MICHEL MÉTIVIER

Transformées de Fourier des mesures cylindriques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 9, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A9_0>

TRANSFORMEES DE FOURIER DES MESURES CYLINDRIQUES

par

Michel METIVIER

Cet exposé est consacré à une présentation d'un chapitre du cours de 3e cycle de L. Schwartz 1964-1965 : Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires.

---

1. Définition de la transformée de Fourier.

E est un espace vectoriel localement convexe réel, E' son dual. Si μ est une mesure de Radon sur E, bornée, on peut définir la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de μ comme étant l'application de E' dans $\mathbb{C}$ suivante :

(1.1) $$\hat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i<x,\xi>} \mu(dx).$$

Remarquons que si nous désignons par μ_ξ la mesure image de μ par ξ la transofrmée de Fourier de μ_ξ est $\hat{\mu}_\xi(t)$ définie par

(1.2) $$\hat{\mu}_\xi(t) = \int e^{-2\pi i<x,t>} \mu(dx).$$

D'où la relation

(1.3) $$\hat{\mu}(t\xi) = \hat{\mu}_\xi(t).$$

Nous voyons également que si nous désignons par $\mu_{\xi,\eta}$ la distribution conjointe des deux variables aléatoires ξ et η éléments de E', pour tout couple (u,v) de scalaires réels on a :

$$\hat{\mu}_{(\xi,\eta)}(u,v) = \int e^{-2\pi i<x,u\xi+v\eta>} \mu(dx) \qquad \text{soit :}$$

(1.4) $\hat{\mu}_{(\xi,\eta)}(u,v) = \hat{\mu}\langle u\xi+v\eta\rangle$.

Inversement, supposons que nous considérions une application linéaire de E' dans un espace de variables aléatoires : $\xi \longrightarrow L(\xi)$ (situation qui est équivalente à se donner une mesure cylindrique sur E pour la dualité (E,E')). Désignons par μ_ξ la loi de probabilité de $L(\xi)$, et par $\mu_{\xi\eta}$ la loi de probabilité de $(L(\xi),L(\eta))$. On a :

$$\hat{\mu}_\xi(t) = E(e^{-2i\pi L(t\xi)}) = E(e^{-2i\pi tL(\xi)}) = \hat{\mu}_{t\xi}(1).$$

Cette éqalité prouve que la famille $(\hat{\mu}_\xi)_{\xi\in E'}$ est entièrement déterminée par la seule application $\hat{\mu}$ de E' dans $\mathbb{C}$ définie par :

(1.5) $\hat{\mu}(\xi) = \mu_\xi(1)$.

Définition 1.

Si L est une fonctionnelle aléatoire linéaire sur E', ou si μ est la mesure cylindrique sur E associée, on appelle transformée de Fourier de L (ou de μ) la fonction complexe $\hat{\mu}$ sur E' définie par (1.5).

Il résulte de (1.1) et (1.3) ci-dessus que

Proposition 1.

Si la mesure cylindrique μ *est prolongeable en une mesure de Radon notée également* μ, $\hat{\mu}(\xi)$ *définie par (1.5) est la transformée de Fourier de* μ.

Nous voyons également immédiatement que la formule (1.4) est valable pour la transformée de Fourier μ d'une mesure cylindrique $\hat{\mu}$, car :

$$\hat{\mu}_{(\xi,\eta)}(u,v) = E(e^{-2i\pi(uL(\xi)+vL(\eta))}) =$$

$$E(e^{-2i\pi L(u\xi+v\eta)}) = \hat{\mu}_{u\xi+v\eta}(1)$$

Remarque. Notons que $\mu_\xi(R)$ ne dépendant pas de ξ, en raison des relations de compatibilité, et désignons par $\|\mu\|$ cette quantité. On a $\hat{\mu}(0) = \|\mu\|$

2. Transformée de Fourier et propriétés de concentration.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.

Soit $\mathcal{G}$ *un ensemble filtrant à droite pour* $\subset$ *de parties convexes équilibrées et bornées, stable par homothétie, les propriétés suivantes sont équivalentes pour une mesure cylindrique* μ *sur* E

A - μ *est stalairement* $\mathcal{G}$*-concentré.* *

B - $\hat{\mu}$ *est continue à l'origine sur* $E'_{\mathcal{G}}$

C - $\hat{\mu}$ *est uniformément continue sur* $E'_{\mathcal{G}}$

Démonstration.

