PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

A. BRUNEL

Lemme ergodique de I. Cuculescu et C. Foias

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 2, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A2_0>

LEMME ERGODIQUE DE I. CUCULESCU, ET C. FOIAS

Czech. Math. S. 1966) par A. BRUNEL.

1. Définition.

1.1. Définition de $(X_\infty, \mathcal{B}_\infty, \mu_\infty)$:

$$(X,\mathcal{B},\mu) \qquad X_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i \qquad i \in j \qquad X_i \cap X_j = \emptyset$$

μ σ-finie avec $X_i \approx X$

$$A \in \mathcal{B}_\infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, n \quad A \cap X_n \in \mathcal{B}$$

$$\mu_\infty(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A \cap X_n).$$

1.2. L'opérateur S_∞ associé à une suite de contractions positives.

(T_n) suite de contractions positives sur $L^1(X)$.

$T_n^* = S_n$

$S_\infty : L^\infty(X_\infty) \longrightarrow L^\infty(X_\infty)$ définie par :

$$\begin{cases} S_\infty(\varphi_0, \varphi_1, \dots) = (\psi_0, \psi_1, \dots) \\ \psi_0 = S_1\, \varphi_1 \; \dots \; \psi_n = S_{n+1}\, \varphi_{n+1} \end{cases}$$

S_∞ est une contraction positive de $L^\infty(X_\infty)$.

1.3. φ^V : plus petite fonction S-surharmonique majorant

e_A : potentiel d'équilibre de A. (cf. Meyer Probabilités et potentiels).

Dans toute la suite on suppose $T_n \geq T_{n+1}$ d'où $S_n \geq S_{n+1}$. Nous dirons que φ est de type décroissant si $\varphi_n \geq \varphi_{n+1}$. On a alors S_∞ de type décroissant et φ^V également de type décroissant.

Soit A de type décroissant , e_A est donc de type décroissant

$e_A = (e_o, e_1, \ldots)$.

Rappelons que $e_A - S_\infty e_A$ est nulle sur $\complement A$

donc $e_A - S_\infty e_A = (h_o, h_1, \ldots)$ h_n est nulle sur $\complement(E \cap A)$ et compte tenu de ce que la suite $A = (A_o, A_1, \ldots)$ est de type décroissant : h_n est nulle sur $\complement(A_o)$ (dans X).

$$\text{Sur } A_n \setminus A_{n+1} \qquad e_o = e_1 = \quad = e_n = 1$$

Comme $S_1 e_1 \geq S_2 e_2 \geq \ldots$

de $h_o = e_o - S_1 e_1$ (utiliser la définition de S_∞)

$h_1 = e_1 - S_2 e_2$

on déduit

$$\begin{cases} h_o \leq h_1 \leq \ldots \leq h_n & \text{sur} \quad A_n \setminus A_{n+1} \\ h_{n+1} = \ldots\ldots = 0 & \text{sur} \quad A_n \setminus A_{n+1} \end{cases}$$

2. Lemme ergodique (Brunel-Cuculescu).

2.1. Notations.

Soit famille $\{g_n\} \subset L^1(X)$.

$$A = \bigcap_k \{\sup_{n \geq k} \sum_{i=k}^{n} g_i \geq 0\}$$

$\forall x \in A$ posons $k_o(x)$ le plus petit entier n tel que $g_{o,n}(x) = \sum_{i=o}^{n} g_i(x) \geq 0\}$

$k_p(x)$ le plus petit entier $n \geq k_p$ $g_{k_p(x)+1,n}(x) \geq 0$.

$$B^k_{n,p} = \{x \mid k \leq K_p(x) \leq n\}$$

Soit pour n,p fixe e le potentiel d'équilibre de $(B^o_{n,p}, B^1_{n,p}, \ldots)$

2.2. Lemme

Dans les conditions précédentes on a :

$$\int [g_o\ e_o + (g_1 - T_1 g_o)\ e_1 + \ldots + (g_n - T_1 g_{n-1})\ e_n]\ d\mu \geq 0$$

Démonstration.

Nous avons à prouver

$$\int [g_o(e_o - S_1 e_1) + \ldots + g_{n-1}(e_{n-1} - S_n e_n) + g_n e_n]\ d\mu \geq 0$$

On a

$$h_o = e_o - S_1\ e_1 \ldots\ldots h_n = g_n\ e_n$$

coordonnées du potentiel d'équilibre de $B = (B^o_{n,p}, \ldots)$

D'après une remarque précédente tous les h_i sont nuls sur $\complement B^o_{n,p}$. Or sur $B^k_{n,p} - B^{k+1}_{n,p}$ la fonction à intégrer se réduit à $g_o h_o + \ldots + g_k h_k$ d'où

$$\int_{B^k_{n,p} \setminus B^{n+1}_{n,p}} [g_o(e_o - S_1 e_1) + \ldots + g_n e_n]\,d\mu = \int_{B^k_{n,p} \setminus B^{k+1}_{n,p}} [h_o(g_o + \ldots + g_k)(h_1 - h_o)(g_1 + \ldots + g_k) \cdot$$
$$+ \ldots + (h_k - h_{k-1})\ g_k]\ d\mu$$

comme $h_o \leq h_1 < \ldots \leq h_k$ sur $B^h_{n,p} \setminus B^{h+1}_{n,p}$.

