P. A. RAVIART

Sur la résolution numérique de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1967-1968
« Publications des séminaires du département de mathématiques », , exp. nº 6, p. 1-36
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1967-1968____A6_0>

SUR LA RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

par

P.A. RAVIART

On considère dans cet article l'équation d'évolution non linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

On résoud numériquement par deux méthodes aux différences finies explicites le problème de Cauchy pour cette équation avec les conditions aux limites de Dirichlet. Cette étude permet d'élucider sur l'exemple simple de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

le rôle que joue la méthode de pseudo-viscosité lors de la résolution numérique de certaines équations hyperboliques non linéaires.

1 - THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE.

Dans toute la suite, les fonctions considérées seront à valeurs réelles. On désigne par Ω l'intervalle ouvert $]0,1[$ de $\mathbb{R}$ de point générique x, par $\overset{\circ}{W}{}^1_3(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $v \in L_3(\Omega)$ telles que $\frac{dv}{dx} \in L_3(\Omega)$ et $v(o) = v(1) = 0$. On munit $\overset{\circ}{W}{}^1_3(\Omega)$ de la norme

$$(1.1) \qquad \|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_3(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left|\frac{dv}{dx}\right|^3 dx\right)^{1/3}.$$

L'espace $W^{-1}_{3/2}(\Omega)$ est le dual fort de $\overset{\circ}{W}{}^1_3(\Omega)$.

Si X est un espace de Banach, $L_p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, $0 < T < \infty$, désigne l'espace des (classes de) fonctions $t \longrightarrow v(t)$ qui sont L_p sur $(0,T)$ à valeurs dans X. On munit $L_p(0,T;X)$ de la norme

$$(1.2) \qquad \|v\|_{L_p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p}.$$

D'après [4], si $v \in L_3(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_3(\Omega))$ avec $v' = \frac{dv}{dt} \in L_{3/2}(0,T;W^{-1}_{3/2}(\Omega))$, la fonction v est (p.p égale à) une fonction continue de $[0,T]$ dans $L_2(\Omega)$ et on a la formule de Green

$$(1.3) \qquad 2\int_0^t (v'(\sigma),v(\sigma))\, d\sigma = \|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} - \|v(o)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

où (,) désigne la dualité entre $\overset{\circ}{W}{}^1_3(\Omega)$ et $W^{-1}_{3/2}(\Omega)$.

<u>Théorème 1.1</u>

Soient $\varepsilon > 0$ *et* $u_o \in L_2(\Omega)$. *Il existe une fonction* u *et une seule vérifiant*

(1.4) $$u \in L_3(0,T;\overset{\circ}{W}{}_3^1(\Omega))\ ,\ u' = \frac{du}{dt} \in L_{3/2}(0,T;W_{3/2}^{-1}(\Omega)),$$

(1.5) $$u' + u\,\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,$$

(1.6) $$u(o) = u_o.$$

L'existence peut se démontrer comme dans [5] tandis que l'unicité peut être obtenue comme dans [3] , chapitre X. Une autre démonstration de l'existence sera d'ailleurs donnée plus loin.

On désignera par A l'opérateur non linéaire de $L_3(0,T;\overset{\circ}{W}{}_3^1(\Omega))$ dans $L_{3/2}(0,T;L_{3/2}(\Omega))$ défini par $A(v) = v\,\frac{\partial v}{\partial x}$ et par B l'opérateur non linéaire de $L_3(0,T;\overset{\circ}{W}{}_3^1(\Omega))$ dans $L_{3/2}(0,T;W_{3/2}^{-1}(\Omega))$ défini par $B(v) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\frac{\partial v}{\partial x}\right)$. Notons que l'opérateur B est monotone, i.e.

(1.7) $$\int_0^T (B(u)-B(v),u-v))dt \geq 0\ ,\ u,v \in L_3(0,T;\overset{\circ}{W}{}_3^1(\Omega)),$$

et continu des droites de $L_3(0,T;\overset{\circ}{W}{}_3^1(\Omega))$ dans $L_{3/2}(0,T;W_{3/2}^{-1}(\Omega))$ faible.

2 - LES SCHEMAS AUX DIFFERENCES FINIES EXPLICITES.

2.1. Notations

Soit I un paramètre entier > 0 destiné à tendre vers $+\infty$. On pose

$$h = \frac{1}{I+1}\ .$$

On désigne par V_h l'espace des suites $v_h = \{v_i \in \mathbb{R}\ ;\ i = 0,1,\ldots,I+1\}$ telles que $v_o = v_{I+1} = 0$. On munit V_h du produit scalaire $(\ ,\ )_h$ défini par

(2.1) $$(u_h,v_h) = h\sum_{i=1}^{I} u_i v_i\ ,\ u_h,v_h \in V_h.$$

et on note $|\ |_h$ la norme correspondante. On considère deux autres normes sur V_h désignées respectivement par $[\ ]_h$ et $\|\ \|_h$

(2.2) $$[v_h]_h = (h \sum_{i=1}^{I} |v_i|^3)^{1/3},$$

(2.3) $$\|v_h\|_h = (h \sum_{i=0}^{I} |\frac{v_{i+1}-v_i}{h}|^3)^{1/3}.$$

On introduit enfin la norme duale $\|\ \|_h^*$ de $\|\ \|_h$ par rapport au produit scalaire $(\ ,\ )_h$, i.e.

(2.4) $$\|v_h\|_h^* = \sup_{\substack{w_h \in V_h \\ w_h \neq 0}} \frac{|(v_h,w_h)_h|}{\|w_h\|_h}$$

Il est immédiat de vérifier le lemme suivant.

Lemme 2.1

Il existe une constante Λ indépendante de h telle que

(2.5) $$[v_h]_h \leq \Lambda \|v_h\|_h, \ v_h \in V_h.$$

Soit N un paramètre entier > 0 destiné à tendre vers $+\infty$. On pose

$$k = \frac{T}{N}.$$

On désigne par $V_{h,k}$ l'espace des suites $v_{h,k} = \{v_h^n \in V_h \ ; \ n = 0,1,\ldots,N\}$.

2.2. Les schémas aux différences finies.

On se donne $u_h^o \in V_h$. On considère deux schémas aux différences finies explicites permettant de déterminer des "approximations" $u_{h,k} \in V_{h,k}$ de la solution u du problème (1.4), (1.5), (1.6) à partir de "l'approximation" u_h^o de la condition initiale u_o.

(i) Schéma I (décentré).

Pour $n=0,1,\dots,N-1$, connaissant $u_h^n \in \mathcal{V}_h$, on détermine u_h^{n+1} de la manière suivante. Si u_i^n est ≥ 0, on calcule u_i^{n+1} par

$$(2.6)\quad \begin{cases} \frac{1}{k}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{h} u_i^n (u_i^n - u_{i-1}^n) - \\ - \frac{\varepsilon}{h^3}(|u_{i+1}^n - u_i^n|(u_{i+1}^n - u_i^n) - |u_i^n - u_{i-1}^n|(u_i^n - u_{i-1}^n)) = 0. \end{cases}$$

Si u_i^n est ≤ 0, on calcule u_i^{n+1} par

$$(2.7)\quad \begin{cases} \frac{1}{k}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{h} u_i^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - \\ - \frac{\varepsilon}{h^3}(|u_{i+1}^n - u_i^n|(u_{i+1}^n - u_i^n) - |u_i^n - u_{i-1}^n|(u_i^n - u_{i-1}^n)) = 0. \end{cases}$$

(ii) Schéma II (centré).

On pose pour $i = 1,\dots,I$ et $n = 0,1,\dots,N-1$

$$(2.8)\quad \begin{cases} \frac{1}{k}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{4h}((u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2) - \\ - \frac{\varepsilon}{h^3}(|u_{i+1}^n - u_i^n|(u_{i+1}^n - u_i^n) - |u_i^n - u_{i-1}^n|(u_i^n - u_{i-1}^n)) = 0. \end{cases}$$

Nous allons chercher sous quelles conditions on peut affirmer que $u_{h,k}$ converge dans un sens convenable vers la solution u du problème exact.