L'implication A $\Longrightarrow$ B est prouvée par le lemme 1 ci-dessous.

L'implication B $\Longrightarrow$ A est prouvée par le lemme 2 ci-dessous.

L'implication C $\Longrightarrow$ B est triviale.

L'implication B $\Longrightarrow$ C résulte immédiatement du lemme 4.

Nous prouvons donc successivement ces différents lemmes.

---

* μ est dite scalairement $\mathcal{G}$-concentré si $\forall$ la forme linéaire ξ sur E, et $\forall\ \varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{G}$ tel que, si $\xi(A)$ désigne l'image de A par ξ, $\mu_\xi(R \setminus \xi(A)) \leq \varepsilon$.

Lemme 1.

Si μ est scalairement concentrée à δ près sur A, et si N désigne la jauge de A°, on a :

(2.1) $|\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)| < 2\hat{\mu}(0)\,\pi N(\xi) + 2\delta$

Démonstration.

L'hypothèse exprime que μ_ξ est concentrée à δ près sur $\xi(A) \subset [-N(\xi), N(\xi)]$. Comme $\hat{\mu}(\xi) = \hat{\mu}_\xi(1) = \int_R e^{-2i\pi u}\,\mu_\xi(du)$. On a :

$$|\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)| \leq \int_R |1 - e^{-2i\pi u}|\mu_\xi(du)$$

$$\leq \int_{[|u| \leq N(\xi)]} |2\pi u|\ \mu_\xi(du) + \int_{[|u| \geq N(\xi)]} |1-e^{-1i\pi u}||\mu_\xi(du)$$

$$\leq \|\mu\|\ 2\pi N(\xi) + 2\delta$$

Conséquence du lemme 1.

On a immédiatement : si μ est scalairement concentrée à δ près sur A, $\xi \in \delta \,.\, A° \Longrightarrow |\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)| < 2(\mu(0)\pi + 1)\delta$.

D'où l'implication A $\Longrightarrow$ B du théorème 1.

Lemme 2.

Soit ν une mesure positive bornée sur R et $\Psi(t)$ sa transformée de Fourier. Si $|\Psi(0) - \Psi(t)| \leq \delta^2$ pour tout $t \in [-\frac{1}{L}, +\frac{1}{L}]$, alors ν est concentrée à $(1 + \frac{2}{\pi})\delta$ près sur $]-\frac{L}{\delta}, +\frac{L}{\delta}[$.

Démonstration.

Comme $\frac{L}{\delta}\, e^{-\pi u^2 L^2/\delta^2}$ admet $e^{-\pi t^2 \delta^2/L^2}$ comme transformée de Fourier, la formule suivante : $\int \hat{h}\, d\nu = \int h(u)\,\Psi(u)\,du$ valable pour toute fonction continue intégrable sur R donne :

$$\int_R e^{-\pi t^2\delta^2/L^2}\,\nu(dt) = \frac{L}{\delta}\int_R e^{-\pi u^2L^2/\delta^2}\,\Psi(u)\,du.$$

Comme $\Psi(0) = \int_R \nu(dt)$ et $1 = \frac{L}{\delta}\int_R e^{-\pi u^2L^2/\delta^2}\,du$ on a :

$$(2.2)\qquad \int_R (1 - e^{-\pi t^2\delta^2/L^2}) = \frac{L}{\delta}\int_R e^{-\pi u^2L^2/\delta^2}\,(\Psi(0) - \Psi(u))\,du$$

Minorons le 1er membre :

$$(2.3)\qquad (1 - e^{-\pi})\,\nu([|t| \geq \tfrac{L}{\delta}]) \leq \int_{[|t|\geq L/\delta]} (1 - e^{-\pi t^2\delta^2/L^2})\,\nu(dt)$$

(2.2) et (2.3) entraînent alors :

$$(1 - e^{-\pi})\,\nu([|t| \geq \tfrac{L}{\delta}]) \leq \frac{L}{\delta}\int_{[|u|\leq 1/L]} e^{-\pi u^2L^2/\delta^2}\,(\Psi(0) - \Psi(u))\,du +$$

$$+ \frac{L}{\delta}\int_{[|u|\geq 1/L]} e^{-\pi L^2u^2/\delta^2}\,|\Psi(0) - \Psi(u)|\,du$$

Soit

$$(1 - e^{-\pi})\,\nu([|t| \geq \tfrac{L}{\delta}]) \leq \delta\, e^{-\pi/\delta^2} + \int_{[|s|\geq 1/\delta]} 2e^{-\pi s^2}\,ds$$

$$\leq \delta + 2\int_{\delta}^{+\infty} 2s\,\delta\, e^{-\pi s^2}\,ds = \delta(1 + \frac{2}{\pi}\, e^{-\pi/\delta^2})$$

$$\leq \delta(1 + \frac{2}{\pi})$$

Lemme 3.

