad , \quad M \in \Omega_h. \tag{2.37}$$

Si $\Psi_{i,h} \in L_1(\Omega(h))$, $i = 1,\dots,n$, on pose

$$\left\{\begin{array}{ll} \hat{\Psi}^+_{i,h}(M) = \dfrac{2}{h^n} \displaystyle\int_{\overline{\omega}_h(M)\cap \sigma_{i,h}(M+\frac{h}{2} e_i)} \Psi_{i,h}(x)\, dx & , \ M \in \Omega_h, \\ \hat{\Psi}^-_{i,h}(M) = \dfrac{2}{h^n} \displaystyle\int_{\overline{\omega}_h(M)\cap \sigma_{i,h}(M-\frac{h}{2} e_i)} \Psi_{i,h}(x)\, dx & , \ M \in \Omega_h, \\ \hat{\Psi}_{i,h}(P) = \dfrac{1}{\mathrm{mes}(\sigma_{i,h}(P))} \displaystyle\int_{\sigma_{i,h}(P)} \Psi_{i,h}(x) dx & , \ P \in K_{i,h} \cup K^+_{i,h} \cup K^-_{i,h}. \end{array}\right. \tag{2.38}$$

En explicitant (2.34), on voit facilement que l'opérateur A_h ainsi défini s'obtient de la manière suivante. En un point $M \in \Omega_{i,h}$, on remplace

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \text{ par } -\frac{1}{h^2}\left\{\hat{a}_{i,h}(M+\tfrac{h}{2}e_i)\left[u_h(M+he_i)-u_h(M)\right]-\hat{a}_{i,h}(M-\tfrac{h}{2}e_i)\left[u_h(M)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-u_h(M-he_i)\right]\right\},$$

$$b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{par} \quad \frac{1}{2h}\left\{\hat{b}^+_{i,h}(M)\left[u_h(M+he_i)-u_h(M)\right]+\hat{b}^-_{i,h}(M)\left[u_h(M)-u_h(M-he_i)\right]\right\},$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}(d_i u) \quad \text{par} \quad -\frac{1}{2h}\left\{\hat{d}^-_{i,h}(M+he_i)u_h(M+he_i)-\hat{d}^-_{i,h}(M)u_h(M)\, + \right.$$
$$\left. +\ \hat{d}^+_{i,h}(M)u_h(M)-\hat{d}^+_{i,h}(M-he_i)u_h(M-he_i)\right\},$$

$$c\, u \quad \text{par} \quad \hat{c}_h(M)\, u_h(M).$$

En un point $M \in \Omega^+_{i,h}$, on remplace

$$- \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}) \quad \text{par} \quad - \frac{1}{h^2}\{ \hat{a}_{i,h}(M+\frac{h}{2}e_i)\frac{0-u_h(M)}{\frac{1}{2}+\mu_i^+(M+\frac{h}{2}e_i)} - \hat{a}_{i,h}(M-\frac{h}{2}e_i)[u_h(M)-u_h(M-he_i)]\},$$

$$b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{par} \quad \frac{1}{2h}\{ b_{i,h}^+(M) \frac{0-u_h(M)}{\frac{1}{2}+\mu_i^+(M+\frac{h}{2}e_i)} + b_{i,h}^-(M)[u_h(M)-u_h(M-he_i)]\},$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_i}(d_i u) \quad \text{par} \quad - \frac{1}{2h}\{\frac{0-\hat{d}_{i,h}^-(M)u_h(M)}{\frac{1}{2}+\mu_i^+(M+\frac{h}{2}e_i)} + \hat{d}_{i,h}^+(M)u_h(M)-\hat{d}_{i,h}^+(M-he_i)u_h(M-he_i)\},$$

$$c\, u \quad \text{par} \quad \hat{c}_h(M)\, u_h(M).$$

Approximations analogues lorsque $M \in \Omega_{i,h}^- \cup \Omega_{i,h}^+$.

En explicitant (2.35), on vérifie également que

$$T_h(M) = \hat{f}_{o,h}(M) + \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}[\hat{f}_{i,h}(M+\frac{h}{2}e_i) - \hat{f}_{i,h}(M-\frac{h}{2}e_i)],\ M \in \Omega_h. \tag{2.39}$$

Donnons maintenant quelques propriétés de la forme sesquilinéaire $a_h(u_h,v_h)$.

Théorème 2.2

On suppose que l'hypothèse (2.17) *est vérifiée et que* $\text{mes}(\Omega(h))$ *reste borné indépendamment de* h. *Si* $\|b_{i,h}\|_{L_r(\Omega(h))}$, $\|d_{i,h}\|_{L_r(\Omega(h))}$ *et* $\|c_h\|_{L_{\frac{r}{2}}(\Omega(h))}$ *peuvent se majorer par des nombres indépendants de* h *et assez petits, il existe une constante* $\beta > 0$ *indépendante de* h *telle que*

$$\text{Re}\ \ a_h(v_h,v_h) \geq \beta\|v_h\|^2_{h,1,2}\ ,\ v_h \in V_h. \tag{2.40}$$

Démonstration

Soit $n > 2$ et soit $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. D'après (2.30), on a en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Re} a_h(v_h,v_h) \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} v_h\right\|^2_{L_2(\Omega(h))} - \\ &- \sum_{i=1}^{n} \left(\|b_{i,h}\|_{L_n(\Omega(h))} + \|d_{i,h}\|_{L_n(\Omega(h))}\right) \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} v_h\right\|_{L_2(\Omega(h))} \|p_{o,h} v_h\|_{L_{2^*}(\Omega(h))} - \\ &- \|c_h\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega(h))} \|p_{o,h} v_h\|^2_{L_{2^*}(\Omega(h))}. \end{aligned}\right.$$

On applique ensuite l'inégalité de Sobolev discrète (2.23) avec $p = 2$; on obtient

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Re} a_h(v_h,v_h) \geq \\ &\geq \left\{\alpha - C \sum_{i=1}^{n} \left(\|b_{i,h}\|_{L_n(\Omega(h))} + \|d_{i,h}\|_{L_n(\Omega(h))}\right) - C\|c_h\|_{L_{\frac{n}{2}}(\Omega(h))}\right\}. \\ &\qquad\qquad . \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} v_h\right\|^2_{L_2(\Omega(h))}. \end{aligned}\right.$$

Il suffit maintenant de remarquer que

$$\|p_{o,h} v_h\|_{L_2(\Omega(h))} \leq \{\operatorname{mes}(\Omega(h)\}^{1/n} \|p_{o,h} v_h\|_{L_{2^*}(\Omega(h))} \leq C \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} v_h\right\|_{L_2(\Omega(h))}$$

pour obtenir le résultat.

Si $n = 2$, on utilise l'inégalité (2.28) à la place de (2.23).

<u>Remarque 2.2</u>

Si c_h est ≥ 0, l'hypothèse $|c_h\|_{L_{\frac{r}{2}}(\Omega(h))}$ assez petit est évidemment superflue.

On notera $\tilde{v}$ le prolongement par 0 d'une fonction v dans le compléméntaire (dans $\mathbb{R}^n$) de son ensemble de définition.

Théorème 2.3

Faisons les hypothèses (2.17)

$$(2.41)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \tilde{b}_{i,h} = \tilde{b}_i \text{ dans } L_r(\mathbb{R}^n) \text{ fort, } i = 1,\dots,n, \\ \lim\limits_{h\to 0} \tilde{d}_{i,h} = \tilde{d}_i \text{ dans } L_r(\mathbb{R}^n) \text{ fort, } i = 1,\dots,n, \\ \lim\limits_{h\to 0} \tilde{c}_h = \tilde{c} \text{ dans } L_{\frac{r}{2}}(\mathbb{R}^n) \text{ fort,} \end{cases}$$

et supposons que mes $(\Omega(h))$ *soit borné indépendamment de* h. *Alors, pour* h *assez petit, il existe deux constantes* $\beta > 0$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *indépendamment de* h *telles que*

$$(2.42)\qquad \mathrm{Re}\, a_h(v_h, v_h) + \lambda \|v_h\|^2_{h,o,2} \geq \beta \|v_h\|^2_{h,1,2}, \quad v_h \in V_h$$

Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin du

Lemme 2.4

Considérons une suite de fonctions $f_h \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, *telles que* $\lim\limits_{h\to 0} f_h = f$ *dans* $L_p(\mathbb{R}^n)$ *fort. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe deux constantes* $h(\varepsilon)$, $k(\varepsilon) > 0$ *telles que l'on puisse écrire pour* $h \leq h(\varepsilon)$

$$(2.43)\qquad f_h = f'_h + f''_h$$

avec

$$(2.44)\qquad \|f'_h\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq k(\varepsilon), \quad \|f''_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

Démonstration

On définit $k = k(\varepsilon)$ par

$$\left(\int_{\{x \mid |f(x)| > k\}} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors on pose

$$f'_h(x) = \begin{cases} f_h(x) & \text{si } |f_h(x)| \leq k \\ 0 & \text{si } |f_h(x)| > k \end{cases} \quad , \quad f''_h = f_h - f'_h.$$

Définitions analogues pour f' et f". Puisque $f''_h \longrightarrow f''$ dans $L_p(\mathbb{R}^n)$ fort, on a pour $h \leq h(\varepsilon)$

$$\|f''_h - f''\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\varepsilon}{2} ,$$

d'où le résultat.

<u>Démonstration du théorème 2.3</u>

En vertu du lemme précédent et grâce à l'hypothèse (2.41), on peut écrire pour h assez petit

$$b_{i,h} = b'_{i,h} + b''_{i,h} \quad , \quad \|b'_{i,h}\|_{L_\infty(\Omega(h))} \leq k(\varepsilon) \quad , \quad \|b''_{i,h}\|_{L_r(\Omega(h))} \leq \varepsilon ,$$

$$d_{i,h} = d'_{i,h} + d''_{i,h} \quad , \quad \|d'_{i,h}\|_{L_\infty(\Omega(h))} \leq k(\varepsilon) \quad , \quad \|d''_{i,h}\|_{L_r(\Omega(h))} \leq \varepsilon ,$$

$$c_h = c'_h + c''_h \quad , \quad \|c'_h\|_{L_\infty}(\Omega(h)) \leq k(\varepsilon) \quad , \quad \|c''_h\|_{L_{\frac{r}{2}}(\Omega(h))} \leq \varepsilon ,$$

où ε est choisi suffisamment petit. On pose alors

$$a'_h(u_h,v_h) = \int_{\Omega(h)} \{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{i,h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}\, u_h \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}\, \overline{v}_h +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b'_{i,h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} u_h \cdot p_{o,h} \overline{v}_h + \sum_{i=1}^{n} d'_{i,h} \cdot p_{o,h} u_h \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} \overline{v}_h +$$

$$+ c'_h \cdot p_{o,h}\, u_h \cdot p_{o,h}\, \overline{v}_h\} \, dx ,$$

$$a''_h(u_h,v_h) = a_h(u_h,v_h) - a'_h(u_h,v_h).$$

On vérifie facilement le théorème pour la forme $a'_h(u_h,v_h)$ et on applique le théorème 2.2 pour la forme $a''_h(u_h,v_h)$ avec un choix convenable de ε. Ceci démontre donc le résultat.

Remarque 2.3

On a l'inégalité (2.42) sous les seules hypothèses (2.17) et

(2.45) $$\max\left(\max_{1\leq i\leq n} \|b_{i,h}\|_{L_\infty(\Omega(h))} , \max_{1\leq i\leq n} \|d_{i,h}\|_{L_\infty(\Omega(h))} , \|c_h\|_{L_\infty(\Omega(h))}\right) \leq C.$$

3 - UN PREMIER RESULTAT DE CONVERGENCE.

3.1. Hypothèses et énoncé du théorème de convergence

Faisons l'hypothèse d'éllipticité uniforme en h.

Hypothèse H 1.

$$(3.1) \quad \begin{cases} \text{Il existe une constante } \beta > 0 \text{ indépendante de } h \text{ telle que} \\ \mathrm{Re} \;\; a_h(v_h, v_h) \geq \beta \; \|v_h\|^2_{h,1,2} \; , \; v_h \in V_h. \end{cases}$$

On sait alors qu'il existe une suite $u_h \in V_h$ et une seule qui vérifie l'équation (2.33) pour tout $v_h \in V_h$ ou l'équation équivalente (2.36). Nous nous proposons d'étudier la convergence dans un sens convenable de u_h vers la solution u du problème de Dirichlet donnée par le théorème 1.1.