3 - ETUDE DU SCHEMA I - MAJORATIONS A PRIORI.

3.1. Lemmes

Dans la suite, les c_j désigneront diverses constantes indépendantes des paramètres h et k.

On définit deux opérateurs non linéaires A_h et B_h de $\mathcal{V}_h$ dans $\mathcal{V}_h$ par

$$(3.1)\qquad (A_h(v_h))_i = \begin{cases} \frac{1}{h} v_i \, (v_i - v_{i-1}) & , v_i \geq 0 \\ \frac{1}{h} v_i \, (v_{i+1} - v_i) & , v_i \leq 0 \end{cases},$$

$$(3.2)\qquad \begin{cases} (B_h(v_h))_i = -\frac{1}{h^3}(|v_{i+1} - v_i|(v_{i+1} - v_i) - |v_i - v_{i-1}|(v_i - v_{i-1})), \\ \qquad i = 1,\dots,I. \end{cases}$$

Donnons quelques propriétés de ces opérateurs.

Lemme 3.1

Pour tout $v_h \in \mathcal{V}_h$, *on a*

$$(3.3)\qquad \begin{cases} (A_h(v_h),v_h)_h \geq \left\{ \sum\limits_{v_i>0} v_i \, (v_i-v_{i-1})^2 - \sum\limits_{v_i<0} v_i(v_{i+1}-v_i)^2 \right\} - \\ -\frac{2}{3} h^2 \, \|v_h\|_h^3 , \end{cases}$$

$$(3.4)\qquad \|A_h(v_h)\|_h^* \leq c_1(\Lambda) \, \|v_h\|_h^2 ,$$

$$(3.5)\qquad \begin{cases} |A_h(v_h)|_h \leq \\ h^{-1/2} \max\limits_{1\leq i\leq I} |v_i|^{1/2} \left\{ \sum\limits_{v_i>0} v_i(v_i-v_{i-1})^2 - \sum\limits_{v_i<0} v_i(v_{i+1}-v_i)^2 \right\}^{1/2}. \end{cases}$$

Démonstration.

1) Si $v_h \in \mathcal{V}_h$, on vérifie immédiatement que

$$(v_i)^2(v_i-v_{i-1}) = \frac{1}{3}\,((v_i)^3 - (v_{i-1})^3) + v_i(v_i-v_{i-1})^2 - \frac{1}{3}\,(v_i-v_{i-1})^3,$$

$$(v_i)^2(v_{i+1}-v_i) = \frac{1}{3}\,((v_{i+1})^3 - (v_i)^3) - v_i(v_{i+1}-v_i)^2 - \frac{1}{3}\,(v_{i+1}-v_i)^3.$$

Il en résulte que

$$(A_h(v_h),v_h)_h = \sum_{v_i>0} (v_i)^2(v_i-v_{i-1}) + \sum_{v_i<0} (v_i)^2(v_{i+1}-v_i) =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\sum_{v_i<0} ((v_i)^3 - (v_{i-1})^3) + \sum_{v_i<0} ((v_{i+1})^3-(v_i)^3)\right\} +$$

$$+ \left\{ \sum_{v_i>0} v_i(v_i-v_{i-1})^2 - \sum_{v_i<0} v_i(v_{i+1}-v_i)^2 \right\} -$$

$$- \frac{1}{3}\left\{ \sum_{v_i>0} (v_i-v_{i-1})^3 + \sum_{v_i<0} (v_{i+1}-v_i)^3\right\} .$$

Il est alors facile de voir que

$$\sum_{v_i>0} ((v_i)^3 - (v_{i-1})^3) + \sum_{v_i<0} ((v_{i+1})^3 - (v_i)^3) \geq 0$$

et

$$\sum_{v_i>0}(v_i-v_{i-1})^3 + \sum_{v_i<0} (v_{i+1}-v_i)^3 \leq 2 \sum_{v_{i+1}-v_i>0}(v_{i+1}-v_i)^3 \leq 2h^2 \|v_h\|_h^3.$$

On en déduit l'inégalité (3.3).

2) Si $v_h, w_h \in \mathcal{V}_h$, on peut écrire

$$(A_h(v_h), w_h)_h = \sum_{v_i > 0} v_i\,(v_i - v_{i-1})\,w_i + \sum_{v_i < 0} v_i\,(v_{i+1} - v_i)\,w_i$$

d'où en utilisant l'inégalité de Hölder

$$|(A_h(v_h), w_h)_h| \leq \left(\sum_{i=1}^{I} |v_i|^3\right)^{1/3} \left(\sum_{v_i>0} |v_i - v_{i-1}|^3 + \sum_{v_i<0} |v_{i+1} - v_i|^3\right)^{1/3} \left(\Sigma |w_i|^3\right)^{1/3}$$

c'est à dire

$$|(A_h(v_h), w_h)_h| \leq 2^{1/3}\, [v_h]_h\, \|v_h\|_h\, [w_h]_h .$$

En utilisant le lemme (2.1), on trouve

$$|(A_h(v_h), w_h)_h| \leq 2^{1/3}\, \Lambda^2\, \|v_h\|_h^2\, \|w_h\|_h ,$$

ce qui donne l'inégalité (3.4) d'après la définition (2.4) de la norme $\| \ \|_h^*$.

3) Démontrons enfin l'inégalité (3.5). On a

$$\left\{\begin{aligned} |A_h(v_h)|_h &= h^{-1/2} \left(\sum_{v_i>0} (v_i)^2 (v_i - v_{i-1})^2 + \sum_{v_i<0} (v_i)^2 (v_{i+1} - v_i)^2\right)^{1/2} \leq \\ &\leq h^{-1/2} \max_{1\leq i\leq I} |v_i|^{1/2} \left(\sum_{v_i>0} |v_i| (v_i - v_{i-1})^2 + \sum_{v_i<0} |v_i| (v_{i+1} - v_i)^2\right)^{1/2} . \end{aligned}\right.$$

Lemme 3.2.

Pour tout $v_h \in V_h$ *, on a*

(3.6) $$(B_h(v_h), v_h)_h = \| v_h \|_h^3 ,$$

(3.7) $$\| B_h(v_h) \|_h^* \leq \| v_h \|_h^2 ,$$

(3.8) $$|B_h(v_h)|_h \leq \frac{2}{h} \max_{0 \leq i \leq I} \left| \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right|^{\frac{1}{2}} \| v_h \|_h^{3/2} .$$

Démonstration.

1) Si $v_h, w_h \in V_h$, on vérifie que

$$(B_h(v_h), w_h)_h = \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^{I} |v_{i+1} - v_i| \, (v_{i+1} - v_i)(w_{i+1} - w_i).$$

L'égalité (3.6) s'obtient donc en choisissant $w_h = v_h$.

2) En appliquant l'inégalité de Hölder, on trouve que

$$|(B_h(v_h), w_h)_h| \leq \frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=0}^{I} |v_{i+1} - v_i|^3\right)^{2/3} \left(\sum_{i=0}^{I} |w_{i+1} - w_i|^3\right)^{1/3}$$

cc'est à dire

$$|(B_h(v_h), w_h)_h| \leq \| v_h \|_h^2 \ \| w_h \|_h$$

ce qui entraîne (3.7)

3) Enfin, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{cases} |(B_h(v_h),w_h)_h| \leq \frac{1}{h^2} (\sum_{i=0}^{I} |v_{i+1}-v_i|^4)^{1/2} (\sum_{i=0}^{I} |w_{i+1}-w_i|^2)^{1/2} \leq \\ \qquad \leq \frac{2}{h^2} \max_{0\leq i\leq I} |v_{i+1}-v_i|^{1/2} (\sum_{i=0}^{I} |v_{i+1}-v_i|^3)^{1/2} (\sum_{i=1}^{I} |w_i|^2)^{1/2}, \end{cases}$$

c'est à dire

$$|(B_h(v_h),w_h)_h| \leq \frac{2}{h} \max_{0\leq i\leq I} \left|\frac{v_{i+1}-v_i}{h}\right|^{1/2} \|v_h\|_h^{3/2} \ |w_h|_h$$

qui n'est autre que (3.8).