Soit μ *une mesure cylindrique sur* E *et* $A \subset E$, A *convexe équilibré. Si* $|\hat\mu(0)-\hat\mu(\xi)| \leq \delta^2$ *pour tout* $\xi \in A^\circ$, *alors* μ *est scalairement concentrée à* $(1 + \frac{2}{\pi})\delta$ *près sur* $\frac{1}{\delta}$ .A.

Démonstration.

En vertu de l'identité

$$\hat\mu(u.\xi) = \hat\mu_\xi(u)$$

on a :

$$|\hat\mu_\xi(0) - \hat\mu_\xi(u)| \leq \delta^2 \quad \text{si} \quad u\xi \in A^\circ.$$

Or si N désigne la jauge de $A°$ $u\xi \in A° \iff |u| \leq \frac{1}{N(\xi)}$. D'après le lemme 2, μ_ξ est donc concentré à $(\frac{2}{\pi} + 1)\delta$ près sur $]-\frac{N(\xi)}{\delta}, \frac{N(\xi)}{\delta}[$.

Par définition, puisque A est dense dans $A°$, pour tout ξ :

$N(\xi) = \sup_{x\in A} |<x,\xi>|$, d'où : $\frac{N(\xi)}{\delta} = \sup_{x\in A/\delta} |<x,\xi>|$. Comme $\xi(A)$ est en outre un intervalle symétrique puisque A est équilibré on a :

$$\xi(\frac{1}{\delta} . A) \supset]-\frac{N(\xi)}{\delta}, \frac{N(\xi)}{\delta}[.$$

μ_ξ est donc concentré à $(1 + \frac{2}{\pi}/\delta$ près sur $\xi(\frac{1}{\delta} . A)$.

<u>Lemme 4.</u>

La transformée de Fourier d'une mesure cylindrique μ *sur* E *vérifie l'inégalité :*

$\forall\ \xi_1, \xi_2 \in E'$:

$$|\hat{\mu}(\xi_1) - \hat{\mu}(\xi_2)|^2 \leq 2\,\hat{\mu}(0)\,(\hat{\mu}(0) - \mathcal{R}e\,\hat{\mu}(\xi_1 - \xi_2))$$

<u>Démonstration.</u>

Supposons que h soit la transformée de Fourier d'une mesure ν sur R^n,

$$|h(u) - h(v)|^2 = |\int (e^{iux} - e^{ivx})\,\nu(dx)|^2$$
$$= |\int e^{iux}\,(1 - e^{i(v-u)x})\,\nu(dx)|^2$$

en utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$\leq \int |e^{iux}|^2\,\nu(dx)\ .\int |1 - e^{i(v-u)x}|^2\,\nu(dx)$$
$$\leq \varphi(0)\ .\int (2 - 2\,\mathcal{R}e\,e^{i(v-u)x})\,\nu(dx)$$
$$\leq 2\varphi(0)\ .\ (\varphi(0) - 2\,\mathcal{R}e\,\varphi(v-u)).$$

Posons maintenant pour $t = (t_1,t_2)$ $h(t) = \hat{\mu}(t_1\,\xi_1 + t_2\,\xi_2)$. On a

$h(t) = \hat{\mu}_{(\xi_1,\xi_2)}(t_1,t_2)$. D'où en posant $u = (1,0)$, $v = (0,1)$

$$h(u) - h(v) = \hat{\mu}(\xi_1) - \hat{\mu}(\xi_2) = 2\hat{\mu}_{(\xi_1,\xi_2)}(0)\ (\hat{\mu}_{(\xi_1,\xi_2)}(0) - \mathcal{R}e\ \hat{\mu}_{(\xi_1,\xi_2)}(u,v))$$

et comme

$$\hat{\mu}_{(\xi_1,\xi_2)}(0) = \|\mu_{\xi_1,\xi_2}\| = \|\mu\| = \hat{\mu}(0)$$

on a la formule voulue.