Nous aurons besoin de la

Définition 3.1

On dira que l'ouvert $\Omega(h)$ *approche l'ouvert* Ω *quand* h *tend vers* 0 *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) quel que soit l'ouvert Ω' *tel que* $\overline{\Omega}' \subset \Omega$*, il existe un nombre* $h(\Omega') > 0$ *tel que* $\overline{\Omega}' \subset \Omega(h)$ *pour* $h \leq h(\Omega')$;

(ii) quel que soit l'ouvert Ω'' *tel que* $\overline{\Omega} \subset \Omega''$*, il existe un nombre* $h(\Omega'') > 0$ *tel que* $\overline{\Omega(h)} \subset \Omega''$ *pour* $h \leq h(\Omega'')$;

(iii) quel que soit le point $P \in K^+_{i,h}$ (resp. $P \in K^-_{i,h}$)*, il existe un nombre* $\nu > 0$ *indépendant de* h, i *et* P *tel que* $\varpi_p(P+\nu h e_i) \subset \mathbb{R}^n-\Omega$ (resp. $\varpi_h(P-\nu h e_i) \subset \mathbb{R}^n-\Omega$).

Il est facile de vérifier que la point (iii) de la définition précédente entraîne la propriété (2.17). De même, si $\Omega(h)$ approche Ω, le nombre $\operatorname{mes}(\Omega(h))$ reste borné indépendamment de h d'après (ii).

Nous faisons alors les hypothèses suivantes

Hypothèse H 2.

(3.2) $\Omega(h)$ approche Ω lorsque h tend vers 0.

Hypothèses H 3.

$$(3.3)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \tilde{a}_{i,h} = \tilde{a}_i & \text{dans } L_\infty(\mathbb{R}^n) \text{ fort }, \ i = 1,\dots,n, \\ \lim\limits_{h\to 0} \tilde{b}_{i,h} = \tilde{b}_i & \text{dans } L_r(\mathbb{R}^n) \text{ fort }, \ i = 1,\dots,n, \\ \lim\limits_{h\to 0} \tilde{d}_{i,h} = \tilde{d}_i & \text{dans } L_r(\mathbb{R}^n) \text{ fort }, \ i = 1,\dots,n, \\ \lim\limits_{h\to 0} \tilde{c}_h = \tilde{c} & \text{dans } L_{\frac{r}{2}}(\mathbb{R}^n) \text{ fort.} \end{cases}$$

Hypothèses H 4.

$$(3.4)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \tilde{f}_{o,h} = \tilde{f}_o & \begin{cases} \text{dans } L_{\frac{2n}{n+2}}(\mathbb{R}^n) \text{ fort pour } n > 2 \\ \text{dans } L_s(\mathbb{R}^n) \text{ fort }, \ s > 1, \text{ pour } n = 2 \end{cases}, \\ \lim\limits_{h\to 0} \tilde{f}_{i,h} = \tilde{f}_i & \text{dans } L_2(\mathbb{R}^n) \text{ fort.} \end{cases}$$

Théorème 3.1

Sous les hypothèses H 1, H 2, H 3 *et* H 4, *on a*

$$(3.5)\quad \lim_{h\to 0} \vec{p}_h\, u_h = \vec{\Pi}\, \tilde{u} \ \textit{dans } X_2(\mathbb{R}^n) \textit{ fort,}$$

$$(3.6)\quad \lim_{h\to 0} p_{o,h}\, u_h = \tilde{u} \ \textit{dans} \begin{cases} L_{2^*}(\mathbb{R}^n) \ \textit{fort}, \ \frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \ \textit{pour } n > 2 \\ L_q(\mathbb{R}^n) \ \textit{fort}, \ 1 \le q < \infty, \ \textit{pour } n = 2 \end{cases}$$

où $u_h \in V_h$ *est la solution de* (2.33) *et où* $u \in H_o^1(\Omega)$ *est la solution de* (1.19).

3.2. Démonstration du théorème 3.1 : 1ère partie.

Nous allons démontrer dans ce paragraphe les résultats de convergence (3.5), (3.6) mais dans les topologies faibles correspondantes. Auparavant, donnons deux lemmes simples.

Lemme 3.1

Faisons l'hypothèse H 2. *Alors, quel que soit le compact* $K \subset \Omega$, *il existe un nombre* $h'(K) > 0$ *tel que* $K \subset \Omega'(h)$ *pour* $h \leq h'(K)$. (cf.(2.8) pour la définition de $\Omega'(h)$).

Démonstration

Soit $K \subset \Omega$ un compact de $\mathbb{R}^n$ et soit $d > 0$ la distance de K à Γ. En vertu de (2.17), la distance de $\Omega'(h)$ à la frontière de $\Omega(h)$ est $\leq \tau\,\mu\,h$ avec $\tau > 0$ convenable indépendant de h. Soit $h_o > 0$ tel que $\tau\,\mu\,h_o < d$. Le compact $K_{h_o} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{dist}(x,K) \leq \tau\,\mu\,h_o\}$ est contenu dans Ω. Il résulte alors de H 2 que $K_{h_o} \subset \Omega(h)$ pour $h \leq h_1$. On en déduit que, pour $h \leq h'(K) = \min(h_o,h_1)$, on a $K \subset \Omega'(h)$.

Lemme 3.2

Soit $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ *et soit* $\rho_{i,h}$, $i = 0,1,\dots,n$, *l'opérateur de* $C_o^\infty(\Omega)$ *dans* V_h *défini par*

$$\rho_{i,h}\,\varphi(M) = \frac{1}{h^n}\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}\,.\,\theta^M_{i,h}\,.dx \quad , \quad M \in \Omega_h. \tag{3.6}$$

Sous l'hypothèse H 2 , *on a*

$$\lim_{h\to 0} p_{o,h}\,\rho_{i,h}\,\varphi = \tilde{\varphi} \text{ dans } L_p(\mathbb{R}^n) \text{ fort, } 1 \leq p \leq \infty. \tag{3.7}$$

Démonstration

Soit K le support de φ ; d'après le lemme 3.1, on a $K \subset \Omega'(h)$

pour $h \leq h'(K)$. Alors, pour h assez petit, on obtient

$$\rho_{i,h}\,\varphi(M) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}.\theta^M_{i,h}.dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \theta^M_{i,h}\,dx}\ ,\ M \in \Omega_h.$$

On vérifie ensuite aisément que

$$\sum_{M\in\Omega_h} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}.\theta^M_{i,h}.dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \theta^M_{i,h}\,dx}\ \theta^M_{i,h} \longrightarrow \tilde{\varphi} \text{ dans } L_p(\mathbb{R}^n) \text{ fort, } 1 \leq p \leq \infty.$$

Proposition 3.1

Sous les hypothèses H 1, H 2, H 3 *et* H 4, *on a*

(3.8) $$\lim_{h\to 0} \vec{p}_h\, u_h = \vec{\Pi}\, \tilde{u} \textit{ dans } X_2(\mathbb{R}^n) \textit{ faible,}$$

(3.9) $$\lim_{h\to 0} p_{o,h}\, u_h = \tilde{u} \textit{ dans } \begin{cases} L_{2^*}(\mathbb{R}^n) \textit{ faible si } n > 2 \\ L_q(\mathbb{R}^n) \textit{ faible, } 1 \leq q \leq \infty, \textit{ si } n = 2. \end{cases}$$

Démonstration

On suit la méthode donnée dans [3].

1) Il est clair que (3.8) a un sens puisque $\vec{p}_h\, u_h \in X_2(R^n)$ **et** $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$. En ramplaçant v_h par u_h et en utilisant les hypothèses H 1, H 2, l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev (2.23) avec p = 2 pour n > 2 (resp. l'inégalité (2.28) pour n = 2), on obtient

$$\|u_h\|_{h,1,2} \leq \begin{cases} C\{\|f_{o,h}\|_{L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega(h))} + \sum_{i=1}^{n} \|f_{i,h}\|_{L_2(\Omega(h))}\} \text{ pour } n > 2 \\ C\{\|f_{o,h}\|_{L_s(\Omega(h))} + \sum_{i=1}^{n} \|f_{i,h}\|_{L_2(\Omega(h))}\} \text{ pour } n = 2 \end{cases}$$

et en vertu de l'hypothèse H 4 et du corollaire du lemme 2.2

(3.10) $$\|\vec{p}_h\ u_h\|_{X_2(\Omega(h))} \leq C.$$

Mais comme

$$\|\vec{p}_h\ u_h\|_{X_2(\mathbb{R}^n)} = \|\vec{p}_h\ u_h\|_{X_2(\Omega(h))},$$

on en déduit que $\vec{p}_h\ u_h$ reste dans un ensemble borné de $X_2(\mathbb{R}^n)$. On peut donc extraire de l'ensemble des $\vec{p}_h\ u_h$ une sous suite, notée encore $(\vec{p}_h u_h)$ telle que

(3.11) $$\lim_{h\to 0} \vec{p}_h u_h = \vec{u}^* \quad \text{dans } X_2(\mathbb{R}^n) \text{ faible.}$$

On pose

(3.12) $$\vec{u}^* = (u_o^*,\dots,u_n^*).$$

D'autre part, d'après (3.8) et l'inégalité de Sobolev (2.23) si $n > 2$ ou l'inégalité (2.28) si $n = 2$, on a

(3.13) $$\begin{cases} \|p_{o,h}\ u_h\|_{L_{2^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C & \text{si } n > 2 \\ \|p_{o,h}\ u_h\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

et on peut supposer que

(3.14) $$\lim_{h\to 0} p_{o,h}\ u_h = u_o^* \text{ dans } \begin{cases} L_{2^*}(\mathbb{R}^n) \text{ faible si } n > 2 \\ L_q(\mathbb{R}^n) \text{ faible si } n = 2 \end{cases}.$$

2) Montrons que $\vec{u}^* = 0$ dans $\mathbb{R}^n - \bar{\Omega}$. Puisque d'après (3.11)

(3.15) $$\lim_{h\to 0} p_{i,h}\ u_h = u_i^* \text{ dans } L_2(\mathbb{R}^n) \text{ faible}, \quad i = 0,1,\dots,n,$$

il suffit de vérifier que, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$, on a $u_i^* = 0$ dans K quel que soit i. Un tel compact K étant donné, il existe un ouvert Ω'' tel que $\overline{\Omega} \subset \Omega''$, $K \subset \mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$. Comme $\Omega(h)$ approche Ω, on a $\overline{\Omega(h)} \subset \Omega''$ pour h assez petit de sorte que $p_{i,h}u_h = 0$ dans K pour h assez petit. On en déduit que

$$u_i^* = 0 \text{ dans } K \quad , \quad i = 0,1,\dots,n.$$

3) Montrons ensuite que $u_i^* = u_o^*$ dans Ω pour $i = 1,\dots,n$. Soit $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$; on a

$$\int_\Omega p_{i,h}u_h \cdot \varphi \cdot dx = \sum_{M \in \Omega_h} u_h(M) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi} \cdot \theta_{i,h}^M \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} p_{o,h}u_h \cdot p_{o,h}\rho_{i,h} \varphi \, dx.$$

On obtient en vertu du lemme 3.2 et de (3.15)

$$\int_\Omega u_i^* \cdot \varphi \, dx = \int_\Omega u_o^* \cdot \varphi \, dx.$$

On a ainsi vérifié que $u_i = u_o$ p.p. dans Ω. Il en résulte que si la frontière Γ de Ω est de mesure de Lebesgue nulle (seul cas qui nous intéresse !), on a

$$u_i^* = u_o^* \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^n, \; i = 1,\dots,n.$$

On en déduit que $u_o^* \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et que la restriction v de u_o^* à Ω est une fonction de $H_o^1(\Omega)$.