Lemme 3.3.

Pour tout $v_{h,k} \in V_{h,k}$, *on a*

$$(3.9) \qquad 2(v_h^{n+1}-v_h^n,v_h^n)_h = |v_h^{n+1}|_h^2 - |v_h^n|_h^2 - |v_h^{n+1} - v_h^n|_h^2 \ , \ n = 0,1,\ldots N-1.$$

3.2 - Théorèmes de majoration.

Le schéma I peut désormais se mettre sous la forme plus simple d'un système d'équations vectorielles dans V_h

$$(3.10) \qquad \frac{1}{k} (u_h^{n+1} - u_h^n) + A_h(u_h^n) + \varepsilon B_h(u_h^n) = 0, \quad n = 0,1,\ldots,N-1.$$

Nous allons maintenant chercher à majorer diverses normes de la solution $u_{h,k} = \{u_h^n ; n = 0,1,\ldots,N\}$ indépendamment de h et k.

Théorème 3.1.

Si h *est assez petit*

(3.11) $$h \leq h_0 < \left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)^{1/2}$$

et s'il existe une constante $\eta > 0$ *arbitraire indépendante de* h,k,n *et une constante* ρ, $0 < \rho < 1$, *arbitrairement petite indépendante de* h,k,n *telles que*

(3.12) $$\frac{k}{h} \max_{1\leq i\leq I} |u_i^n| \leq \frac{2}{1+\eta} \ , \ n = 0,1,\ldots,N \ ,$$

(3.13) $$\varepsilon \frac{k}{h^2} \max_{0\leq i\leq I} \left|\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}\right| \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2h_0^2}{3\varepsilon}\right) \frac{\eta}{1+\eta} (1-\rho), \ n = 0,1,\ldots,N,$$

la solution $u_{h,k}$ *du schéma* I *vérifie les inégalités*

(3.14) $$\max_{0\leq n\leq N} |u_h^n|_h \leq |u_h^0|_h \ ,$$

(3.15) $$k \sum_{n=0}^{N} \|u_h^n\|_h^3 \leq c_2(h_0,\rho,\varepsilon) \ |u_h^0|_h^2 \ ,$$

(3.16) $$k \sum_{n=0}^{N-1} \left\|\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k}\right\|_h^{*\,3/2} \leq c_3(h_0,\rho,\varepsilon) \ |u_h^0|_h^2 \ ,$$

(3.17) $$\sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 \leq c_4(h_0,\rho,\varepsilon) \ |u_h^0|_h^2 \ .$$

Démonstration.

On utilise la méthode donnée dans [7]. On définit u_h^{N+1} à l'aide de l'équation (3.10) prise pour $n = N$.

1) On multiplie scalairement (3.10) par $2k\, u_h^n$. On obtient en vertu de

(3.3), (3.6) et (3.9)

$$(3.18)\quad \begin{cases} |u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^n|_h^2 - |u_h^{n+1}-u_h^n|_h^2 + 2k \sum\limits_{u_i^n>0} u_i^n(u_i^n-u_{i-1}^n)^2 - \\ - 2k \sum\limits_{u_i^n<0} u_i^n(u_{i+1}^n-u_i^n)^2 + 2(\varepsilon-\frac{2}{3}h^2)\, k\, \|u_h^n\|_h^3 \leq 0,\ n = 0,1,\ldots,N. \end{cases}$$

On évalue maintenant $|u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2$. En utilisant à nouveau l'équation (3.10), on obtient

$$\frac{1}{k}\, |u_h^{n+1} - u_h^n|_h \leq |A_h(u_h^n)|_h + \varepsilon |B_h(u_h^n)|_h$$

et compte tenu des inégalités (3.5) et (3.8)

$$\begin{cases} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h \leq \frac{k}{h^{1/2}} \max\limits_{1\leq i\leq I} |u_i^n|^{1/2} \left\{ \sum\limits_{u_i^n>0} u_i^n(u_i^n-u_{i-1}^n)^2 - \sum\limits_{u_i^n<0} u_i^n(u_{i+1}^n-u_i^n)^2 \right\}^{1/2} + \\ \qquad + 2\varepsilon \frac{k}{h} \max\limits_{0\leq i\leq I} \left|\frac{u_{i+1}^n-u_i^n}{h}\right|^{1/2} \|u_h^n\|_h^{3/2}. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$(3.19)\quad \begin{cases} |u_h^{n+1}-u_h^n|_h^2 \leq (1+\eta)\frac{k^2}{h} \max\limits_{1\leq i\leq I} |u_i^n| \left\{ \sum\limits_{u_i^n>0} u_i^n(u_i^n-u_{i-1}^n)^2 - \sum\limits_{u_i^n<0} u_i^n(u_{i+1}^n-u_i^n)^2 \right\} + \\ \qquad + (1+\frac{1}{\eta})\, 4\varepsilon^2 \frac{k^2}{h^2} \max\limits_{0\leq i\leq I} \left|\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}\right| \|u_h^n\|_h^3 \end{cases}$$

où η est une constante > 0 arbitraire. En reportant la majoration (3.19) dans (3.18), on trouve

$$(3.20)\begin{cases} |u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^n|_h^2 + (2-(1+\eta)\frac{k}{h}\max\limits_{1\leq i\leq I}|u_i^n|)k\left\{\sum\limits_{u_i^n>0} u_i^n(u_i^n-u_{i-1}^n)^2 - \sum\limits_{u_i^n<0} u_i^n(u_{i+1}^n-u_i^n)^2\right\} \\ + 2(\varepsilon-\frac{2}{3}h^2 - 2(1+\frac{1}{\eta})\varepsilon^2\frac{k}{h^2}\max\limits_{0\leq i\leq I}\left|\frac{u_{i+1}^n-u_i^n}{h}\right|)k\,\|u_h^n\|_h^3 \leq 0. \end{cases}$$

Sous les conditions (de stabilité) (3.11), (3.12) et (3.13), l'inégalité (3.20) entraîne pour $n = 0,1,\ldots,N$

$$(3.21)\qquad |u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^n|_h^2 + 2\,\rho(\varepsilon-\frac{2}{3}h_0^2)\,k\,\|u_h^n\|_h^3 \leq 0.$$

En sommant par rapport à n, (3.21) donne

$$(3.22)\qquad \begin{cases} |u_h^n|_h^2 \leq |u_h^0|_h^2 , \quad n = 1,\ldots,N , \\ k\sum\limits_{n=0}^{N}\|u_h^n\|_h^3 \leq c_2(h_0,\rho,\varepsilon)\,|u_h^0|_h^2 \end{cases}$$

avec

$$c_2(h_0,\rho,\varepsilon) = \left[2\rho(\varepsilon-\frac{2}{3}h_0^2)\right]^{-1}.$$

2) On cherche ensuite à estimer

$$k\sum_{n=0}^{N-1}\left\|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{k}\right\|_h^{*3/2}.$$

L'équation (3.10) donne

$$\left\|\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k}\right\|_h^* \leq \|A_h(u_h^n)\|_h^* + \varepsilon \, \|B_h(u_h^n)\|_h^*$$

d'où en vertu de (3.4) et (3.7)

$$\left\|\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k}\right\|_h^* \leq (c_1 + \varepsilon) \, \|u_h^n\|_h^2 .$$

Ainsi

$$(3.23) \qquad k \sum_{n=0}^{N-1} \left\|\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k}\right\|_h^{*3/2} \leq (c_1+\varepsilon)^{3/2} k \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^n\|_h^3 .$$

Cette inégalité jointe à (3.22) prouve que

$$k \sum_{n=0}^{N-1} \left\|\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k}\right\|_h^{*\,3/2} \leq c_3(h_0,\rho,\varepsilon)|u_h^0|_h^2, \qquad c_3 = (c_1+\varepsilon)^{3/2} c_2 .$$