Nous avons seulement à montrer que sur cet ensemble qui est $\{x : K_p(x) = k\}$ les sommes $g_{ik} = \sum_{r=i}^{h} g_r$ sont ≥ 0 pour $0 \leq i \leq k$.

Or sur $\{x : K_o(x) = k\}$ on voit par définition de $K_o(x)$ que $g_{ik} \geq 0$, $\forall\ i = 0 \ldots h$.

Sur $\{x : K_{p+1}(x) = k\}$ si $K_p(x) = s$ k est le plus entier > s tel que $g_{s+1,h} \geq 0$. D'où toutes les sommes $g_{i,k}$ avec $s+1 \leq i \leq k$ sont positives. Mais d'après l'hypothèse de récurrence $g_{iK_p(x)}(x) \geq 0$ pour tout $i \leq K_p(x)$. D'où $\forall\ i$, $g_{i,k}(x) \geq 0$.

2.3. Corollaire du lemme ergodique.

Si $g_{n+1} \leq T_{n+1}g_n$, *et si* $e = (e_o, e_1, \ldots)$ *est le potentiel d'équilibre de* $(A, A, A, \ldots)$ *alors pour tout* m :

$$\int \left[g_o e_o + (g_1 - T_1 g_o)\, e_1 + \ldots + (g_m - T_m g_{n-1})\, e_m\right] d\mu \geq 0$$

Démonstration.

Désignons par $e^{n,p}$ le potentiel d'équilibre de $(B^i_{n,p})$ intervenant dans le lemme précédent :

Pour tout $m \leq n$: (puisque $g_n - T_n g_{n-1} \geq 0$ positif par hypothèse).

$$\int \left[q_o e_o^{n,p} + \ldots + (g_m - T_m g_{m-1})\, e_m^{n,p}\right] d\mu \geq 0$$

Pour m fixe $n \longrightarrow \infty$, $B^k_{n,p} \longrightarrow B^k_p$ en croissant

d'où e^{no} converge en croissant vers le potentiel d'équilibre e^P de $(B^o_p, B^1_p, \ldots B^k_p, \ldots)$.

Soit

$$\int \left[g_o e_o^p + \ldots + (g_m - T_m g_{n-1})\, e_n^p\right] d\mu \geq 0 \qquad \forall\, m$$

Comme pour tout k, $B^k_p \nearrow A$, on a en passant à nouveau à la limite :

$$\int \left[g_o e_o + \ldots + (g_m - T_m g_{n-1})\, e_m\right] d\mu \geq 0.$$

D'où le lemme.

2.4. Convergence.

Si $g_{n+1} = Tg_n$ et $T_i = T \quad \forall\, i$

l'inégalité précédente devient $\int g e_o\, d\mu \geq 0$ soit $\int g\, \Psi_A\, d\mu \geq 0$.

3. Théorème ergodique avec conditions mixtes.

Soient T_n *une suite décroissante de contraction s de* $L^1(X)$.
$f_n \in L^1_+$ *telles que* $T_{n+1} f_n \underset{+}{\geq} f_{n+1}$, *et* $g_n \in \mathcal{M}_+$ *telle que* $T_{n+1} g_n \leq g_{n+1}$.
Alors p.p. sur l'ensemble $\{\sum_{n=o} g_n > 0\}$ $\dfrac{f_o+\dots+f_n}{g_o+\dots+g_n}$ *a une limite finie.*

Démonstration.

1°) Nous nous ramenons au cas $g \in L^1_+$ en montrant que si le théorème est faux pour $g \in \mathcal{M}_+$, il l'est pour $g \in L^1$.

Supposons donc que f et g existent, $f \in L^1$ et $g \in \mathcal{M}_+$, tels que B, $0 < \mu(B) < +\infty$ sur B $\sum_n g_n > 0$ et $\dfrac{f_o+\dots+f_n}{g_o+\dots+g_n}$ ou bien n'a pas de limite ou bien tend vers $+\infty$.

