MICHEL MÉTIVIER

# Processus à liaisons complètes et processus markoviens associés

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 13, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A13_0>

UNIVERSITE DE RENNES
FACULTE DES SCIENCES

SEMINAIRE DE PROBABILITE

---

# PROCESSUS A LIAISONS COMPLETES ET PROCESSUS MARKOVIENS ASSOCIES

par

Michel METIVIER

Année 1966-1967

PROCESSUS A LIAISONS COMPLETES ET PROCESSUS

MARKOVIENS ASSOCIES

## 1. Systèmes de liaisons complètes.

Définition 1. 1° Un système de liaisons complètes (ou plus brièvement un système de liaisons) $\mathcal{C} = \{(\underline{X},\mathcal{B}),(\underline{Z},\mathfrak{Z}),(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*},T)\}$ est défini par la donnée de :

a - Deux espaces probabilisables : $(\underline{X},\mathcal{B})$ appelé espace de phase, et $(\underline{Z},\mathfrak{Z})$ appelé espace des états.

b - Une famille $(p_n)$ de probabilités de transition : $(z,B) \longrightarrow p_n(z,B)$ de $(\underline{Z},\mathfrak{Z})$ dans $(\underline{X},\mathcal{B})$.

c - Une application mesurable T de $(\underline{Z} \times \underline{X}, \mathfrak{Z} \otimes \mathcal{B})$ dans $(\underline{X},\mathcal{B})$. La fonction T sera appelée fonction de liaison d'ordre 1.

2° Le système est dit homogène s'il existe p telle que $\forall n : p = p_n$.

Définition 2. (Translatés d'un système de liaisons complètes).

On appelle $m^{\text{ième}}$ translaté du système $\mathcal{C}$ le système $\mathcal{C}_m$ :

$$\mathcal{C}_m = \{(\underline{X},\mathcal{B}),(\underline{Z},\mathfrak{Z}),(p_{m+n})_{n \in \mathbb{N}},T\}$$

Un système homogène coïncide évidemment avec tous ses translatés.

Définition 3. (Fonctions de liaison d'ordre multiple).

Soient $(\underline{X}_i,\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces probabilisés isomorphes à $(\underline{X},\mathcal{B})$. Nous noterons $(\underline{X}^{(n)},\mathcal{B}^{(n)})$ l'espace probabilisés $(\prod_{i=1}^{n} \underline{X}_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i)$.

La fonction de liaison $T^{(k)}$ d'ordre k associée au système $\mathcal{T}$ est une application mesurable de $(\underline{Z} \times X^{(k)})$ dans $\underline{Z}$ définie par récurrence sur k de la façon suivante :

$$(1.1) \qquad T^{(1)}(z;x_1) = T(z;x_1)$$

$$(1.2) \qquad T^{(k)}(z;x_1\ldots x_k) = T(T^{(k-1)}(z;x_1\ldots x_{k-1});x_k)$$

Convention de notations.

Nous noterons $x^{(n)}$ toute suite finie $(x_1\ldots x_n) \in \underline{X}^{(n)}$, avec la convention suivante : lorsque dans une même expression figurent les symboles $x^{(n)}$ et $x_i$, $0 \leq i \leq n$, $x_i$ est nécessairement la ième composante de $x^{(n)}$. De même si $k \leq n$ et $x^{(k)}$ et $x^{(n)}$ figurent dans une même expression ceci indiquera expressément que $x^{(k)}$ a pour coordonnées les k premières coordonnées de $x^{(n)}$. C'est ainsi que la formule (1.2) s'écrit avec ces conventions :

$$T^{(k)}(z,x^{(k)}) = T\,(T^{(k-1)}(z;x^{(k-1)});x_k).$$

## 2. Processus associé à un système de liaisons.

Définition 1. (Processus associé).

Si $(\Omega,\mathcal{F},P,(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ est un processus stochastique défini sur l'espace probabilisé fondamental $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ayant $(\underline{X},\mathcal{B})$ pour espace de phase, nous dirons que ce processus est associé au système de liaisons $\mathcal{T}=\{(\underline{X},\mathcal{B}),(\underline{Z},\mathfrak{z}),(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*},T\}$ et d'état initial z si :

$$(2.1) \qquad \forall\ B\in\mathcal{B} \qquad P[X_1 \in B] = p_o(z,B)$$

$$(2.2) \qquad \forall B\in\mathcal{B}\ ,\ n\in\mathbb{N}^* \quad P[X_n \in B \mid X_1..X_{n-1}] = \\ = p_{n-1}(T^{(n-1)}(z;X_1..X_{n-1}),B) \quad \text{P.p.s}$$

Proposition 1. (Le système projectif associé à un système de liaisons).

*1) Si pour tout* $z \in \underline{Z}$ *et tout* $m \in \mathbb{N}$ *nous définissons la probabilité* $P^{(n)}_{m,z}$ *sur* $(\underline{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$ *au moyen des intégrales itérées :*

(2.3) $\forall B^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}$ :

$$P^{(n)}_{m,z}(B^{(n)}) = \int p_m(z,dx_1) \int p_{m+1}(T^{(1)}(z;x_1);dx_2) \int \dots$$
$$\dots \int p_{m+n-1}(T^{(n-1)}(z;x^{(n-1)});dx_n) 1_{B^{(n)}}(x^{(n)})$$

*Le système* $(\underline{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}, P^{(n)}_{m,z})$ *est un système projectif d'espaces probabilisés dont la limite projective existe et est désignée par* $(\underline{X}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}^*}, \tilde{P}_{m,z})$

*2)* $(\tilde{P}_{m,z})_{z \in \underline{Z}}$ *est une diffusion de* $(\underline{Z}, \mathfrak{z})$ *dans* $(\underline{X}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}^*})$.