3) Il reste à évaluer

$$\sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 .$$

D'après (3.19) et en tenant compte de la condition de stabilité (3.12), on obtient

$$(3.24) \left\{ \begin{aligned} & |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 \leq 2k \, \{ \sum_{u_i^n > 0} u_i^n (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 - \sum_{u_i^n < 0} u_i^n (u_{i+1}^n - u_i^n)^2 \} + \\ & + (1 + \frac{1}{n}) \, 4 \, \varepsilon^2 \, \frac{k}{h^2} \max_{0 \leq i \leq I} \left| \frac{u_{n+1}^n - u_i^n}{h} \right| k \, \|u_h^n\|_h^3 . \end{aligned} \right.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, le lemme 2.1 et en sommant par rapport à n, on déduit de (3.24)

$$\sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 \leq 2\Big[(2^{2/3} \Lambda h) + (1+\frac{1}{n})2\varepsilon^2 \frac{k}{h^2} \max_{0\leq i\leq I} \Big|\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}\Big|\Big] k \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^n\|_h^3.$$

c'est à dire

$$(3.25)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 \leq \\[2ex] \displaystyle\leq 2\Big[(2^{2/3}\Lambda h) + (1+\frac{1}{n})\, 2\varepsilon^2 \frac{k}{h^2} \max_{0\leq i\leq I} \Big|\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}\Big|\Big]\, c_2(h_0,\rho,\varepsilon)|u_h^0|_h^2. \end{cases}$$

En utilisant (3.11) et (3.13), cette inégalité (3.25) entraîne

$$\sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 \leq c_4(h_0,\rho,\varepsilon)|\, u_h^0|_h^2$$

où

$$c_4(h_0,\rho) = 2\Big[(2^{2/3}\Lambda\, h_0) + (\varepsilon - \frac{2}{3} h_0^2)(1-\rho)\Big].$$

Le théorème est ainsi complètement démontré.

Corollaire.

Sous les conditions (de stabilité) (3.11), (3.12), (3.13) *et sous l'hypothèse*

$$(3.26)\qquad |u_h^0| \leq c_5,$$

la solution $u_{h,k}$ *du schéma* I *vérifie*

$$(3.27)\quad \begin{cases} \max\{\max\limits_{0\leq n\leq N} |u_h^n|_h \ , \ k\sum\limits_{n=0}^{N} \|u_h^n\|_h^3 \ , \ k\sum\limits_{n=0}^{N-1} \left\| \dfrac{u_h^{n+1}-u_h^n}{k} \right\|_h^{*3/2} , \\ \qquad \sum\limits_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2\} \leq c_6. \end{cases}$$

Remarque 3.1.

Si on remplace la condition de stabilité (3.13) par la condition un peu plus forte

$$(3.13)' \qquad \lim_{h,k\to 0} \frac{k}{h^2} \max_{\substack{0\leq i\leq I \\ 0\leq n\leq N}} \left| \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \right| = 0$$

et si l'hypothèse (3.26) est vérifiée, on a en vertu de (3.25)

$$(3.17)' \qquad \lim_{h,k\to 0} \sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 = 0.$$

On utilisera cette remarque dans la démonstration de la convergence.

Bien entendu, il faut montrer que, pour h,η,ρ fixés (h vérifiant (3.11)), on peut trouver un entier N_0 assez grand ou $k_0 = \frac{1}{N_0}$ aseez petit de telle sorte que les conditions de stabilité (3.12) et (3.13) soient satisfaites pour $k \leq k_0$.

Théorème 3.2.

Si les hypothèses (3.11) *et* (3.25) *sont vérifiées, il existe un nombre* $k_0(h,\eta,\rho)$ *tel que, pour* $k \leq k_0$ *, les conditions* (3.12) *et* (3.13) *soient satisfaites.*

La démonstration de ce résultat est analogue à celle du théorème

(2.2) de [8] .

4. ETUDE DU SCHEMA I. CONVERGENCE

4.1. Notations.

On introduit des fonctions θ_h^i, χ_h^i , $i = 1,\dots,I$ définies sur (0,1) et des fonctions θ_k^n, χ_k^n, $n = 0,1,\dots,N$ définies sur (0,T) :

(4.1) $$\theta_h^i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - (i-1)h) , & (i-1)\, h \leq x \leq ih \\ \frac{1}{h}(-x + (i+1)h) , & ih \leq x \leq (i+1)h \; ; \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

(4.2) $$\chi_h^i = \text{fonction caractéristique de } \left](i-\tfrac{1}{2})\, h \, , \, (i+\tfrac{1}{2})h\right[\; ;$$

(4.3) $$\theta_k^n(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}(t - (n-1)k) , & (n-1)k \leq t \leq nk \\ \frac{1}{k}(-t + (n+1)k) , & nk \leq t \leq (n+1)k \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

(4.4) $$\chi_k^n = \text{fonction caractéristique de } \left[nk \, , \, (n+1)k\right[\, .$$

Si $v_h \in V_h$, on pose

(4.5) $$p_h v_h = \sum_{i=1}^{I} v_i \cdot \theta_h^i ,$$

(4.6) $$q_h v_h = \sum_{i=1}^{I} v_i \cdot \chi_h^i .$$

Il est clair que $p_h v_h \in \overset{0}{W}{}^1_3(\Omega)$ et que

(4.7) $$\|p_h v_h\|_{\overset{0}{W}{}^1_3(\Omega)} = \|v_h\|_h, \quad \|p_h v_h\|_{L_3(\Omega)} \leq [v_h]_h .$$

On vérifie (cf. [2]) que

(4.8) $$\|p_h\ v_h\|_{W^{-1}_{3/2}(\Omega)} \leq c_7 \|v_h\|^*_h .$$

Si $v_{h,k} \in V_{h,k}$, on pose

(4.9) $$p_{h,k}\ v_{h,k} = \sum_{n=0}^{N} p_h v_h^n \cdot \theta_k^n ,$$

(4.10) $$q_{h,k}\ v_{h,k} = \sum_{n=0}^{N-1} q_h v_h^n \cdot \chi_k^n ,$$

(4.11) $$q_k p_h v_{h,k} = \sum_{n=0}^{N-1} p_h v_h^n \cdot \chi_k^n .$$

On considère enfin les fonctions $\tau_{\pm \frac{h}{2}}\ q_{h,k}\ v_{h,k}$ définies sur $Q_T = \Omega \times]0,T[$ par

(4.12) $$\tau_{\pm \frac{h}{2}}\ q_{h,k}\ v_{h,k}\,(x,t) = q_{h,k}\ v_{h,k}\,(x \mp \frac{h}{2},t).$$

Notons un lemme de vérification immédiate

<u>Lemme 1.1.</u>

Pour tout $v_{h,k} \in V_{h,k}$, *on a*

(4.13) $\qquad \| p_{h,k}\, v_{h,k} \|_{L_3(0,T;\overset{o}{W}{}^1_3(\Omega))} \leq c_8 (k \sum_{n=0}^{N} \| v_h^n \|_h^3)^{1/3}$,

(4.14) $\qquad \| \frac{d}{dt} p_{h,k}\, v_{h,k} \|_{L_{3/2}(0,T;W^{-1}_{3/2}(\Omega))} \leq c_9 (k \sum_{n=0}^{N-1} \| \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{k} \|_h^{*3/2})^{2/3}$,

(4.15) $\qquad \| q_{h,k}\, v_{h,k} \|_{L_3(Q_T)} \leq c_{10} (k \sum_{n=0}^{N-1} \| v_h^n \|_h^3)^{1/3}$.

(4.16) $\qquad \| q_k p_h\, v_{h,k} \|_{L_3(0,T;\overset{o}{W}{}^1_3(\Omega))} = (k \sum_{n=0}^{N-1} \| v_h^n \|_h^3)^{1/3}$.

Soit r_h l'operateur de $C_0^\infty(\Omega)$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω) dans V_h défini par

(4.17) $\qquad (r_h v)_i = v(ih)$, $\quad 0 \leq i \leq I+1$.