Soit $B_n \subset B$ $\mu(B-B_n) \leq 2^{-(n+2)} \mu(B)$ et $g_n 1_{B_n}$

Si $D = \bigcap_n B_n$ $\mu(D) \geq \frac{1}{2} \mu(B)$ et toutes les $g_n.1_D$ sont intégrables.

$$h_o = g_o.1_D$$
$$\vdots$$
$$h_{n+1} = T_{n+1} h_n \vee g_{n+1}.1_D$$
$$\vdots$$

On a évidemment $h_{n+1} \geq T_{n+1} h_n$.

Nous montrons par récurrence que $h_n \leq g_n$. Pour h_o ceci est vrai. Si $h_n \leq g_n$ on a $T_{n+1} h_n \leq T_{n+1} g_n \leq g_{n+1}$ ce qui implique (voir la def. de h_{n+1}) $h_{n+1} = g_{n+1}$ sur D, et $h_{n+1} = T_{n+1} h_n \leq g_{n+1}$ en dehors de D.

et sur D $h_n = g_n$. D'où sur D on a le même comportement de

$$\frac{f_o+\dots+f_n}{g_o+\dots+g_n} \quad \text{et} \quad \frac{f_o+\dots+f_n}{h_o+\dots+h_n}$$

2°) Nous supposons $g \in L^1$

$$A = \{x : g_o(x) > 0 \text{ et } \overline{\lim_n} \frac{f_o+\dots+f_n}{g_o+\dots+g_n} = +\infty\} \quad \forall c > 0$$

Sur A, $\forall k$, $\exists n \geq k$ $\sum_{i=k}^{n} f_i(x) - c\, g_i(x) \geq 0$.

Comme

$$T_{n+1}(f_n - cg_n) \geq f_{n+1} - c\, g_{n+1}$$

on peut utiliser le corollaire du lemme (avec $m = 0$)

$$\int (f_o - cg_o)\, e_o\, d\mu \geq 0$$

D'où

$$\int g_o\, e_o\, d\mu = 0 \Longrightarrow \int_A g_o\, d\mu = 0 \Longrightarrow A \text{ négligeable.}$$

3°) Soit

$$A' = \{x : \sum_n g_n(x) = +\infty \quad r_n = \frac{f_o+\dots+f_n}{g_o+\dots+g_n} \text{ pas de limite}\}.$$

Si $\mu(A')>o$, on peut trouver A, $\mu(A) > 0$, $A \subset A'$, $0 < a < b$ tels que

$$\underline{\lim_n}\,(r_n) < a < b < \overline{\lim_n}\,(r_n).$$

Sur A :

$$\forall k \qquad \sup_{n \geq k} \sum_{i=k}^{n} (f_i(x) - bg_i(x)) \geq 0$$

Comme $T_{n+1}(f_n - bg_n) \geq f_{n+1} - bg_{n+1}$

On peut appliquer le corollaire du lemme ergodique :

$$(1) \quad b \int [g_o e_o + \dots + (g_n - Tg_{n-1})e_n]\, d\mu \leq \int [f_o e_o + \dots + (f_n - T_n f_{n-1})e_n]\, d\mu$$

$$\leq \int f_o e_o\, d\mu$$

D'où

(1') $$\int \left[g_o\, e_o + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - Tg_{n-1})\, e_n\right] d\mu < +\infty$$

Sur A on a également :

$$\forall\, k \quad (\sup_{n\geq k} \sum_{i=k}^{n} (ag_i(x) - f_i(x)) \geq 0).$$

On applique le lemme avec $h_i = ag_i - f_i$:

$$\int \left[(h_1 - T_1 h_o)e_1^{(n,p)} + \ldots + (f_n - T_n h_{n-1})e_n^{(n,p)}\right] d\mu = -\int h_o\, e_o^{(n,p)}\, d\mu$$

Cette fois d'après les hypothèses $h_{n+1} - T_{n+1}\, h_n \geq 0 \quad \forall\, n.$

D'où en appliquant Beppo-Levi : $n \longrightarrow \infty$ puis $p \longrightarrow \infty$

$$\int \left[\sum_{i=1}^{\infty} (h_i - T_i h_{i-1})\, e_i\right] d\mu \geq -\int h_o\, e_o^{(n,p)}\, d\mu \qquad \forall\, n \text{ et } p$$

en appliquant Lebesgue :

$$\int \left[\sum_{i=1}^{\infty} (h_i - T_i h_{i-1})\, e_i\right] d\mu \geq -\int h_o\, e_o\, d\mu$$

(2) $$\int \left[h_o\, e_o + \sum_{i=1}^{\infty} (h_i - T_i\, h_{i-1})\, e_i\right] d\mu \geq 0$$

Compte tenu de (1) (1'), (2) et de la définition de h :

$$0 \leq b \int (g_o e_o + \sum_{i=1}^{\infty} (g_i - T_i g_{i-1})e_i) d\mu \leq \int \left[f_o e_o + \sum_{i=1}^{\infty} (f_i - T_i f_{i-1})e_i\right] d\mu$$

$$\leq a \int (g_o e_o + \sum_{i=1}^{\infty} (g_i - T_i g_{i-1})e_i)\, d\mu$$

et comme b > a ceci implique

$$\int (g_o\, e_o + \sum_{i=1}^{\infty} (g_i - T_i\, g_{i-1})e_i)\, d\mu = 0$$

En particulier

$$\int g_o\, e_o\, d\mu = 0 \Longrightarrow \int_A g_o\, d\mu = 0$$

Donc $A \cap [g_o > 0]$ est négligeable.