4) Nous allons maintenant démontrer que v = u solution du problème de Dirichlet (1.19). Soit $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ de support K. On définit $\varphi_h \in V_h$ par

(3.16) $$\varphi_h(M) = \varphi(M) \quad , \quad M \in \Omega_h.$$

D'autre part, $\overrightarrow{p_h}\varphi_h$ a son support contenu dans Ω pour h assez petit. En effet, le support de $\overrightarrow{p_h}\ \varphi_h$ est contenu dans

$$\bigcup_{i=1}^{n} (K + \max(\tfrac{1}{2}+\mu, 1)\, h e_i)$$

et, en désignant par d la distance de K à Γ, il suffit de choisir h tel que $\max(\frac{1}{2}+\mu,1)\ h \leq \frac{d}{2}$, ce qui est loisible. Dans ces conditions, on a

$$(3.17)\quad \begin{cases} a_h(u_h,\varphi_h) = \int_\Omega \{\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i,h}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}u_h\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}\ \overline{\varphi}_h + \\ \quad + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_{i,h}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}u_h\cdot p_{o,h}\ \overline{\varphi}_h + \sum_{i=1}^{n} \tilde{d}_{i,h}\cdot p_{o,h}u_h\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}\ \overline{\varphi}_h + \\ \quad + \tilde{c}_h\cdot p_{o,h}u_h\cdot p_{o,h}\ \overline{\varphi}_h\}\ dx = \\ \quad = \int_\Omega \{\tilde{f}_{o,h}\cdot p_{o,h}\ \overline{\varphi}_h - \sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_{i,h}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\ p_{i,h}\ \overline{\varphi}_h\}\ dx. \end{cases}$$

Il suffit maintenant de vérifier que lorsque $h \longrightarrow 0$

$$a_h(u_h,\ \varphi_h) \longrightarrow a(v,\varphi)\ ,$$

$$\int_\Omega\{\tilde{f}_{o,h}\cdot p_{o,h}\ \overline{\varphi}_h - \sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_{i,h}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\ p_{i,h}\ \overline{\varphi}_h\}dx \longrightarrow \int_\Omega\{f_o\cdot\overline{\varphi} - \sum_{i=1}^{n} f_i\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_i}\}\ dx.$$

Ceci résulte des hypothèses H 3, H 4 , du résultat de convergence faible

$$(3.18)\quad \begin{cases} \lim_{h\to 0} p_{o,h}\ u_h = v \begin{cases} \text{dans } L_{2^*}(\Omega) \text{ faible si } n > 2\ , \\ \text{dans } L_q\ (\Omega) \text{ faible si } n = 2 \end{cases} \\ \lim_{h\to 0}\frac{\partial}{\partial x_i}\ p_{i,h}\ u_h = \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ faible}\ ,\ i = 1,\dots,n \end{cases}$$

précédemment démontré et de

$$(3.19)\quad \left.\begin{cases} \lim_{h\to 0} p_{o,h}\ \varphi_h = \varphi \\ \lim_{h\to 0}\frac{\partial}{\partial x_i}\ p_{i,h}\ \varphi_h = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \end{cases}\right\} \quad \text{dans } L_p(\Omega) \text{ fort}\ ,\ 1 \leq p \leq \infty$$

qu'il est facile d'établir.

5) On a ainsi montré que (3.8) et (3.9) ont lieu pour la sous-suite $(\vec{p}_h u_h)$ considérée. La proposition 3.1 est alors prouvée si on remarque que la limite faible de la sous-suite $(\vec{p}_h u_h)$ est indépendante de cette sous-suite.

3.3. Démonstration du théorème 3.1 : 2ème partie.

Commençons par définir un opérateur r_h linéaire de $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ dans V_h par

$$r_h v(M) = \frac{1}{h^n} \int_{\varpi_h(M)} \tilde{v}(x)dx \quad , \; M \in \Omega_h. \tag{3.20}$$

Lemme 3.3

Sous l'hypothèse H 2 *, on a pour* $1 \leq p < \infty$

$$\lim_{h\to 0} p_{o,h}\, r_h\, v = \tilde{v} \textit{ dans } \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n) \textit{ fort si } v \in L_p(\Omega), \tag{3.21}$$

$$\lim_{h\to 0} \vec{p}_h\, r_h\, v = \vec{\Pi}\, \tilde{v} \textit{ dans } X_p(\mathbb{R}^n) \textit{ fort si } v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega). \tag{3.22}$$

Démonstration

On procède comme dans [7] , Chapitre 0, théorème 4.1.

1) On vérifie d'abord que

$$\|p_{i,h} r_h v\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\, \|v\|_{L_p(\Omega)} \quad , \; v \in L_p(\Omega) \;, \; i = 0,1,\ldots,n, \tag{3.23}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} r_h v\right\| \leq C\, \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L_p(\Omega)} \quad , \; v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \;, \; i = 1,\ldots,n. \tag{3.24}$$

La majoration (3.23) est immédiate pour i = 0. Lorsque i = 1,...,n, on a

$$\|p_{i,h} r_h v\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{P \in K_{i,h} \cup K^+_{i,h} \cup K^-_{i,h}} \|p_{i,h} r_h v\|^p_{L_p(\sigma_{i,h}(P))} \Big)^{1/p}. \tag{3.25}$$

Si $P \in K_{i,h}$, on peut écrire

$$\|p_{i,h}r_h v\|^p_{L_p(\sigma_{i,h}(P))} = \int_{\sigma_{i,h}(P)} |r_h v(P+\frac{h}{2}e_i)\Theta_{i,h}^{P+\frac{h}{2}e_i} + r_h v(P-\frac{h}{2}e_i)\Theta_{i,h}^{P-\frac{h}{2}e_i}|^p \, dx \leq$$

$$\leq \; 2^{p-1}\{|r_h v(P+\frac{h}{2}e_i)|^p \int_{\sigma_{i,h}(P)} |\Theta_{i,h}^{P+\frac{h}{2}e_i}|^p \, dx \; +$$

$$+ \; |r_h v(P-\frac{h}{2}e_i)|^p \int_{\sigma_{i,h}(P)} |\Theta_{i,h}^{P-\frac{h}{2}e_i}|^p \, dx\} \; .$$

Or

$$|r_h v(P+\frac{h}{2}e_i)|^p = \frac{1}{h^{np}} |\int_{\varpi_h(P\pm\frac{h}{2}e_i)} \tilde{v} \, dx|^p \leq \frac{1}{h^n} \int_{\varpi_h(P\pm\frac{h}{2}e_i)} |\tilde{v}|^p \, dx$$

et

$$\int_{\sigma_{i,h}(P)} |\Theta_{i,h}^{P\pm\frac{h}{2}e_i}|^p \, dx = \frac{h^n}{p+1} \; .$$

On en déduit que pour $P \in K_{i,h}$

(3.26) $$\|p_{i,h}r_h v\|^p_{L_p(\sigma_{i,h}(P))} \leq \frac{2^{p-1}}{p+1} \int_{\varpi_h(P+\frac{h}{2}e_i) \cup \varpi_h(P-\frac{h}{2}e_i)} |\tilde{v}|^p \, dx.$$

Si $P \in K^+_{i,h}$, on a

$$\|p_{i,h}r_h v\|^p_{L_p(\sigma_{i,h}(P))} = \int_{\sigma_{i,h}(P)} |r_h v(P-\frac{h}{2}e_i) \; \Theta_{i,h}^{P-\frac{h}{2}e_i}|^p \, dx$$

d'où

(3.27) $$\|p_{i,h}r_h v\|^p_{L_p(\sigma_{i,h}(P))} \leq (\frac{1}{2}+\mu_i^+(P)) \, \frac{1}{p+1} \int_{\varpi_h(P-\frac{h}{2}e_i)} |\tilde{v}|^p \, dx.$$

On obtient une majoration analogue si $P \in K^-_{i,h}$.

L'inégalite (3.23) résulte alors de (2.17), (3.25), (3.26) et (3.27).

2) Démontrons les majorations (3.24). Si $P \in K_{i,h} \cup K^+_{i,h} \cup K^-_{i,h}$, on désigne par $\gamma^P_{i,h}$ la fonction caractéristique de $\sigma_{i,h}(P)$. Il est clair que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} r_h v = \frac{1}{h^{n+1}} \{ \sum_{P\in K_{i,h}} (\int_{\varpi_h(P+\frac{h}{2}e_i)} \tilde{v}\, dx - \int_{\varpi_h(P-\frac{h}{2}e_i)} \tilde{v}\, dx)\gamma^P_{i,h} +$$

$$+ \sum_{P\in K^-_{i,h}} \frac{1}{\frac{1}{2}+\mu^-_i(P)} (\int_{\varpi_h(P-\frac{h}{2}e_i)} \tilde{v}\, dx)\gamma^P_{i,h} - \sum_{P\in K^+_{i,h}} \frac{1}{\frac{1}{2}+\mu^+_i(P)} (\int_{\varpi_h(P-\frac{h}{2}e_i)} \tilde{v}\, dx)\gamma^P_{i,h} \}$$

d'où

$$(3.28)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} r_h v = \dfrac{1}{h^{n+1}} \{ \sum_{P\in K_{i,h}} (\int_{\varpi_h(P)} [\tilde{v}(x+\frac{h}{2}e_i) - \tilde{v}(x-\frac{h}{2}e_i)]\, dx)\gamma^P_{i,h} + \\ \qquad + \sum_{P\in K^-_{i,h}} \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\mu^-_i(P)} (\int_{\varpi_h(P)} \tilde{v}(x+\frac{h}{2}e_i)dx)\gamma^P_{i,h} - \\ \qquad - \sum_{P\in K^+_{i,h}} \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\mu^+_i(P)} (\int_{\varpi_h(P)} \tilde{v}(x-\frac{h}{2}e_i)dx)\gamma^P_{i,h} \} . \end{cases}$$

On en déduit que

$$(3.29)\quad \begin{cases} \|\dfrac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} r_h v\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \dfrac{1}{h^{(n+1)p-1}} \{ \sum_{P\in K_{i,h}} |\int_{\omega_h(P)} [\tilde{v}(x+\frac{h}{2}e_i) - v(x-\frac{h}{2}e_i)]\, dx|^p + \\ \qquad + C[\sum_{P\in K^-_{i,h}} |\int_{\varpi_h(P)} \tilde{v}(x+\frac{h}{2}e_i)|^p + \sum_{P\in K^+_{i,h}} |\int_{\varpi_h(P)} \tilde{v}(x-\frac{h}{2}e_i)dx|^p] \} \end{cases}$$

Puisque $\tilde{v} \in W^1_p(\mathbb{R}^n)$, on a pour presque tout x

$$\tilde{v}(x+\frac{h}{2}e_i) - \tilde{v}(x-\frac{h}{2}e_i) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i}(x+te_i)dt$$

et en vertu de la partie (iii) de la définition 3.1

$$\tilde{v}(x+\frac{h}{2}e_i) = \int_{-(\nu+\frac{1}{2})h}^{+\frac{h}{2}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i}(x+te_i)dt \ , \ x \in \varpi_h(P) \ , \ P \in K^-_{i,h},$$

$$-\tilde{v}(x-\frac{h}{2}e_i) = \int_{-\frac{h}{2}}^{(\nu+\frac{1}{2})h} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i}(x+te_i)dt \ , \ x \in \varpi_h(P) \ , \ P \in K^+_{i,h}.$$

En reportant (3.29) et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient l'inégalité (3.24).

3) Il suffit maintenant de démontrer le lemme pour $v \in C_o^\infty(\Omega)$. Soit K le support de v ; on choisit h assez petit de façon que $K \subset \Omega'(h)$ (cf. lemme 3.1). La vérification se fait alors sans difficulté.

Démonstration du théorème 3.1

On a

$$a_h(u_h,u_h) = \int_{\mathbb{R}^n} \{\tilde{f}_{o,h}.p_{o,h}\bar{u}_h - \sum_{i=1}^n \tilde{f}_{i,h}.\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}\bar{u}_h\}dx.$$

En vertu des hypothèses H 4 et de la proposition 3.1, on obtient

$$\lim_{h\to 0} a_h(u_h,u_h) = \int_\Omega \{f_o.\bar{u} - \sum_{i=1}^n f_i.\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}\}dx,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{h\to 0} a_h(u_h,u_h) = a(u,u). \tag{3.30}$$

D'autre part, on a grâce au lemme 3.3, aux hypothèses H 3 et à la proposition 3.1

$$\begin{cases} \lim_{h\to 0} a_h(u_h,r_h\, u) = a(u,u), \\ \lim_{h\to 0} a_h(t_h\, u,u_h) = a(u,u). \end{cases} \tag{3.31}$$

Enfin il est clair que

$$\lim_{h\to 0} a_h(r_h u, r_h u) = a(u,u). \tag{3.32}$$

On en déduit

$$\lim_{h\to 0} a_h(u_h - r_h u, u_h - r_h u) = 0$$

et d'après l'hypothèse d'ellipticité et l'inégalité de Sobolev

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - r_h u\|_{h,1,2} = 0 \ , \tag{3.33}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \|u_h - r_h u\|_{h,o,2^*} = 0 & \text{si } n > 2, \\ \lim\limits_{h\to 0} \|u_h - r_h u\|_{h,o,q} = 0 & , 1 \leq q < \infty, \text{ si } n = 2. \end{cases} \tag{3.34}$$

Le résultat s'obtient alors en utilisant le corollaire du lemme 2.2 et le lemme 2.3.

3.4. Remarques

L'opérateur A défini en (1.13) ne comporte pas de dérivées mixtes du type $\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$. On pourrait dans tout ce qui précède ajouter de tels termes sans aucune difficulté supplémentaire, si ce n'est d'écriture. Mais les résultats que nous obtiendrons dans toute la suite ne seront valables que dans le cas envisagé ici.