On voit facilement que pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

(4.18) $\qquad \lim_{h \to 0} p_h\, r_h\, v = v \quad$ dans $\overset{o}{W}{}^1_3(\Omega)$ fort,

(4.19) $\qquad \lim_{h \to 0} q_h\, r_h\, v = v \quad$ dans $L_3(\Omega)$ fort.

4.2. Théorème de convergence.

Théorème 4.1.

Faisons les hypothèses

(3.12) $\qquad \frac{k}{h} \max_{0 \leq i \leq I} |u_i^n| \leq \frac{2}{1+\eta}$, $n = 0,1,\dots,N$, (3.13)' $$\lim_{h,k\to 0} \frac{k}{h^2} \max_{\substack{0\le i\le I\\ 0\le n\le N}} \left|\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}\right| = 0$$

(4.20) $$\lim_{h\to 0} q_h\, u_h^0 = u_0 \textit{ dans } L_2(\Omega) \textit{ fort}$$

Alors, si $u_{h,k}$ *désigne la solution du schéma* I *et si* u *désigne la solution de* (1.4), (1.5) *et* (1.6), *on a*

(4.21) $$\lim_{h,k\to 0} p_{h,k}\, u_{h,k} = u \textit{ dans } L_3(0,T;\overset{0}{W}{}_3^1(\Omega)) \textit{ faible et dans } L_3(Q_T) \textit{ fort,}$$

(4.22) $$\lim_{h,k\to 0} \frac{d}{dt} p_{h,k}\, u_{h,k} = \frac{du}{dt} \textit{ dans } L_{3/2}(0,T;W_{3/2}^{-1}(\Omega)) \textit{ faible.}$$

Démonstration.

1) Choisissons h,k assez petits pour que les conditions (3.11), (3.12) et (3.13) soient remplies. Grâce à l'hypothèse (4.20), nous pouvons appliquer le corollaire du théorème 3.1. Le lemme 4.1 montre alors que, lorsque h et k tendent vers 0, on peut extraire de la suite $(u_{h,k})$ une sous suite, notée encore $(u_{h,k})$, telle que

(4.23) $$p_{h,k}\, u_{h,k} \longrightarrow u_* \text{ dans } L_3(0,T;\overset{0}{W}{}_3^1(\Omega)) \text{ faible,}$$

(4.24) $$\frac{d}{dt} p_{h,k}\, u_{h,k} \longrightarrow \frac{du_*}{dt} \text{ dans } L_{3/2}(0,T;W_{3/2}^{-1}(\Omega)) \text{ faible,}$$

(4.25) $$q_k\, p_h\, u_{h,k} \longrightarrow w \text{ dans } L_3(0,T;\overset{0}{W}{}_3^1(\Omega)) \text{ faible,}$$

(4.26) $\qquad B(q_k\, p_h\, u_{h,k}) \longrightarrow g \quad$ dans $L_{3/2}(0,T;W^{-1}_{3/2}(\Omega))$ faible,

(4.27) $\qquad q_h\, u_h^N \longrightarrow \xi \quad$ dans $L_2(\Omega)$ faible.

Montrons que $w = u_*$. Pour cela, il suffit par exemple de vérifier que

(4.28) $$\int_0^T \{u_*(t) - w(t), \varphi(t)\}\, dt = 0$$

pour toute fonction φ indéfiniment différentiable à support compact sur $]0,T[$ à valeurs dans $W^{-1}_{3/2}(\Omega)$. Mais pour k assez petit

$$\left| \begin{aligned} &\int_0^T (p_{h,k}\, u_{h,k}(t) - q_k\, p_h\, u_{h,k}(t), \varphi(t))dt = \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nk}^{(n+1)k} (q_k\, p_h\, u_{h,k}(t)\ ,\ \frac{\varphi(t+k) - \varphi(t)}{k})(t - nk)\, dt \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\left|\int_0^T (p_h u_{h,k}(t) - q_k p_h u_{h,k}(t), \varphi(t))dt\right| \leq c\; k\, \|q_k p_h u_{h,k}\|_{L_3(0,T;\overset{0}{W}{}^1_3(\Omega))}$$

ce qui entraîne (4.28) par passage à la limite lorsque h et k tendent vers 0. D'autre part, d'après [1] ,

$$\{v \mid v \in L_3(0,T,\overset{0}{W}{}^1_3(\Omega))\ ,\ \frac{dv}{dt} \in L_{3/2}(0,T;W^{-1}_{3/2}(\Omega))\} \quad \text{est fortement}$$

relativement compact dans $L_3(Q_T)$: on peut donc supposer que

(4.29) $\qquad p_{h,k}\, u_{h,k} \longrightarrow u_* \quad$ dans $L_3(Q_T)$ fort.

Montrons que cela entraîne

(4.30) $\qquad q_{h,k}\, u_{h,k} \longrightarrow u_* \quad$ dans $L_3(Q_T)$ fort.

En effet,

$$p_{h,k}u_{h,k} - q_{h,k}u_{h,k} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{I} u_i^n \, \theta_h^i \, \theta_k^n - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{I} u_i^n \, \chi_h^i \, \chi_k^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{I} u_i^n (\theta_h^i - \chi_h^i)\chi_k^n + \sum_{n=0}^{N} u_i^n \, \theta_h^i \, \theta_k^n - \sum_{n=0}^{N-1} u_i^n \, \theta_h^i \, \chi_k^n$$

D'une part

$$\int_{Q_T} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{I} u_i^n (\theta_h^i - \chi_h^i)\chi_k^n \right|^3 dx\, dt = k \sum_{n=0}^{N-1} \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^{I} u_i^n (\theta_h^i - \chi_h^i) \right|^3 dx =$$

$$= k \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{I} \left| \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \right|^3 \left\{ \int_{ih}^{(i+\frac{1}{2})h} (x-ih)^3\, dx + \int_{(i+\frac{1}{2})h}^{(i+1)h} |x-(i+1)h|^3 dx \right\}$$

$$= \frac{h^3}{32} \left(k \sum_{n=0}^{N-1} \| u_h^n \|_h^3\right)$$

d'où

(4.31) $$\lim_{h,k\to 0} \left\| \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{I} u_i^n \, (\theta_h^i - \chi_h^i)\, \chi_k^n \right\|_{L_3(Q_T)} = 0.$$

D'autre part

$$\int_{Q_T} \Big| \sum_{n=0}^{N} u_i^n \theta_h^i \theta_k^n - \sum_{n=0}^{N-1} u_i^n \theta_h^i \chi_k^n \Big|^3 \,dx\,dt = \sum_{n=0}^{N-1} \| p_h u_h^{n+1} - p_h u_h^n \|^3_{L_3(\Omega)} \int_{nk}^{(n+1)k} \frac{(t-nk)^3}{k} dt$$

$$= \frac{k}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \| p_h\, u_h^{n+1} - p_h u_h^n \|^3_{L_3(\Omega)} .$$

d'où en vertu de (4.7)

$$\int_{Q_T} \Big| \sum_{n=0}^{N} u_i^n\ \theta_h^i \theta_k^n - \sum_{n=0}^{N-1} u_i^n \theta_h^i \chi_k^n \Big|^3 \,dx\,dt \leq \frac{k}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Big[u_h^{n+1} - u_h^n \Big]_h^3 \leq$$

$$\leq \frac{k}{2} \max_{\substack{1\leq i\leq I \\ 0\leq n\leq N}} |u_i^n| \sum_{n=0}^{N-1} | u_h^{n+1} - u_h^n |_h^2 \leq$$

$$\leq \frac{h}{2} \Big(\frac{k}{h} \max_{\substack{1\leq i\leq I \\ 0\leq n\leq N}} |u_i^n| \Big) \sum_{n=0}^{N-1} | u_h^{n+1} - u_h^n |_h^2 .$$

Ainsi d'après la condition (3.12) et le corollaire du théorème 3.1

$$(4.32) \qquad \lim_{h,k\to 0} \Big\| \sum_{n=0}^{N} u_i^n \theta_h^i \theta_k^n - \sum_{n=0}^{N-1} u_i^n \theta_h^i \chi_k^n \Big\|_{L_3(Q_T)} = 0.$$

Il résulte de (4.31) et (4.32) que

$$p_{h,k}\ u_{h,k} - q_{h,k}\ u_{h,k} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L_3(Q_T) \text{ fort.}$$

L'assertion (4.30) est donc démontrée.