En recommençant avec le rapport :

$$\frac{f_k + \ldots + f_n}{g_k + \ldots + g_n}$$

on montre de même que $A \cap [g_k > 0]$ négligeable. D'où

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A \cap [g_k > 0] \quad \text{est négligeable.}$$

4. Décomposition de Hopf associée.

4.1. Décomposition.

Soit p intégrable > 0 p.p.

$$C = \{x \mid \sum_{n=0}^{\infty} T_n \, T_{n-1} \ldots T_1 p(x) = \infty\}$$

$$D = C^c$$

Soit $q > 0$ $\quad f_n = T_n \, T_{n-1} \ldots T_1 q$

$$g_n = T_n \, T_{n-1} \ldots T_1 p$$

D'après le théorème ergodique précédent :

$$\frac{\sum_{n=0}^{n} f_n}{\sum_{k=0}^{n} g_n} \longrightarrow \text{limite presque partout}$$

d'où $C_p = C_q$ p.p.

4.2. Propriétés de la décomposition de Hopf.

Proposition 1.

Soit $f \in L_+^1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n \, T_1 f = \begin{cases} 0 \text{ ou } +\infty \text{ sur } C \\ <\infty \text{ sur } D \end{cases}$$

Démonstration. Soit p tel que $C = \left| \sum_{n=0}^{\infty} T_n \ldots T_1 p(x) = +\infty \right|$

On applique le théorème ergodique au rapport

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} T_k \dots T_1 p}{\sum_{k=1}^{n} T_k \quad T_1 f}$$

Si $0 < \sum_{k=1}^{n} T_k \dots T_1 f < +\infty$ on a nécessairement également $\sum_{k=1}^{n} T_k \dots T_1 p < \infty$

D'où

$$0 < \sum_{k=1}^{n} T_k \dots T_1 f(x) < +\infty \Longrightarrow x \in D$$

Si $x \in C$ on a donc nécessairement $\sum_{k=1}^{n} T_k \dots T_1 f(xp = 0$ ou $+\infty$ et si $x \in D$

Le même théorème ergodique prouve que

$$\sum_{k=1}^{n} T_k \dots T_1 f(x) < +\infty.$$

<u>Proposition 2.</u>

Soit la contraction T_∞ *définie par* $T_\infty f = \lim_n \searrow T_n f \qquad f \in L^1_+$
Soit $g \in L^1$ *et supposons* $g = 0$ *sur* $\complement \{x : \sum_{n=0}^{\infty} T_n \dots T_1 f(x) = +\infty\}$ *alors* $T_\infty g = 0$ *sur cet ensemble.*

<u>Démonstration.</u>

En décomposant $g = g^+ - g^-$ on ramène au cas $g \in L^1_+$.

Posons $f_n = \sum_{k=0}^{n} T_k \; T_{k+1} \dots T_1 f$

$$g_n = g \wedge f_n \quad \text{sur} \quad A = \left[\sum_{n=0}^{\infty} T_n \dots T_1 f(x) = +\infty\right] \quad \text{on a } g_n \nearrow g.$$

En vertu de l'hypothèse $g = 0$ sur $\complement A$ on a $g_n \nearrow g$ sur tout X

$$T_\infty g = \lim_n T_\infty g_n$$

$$T_\infty g_n \leq T_{n+1} g_n \leq T_{n+1} f_n = T_{n+1} f + T_{n+1} T_1 f + \dots + T_{n+1} T_n \dots T_1 f$$

$$\leq T_1 f + T_2 T_1 f + \dots + T_{n+1} \dots T_n T_1 f \leq f_{n+1}$$

D'où $T_\infty g = \lim_n T_\infty g_n \leq \lim_n f_n < +\infty$ par définition sur $\complement A$.

Comme αg possède la même propriété que g

$$T_\infty(\alpha g) < +\infty \text{ pour tout } \alpha \text{ d'où } T_\infty g = 0 \text{ sur } \complement A.$$

BIBLIOGRAPHIE

I. CUCULESCU et C. FOIAS - Czech Math. J. 1966.