Nous n'étudierons pas de façon précise sous quelles conditions l'hypothèse d'ellipticité H 1 a lieu. Nous nous contentons ici du résultat donné par le théorème 2.2 et nous reviendrons sur cette question dans un article futur.

Le choix d'un même pas de discrétisation h dans toutes les directions n'apporte que des simplifications d'écriture.

4 - THEOREME DE CONVERGENCE DANS L_p.

4.1. Majorations à priori.

Nous supposerons désormais que toutes les fonctions utilisées sont à valeurs réelles et que l'indice de sommabilité r employé dans (2.29) vérifie dans tous les cas $r > n$.

Rappelons le résultat suivant.

Lemme 4.1 (cf. [8]).

Soit $\varphi(t \longrightarrow \varphi(t))$ *une fonction définie pour* $t \geq k_o$ *non négative et non croissante vérifiant pour* $\ell > k \geq k_o$

(4.1) $$\varphi(\ell) \leq \frac{C}{(l-k)^\alpha}[\varphi(k)]^\beta,$$

α, β, C *étant des constantes* > 0. *Alors,*

(i) on a pour $\beta > 1$

(4.2) $$\varphi(k_o+d) = 0 \ , \ d^\alpha = C \ [\varphi(k_o)]^{\beta-1} \ 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} \ ;$$

(ii) on a pour $\beta < 1$ *et* $k_o > 0$

(4.3) $$\varphi(\ell) \leq 2^{\frac{\mu}{1-\beta}} \{C^{\frac{1}{1-\beta}} + (2k_o)^\mu \varphi(k_o) \quad \ell^{-\mu} \qquad , \ \mu = \frac{\alpha}{1-\beta} \ .$$

Théorème 4.1

Nous faisons les hypothèses H 2 *et* H 3. *Alors, si* h *est assez petit, toute solution* $u_h \in V_h$ *de* (2.33) *vérifie les majorations suivantes :*

(i) si $p > n$

(4.4) $$\|u_h\|_{h,o,\infty} \leq K\{\|f_{o,h}\|_{L_{p_o}(\Omega(h))} + \sum_{i=1}^{n}\|f_{i,h}\|_{L_p(\Omega(h))} + N\|u_h\|_{h,o,2}$$

avec $\frac{1}{p_o} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$;

(ii) si $2 \leq p < n$

$$(4.5) \qquad \|u_h\|_{h,o,p^*} \leq K\{\|f_{o,h}\|_{L_{p_o}(\Omega(h))} + \sum_{i=1}^{n} \|f_{i,h}\|_{L_p(\Omega(h))}\} + N\|u_h\|_{h,o,2}$$

avec $\frac{1}{p_o} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$ *et* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

Les constantes K *et* N *sont indépendantes de* h. *La constante* K *est nulle lorsque l'hypothèse* H 1 *a lieu.*

Démonstration

On utilise la méthode donnée dans [8], [9]. Afin de simplifier un peu l'exposé, nous ne ferons la démonstration que lorsque $n > 2$ en laissant le soin au lecteur courageaux d'adapter la démonstration au cas $n = 2$.

1) Nous allons d'abord prouver le résultat lorsque $a_h(u_h,v_h)$ est remplacé par

$$(4.6) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_h(u_h,v_h) = \int_{\Omega(h)} \{ \sum_{i=1}^{n} a_{i,h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}u_h \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}v_h + \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n} b_{i,h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}u_h \cdot p_{o,h}v_h + \Lambda \cdot p_{o,h}u_h \cdot p_{o,h}v_h \} \, dx \end{cases}$$

où Λ est une constante ≥ 0 indépendante de h. En vertu du théorème 2.3, on peut toujours choisir Λ assez grand et h assez petit de façon que

$$(4.7) \qquad \mathcal{A}_h(v_h,v_h) \geq \gamma \|v_h\|^2_{h,1,2} \quad , \quad v_h \in V_h,$$

γ étant une constante > 0 indépendante de h.

Alors, soit $g_o \in L_{p_o}(\mathbb{R}^n)$ et soient $g_1,\dots,g_n \in L_p(\mathbb{R}^n)$ où $p \geq 2$,

$\frac{1}{p_o} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$. Il existe $\xi_h \in V_h$ unique tel que pour tout $v_h \in V_h$

$$(4.8) \qquad \mathcal{A}_h(\xi_h, v_h) = \int_{\Omega(h)} \{g_o \cdot p_{o,h} v_h + \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} v_h\} \, dx.$$

Soit k un nombre réel ≥ 0 ; on associe à ξ_h les suites η_h^k, $\zeta_h^k \in V_h$ définies pour tout $M \in \Omega_h$ par

$$(4.9) \qquad \eta_h^k(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi_h(M) \leq k \\ \xi_h(M) - k & \text{si } \xi_h(M) \geq k \end{cases},$$

$$(4.10) \qquad \zeta_h^k(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi_h(M) \geq -k \\ \xi_h(M) + k & \text{si } \xi_h(M) \leq -k \end{cases}.$$

Notons que $\eta_h^k \geq 0$ et $\zeta_h^k \leq 0$. La relation

$$\mathcal{A}_h(\xi_h, \eta_h^k) = \int_{\Omega(h)} \{g_o \cdot p_{o,h} \eta_h^k + \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} \eta_h^k\} \, dx$$

peut s'écrire

$$(4.11) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_h(\eta_h^k, \eta_h^k) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega(h)} (a_{i,h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} \eta_h^k + b_{i,h} \cdot p_{o,h} \eta_h^k) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{i,h} \xi_h - p_{i,h} \eta_h^k) dx + \\ \qquad + \Lambda \int_{\Omega(h)} p_{o,h} \eta_h^k \cdot (p_{o,h} \xi_h - p_{o,h} \eta_h^k) \, dx = \\ \qquad = \int_{\Omega(h)} \{g_o \cdot p_{o,h} \eta_h^k + \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} \eta_h^k\} \, dx. \end{cases}$$

On utilise alors le résultat suivant que l'on vérifiera ultérieurement

<u>Lemme 4.2</u>

Sous les hypothèses du théorème 4.1, *il existe* $h_o > 0$ *tel que, pour tout* $h \leq h_o$, *on ait p.p. dans* $\Omega(h)$

$$(4.12)\qquad (a_{i,h}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}\eta_h^k + b_{i,h}\cdot p_{o,h}\eta_h^k)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(p_{i,h}\xi_h - p_{i,h}\eta_h^k) \geq 0,\ i = 1,\ldots,n.$$

Les relations (4.11) et (4.12) entraînent donc

$$(4.13)\qquad \mathcal{Q}_h(\eta_h^k,\eta_h^k) \leq \int_{\Omega(h)}\{g_o\cdot p_{o,h}\eta_h^k + \sum_{i=1}^{n} g_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}\eta_h^k\}\ dx.$$

Afin d'exploiter l'inégalité (4.13), on introduit divers sous-ensembles de $\Omega(h)$. On pose

$$(4.14)\qquad E_h(k) = \{x \in \Omega(h) \mid p_{o,h}\ \xi_h(x) \geq k\}\ ,$$

$$(4.15)\qquad E'_h(k) = E_h(k) \cup (\bigcup_{i=1}^{n}\{x \in \Omega(h) \mid \frac{\partial}{\partial x_i}\ p_{i,h}\ \eta_h^k \neq 0\}).$$

On remarque que, pour $\ell \geq k$, on a

$$(4.16)\qquad \begin{cases} E_h(\ell) \subset E'_h(\ell) \subset E'_h(k), \\ E_h(\ell) \subset E_h(k) \end{cases}$$

et

$$(4.17)\qquad p_{o,h}\ \eta_h^k(x) \geq \ell - k \geq 0 \quad \text{si } x \in E_h(\ell).$$

Admettons provisoirement le

<u>Lemme 4.3</u>

Il existe une constante $\delta > 0$ *indépendante de* h *telle que*

$$(4.18)\qquad \text{mes}\ (E_h(k)) \geq \delta\ \ \text{mes}(E'_h(k))$$

pour tout $k \geq 0$.

En minorant le premier membre de l'inégalité (4.13) grâce à (4.7) et en majorant le second membre à l'aide des inégalités de Hölder et de Sobolev, on trouve

$$(4.19)\qquad \|\eta_h^k\|_{h,1,2}^2 \le C\Big[\Big(\int_{E_h(k)}|g_o|^{\frac{2n}{n+2}}dx\Big)^{\frac{n+2}{n}} + \sum_{i=1}^{n}\int_{E_h'(k)}|g_i|^2\Big]\,dx$$

On minore le premier membre de (4.19) en utilisant l'inégalité de Sobolev discrète et on majore la second membre à l'aide de l'inégalité de Hölder. On obtient

$$(4.20)\qquad \left\{\begin{aligned}&\Big(\int_{E_h(k)}|p_{o,h}\eta_h^k|^{2^*}dx\Big)^{2/2^*} \le C\{\|g_o\|_{L_{p_o}(\mathbb{R}^n)}+\\ &\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n}\|g_i\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\}^2\ (\mathrm{mes}(E_h'(k)))^{1-2/p}.\end{aligned}\right.$$

On minore le premier membre de (4.20) en intégrant $|p_{o,h}\eta_h^k|^{2^*}$ sur $E_h(\ell)$, $\ell > k$. On déduit alors de (4.16), (4.17) et du lemme 4.3

$$(4.21)\qquad \mathrm{mes}(E_h(\ell)) \le \frac{C}{(\ell-k)^{2^*}}\Big(\|g_o\|_{L_{p_o}(\mathbb{R}^n)}+\sum_{i=1}^{n}\|g_i\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{2^*}(\mathrm{mes}(E_h(k)))^{\beta}$$

avec

$$(4.22)\qquad \beta = \frac{2^*}{2}\Big(1-\frac{2}{p}\Big).$$

La relation (4.21) permet d'appliquer le lemme 4.1 à la fonction φ définie par $\varphi(t) = \mathrm{mes}(E_h(t))$. Remarquons que $\beta = \frac{n}{p}\frac{p-2}{n-2}$ si bien que $\beta > 1$ (resp. $\beta < 1$) équivaut à $p > n$ (resp. $p < n$).

(i) Si $p > n$, on obtient en appliquant (4.2) avec $k_o = 0$

$$(4.23)\qquad p_{o,h}\,\xi_h(x) \le d = C\Big(\|g_o\|_{L_{p_o}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n}\|g_i\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\Big).$$

En raisonnant d'une manière analogue sur ζ_h^k, on en déduit finalement

$$(4.24)\qquad |p_{o,h}\,\xi_h(x)| \le C\Big(\|g_o\|_{L_{p_o}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n}\|g_i\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\Big).$$

(ii) Si $2 \leq p < n$, on applique l'inégalité (4.3), ce qui donne pour $k_o > 0$

(4.25) $$\operatorname{mes}(E_h(\ell)) \leq C\{(\|g_o\|_{L_{p_o}(\mathbb{R}^n)}+\sum_{i=1}^{n}\|g_i\|_{L_p(\mathbb{R}^n)})^{\frac{2^*}{1-\beta}}\operatorname{mes}(E_h(k_o))\}\ell^{-\frac{2^*}{1-\beta}}.$$

On choisit

$$k_o = \|\xi_h\|_{h,o,2}$$

d'où

$$\operatorname{mes}(E_h(k_o)) \leq 1.$$

Mais d'après (4.7), on a

$$\|\xi_h\|_{h,o,2} \leq C\ (\|g_o\|_{L_{p_o}(\mathbb{R}^n)}+\sum_{i=1}^{n}\|g_i\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}).$$

On en déduit que

(4.26) $$\operatorname{mes}(E_h(\ell)) \leq C(\|g_o\|_{L_{p_o}(\mathbb{R}^n)}+\sum_{i=1}^{n}\|g_i\|_{L_p(\mathbb{R}^n)})^{\frac{2^*}{1-\beta}}\ \ell^{-\frac{2^*}{1-\beta}}.$$

En raisonnant de la même façon sur ζ_h^k, on en déduit que

(4.27) $$\operatorname{mes}(\{x \in \Omega(h) \mid |p_{o,h}\xi_h(x)| \geq \ell\}) \leq C(\|g_o\|_{L_{p_o}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n}\|g_i\|_{L_p(\mathbb{R}^n)})^{\frac{2^*}{1-\beta}}\ \ell^{-\frac{2^*}{1-\beta}}.$$