2) Nous allons montrer que u_* vérifie

$$(4.33)\qquad \begin{cases} \dfrac{du_*}{dt} + A(u_*) + \varepsilon g = 0, \\ \\ u_*(0) = u_0, \quad u_*(T) = \xi . \end{cases}$$

Soit $v \in C_0^\infty(\Omega)$ et soit $\psi \in C^0(0,T)$. L'équation (3.10) entraîne

$$(4.34)\qquad \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} (u_h^{n+1} - u_h^n, r_h v)_h \psi((n+1)k + k \sum_{n=0}^{N-1} (A_h(u_h^n), r_h v)_h \, \psi((n+1)k) + \\ \\ + \ \varepsilon k \sum_{n=0}^{N-1} (B_h(u_h^n), \ r_h v)_h \ \psi((n+1)k) = 0. \end{cases}$$

En remarquant que

$$\sum_{n=0}^{N-1} (u_h^{n+1} - u_h^n, \ r_h v)_h \ \psi((n+1)k) = - \sum_{n=1}^{N-1} (u_h^n, r_h v)_h (\psi((n+1)k) - \psi(nk)) +$$

$$+ \ (u_h^N, r_h v)_h \ \psi(T) - (u_h^0, r_h v)_h \ \psi(k)$$

et en posant

$$\psi_k(t) = \psi((n+1)k) \quad , \quad nk \le t \le (n+1)k, \quad n = 0,1,\ldots,N-1,$$

l'équation (4.34) s'écrit

$$(4.35)\qquad \begin{cases} - \int_k^T (q_{h,k} \ u_{h,k}(t) \ , \ q_h r_h v) \quad \dfrac{\psi_k(t) - \psi_k(t-k)}{k} \ dt \ + \\ \\ + \int_0^T \int_\Omega \{ (\tau_{-\frac{h}{2}} \ q_{h,k} u_{h,k})_+ + (\tau_{\frac{h}{2}} \ q_{h,k} u_{h,k})_- \} . \dfrac{\partial}{\partial x} \ q_k p_h u_{h,k} \cdot q_h r_h v \cdot \psi_k dx dt \ + \\ \\ + \ \varepsilon \int_0^T (B(q_k p_h u_{h,k}(t)) \ , \ p_h r_h v) \ \psi_k(t) \ dt \ = \\ \\ = (q_h u_h^N \ , \ q_h r_h v) \ \psi(T) - (q_h \ u_h^0 \ , \ q_h r_h v) \ \psi(k) \end{cases}$$

où $(f)_+$ désigne la fonction $x,t \to (f(x,t)$ si $f(x,t) \geq 0$, 0 si $f(x,t) \leq 0)$, définition analogue pour $(f)_-$. On déduit de (4.30)

$$(4.36) \quad \begin{cases} (\tau_{-\frac{h}{2}} \, q_{h,k} \, u_{h,k})_+ \longrightarrow (u_*)_+ \quad \text{dans } L_3(Q_T) \text{ fort,} \\ (\tau_{\frac{h}{2}} \, q_{h,k} \, u_{h,k})_- \longrightarrow (u_*)_- \quad \text{dans } L_3(Q_T) \text{ fort.} \end{cases}$$

Soit $\psi \in C_0^\infty(]0,T[)$; on obtient en passant à la limite grâce à (4.18), (4.19), (4.25), (4.26), (4.30) et (4.36)

$$- \int_0^T (u_*(t),v) \, \psi'(t) \, dt + \int_0^T (A(u_*(t)),v)\psi(t)dt + \varepsilon\int_0^T (g(t),v)\psi(t)dt = 0$$

pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$ donc pour tout $v \in \overset{o}{W}{}^1_3(\Omega)$ puisque $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\overset{o}{W}{}^1_3(\Omega)$. On a ainsi au sens des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans $W^{-1}_{3/2}(\Omega)$

$$(4.37) \qquad \frac{du}{dt} + A(u^*) + \varepsilon g = 0.$$

Prenons maintenant $\psi \in C^1(0,T)$. En passant à la limite dans (4.35) comme précédemment mais en utilisant de plus (4.27) et l'hypothèse (4.20), on obtient pour tout $v \in \overset{o}{W}{}^1_3(\Omega)$

$$- \int_0^T (u_*(t),v)\psi'(t) \, dt + \int_0^T (A(u_*(t)),v)\psi(t) \, dt + \varepsilon \int_0^T (g(t),v)\psi(t)dt =$$

$$= (\xi,v)\psi(T) - (u_0,v)\psi(0).$$

En intégrant par parties et en tenant compte de (4.37), on trouve

$$(u_*(T),v)\psi(T) - (u_*(0),v)\psi(0) = (\xi,v)\psi(T) - (u_0,v)\psi(0)$$

pour tout $v \in \overset{0}{W}{}^1_3(\Omega)$ et tout $\psi \in C^1(0,T)$. On en déduit que

$$u_*(T) = \xi \quad , \; u_*(0) = u_0 .$$

3) Montrons maintenant que $g = B(u_*)$. Pour cela, on utilise une technique de [6] convenablement adaptée. L'équation (3.10) donne

$$|u_h^N|_h^2 - \sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 + 2\,k \sum_{n=0}^{N-1} (A_h(u_h^n),u_h^n)_h +$$

$$+ 2\varepsilon\; k \sum_{n=0}^{N-1} (B_h(u_h^n),u_h^n)_h = |u_h^0|_h^2 .$$

C'est à dire

$$(4.38)\quad \left\{ \begin{aligned} & \|q_h u_h^N\|^2_{L_2(\Omega)} - \sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 + \\ & + 2\int_0^T \int_\Omega \Big\{(\tau_{-\frac{h}{2}}\, q_{h,k}u_{h,k})_+ + (\tau_{\frac{h}{2}} q_{h,k}u_{h,k})_-\Big\} \frac{\partial}{\partial x} q_k p_h u_{h,k} \cdot q_{h,k}u_{h,k}\; dxdt \\ & + 2\,\varepsilon \int_0^T (B(q_k p_h\, u_{h,k}(t)) \,,\, q_k p_h\, u_{h,k}(t))\, dt = \|q_h u_h^0\|^2_{L_2(\Omega)} . \end{aligned}\right.$$

Nous prenons la limite inférieure de chacun des deux membres de l'équation (4.38).

Grâce à l'hypothèse (3.13)' et la remarque 3.1, on obtient

$$(4.39)\quad \begin{cases} \|u_*(T)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\varepsilon \liminf\limits_{h,k\to 0} \int_0^T (B(q_k p_h u_{h,k}(t)), q_k p_h u_{h,k}(t))dt \leq \\ \qquad\qquad \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}, \end{cases}$$

puisque $\int_0^T (A(u_*(t)),u_*(t))\,dt = 0$. D'autre part, (4.33) donne par intégration par parties et application de la formule (1.3)

$$(4.40)\qquad \|u_*(T)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\varepsilon \int_0^T (g(t),u_*(t))\,dt = \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

On en déduit que

$$(4.41)\qquad \int_0^T (g(t),u_*(t))\,dt \geq \liminf_{h,k\to 0} \int_0^T (B(q_k p_h u_{h,k}(t)), q_k p_h u_{h,k}(t))dt.$$

Mais, si $\varphi \in L_3(0,T;\overset{o}{W}{}^1_3(\Omega))$, on a

$$\int_0^T (B(\varphi),u_*)\,dt = \lim_{h,k\to 0} \int_0^T (B(\varphi), q_k p_h u_{h,k})\,dt,$$

$$\int_0^T (g,\varphi)\,dt = \lim_{h,k\to 0} \int_0^T (B(q_k p_h u_{h,k}),\varphi)\,dt .$$