3. Propriétés de concentration et continuité des fonctionnelles linéaires aléatoires.

Théorème 2.

Pour une fonctionnelle linéaire aléatoire L *sur* E' *les propriétés suivantes A, B, C et D sont équivalentes. Si* $\mathfrak{S}$ *désigne un ensemble filtrant à droite pour* $\subset$ *de parties convexes équilibrées et bornées, stable par homothétie :*

A – L *est continue en probabilité sur* $E'_{\mathfrak{S}}$

B – L *est continue en loi sur* $E'_{\mathfrak{S}}$

C – *La fonction caractéristique de* L *est continue sur* $E'_{\mathfrak{S}}$

D – *La mesure cylindrique* μ *associée à* L *est scalairement* $\mathfrak{S}$*-concentrée.*

Démonstration.

1°) A $\Longleftrightarrow$ B.

A implique B trivialement. Réciproquement, en vertu de la linéarité de L, L est continue en probabilité sur $E'_{\mathfrak{S}}$ si et seulement si elle est continue en probabilité à l'origine, c'est-à-dire, si pour toute suite (ξ_n) tendant vers 0 dans $E'_{\mathfrak{S}}$, $L(\xi_n)$ converge vers 0 en probabilité. Or la convergence en loi vers 0 d'une suite (X_n) de variables aléatoires nulles implique la convergence en probabilité vers zéro (Considérer une fonction continue positive φ sur R nulle en 0 et égale à 1 à l'extérieur de $(-\varepsilon,+\varepsilon)$ on a $\mu\left[|X_n| \geq \varepsilon\right] \leq \int \varphi(X_n)\, d\mu = \int \left[\varphi(X_n)\, d\mu - \varphi(0)\right]$, quantité qui tend vers zéro lorsque $n \longrightarrow \infty$ par hypothèse).

2°) B $\Longleftrightarrow$ C résulte immédiatement du théorème de continuité de Paul Levy pour les mesures bornées sur R, la condition $\hat{\mu}_{\xi_n}(t) = \hat{\mu}(\xi_n t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout t étant équivalente à $\mu_{\xi_n} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{en loi}} 0$.

3°) C $\Longleftrightarrow$ D est exprimé par le théorème 1.

4. Théorème de Bochner dans les espaces vectoriels.

Lemme 5.

Toute fonction de type positif Ψ sur E' dont la restriction à tout sous-espace de dimension finie de E' est continue est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique unique sur E.

Démonstration.

La restriction de Ψ à tout sous-espace de dimension finie F' est par hypothèse la transformée de Fourier d'une mesure $\mu_{F'}$ sur E/F'°. Soit $G' \supset F'$ et $\mu_{G'}$ la mesure sur E/G'° admettant pour transformée de Fourier la restriction $\mu_{G'}$ de Ψ à G'. Comme $\Psi_{F'} = \Psi_{G'} \circ i$, i désignant l'injection canonique de F' dans G' dont la transposée est précisément la projection canonique de E/G'° sur E/F'^{0}, $\mu_{F'}$ est l'image de $\mu_{G'}$ par la projection canonique. Le système $(\mu_{F'})$ de mesures sur les E/F'° est donc un système projectif, évidemment déterminé de façon unique par Ψ.

D'où le lemme.

Théorème 3.

Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties convexes équilibrées de E, compactes pour une topologie T sur E compatible avec la dualité (E,E'), et si $E'_{\mathfrak{S}}$ est nucléaire, toute fonction de type positif continue sur E' est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon sur E_T.

Démonstration.

D'après le lemme 5; si Ψ est une fonction de type positif continue sur $E'_{\mathfrak{S}}$ elle est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique sur E, et cette mesure est scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée. D'après le théorème de Minlos (cf |1|) elle est $\mathfrak{S}$-concentrée (*). C'est donc une mesure de Radon pour toute topologie T sur E telle que les éléments de $\mathfrak{S}$ soient compacts pour T.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. SCHWARTZ - Mesures de Radon dans les espaces topologiques
[2] Gelfand Vilenkin - Generalized functions. Tome IV.

(*) i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in \mathfrak{S}$ telle que $\mu(E \setminus A) \leq \varepsilon$.