On désigne par $\xi_{o,h} \in V_h$ la solution de

(4.28) $$\mathcal{R}_h(\xi_{o,h},v_h) = \int_{\Omega(h)} g_o \cdot p_{o,h}v_h \cdot dx \quad ,\ v_h \in V_h$$

et par $\xi_{i,h} \in V_h$, $i = 1,\dots,n$, la solution de

(4.29) $$\mathcal{R}_h(\xi_{i,h},v_h) = \int_{\Omega(h)} g_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} v_h \cdot dx \ , \ v_h \in V_h .$$

D'après (4.27) et puisque $p^* = \frac{2}{1-\beta}$, on en conclut que l'application $g_o \longrightarrow p_{o,h}\xi_{o,h}$ est de type faible (p_o,p^*) uniformément en h et que les applications $g_i \longrightarrow p_{o,h}\xi_{i,h}$, $i = 1,\dots,n$, sont de type faible (p,p^*) uniformément en h. On sait d'autre part que $g_o \longrightarrow p_{o,h}\xi_{o,h}$ est de type fort $(\frac{2n}{n+2},2^*)$ et que $g_i \longrightarrow p_{o,h}\xi_{i,h}$, $i = 1,\dots,n$, est de type fort $(2,2^*)$ uniformément en h. Il résulte alors du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz (cf. [11]) que $g_o \longrightarrow p_{o,h}\xi_{i,h}$ est de type fort (q_o,q^*) et $g_i \longrightarrow p_{o,h}\xi_{i,h}$, $i = 1,\dots,n$, est de type fort (q,q^*) uniformément en h pour $2 < q < p$. En faisant varier p et en remarquant que

$$\xi_h = \sum_{i=0}^{n} \xi_{i,h},$$

on trouve que

(4.30) $$\|p_{o,h}\xi_h\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C(\|g_o\|_{L_{p_o}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n}\|g_i\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}).$$

En prenant $g_o = \tilde{f}_{o,h}$ et $g_i = -\tilde{f}_{i,h}$, $i = 1,\dots,n$, on a $\xi_h = u_h$ et le théorème est bien démontré lorsqu'on remplace $a_h(u_h,v_h)$ par $\mathcal{R}_h(u_h,v_h)$.

2) Pour prouver le résultat dans le cas général, on écrit l'équation (2.33) sous la forme

(4.31) $$\begin{cases} \mathcal{R}_h(u_h,v_h) = \int_{\Omega(h)} \{(f_{o,h} + (\Lambda-c_h)p_{o,h}u_h)\cdot p_{o,h}v_h - \\ \qquad - \sum_{i=1}^{n}(f_{i,h}+d_{i,h}\cdot p_{o,h}u_h)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}v_h\}dx. \end{cases}$$

Si t_o et t_1 sont définis par

$$\frac{1}{t_o} = \frac{1}{2}+\frac{1}{r}\ , \ \frac{1}{t_1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{r} - \frac{1}{n} \ (\text{i.e. } t_1 = t_o^*),$$

on déduit de l'hypothèse H 3 et des inégalités de Hölder et de Sobolev

$$(4.32) \qquad \begin{cases} \|(\Lambda-c_h)p_{o,h}u_h\|_{L_{t_o}(\Omega(h))} \leq C\|u_h\|_{h,1,2}\ , \\ \|d_{i,h}\cdot p_{o,h}u_h\|_{L_{t_1}(\Omega(h))} \leq C\|u_h\|_{h,1,2}\ , \ i = 1,\dots,n \end{cases}$$

Si $t_1 > p$, on applique le résultat démontré au point 1) et on obtient

$$(4.33) \qquad \|u_h\|_{h,o,t_2} \leq C(F_h + \|u_h\|_{h,1,2})$$

où

$$(4.34) \qquad F_h = \|f_{o,h}\|_{L_{p_o}(\Omega(h))} + \sum_{i=1}^{n} \|f_{i,h}\|_{L_p(\Omega(h))}$$

et où t_2 est quelconque si $t_1 \geq n$ et où $t_2 = t_1$ si $t_1^* < n$. Dans le second cas, on trouve

$$(4.35) \qquad \begin{cases} \|(\Lambda-c_h)p_{o,h}u_h\|_{L_{t_1}(\Omega(h))} \leq C(F_h+\|u_h\|_{h,1,2})\ , \\ \|d_{i,h}\cdot p_{o,h}u_h\|_{L_{t_2}(\Omega(h))} \leq C(F_h+\|u_h\|_{h,1,2})\ , \ i = 1,\dots,n. \end{cases}$$

On en déduit (4.33) avec t_2 remplacé par $t_3 = t_2^*$ si $t_2 < n$ ou t_3 quelconque si $t_2 \geq n$, etc... Ainsi, par itérations, on obtient

$$(4.36) \qquad \begin{cases} \|(\Lambda-c_h)p_{o,h}u_h\|_{L_{p_o}(\Omega(h))} \leq C(F_h+\|u_h\|_{h,1,2})\ , \\ \|d_{i,h}\ p_{o,h}u_h\|_{L_p(\Omega(h))} \leq C(F_h+\|u_h\|_{h,1,2})\ , \ i = 1,\dots,n, \end{cases}$$

d'où

$$(4.37)\qquad \begin{cases} \|u_h\|_{h,o,p^*} \leq C(F_h+\|u_h\|_{h,1,2}) & , \quad 2 \leq p < n, \\ \|u_h\|_{h,o,\infty} \leq C(F_h+\|u_h\|_{h,1,2}) & , \quad p > n. \end{cases}$$

Si l'hypothèse H 1 a lieu, on a

$$(4.38)\qquad \|u_h\|_{h,1,2} \leq C \quad F_h$$

tandis que, dans le cas contraire, il existe deux constantes λ, $\beta > 0$ indépendantes de h telles que (cf. Théorème 2.3)

$$a_h(v_h,v_h)+\lambda\|v_h\|^2_{h,o,2} \geq \beta \; \|v_h\|^2_{h,1,2} \quad , \quad v_h \in V_h$$

d'où

$$(4.39)\qquad \|u_h\|_{h,1,2} \leq C(F_h+\|u_h\|_{h,o,2}).$$

On en déduit donc le théorème dans le cas général.

3) Pour achever la démonstration du théorème, il faut vérifier les lemmes 4.2 et 4.3.

<u>Démonstration du lemme 4.2</u>

On doit montrer que, dans chaque $\sigma_{i,h}(P)$, $P \in K_{i,h} \cup K^+_{i,h} \cup K^-_{i,h}$, on a pour $h \leq h_o$

$$(4.40)\qquad X^k_{i,h} = (a_{i,h}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}\,\eta^k_h + b_{i,h}\cdot p_{o,h}\eta^k_h)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(p_{i,h}\xi_h-p_{i,h}\eta^k_h) \geq 0.$$

Soit $P \in K_{i,h} \cup K^+_{i,h}$ tel que $\xi_h(P-\frac{h}{2}e_i) \geq k > 0$. Pour que $\frac{\partial}{\partial x_i}(p_{i,h}\xi_h-p_{i,h}\eta^k_h)$ soit $\neq 0$ dans $\sigma_{i,h}(P)$, il faut et il suffit que $\xi_h(P+\frac{h}{2}e_i) < k$ si $P \in K_{i,h}$. Si $P \in K^+_{i,h}$, on a $\xi_h(P+\mu^+_i(P)he_i) = 0 < k$. dans ces conditions, on trouve dans $\varpi_h(P-\frac{h}{2}e_i) \cap \sigma_{i,h}(P)$

$$X^k_{i,h} = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(k-\xi_h(P+\frac{h}{2}e_i))(\xi_h(P-\frac{h}{2}e_i)-k)(\hat{a}_{i,h}(P)-h\,\hat{b}^+_{i,h}(P-\frac{h}{2}e_i)), P\in K_{i,h} \\ \dfrac{1}{(\frac{1}{2}+\mu^+_i(P))h^2}\,k(\xi_h(P-\frac{h}{2}e_i)-k)(\hat{a}_{i,h}(P)-(\frac{1}{2}+\mu^+_i(P))h\,\hat{b}^+_{i,h}(P-\frac{h}{2}e_i)),\ P\in K^+_{i,h} \end{cases}$$

et dans $\sigma_{i,h}(P) - \varpi_h(P-\frac{h}{2}e_i)\cap\sigma_{i,h}(P)$

$$X^k_{i,h} = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(k-\xi_h(P+\frac{h}{2}e_i))(\xi_h(P-\frac{h}{2}e_i)-k)\hat{a}_{i,h}(P) \quad , \quad P\in K_{i,h} \\ \dfrac{1}{(\frac{1}{2}+\mu^+_i(P))h^2}\,k(\xi_h(P-\frac{h}{2}e_i)-k)\ \hat{a}_{i,h}(P) \quad , \quad P\in K^+_{i,h}. \end{cases}$$

Dans le cas envisagé, on aura donc $X^k_{i,h}\geq 0$ dans $\sigma_{i,h}(P)$ si et seulement si

$$\hat{a}_{i,h}(P) - h\,\hat{b}^+_{i,h}(P-\frac{h}{2}e_i)\geq 0 \quad , \quad P\in K_{i,h}\ ,$$

$$\hat{a}_{i,h}(P) - (\frac{1}{2}+\mu^+_i(P))h\,\hat{b}^+_{i;h}(P-\frac{h}{2}e_i)\geq 0 \quad , P\in K^+_{i,h}.$$

Puisque

$$|\hat{b}^+_{i,h}(P-\frac{h}{2}e_i)| = \frac{2}{h^n}\left|\int_{\varpi_h(P-\frac{h}{2}e_i)\cap\sigma_{i,h}(P)} b_{i,h}.dx\right| \leq (\frac{h^n}{2})^{-\frac{1}{r}}\|b_{i,h}\|_{L_r(\Omega(h))},$$

$$\hat{a}_{i,h}(P)\geq\alpha>0,$$

$$\mu^+_i(P)\geq\mu,$$

on a $X^k_{i,h}\geq 0$ dans $\sigma_{i,h}(P)$ pour

$$\text{(4.41)} \qquad h\leq h_o = \left\{\frac{\alpha}{2^{1/r}\max(1,\mu+\frac{1}{2})\max\limits_{i,h}\|b_{i,h}\|_{L_r(\Omega(h))}}\right\}^{\frac{r}{r-n}}$$

ce qui a un sens puisque $\|b_{i,h}\|_{L_r(\Omega(h))}\leq C$ et que $r>n$.

On fait un raisonnement analogue lorsque $P\in K_{i,h}\cup K^-_{i,h}$ avec

$\xi_h(P+\frac{h}{2}e_i) \leq k$. Ceci achève la démonstration du lemme 4.2.

Démonstration du lemme 4.3.

$E_h(k)$ est une réunion de pavés $\varpi_h(M)$, M décrivant un certain sous-ensemble Ω_h^k de Ω_h. Si $x \in E_h'(k)$, il est clair que l'un au moins des points x, $x \pm \frac{h}{2}e_i$, $i = 1,\ldots,n$, (ou éventuellement un point de la forme $x - \mu_i^+(P)he_i$ ou $x+\mu_i^-(P)he_i$) appartient à $E_h(k)$. Posons

(4.42) $$\rho_h(M) = (\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_{i,h}(M+\frac{h}{2}e_i)) \cup (\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_{i,h}(M-\frac{h}{2}e_i)) \ , \ M \in \Omega_h.$$

D'après ce qui précède, on a nécessairement

(4.43) $$E_h'(k) \subset \bigcup_{M\in\Omega_h^k} \rho_h(M).$$

Mais, d'après (2.17), on peut écrire

(4.44) $$\text{mes}\,(\rho_h(M)) \leq C(2n+1)\text{mes}(\varpi_h(M)).$$

On en déduit le lemme en sommant (4.44) pour $M \in \Omega_h^k$.

Le théorème 4.1 est ainsi complètement prouvé.

4.2. Convergence dans L_p.

Le théorème 4.1 va nous permettre d'améliorer le résultat de convergence du N° 3 lorsque $f_o \in L_{p_o}(\Omega)$, $f_i \in L_p(\Omega)$, $i = 1,\ldots,n$, avec $p \geq 2$ $(\frac{1}{p_o} = \frac{1}{p}+\frac{1}{n})$. Faisons l'hypothèse suivante.

Hypothèses H 4 p.