Alors on trouve pour tout $\varphi \in L_3(0,T;\overset{o}{W}{}^1_3(\Omega))$

$$\int_0^T (g - B(\varphi), u_* - \varphi)\,dt \geq \liminf_{h,k\to 0} \int_0^T (B(q_k p_h u_{h,k}), q_k p_h u_{h,k})\,dt$$

c'est à dire à cause de la monotonie de l'opérateur B

$$(4.12)\qquad \int_0^T (g - B(\varphi), u_* - \varphi)\,dt \geq 0.$$

Prenons $\varphi = u_* - \lambda\varphi_1$, $\lambda > 0$, $\varphi_1 \in L_3(0,T,\overset{\circ}{W}{}^1_3(\Omega))$; on tire de (4.12)

$$\int_0^T (g - B(u_* - \lambda\varphi_1), \varphi_1)\, dt \geq 0$$

et en faisant tendre λ vers 0

$$\int_0^T (g - B(u_*), \varphi_1)\, dt \geq 0 \quad , \quad \forall\ \varphi_1 \in L_3(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_3(\Omega))$$

d'où

(4.13) $\quad g = B(u_*)$

4) On a ainsi prouvé que u_* est la solution u de (1.4), (1.5) et (1.6). L'unicité de la solution u entraîne immédiatement que c'est toute la suite $(p_{h,k}\ u_{h,k})$ qui converge vers u au sens indiqué.

Remarque 4.1.

On a besoin de la condition (3.13)' seulement au point 3) de la démonstration précédente. Les points 1) et 2) restent valables sous la condition (3.13). Le problème du passage à la limite en utilisant (3.13) au lieu de (3.13)' est ouvert.

5. ETUDE DU SCHEMA II.

On définit l'opérateur non linéaire $A_{h,o}$ de V_h dans V_h par

(5.1) $\quad (A_{h,o}(v_h))_i = \dfrac{1}{4h}\,((v_{i+1})^2 - (v_{i-1})^2)\ ,\quad i = 1,\ldots,I.$

Lemme 5.1.

Pour tout $v_h \in \mathbf{V}_h$, *on a*

$$(5.2) \qquad (A_{h,o}(v_h),v_h)_h \geq -\frac{h^2}{12}\|v_h\|_h^3 ,$$

$$(5.3) \qquad \|A_{h,o}(v_h)\|_h^* \leq c_{11}(\Lambda)\|v_h\|_h^2 ,$$

$$(5.4) \qquad |A_{h,o}(v_h)|_h \leq \Lambda^{1/2} \max_{1\leq i\leq I} |v_i|^{1/2}\|v_h\|_h^{3/2}.$$

Démonstration.

1) Si $v_h \in \mathbf{V}_h$, on vérifie que

$$\sum_{i=1}^{I} v_i\,((v_{i+1})^2 - (v_{i-1})^2) = -\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{I}(v_{i+1}-v_i)^3.$$

Ainsi

$$(A_{h,o}(v_h),v_h)_h = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{I} v_i((v_{i+1})^2 - (v_{i-1})^2) = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{I}\left(\frac{v_{i+1}-v_i}{h}\right)^3 \geq$$

$$\geq -\frac{h^2}{12}\|v_h\|_h^3 .$$

2) Si $v_h, w_h \in \mathbf{V}_h$, on a

$$(A_{h,o}(v_h),w_h)_h = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{I}((v_{i+1})^2 - (v_{i-1})^2)w_i =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\sum_{i=1}^{I}((v_{i+1})^2 - (v_i)^2)w_i + \sum_{i=1}^{I}((v_i)^2 - (v_{i-1})^2)\,w_i\right\} .$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$|(A_{h,o}(v_h),w_h)_h| \leq \frac{1}{4} \{(\sum_{i=1}^{I} |v_{i+1} + v_i|^3)^{1/3}(\sum_{i=1}^{I}|v_{i+1} - v_i|^3)^{1/3} +$$

$$+ (\sum_{i=1}^{I} |v_i + v_{i-1}|^3)^{1/3} (\sum_{i=1}^{I} |v_i - v_{i-1}|^3)^{1/3}\} (\sum_{i=1}^{I} |w_i|^3)^{1/3}.$$

Il en résulte que

$$|(A_{h,o}(v_h),w_h)_h| \leq [v_h]_h \|v_h\|_h [w_h]_h \leq \Lambda^2 \|v_h\|_h^2 \|w_h\|_h.$$

On en déduit l'inégalité (5.3) avec $c_{11}(\Lambda) = \Lambda^2$.

$$|A_{h,o}(v_h)|_h \leq \frac{h^{-1/2}}{4} \{(\sum_{i=1}^{I}(v_{i+1}+v_i)^2(v_{i+1}-v_i)^2)^{1/2}+ (\sum_{i=1}^{I}(v_i+v_{i-1})^2(v_i-v_{i-1})^2)^{1/2}\}$$

$$\leq h^{-1/2} \max_{1\leq i\leq I} |v_i|^{1/2} (\sum_{i=1}^{I}|v_i|^3)^{1/6}(\sum_{i=0}^{I} |v_{i+1}-v_i|^3)^{1/3}$$

d'où

$$|A_{h,o}(v_h)|_h \leq \max_{1\leq i\leq I} |v_i|^{1/2} [v_h]_h^{1/2} \|v_h\|_h \leq \Lambda^{1/2} \max_{1\leq i\leq I} |v_i|^{1/2} \|v_h\|_h^{3/2}.$$

Le schéma II s'écrit maintenant sous la forme vectorielle

$$(5.5) \qquad \frac{1}{k} (u_h^{n+1} - u_h^n) + A_{h,o}(u_h^n) + \varepsilon B_h(u_h^n) = 0, \quad n = 0,1,\ldots,N-1.$$

<u>Théorème 5.1.</u>

Si h *est assez petit*

(5.6) $$h \leq h_0 < (12\varepsilon)^{1/2}$$

et s'il existe une constante ρ , $0 < \rho < 1$, *arbitrairement petite indépendante de* h,k,n *telle que*

(5.7) $$\begin{cases} \left\{ \left(\Lambda \dfrac{k}{\varepsilon} \max\limits_{1 \leq i \leq I} |u_i^n|\right)^{1/2} + \left(4\varepsilon \dfrac{k}{h^2} \max\limits_{0 \leq i \leq I} \left|\dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}\right|\right)^{1/2} \right\}^2 \leq \\ 2\left(1 - \dfrac{h_0^2}{12\varepsilon}\right)(1 - \rho) , \quad n = 0,1,\dots,N, \end{cases}$$

la solution $u_{h,k}$ *du schéma* II *vérifie les inégalités*

(5.8) $$\max_{0 \leq n \leq N} |u_h^n|_h \leq |u_h^0|_h,$$

(5.9) $$k \sum_{n=0}^{N} \|u_h^n\|_h^3 \leq c_{12}(h_0,\rho,\varepsilon)\ |u_h^0|_h^2,$$

(5.10) $$k \sum_{n=0}^{N-1} \left\|\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{h}\right\|_h^{*3/2} \leq c_{13}(h_0,\rho,\varepsilon)\ |u_h^0|_h^2,$$

(5.11) $$\sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 \leq c_{14}(h_0,\rho,\varepsilon)\ |u_h^0|_h^2 .$$

Démonstration.

Elle est analogue à celle du théorème 3.1.