(4.45) $$\begin{cases} \lim_{h\to 0} \tilde{f}_{o,h} = \tilde{f}_o \text{ dans } L_{p_o}(\mathbb{R}^n) \text{ fort,} \\ \lim_{h\to 0} \tilde{f}_{i,h} = \tilde{f}_i \text{ dans } L_p(\mathbb{R}^n) \text{ fort}, \ i = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

Théorème 4.2

Sous les hypothèses H 1, H 2, H 3 *et* H 4 p, *on a outre* (3.5)

(i) si $p > n$

(4.46) $$\lim_{h\to 0} p_{o,h}u_h = \tilde{u} \text{ dans } L_\infty(\mathbb{R}^n) \text{ "weak star" et dans } L_q(R^n) \text{ fort, } 1 \leq q < \infty$$

(ii) si $2 \leq p < n$

(4.47) $$\lim_{h\to 0} p_{o,h}u_h = \tilde{u} \text{ dans } L_{p^*}(\mathbb{R}^n) \text{ fort, } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Démonstration

1) Considérons d'abord le cas où $p > n$. Comme $\lim_{h\to 0} \tilde{f}_{i,h} = \tilde{f}_i$ dans $L_2(R^n)$ fort en vertu de H 4 p, on peut appliquer le théorème 3.1 et on obtient

$$\lim_{h\to 0} \overrightarrow{p_h}\, u_h = \vec{\Pi}\, \tilde{u} \text{ dans } X_2(\mathbb{R}^n) \text{ fort.}$$

D'autre part, d'après H 4 p et le theorème 4.1, $p_{o,h}u_h$ reste dans un borné de $L_\infty(R^n)$. On en déduit que

$$\lim_{h\to 0} p_{o,h}u_h = \tilde{u} \text{ dans } L_\infty(\mathbb{R}^n) \text{ "weak-star".}$$

Alors la convergence forte de $p_{o,h}u_h$ vers $\tilde{u}$ dans $L_q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq q < \infty$ résulte immédiatement de la convergence forte dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq q \leq 2$ et de

$$\|p_{o,h}u_h-\tilde{u}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq \|p_{o,h}u_h-u\|^{(q-2)/2}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\ \|p_{o,h}u_h-u\|^{q/2}_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

pour $2 < q < \infty$.

2) Passons maintenant au cas où $2 \leq p < n$. On a comme précédemment

$\lim_{h\to 0} \overrightarrow{p_h}\, u_h = \vec{\Pi}\, \tilde{u}$ dans $X_2(\mathbb{R}^n)$ fort. Considérons alors des suites $(\varphi_i^{(\nu)})$ de fonctions de $C_o^\infty(\Omega)$, $i = 0,1,\dots,n$, telles que

$$(4.48)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi_o^{(\nu)} = f_o \text{ dans } L_{p_o}(\Omega) \text{ fort,} \\ \lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi_i^{(\nu)} = f_i \text{ dans } L_p(\Omega) \text{ fort, } i = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Soit $u^{(\nu)}$ la solution de

$$(4.49)\qquad a(u^{(\nu)},v) = \int_\Omega \{\varphi_o^{(\nu)}.v - \sum_{i=1}^n \varphi_i^{(\nu)}.\frac{\partial v}{\partial x_i}\}dx\ ,\ v \in H_o^1(\Omega),$$

et soit $u_h^{(\nu)} \in V_h$ la solution de

$$(4.50)\qquad a_h(u_h^{(\nu)},v_h) = \int_{\Omega(h)} \{\tilde{\varphi}_o^{(\nu)}.p_{o,h}v_h - \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i^{(\nu)}.\frac{\partial}{\partial x_i}p_{i,h}v_h\}dx, v_h \in V_h.$$

En vertu du théorème 1. et de (4.45), on a

$$(4.51)\qquad \lim_{\nu\to\infty} u^{(\nu)} = u \text{ dans } L_{p^*}(\Omega) \text{ fort.}$$

On peut alors écrire

$$\begin{cases} \|p_{o,h}u_h - \tilde{u}\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le \|p_{o,h}(u_h - u_h^{(\nu)})\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} + \|p_{o,h}u_h^{(\nu)} - \tilde{u}^{(\nu)}\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} + \\ \qquad + \|\tilde{u}^{(\nu)} - \tilde{u}\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} \end{cases}$$

c'est-à-dire en tenant compte de (4.5)

$$(4.52)\qquad \begin{cases} \|p_{o,h}u_h - \tilde{u}\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le K(\|\tilde{f}_{o,h} - \tilde{\varphi}_o^{(\nu)}\|_{L_{p_o}(\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^n \|\tilde{f}_{i,h} - \tilde{\varphi}_i^{(\nu)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}) + \\ \qquad + \|p_{o,h}u_h^{(\nu)} - \tilde{u}^{(\nu)}\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} + \|u^{(\nu)} - u\|_{L_{p^*}(\Omega)}. \end{cases}$$

Mais, d'après la première partie de la démonstration on a

$$(4.53)\qquad \lim_{h\to 0} p_{o,h}u_h^{(\nu)} = \tilde{u}^{(\nu)} \text{ dans } L_{p^*}(\mathbb{R}^n) \text{ fort.}$$

La convergence forte de $p_{o,h}u_h$ vers $\tilde{u}$ dans $L_{p^*}(\mathbb{R}^n)$ résulte donc de (4.45), (4.48), (4.51), (4.52) et (4.53).

5 - UTILISATION DE LA TRANSPOSITION.

5.1. Cas d'un second membre $T \in L_q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{2n}{n+2}$

Soit G^* l'opérateur adjoint de G opérateur de Green défini au N° 1. Par transposition, on déduit du théorème 1.3 appliqué à G^* le résultat suivant.

Théorème 5.1

Si la forme $a(u,v)$ *est* $H_0^1(\Omega)$*-elliptique, G est un opérateur linéaire continu de* $L_q(\Omega)$ *avec* $1 < q \leq \frac{2n}{n+2}$ *dans* $\overset{\circ}{W}{}^1_{q^*}(\Omega)$ $\left(\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}\right)$ *et de* $L_1(\Omega)$ *dans* $\overset{\circ}{W}{}^1_s(\Omega)$ *avec* $1 < s < \frac{n}{n-1}$.

Le théorème précédent résoud le problème de Dirichlet pour l'équation

$$(5.1) \qquad A\,u = f$$

au sens suivant

$$(5.2) \qquad \int_\Omega u \,.\, \varphi \, dx = \int_\Omega f . G^* \varphi \, dx \quad , \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nous allons chercher à approcher la solution u de (5.2) donnée par le théorème 5.1 à l'aide de la même méthode des différences finies. Auparavant, nous allons caractériser la norme duale de $\| \ \|_{h,1,p}$, $1 < p < \infty$, par rapport au produit scalaire $(\ ,\ )_h$. Soit $T_h \in V_h$; il existe des fonctions $g_{i,h} \in L_{p'}(\Omega(h))$, $i = 0,1,\dots,n$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ telles que

$$(5.3) \qquad T_h(M) = \hat{g}_{0,h}(M) + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{g}_{i,h}(M+\frac{h}{2}e_i) - \hat{g}_{i,h}(M-\frac{h}{2}e_i)\right) , \ M \in \Omega_h,$$

la décomposition (5.3) n'étant évidemment pas unique. On considère alors les normes suivantes sur V_h

(5.4) $$\|T_h\|^*_{h,1,p} = \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|(T_h,v_h)_h|}{\|v_h\|_{h,1,p}} ,$$

et

(5.5) $$\|T_h\|_{h,-1,p'} = \inf(\sum_{i=0}^{n} \|g_{i,h}\|^{p'}_{L_{p'}(\Omega(h))})^{1/p'} \quad , \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1,$$

où la borne inférieure est prise sur les $g_{i,h} \in L_{p'}(\Omega(h))$, $i = 0,1,\dots,n$, qui vérifient (5.3). On démontre alors le

<u>Lemme 5.1</u>

Les normes $\|T_h\|^*_{h,1,p}$ *et* $\|T_h\|_{h,-1,p'}$ *sont égales pour* $1 < p < \infty$.

<u>Démonstration</u>

Puisque d'après (5.3)

$$(T_h,v_h)_h = \int_{\Omega(h)} \{g_{o,h}\cdot p_{o,h}v_h - \sum_{i=1}^{n} g_{i,h}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h}v_h\}dx \quad , v_h \in V_h,$$

on a tout d'abord en vertu de l'inégalité de Hölder

(5.6) $$\|T_h\|^*_{h,1,p} \leq \|T_h\|_{h,-1,p'} .$$

D'autre part, on introduit un opérateur non linéaire B_h de V_h dans lui-même défini par

(5.7) $$\begin{cases} (B_h(w_h),v_h) = \int_{\Omega(h)} \{\sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} w_h|^{p-2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} w_h\cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} v_h + \\ \qquad + |p_{o,h}w_h|^{p-2}\cdot p_{o,h}w_h\cdot p_{o,h}v_h\}\, dx, \quad v_h,w_h \in V_h. \end{cases}$$

Cet opérateur B_h est continu sur V_h et vérifie

(5.8) $$(B_h(v_h),v_h)_h = \|v_h\|^p_{h,1,p} \; , \; v_h \in V_h,$$

(5.9) $$(B_h(w_h)-B_h(v_h),w_h-v_h)_h \geq 0 \quad , \quad v_h,w_h \in V_h.$$

On déduit alors de [6] par exemple qu'il existe $w_h \in V_h$ (unique en vertu des résultats de [2]) tel que

(5.10) $$B_h(w_h) = T_h,$$

c'est-à-dire

(5.11) $$\begin{cases} T_h(M) = |w_h(M)|^{p-2} w_h(M) + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} (|\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} w_h(M+\frac{h}{2}e_i)|^{p-2}. \\ \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} w_h(M+\frac{h}{2}e_i) - |\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} w_h(M-\frac{h}{2}e_i)|^{p-2}. \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} w_h(M-\frac{h}{2}e_i)) \end{cases}$$

pour tout $M \in \Omega_h$. On obtient donc en (5.11) une décomposition particulière de T_h du type (5.3) avec

(5.12) $$\begin{cases} g_{o,h} = |p_{o,h} w_h|^{p-2} . p_{o,h} w_h, \\ g_{i,h} = |\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} w_h|^{p-2} . \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} w_h, \ i = 1,\dots,n. \end{cases}$$

D'après (5.5), il en résulte que

(5.13) $$\|T_h\|_{h,-1,p'} \leq (\int_{\Omega(h)} \{\sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} w_h|^p + |p_{o,h} w_h|^p\} dx)^{1/p} = \|w_h\|_{h,1,p}^{p-1}.$$

Or, on a en vertu de (5.10)

(5.14) $$\|T_h\|^{*}_{h,1,p} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{|(T_h, v_h)_h|}{\|v_h\|_{h,1,p}} \geq \frac{(B_h(w_h), w_h)_h}{\|w_h\|_{h,1,p}} = \|w_h\|_{h,1,p}^{p-1}.$$

On trouve ainsi que

(5.15) $$\|T_h\|^{*}_{h,1,p} \geq \|T_h\|_{h,-1,p'}.$$

Le lemme se déduit alors de (5.6) et (5.15).

Corollaire

On a pour tout $v_h \in V_h$

(5.16) $$\|v_h\|_{h,1,p} = \sup_{\substack{T_h \in V_h \\ T_h \neq 0}} \frac{|(T_h, v_h)_h|}{\|T_h\|_{h,-1,p'}} \quad , \; 1 < p < \infty$$

On peut alors prouver le résultat suivant.

Théorème 5.2

Soit $f_h \in L_q(\Omega(h))$, $1 \leq q \leq \frac{2n}{n+2}$. *Alors, sous les hypothèses* H 1, H 2, H3 *et pour* h *assez petit, la solution* $u_h \in V_h$ *de*

(5.17) $$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega(h)} f_h \cdot p_{o,h} v_h \, dx \; , \; v_h \in V_h$$

vérifie les majorations

(i) si $1 < q \leq \frac{2n}{n+2}$

(5.18) $$\begin{cases} \|u_h\|_{h,1,q^*} \leq C\|f_h\|_{L_q(\Omega(h))} & , \; \frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}, \\ \|u_h\|_{h,o,q^{**}} \leq C\|f_h\|_{L_q(\Omega(h))} & , \; \frac{1}{q^{**}} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n} \; ; \end{cases}$$

(ii) si $q = 1$

(5.19) $$\begin{cases} \|u_h\|_{h,1,s} \leq C\|f_h\|_{L_1(\Omega(h))} & , \; 1 \leq s < \frac{n}{n-1} , \\ \|u_h\|_{h,o,s^*} \leq C\|f_h\|_{L_1(\Omega(h))} & , \; 1 \leq s^* < \frac{n}{n-2}. \end{cases}$$

Démonstration

Soit A_h^* l'adjoint de l'opérateur A_h ; on a

(5.20) $$(A_h^* v_h, u_h) = a_h(u_h, v_h) \quad , \quad u_h, v_h \in V_h.$$

Soit $T_h \in V_h$ et soit $v_h \in V_h$ la solution de

(5.21) $$A_h^* v_h = T_h .$$

On peut alors appliquer à v_h le théorème 4.1 en tenant compte du lemme 5.1 ; on trouve

(5.22) $$\|v_h\|_{h,o,p^*} \leq C\|T_h\|_{h,-1,p} \quad , \; 2 \leq p < n,$$

(5.23) $$\|v_h\|_{h,o,\infty} \leq C\|T_h\|_{h,-1,p} \quad , \; p > n.$$

Soit u_h la solution de (5.17) et soit $1 < q \leq \frac{2n}{n+2}$; on a en vertu du corollaire du lemme 5.1

$$\|u_h\|_{h,1,q^*} = \sup_{\substack{T_h \in V_h \\ T_h \neq 0}} \frac{|(T_h,u_h)_h|}{\|T_h\|_{h,-1,p}} \quad , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q^*} = 1, \; \frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}.$$

Puisque A_h^* est une bijection de V_h sur V_h et puisque $2 \leq p < n$, on déduit de (5.22)

$$\|u_h\|_{h,1,q^*} \leq C \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|(A_h^* v_h,u_h)_h|}{\|v_h\|_{h,o,p^*}} = C \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|\int_{\Omega(h)} f_h . p_{o,h} v_h . dx|}{\|v_h\|_{h,o,p^*}}$$

c'est-à-dire en utilisant l'inégalité de Hölder

(5.24) $$\|u_h\|_{h,1,q^*} \leq C\|f_h\|_{L_q(\Omega(h))} .$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev discrète, on trouve

(5.25) $$\|u_h\|_{h,1,q^{**}} \leq C\|f_h\|_{L_q(\Omega(h))} \quad , \; \frac{1}{q^{**}} = \frac{1}{q^*} - \frac{1}{n}.$$

On démontrerait de la même façon les inégalités (5.19) en appliquant la majoration (5.23).

On déduit du théorème précédent le

Théorème 5.3

Nous faisons les hypothèses H 1, H 2, H 3 *et*

(5.26) $$\lim_{h\to 0} \tilde{f}_h = \tilde{f} \textit{ dans } L_q(\mathbb{R}^n) \textit{ fort}, \; 1 \leq q \leq \frac{2n}{n+2}.$$

Alors, on a

(i) si $1 < q \leq \frac{2n}{n+2}$

(5.27) $$\begin{cases} \lim_{h\to 0} \vec{p}_h u_h = \vec{\Pi}\, \tilde{u} \textit{ dans } X_{q^*}(\mathbb{R}^n) \textit{ fort}, \; \frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}, \\ \lim_{h\to 0} p_{o,h} u_h = \tilde{u} \textit{ dans } L_{q^{**}}(\mathbb{R}^n) \textit{ fort}, \; \frac{1}{q^{**}} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n}, \end{cases}$$

(ii) si $q = 1$

(5.28) $$\begin{cases} \lim_{h\to 0} \vec{p}_h u_h = \vec{\Pi}\, \tilde{u} \textit{ dans } X_s(\mathbb{R}^n) \textit{ fort}, \; 1 \leq s < \frac{n}{n-1}, \\ \lim_{h\to 0} p_{o,h} u_h = \tilde{u} \textit{ dans } L_{s^*}(\mathbb{R}^n) \textit{ fort}, \; 1 \leq s^* < \frac{n}{n-2}, \end{cases}$$

où, dans (5.27) *et* (5.28), u_h *est la solution de* (5.17) *et où* u *est la solution de* (5.2).

Démonstration

Considérons une suite $(\varphi^{(\nu)})$ de fonctions de $C_o^\infty(\Omega)$ telle que

(5.29) $$\lim_{\nu\to\infty} \varphi^{(\nu)} = f \text{ dans } L_q(\Omega) \text{ fort}.$$

On désigne par $u^{(\nu)} \in H_o^1(\Omega)$ la solution de

(5.30) $$a(u^{(\nu)},v) = \int_\Omega \varphi^{(\nu)}.v\,dx \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

et par $u_h^{(\nu)} \in V_h$ la solution de

(5.31) $$a_h(u_h^{(\nu)},v_h) = \int_{\Omega(h)} \tilde{\varphi}^{(\nu)}.p_{o,h}\,v_h\,dx \quad , \quad v_h \in V_h.$$

Le théorème 5.1 nous permet d'affirmer que

(5.32) $$\lim_{\nu\to\infty} u^{(\nu)} = u \text{ dans } \begin{cases} \overset{\circ}{W}{}^1_{q^*}(\Omega) \text{ fort si } 1 < q \leq \frac{2n}{n+2}, \\ \overset{\circ}{W}{}^1_s\ (\Omega) \text{ fort }, 1 \leq s < \frac{n}{n-1}, \text{ si } q = 1. \end{cases}$$

D'autre part, puisque $\overrightarrow{p_h}\,u_h^{(\nu)}$ et $\tilde{u}^{(\nu)}$ ont leurs supports qui restent dans un même compact fixe de $\mathbb{R}^n$, on déduit du théorème 3.1 que

(5.33) $$\lim_{h\to 0} \overrightarrow{p_h}\,u_h^{(\nu)} = \vec{\Pi}\,\tilde{u}^{(\nu)} \text{ dans } X_p(\mathbb{R}^n) \text{ fort }, 1 \leq p \leq 2,$$

(5.34) $$\lim_{h\to 0} p_{o,h}\,u_h^{(\nu)} = \tilde{u}^{(\nu)} \text{ dans } L_{p^*}(\mathbb{R}^n) \text{ fort }, 1 \leq p^* \leq 2^*.$$

Si $1 < q \leq \frac{2n}{n+2}$, on peut écrire

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{p_h}u_h - \vec{\Pi}\tilde{u}\|_{X_{q^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\overrightarrow{p_h}(u_h - u_h^{(\nu)})\|_{X_{q^*}(\mathbb{R}^n)} + \|\overrightarrow{p_h}\,u_h^{(\nu)} - \vec{\Pi}\,\tilde{u}^{(\nu)}\|_{X_{q^*}(\mathbb{R}^n)} + \\ \qquad + \|\vec{\Pi}\,\tilde{u}^{(\nu)} - \vec{\Pi}\,\tilde{u}\|_{X_{q^*}(\mathbb{R}^n)} \end{cases}$$

d'où en tenant compte de (2.20) et (5.18)

(5.35) $$\begin{cases} \|\overrightarrow{p_h}u_h - \vec{\Pi}\,\tilde{u}\|_{X_{q^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\tilde{f}_h - \tilde{\varphi}^{(\nu)}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} + \|\overrightarrow{p_h}u_h^{(\nu)} - \vec{\Pi}\,\tilde{u}^{(\nu)}\|_{X_{q^*}(\mathbb{R}^n)} + \\ \qquad + \|u^{(\nu)} - u\|_{W^1_{q^*}(\Omega)}. \end{cases}$$

La convergence de $\overrightarrow{p_h}\,u_h$ vers $\vec{\Pi}\,\tilde{u}$ dans $X_{q^*}(\mathbb{R}^n)$ est entraînée par (5.26), (5.29), (5.32), (5.33) et (5.35). De même,

$$(5.36)\quad \begin{cases} \|p_{o,h}u_h-\tilde{u}\|_{L_{q^{**}}(R^n)} \leq C\|\tilde{f}_h-\tilde{\varphi}^{(\nu)}\|_{L_q(R^n)} + \|p_{o,h}u_h^{(\nu)}-\tilde{u}^{(\nu)}\|_{L_{q^{**}}(R^n)} + \\ \qquad\qquad + \|u^{(\nu)} - u\|_{L_{q^{**}}(\Omega)} \end{cases}$$

montre que $p_{o,h}u_h \longrightarrow \tilde{u}$ dans $L_{q^{**}}(R^n)$.

Le cas $q = 1$ se traite évidemment d'une manière analogue.

5.2. Cas où le second membre est une mesure.

On peut améliorer le théorème 1.3 en faisant une hypothèse de régularité sur l'ouvert Ω : Ω est $H_o^1(\Omega)$-admissible (cf. [9]).

Théorème 5.4

Si l'ouvert Ω *est* $H_o^1(\Omega)$*-admissible et si la forme* $a(u,v)$ *est* $H_o^1(\Omega)$*-elliptique,* G *est un opérateur linéaire continu de* $W_p^{-1}(\Omega)$ *dans* $C^o(\bar{\Omega})$ *si* $p > n$.

Par transposition, on déduit du théorème 5.4 appliqué à G^* le

Théorème 5.5

Si l'ouvert Ω *est* $H_o^1(\Omega)$*-admissible et si la forme* $a(u,v)$ *est* $H_o^1(\Omega)$*-elliptique,* G *est un opérateur linéaire continu de l'espace des mesures à variation bornée et à support dans* Ω *dans* $\overset{\circ}{W}{}_s^1(\Omega)$ *pour* $1 \leq s < \frac{n}{n-1}$.

Si μ est une telle mesure, le théorème précédent résoud le problème de Dirichlet pour l'équation

$$(5.37)\qquad A\,u = \mu$$

au sens suivant

$$(5.38)\qquad \int_\Omega u.\varphi.dx = \int_\Omega G^*\varphi.d\mu \quad , \quad \varphi \in C_o^\infty(\Omega).$$

Là encore, nous allons chercher à approcher la solution u de (5.38) donnée par le théorème 5.5 à l'aide d'une méthode de différences finies. Malheureusement, nous ne savons pas traiter le problème dans toute sa généralité ; nous nous restreindrons donc au cas où les coefficients de l'opérateur A et la frontière Γ sont assez réguliers. Plus précisément, nous supposerons désormais qu'il existe $\lambda \in \left]0,1\right[$ tel que

$$(5.39) \qquad \begin{cases} a_i,\ d_i \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}), \\ b_i, c \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

$$(5.40) \qquad \begin{cases} \text{la frontière } \Gamma \text{ est une variété de classe } C^{2,\lambda} \text{ et de dimen-} \\ \text{sion } n-1,\ \Omega \text{ étant localement d'un seul côté de } \Gamma. \end{cases}$$

Dans ces conditions, on sait (cf. [4] par exemple) que, si la forme a(u,v) est $H_0^1(\Omega)$-elliptique et si $\varphi \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, il existe une fonction $\Psi \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ unique telle que

$$(5.41) \qquad \begin{cases} A\,\Psi = \varphi & \text{dans } \Omega, \\ \quad \Psi = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Nous allons supposer d'autre part que

$$(5.42) \qquad \varpi_h(M) \subset \Omega \ , \ M \in \Omega_h$$

et que les hypothèses H 3 sont remplacées par les

Hypothèses H'3

(5.43)
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0} \tilde{a}_{i,h} = \tilde{a}_i \\ \lim\limits_{h\to 0} \tilde{b}_{i,h} = \tilde{b}_i \\ \lim\limits_{h\to 0} \tilde{c}_h = \tilde{c} \\ \lim\limits_{h\to 0} \tilde{d}_{i,h} = \tilde{d}_i \end{array}\right\} \quad \text{dans } L_\infty(\mathbb{R}^n) \text{ fort.}$$

On démontre alors le

Lemme 5.2

Soit $\varphi \in C^{o,\lambda}(\bar{\Omega})$ *et soit* $\Psi_h \in V_h$ *la solution de*

(5.44)
$$a_h(\Psi_h, v_h) = \int_\Omega \varphi \cdot p_{o,h} v_h \cdot dx, \quad v_h \in V_h.$$

Alors, sous les hypothèses (5.39), (5.40), (5.42), H 1, H 2 *et* H'3, $p_{o,h}\Psi_h$ *converge uniformément dans* $\bar{\Omega}$ *vers la solution* Ψ *de* (5.41).