1) On multiplie scalairement (5.5) par $2\,k\,u_h^n$. On obtient d'après (3.8), (3.9) et (5.2)

(5.12) $$\begin{cases} |u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^n|_h^2 - |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 + 2\left(\varepsilon - \dfrac{h^2}{12}\right) k\,\|u_h^n\|_h^3 \leq 0, \\ \qquad\qquad n = 0,1,\dots,N. \end{cases}$$

D'autre part

$$|u_h^{n+1} - u_h^n|_h \leq k\,|A_{h,o}(u_h^n)|_h + \varepsilon k|B_h(u_h^n)|_h$$

ce qui entraîne en vertu des inégalités (3.8) et (5.4)

$$(5.13) \qquad |u_h^{n+1} - u_h^n|_h \leq k\,\{\Lambda^{1/2} \max_{1\leq i\leq I} |u_i^n|^{1/2} + 2\,\frac{\varepsilon}{h} \max_{0\leq i\leq I}\left|\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}\right|^{\frac{1}{2}}\}\|u_h^n\|_h^{3/2}.$$

Les inégalités (5.12) et (5.13) donnent alors pour $n = 0,1,\ldots,N$

$$\begin{cases} |u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^n|_h^2 + \\ + \left[2(1-\dfrac{h^2}{12\varepsilon}) - \{(\Lambda\,\dfrac{k}{\varepsilon} \max\limits_{1\leq i\leq I} |u_i^n|)^{1/2} + (4\varepsilon\dfrac{k}{h^2} \max\limits_{0\leq i\leq I}\left|\dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}\right|)^{1/2}\}^2\right]\varepsilon k\|u_h^n\|_h^3 \leq 0 \end{cases}$$

et en tenant compte des conditions (5.6) et (5.7)

$$(5.14) \qquad |u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^n|_h^2 + 2\,\rho(\varepsilon - \frac{h_0^2}{12})\;k\,\|u_h^n\|_h^3 \leq 0.$$

On en déduit les inégalités (5.8) et (5.9).

2) D'après (3.7), (5.3) et (5.5), on a

$$\left\|\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k}\right\|_h^* \leq |A_{h,o}(u_h^n)||_h^* + \varepsilon\,\|B_h(u_h^n)\|_h^* \leq (c_{11} + \varepsilon)\,\|u_h^n\|_h^2.$$

L'inégalité (5.10) résulte alors de (5.9)

3) L'inégalité (5.13) donne

(5.15) $$k \sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 \le$$

$$\{(\Lambda \frac{k}{\varepsilon} \max_{1\le i\le I} |u_i^n|)^{1/2} + (4\varepsilon \frac{k}{h^2} \max_{0\le i\le I} |\frac{u^n_{n+1}-u^n_i}{h}|)^{1/2}\}^2 \varepsilon k \sum_{n=0}^{N-1} \| u_h^n \|_h^3$$

ce qui entraîne (5.11) en vertu de la condition de stabilité (5.7).

Remarque 5.1.

Sous la condition

(5.7)' $$\lim_{h,k\to 0} \{(\Lambda \frac{k}{\varepsilon} \max_{1\le i\le I} |u_i^n|)^{1/2} + (4\varepsilon \frac{k}{h^2} \max_{0\le i\le I} |\frac{u^n_{i+1}-u^n_i}{h}|)^{1/2}\} = 0$$

on a d'après (5.15)

(5.11)' $$\lim_{h,k\to 0} \sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 = 0.$$

De la même façon qu'au N° 4, on peut démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.2.

Faisons les hypothèses

(5.7)' $$\lim_{h,k\to 0} \{(\Lambda \frac{k}{\varepsilon} \max_{1\le i\le I} |u_i^n|)^{1/2} + (4\varepsilon \frac{k}{h^2} \max_{0\le i\le I} |\frac{u^n_{i+1}-u^n_i}{h}|)^{1/2}\} = 0$$

(4.20) $$\lim_{h\to 0} q_h u_h^0 = u_0 \quad \textit{dans } L_2(\Omega) \textit{ fort.}$$

Si $u_{h,k}$ *désigne la solution du schéma* II, *on a*

(5.16) $$\begin{cases} \lim\limits_{h,k\to 0} p_{h,k} u_{h,k} = u \quad \textit{dans } L_3(0,T;\overset{0}{W}{}^1_3(\Omega)) \textit{ faible et dans } L_3(Q_T) \textit{ fort,} \\ \lim\limits_{h,k\to 0} \frac{d}{dt} p_{h,k} u_{h,k} = \frac{du}{dt} \quad \textit{dans } L_{3/2}(0,T;W^{-1}_{3/2}(\Omega)) \textit{ faible} \end{cases}$$

Le théorème 5.2 est-il encore valable si on remplace la condition (5.7)' par la condition (5.7) ?

6. REMARQUES SUR LA PSEUDO-VISCOSITE.

On considère dans l'ouvert $Q_T = \Omega \times \left]0,T\right[$ l'équation hyperbolique non linéaire

(6.1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

munie des conditions aux limites

(6.2) $$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in \left]0,T\right[$$

et de la condition initiale

(6.3) $$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Le problème (6.1), (6.2), (6.3) est en général mal posé. Pour l'intégrer numériquement à l'aide d'une méthode eulérienne, on peut utiliser par exemple des schémas aux différences finies explicites des types I ou II, où $\varepsilon\, B_h(u_h^n)$ est un terme de pseudo-viscosité. En général, on choisit ε dépendant de h (cf. [9])

(6.4) $$\varepsilon = \mu\, h^2$$

où μ est une constante convenable indépendante de h. On dit (abusivement) qu'un tel schéma est "stable" si

(6.5) $$\max_{0 \leq n < N} |u_h^n|_h^2 \leq |u_h^0|_h^2.$$

A la lumière des résultats précédents, on peut analyser le rôle que joue le terme de pseudo-viscosité. Pour le schéma I, il "tue" l'action perturbatrice du terme en $- h^2 \|v_h\|_h^3$ que l'on trouve dans la formule (3.3). D'après le théorème 3.1, le schéma I est "stable" si

$$(6.6) \qquad \begin{cases} \mu > \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{k}{h} \max\limits_{1 \leq i \leq I} |u_i^n| \leq \dfrac{2}{1+\eta} ; \\ \dfrac{k}{h} \max\limits_{0 \leq i \leq I} |u_{i+1}^n - u_i^n| \leq \dfrac{1}{2} (1 - \dfrac{2}{3\mu}) \dfrac{\eta}{1+\eta} . \end{cases}$$

On trouve des conditions de stabilité du type hyperbolique classique.

Pour le schéma II, le terme de pseudo-viscosité a un double rôle : il "tue" l'action perturbatrice du terme en $- h^2 \|v_h\|_h^3$ qui existe dans la formule (5.2) et de plus il stabilise la mauvaise discrétisation du terme en $u \dfrac{\partial u}{\partial x}$ (cf. le cas linéaire). D'après le théorème 5.1, le schéma II est "stable" si

$$(6.7) \qquad \begin{cases} \mu > \dfrac{1}{12}, \\ (\dfrac{\Lambda}{\mu} \dfrac{k}{h^2} \max\limits_{1 \leq i \leq I} |u_i^n|)^{1/2} + (4\mu \dfrac{k}{h} \max |u_{i+1}^n - u_i^n|)^{1/2} \leq 2(1 - \dfrac{1}{12\mu}) \end{cases}$$

On trouve une condition de stabilité de type parabolique. Pour le problème hyperbolique envisagé, ce schéma est donc à rejeter comme on pouvait s'y attendre à priori.

REFERENCES

[1] J.P. AUBIN. Un théorème de compacité, C.R. Acad. Sc., t. 256, 1963, p. 5042-5044.

[2] J.P. AUBIN. Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels, Mémoires de la Soc. Math. France, t 12, 1967.

[3] J.L. LIONS. Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer Verlag, Berlin, 1961.

[4] J.L. LIONS. Quelques remarques sur les équations différentielles opérationnelles du 1er ordre, Rend. Sem. Math. Padova, t 33, 1963, p. 213-225.

[5] J.L. LIONS. Sur certaines équations paraboliques non linéaires, Bull. Soc. Math. France, t 93, 1965, p. 155-175.

[6] G.J. MINTY. Monotone (non linear) operators in Hilbert space, Duke Math. J., t. 29, 1962, p 341-346.

[7] P.A. RAVIART. Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires, J. Math. Pures. Appl. t. 46, 1967, p. 11-183.

[8] P.A. RAVIART. Sur la résolution et l'approximation de certaines équations paraboliques non linéaires dégénérées. Arch. Rat. Mec. Anal. t. 25, 1967, p. 64-80.

[9] R.D. RICHTMYER - K.W. MORTON. Difference methods for initial-value problems, 2nd edition, Interscience Publishers, 1967.