Démonstration

On désigne par $\rho_h \Psi \in V_h$ la suite définie par

(5.45)
$$\rho_h \Psi(M) = \Psi(M) \quad , M \in \Omega_h.$$

On va montrer que l'on peut mettre $a_h(\Psi_h - \rho_h \Psi, v_h)$ sous la forme

(5.46)
$$a_h(\Psi_h - \rho_h\Psi, v_h) = \int_{\Omega(h)} \{g_{o,h} \cdot p_{o,h} v_h + \sum_{i=1}^{n} g_{i,h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} v_h\} dx, \quad v_h \in V_h$$

où

(5.47)
$$\lim_{h\to 0} \tilde{g}_{i,h} = 0 \text{ dans } L_p(\mathbb{R}^n) \text{ fort} \ , \ i = 0,1,\ldots,n \ , \ 1 \leq p < \infty.$$

D'après (5.44), on peut écrire

$$(5.48)\quad \left\{\begin{array}{l} a_h(\Psi_h - \rho_h\Psi, v_h) = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + d_i \Psi).p_{o,h} v_h \, dx - \\ \qquad - \int_{\Omega(h)} (a_{i,h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} \rho_h \Psi + d_{i,h} \cdot p_{o,h} \rho_h \Psi) . \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} v_h dx \Big\} + \\ \quad + \Big\{ \int_\Omega (\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + c\Psi).p_{o;h} v_h \, dx - \\ \qquad - \int_\Omega (\sum_{i=1}^{n} b_{i,h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} \rho_h \Psi + c_h \cdot p_{o,h} \rho_h \Psi).p_{o,h} v_h dx \Big\}. \end{array}\right.$$

On pose d'abord

$$(5.49)\qquad g_{o,h} = (\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + c\Psi) - (\sum_{i=1}^{n} b_{i,h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i,h} \rho_h \Psi + c_h p_{o,h} \rho_h \Psi) \text{ dans } \Omega.$$

Calculons ensuite $g_{n,h}$ par exemple. Pour cela, on définit

$$(5.50)\qquad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \ , \ \varpi'_h(x) = \prod_{i=1}^{n-1} \left[x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\right].$$

Alors

$$\left\{\begin{array}{l} - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_n}(a_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}).p_{o,h} v_h \, dx = - \sum_{M \in \mathcal{R}_h} (\int_{\varpi_h(M)} \frac{\partial}{\partial x_n}(a_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}) dx) v_h(M) = \\ = \sum_{Q \in K_{n,h}} (\int_{\varpi'_h(Q)} (a_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n})(x', q_n h) dx')(v_h(Q + \frac{h}{2} e_n) - v_h(Q - \frac{h}{2} e_n)) + \\ + \sum_{Q \in K^-_{n,h}} (\int_{\varpi'_h(Q)} (a_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n})(x', q_n h) dx') \ v_h(Q + \frac{h}{2} e_n) - \\ - \sum_{Q \in K^+_{n,h}} (\int_{\varpi'_h(Q)} (a_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n})(x', q_n h) dx' \ v_h(Q - \frac{h}{2} e_n). \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$(5.51)\qquad -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_n}(a_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}).p_{o,h} v_h dx = \sum_{Q \in K_{n,h} \cup K^+_{n,h} \cup K^-_{n,h}} \int_{\sigma_{n,h}(Q)} (a_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n})(x', q_n h). \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} p_{n,h} v_h \cdot dx.$$

De même

$$(5.52)\quad \begin{cases} -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_n}(d_n\Psi).p_{o,h}v_h dx = \sum_{Q\in K_{n,h}\cup K^+_{n,h}\cup K^-_{n,h}} \int_{\sigma_{n,h}(Q)} (d_n\Psi)(x',q_n h). \\ \qquad . \frac{\partial}{\partial x_n} p_{n,h}\, v_h . dx. \end{cases}$$

On peut donc poser pour $x \in \sigma_{n,h}(Q)$, $Q \in K_{n,h} \cup K^+_{n,h} \cup K^-_{n,h}$

$$(5.53)\qquad g_{n,h}(x) = (a_n \frac{\partial\Psi}{\partial x_n} + d_n\Psi)(x',q_n h) - (a_{n,h} . \frac{\partial}{\partial x_n} p_{n,h}\rho_h\Psi + d_{n,h} . p_{o,h}\rho_h\Psi)(x).$$

Résultats analogues pour $g_{i,h}$, $i = 1,\dots,n-1$.

En utilisant la régularité de $\Psi \in C^{2,\lambda}(\bar\Omega)$ et les hypothèses H 2 et H'3, on vérifie aisément (5.47).

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 4.1 avec $p > n$ pour obtenir

$$(5.54)\qquad \lim_{h\to 0} \|\Psi_h - \rho_h\Psi\|_{h,o,\infty} = 0$$

ce qui, compte tenu de la convergence uniforme de $p_{o,h}\rho_h\Psi$ vers Ψ, entraîne le résultat cherché.

On peut désormais prouver le

Théorème 5.6

On se donne $f_h \in L_1(\Omega)$ *vérifiant*

$$(5.55)\qquad \begin{cases} \|f_h\|_{L_1(\Omega)} \le C, \\ f_h\, dx \ \textit{converge vaguement vers la mesure}\ \mu. \end{cases}$$

Sous les hypothèses (5.39), (5.40), 5.42), H 1, H 2 *et* H'3, *la solution*

$u_h \in V_h$ *de*

(5.56) $$a_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f_h . p_{o,h} v_h . dx \ , \ v_h \in V_h$$

satisfait à la propriété suivante

(5.57) $$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \overrightarrow{p_h}\, u_h = \vec{\Pi}\, \tilde{u} \text{ dans} X_s(\mathbb{R}^n) \text{ faible}, \ s < \frac{n}{n-1} \ , \\ \lim\limits_{h\to 0} p_{o,h}\, u_h = u \text{ dans } L_{s^*}(\Omega) \text{ faible}, \ s^* < \frac{n}{n-2} \ , \end{cases}$$

où $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_s(\Omega)$ *est la solution de* (5.38).

<u>Démonstration</u>

On déduit du théorème 5.2 et de (5.55) que

$$\|u_h\|_{h,1,s} \leq C \quad , \quad s < \frac{n}{n-1} \ .$$

Il en résulte que, de l'ensemble des $\vec{p}_h\, u_h$, on peut extraire une sous-suite notée encore $(\vec{p}_h\, u_h)$, qui converge vers $\vec{u}^*$ dans $X_s(\mathbb{R}^n)$ faible. On vérifie comme dans la démonstration de la proposition 3.1 qu'il existe une fonction $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_s(\Omega)$ unique telle que $\vec{u}^* = \vec{\Pi}\, \tilde{v}$. Il reste à montrer que $v = u$. Soit alors $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$; on désigne par $\Psi_h \in V_h$ la solution de

(5.58) $$a_h^*(\Psi_h, v_h) = a_h(v_h, \Psi_h) = \int_\Omega \varphi . p_{o,h} v_h . dx \quad , \quad v_h \in V_h .$$

Le lemme 5.2 appliqué à la forme $a_h^*(\Psi_h, v_h)$ nous permet d'affirmer que $p_{o,h}\, \Psi_h$ converge vers $\Psi = G^* \varphi$ uniformément. D'autre part, (5.56) et (5.58) entraînent

(5.59) $$a_h(u_h, \Psi_h) = \int_\Omega p_{o,h} u_h . \varphi . dx = \int_\Omega f_h . p_{o,h} \Psi_h \, dx .$$

On déduit de la convergence faible de $p_{o,h}u_h$ vers v que

(5.60) $$\lim_{h\to 0}\int_\Omega p_{o,h}\, u_h.\varphi.dx = \int_\Omega v.\,\varphi\, dx$$

Enfin puisque

$$\int_\Omega f_h.p_{o,h}\,\Psi_h.dx = \int_\Omega f_h.\Psi.dx + \int_\Omega f_h.(p_{o,h}\Psi_h - \Psi)dx,$$

il résulte de (5.55) que

(5.61) $$\lim_{h\to 0}\int_\Omega f_h.p_{o,h}\Psi_h.dx = \int_\Omega \Psi.d\mu.$$

On a ainsi montré que

(5.62) $$\int_\Omega v.\varphi.dx = \int_\Omega G^*\varphi.d\mu \quad , \; \varphi \in C_o^\infty(\Omega).$$

On a donc v = u. Evidemment, c'est toute la famille $(\overrightarrow{p_h u_h})$ qui converge vers $\vec{\Pi}\,\tilde{u}$ dans $X_s(\mathbb{R}^n)$ faible.

La convergence faible de $p_{o,h}\, u_h$ vers u dans $L_{s^*}(\Omega)$ résulte de l'inégalité de Sobolev discrète.

Remarque 5.1

En utilisant un résultat de compacité analogue au théorème 5.1, chapitre 0 de [7], on pourrait démontrer que

(5.63) $$\lim_{h\to 0} p_{o,h}\, u_h = u \text{ dans } L_s(\Omega) \text{ fort , } s < \frac{n}{n-1}.$$

On va appliquer le théorème précédent à la fonction de Green g(x,y) relative à l'opérateur A. Si $y \in \Omega$, la fonction g(.,y) est définie comme étant la solution de

(5.64) $$A\, g(.,y) = \delta_y \;,$$

δ_y étant la masse de Dirac au point y.

Sous l'hypothèse H 1, on peut définir l'opérateur de Green discret $G_h = (G_h(M,N))_{M,N\in\Omega_h}$ par

(5.65) $$A_h\ G_h(.,N) = \frac{1}{h^n}\ \delta(.,N) \quad , \ N \in \Omega_h$$

où $\delta(M,N)$ est le symbole de Kronecker. On pose ensuite

(5.66) $$g_h(x,y) = \sum_{M,N\in\Omega_h} G_h(M,N)\ \theta^M_{o,h}(x)\ \theta^M_{o,h}(y) \quad x,y \in \Omega.$$

Théorème 5.7

Sous les hypothèses (5.39), (5.40), (5.42), H 1, H 2, H'3, *on a*

(5.67) $$\lim_{h\to 0} g_h(.,y) = g(.,y) \text{ \textit{dans} } L_{s^*}(\Omega) \text{ \textit{faible}} \ , \ s^* < \frac{n}{n-2}.$$

Démonstration

Soit $y \in \Omega$; alors pour h assez petit, il existe un point $N \in \Omega_h$ unique tel que $y \in \varpi_h(N)$. Il est clair que

(5.68) $$a_h(G_h(.,N)\theta^N_{o,h}(y),\ v_h) = \int_\Omega \frac{1}{h^n}\ \theta^N_{o,h}\ .\ p_{o,h}\ v_h . dx.$$

On voit immédiatement que

(5.69) $$\begin{cases} \left\| \frac{1}{h^n}\ \theta^N_{o,h} \right\|_{L_1(\Omega)} = 1, \\ \frac{1}{h^n}\ \theta^N_{o,h} \longrightarrow \delta_y \text{ vaguement.} \end{cases}$$

On peut donc appliquer le théorème 5.6 ; on obtient

(5.70) $$\lim_{h\to 0} p_{o,h}\ G_h(.,N)\ \theta^N_{o,h}(y) = g(.,y) \text{ dans } L_{s^*}(\Omega) \text{ faible,}$$

ce qui n'est autre que (5.67)

Remarque 5.2

On pourrait démontrer que

(5.71) $$\lim_{h\to 0} g_h(.,y) = g(.,y) \text{ dans } L_s(\Omega) \text{ fort },\ s < \frac{n}{n-1}.$$

Remarque 5.3

Signalons pour terminer une autre application du lemme 5.2. Si $f \in L_{p_o}(\Omega)$, $p_o > \frac{n}{2}$, et si u est la solution de Au = f, on a le résultat suivant qui améliore un peu le théorème 4.2. Sous les conditions d'application du lemme 5.2 et si $\lim_{h\to 0} f_h = f$ dans $L_{p_o}(\Omega)$ fort, la solution $u_h \in V_h$ de $a_h(u_h,v_h) = \int_\Omega f_h . p_{o,h}\, v_h\, dx$ vérifie

$$\lim_{h\to 0} p_{o,h}\, u_h = u \text{ uniformément.}$$

Pour le voir, il suffit de procéder comme dans la démonstration du théorème 4.2, point 2 et d'utiliser le lemme 5.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. H. BRAMBLE - On the convergence of difference approximations to weak solutions of Dirichlet's problem, Technical note BN-509, University of Maryland, 1967.

[2] H. BREZIS -

[3] J. CEA - Approximation variationnelle des problèmes aux limites, Ann. Inst. Fourier, 14, 2, 1964, p. 345-444.

[4] A. FRIEDMAN - Partial differential equations of parabolic type, Prentice Hall, 1964.

[5] E. GAGLIARDO - Proprietà di alcuni classi di funzioni in più variabili, Ricerche di Mathematica, 7, 1958, p. 102-137.

[6] J. LERAY et J. L. LIONS - Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, Bull. Soc. Math. France, 93, 1965, p. 97-107.

[7] P. A. RAVIART - Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires, J. de Math. pures et appl., 46, 1967, p. 11-183.

[8] G. STAMPACCHIA - Equations elliptiques à données discontinues, Séminaire Schwartz, 5e année, 1960/61, n° 4.

[9] G. STAMPACCHIA - Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier, 15, 1, 1965, p. 189-258.

[10] R. TENAM - Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, Thèse, Paris, 1967 (à paraître).

[11] A. ZYGMUND - On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, J. de Math. Pures et appl. 35, 1956, p. 223-247.