*3) Pour qu'un processus* $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ *soit associé au système de liaisons* $\mathcal{E} = \{(\underline{X}, \mathcal{B}), (\underline{Z}, \mathfrak{z}), (p_n)_{n \in \mathbb{N}}, T\}$, *avec z pour état initial, il faut et il suffit que le système projectif des probabilités conjointes finies associée au processus et le système projectif* $(\underline{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}, P^{(n)}_{o,z})$ *associé à* $\mathcal{E}$ *coïncident.*

Démonstration. 1°) C'est une conséquence triviale du théorème de Ionescu-Tulcea.

2°) Puisque les $(p_n)$ sont des probabilités de transition, pour toute fonction f mesurable sur $(\underline{X}, \mathcal{B})$ et tout entier **r**, l'application $z' \rightsquigarrow \int p_r(z',dx) f(x)$ est mesurable sur $(\underline{Z}, z)$. En vertu de la mesurabilité de $T^{(k)}$ l'application : $(z, x^{(k)}) \rightsquigarrow \int p_{m+k}(T^k(z;x^{(k)});d\underline{x}_{k+1}) f(x_{k+1})$ est mesurable sur $(\underline{Z} \times \underline{X}^{(k)}, \mathfrak{z} \otimes \mathcal{B}^{(k)})$. La formule (2.3) montre alors, en raisonnant par récurrence sur $k = 1 \dots n$, que pour tout $B^{(n)}$ de la forme :

$B^{(n)} = B_1 \times \ldots \times B_n$ l'application $z \rightsquigarrow P^{(n)}_{m,z}(B_1 \times \ldots \times B_n)$ est $\mathfrak{z}$-mesurable. Le fait qu'elle soit mesurable pour tout $B^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}$ résulte alors immédiatement d'un principe classique de prolongement par mesurabilité

3°) Si le processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ est associée au système de liaisons $\{T, (p_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$, avec z pour état initial, la condition (2.2) exprime que $p_{n-1}(T^{(n-1)}(z; X_1 \ldots X_{n-1}); B)$ est une version régulière de la probabilité conditionnelle $P[X_n \in B \mid X_1 \ldots X_{n-1}]$. On en déduit immédiatement que la distribution conjointe $P^{(n)}$ des variables aléatoires $X_1 \ldots X_n$ est donnée par la formule (2.3) avec $m = 0$.

Réciproquement, supposons que $P^{(n)} = P^{(n)}_{o,z}$ pour tout n. Alors :

$$P[X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n] = \int_{B_1} p_o(z, dx_1) \int_{B_2} \ldots \int_{B_n} p_{n-1}(T^{(n-1)}(z, x^{(n-1)}); dx_n)$$

soit encore, en vertu de (2.3) et $P^{(n-1)} = P^{(n-1)}_{o,z}$ :

$$\forall\, B_1 \times \ldots \times B_n \in \mathcal{B}^{(n)} : \quad P[X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n] =$$

$$\int_{B_1 \times \ldots \times B_{n-1}} P^{(n-1)}(dx_1 \times \ldots \times dx_{n-1})\, p_{n-1}(T^{(n-1}(z; x^{(n-1)}); B_n)$$

Cette égalité exprime précisément que :

$$P[X_n \in B_n \mid X_1 \ldots X_{n-1}] = p_{n-1}\,(T^{(n-1)}(z, X^{n-1}); B_n) \qquad P\text{-p.s.}$$

D'où (2.2). Comme (2.1) résulte de (2.3) pour n = 1, la proposition est démontrée.

<u>Corollaire.</u>

*$\mathcal{C} = \{(\underline{X}, \mathcal{B}), (\underline{Z}, \mathfrak{z}), (p_n)_{n \in \mathbb{N}}, T\}$ étant un système de liaisons, $\forall\, z \in \underline{Z}$ il existe un processus stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}_{o,z}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ unique à une équivalence près, associé à $\mathcal{C}$ et d'état initial z.*

Définition 5. (Système de liaisons équivalents).

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dit équivalents si le processus stochastique canonique associé à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont identiques.

Exemples.

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de probabilités de transitions de $(\underline{X},\mathcal{B})$ dans $(\underline{X},\mathcal{B})$. Soit $T : (\underline{X},\underline{X}) \longrightarrow \underline{X}$ définie par $T(x,y) = y$. Considérons le système de liaisons $\mathcal{C} = \{(\underline{X},\mathcal{B}),(\underline{X},\mathcal{B}),(p_n),T\}$. Il est évident que, si l'on considère le processus de Markov canonique issu de z $(\Omega,\mathcal{F},P_z,(X_n)_{x \in \mathbb{N}})$ défini par la famille $(p_n)$ de transitions ($p_n$ transition entre les instants n et n+1), et issu de z, le processus associé à $\mathcal{C}$ n'est autre que $(\Omega,\mathcal{F},P_z,(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$. Si $\mathcal{C}$ est homogène le processus est homogène.

## 3. Processus des états d'un système de liaisons.

Théorème 1.

*Soit un système de liaisons* $\mathcal{C} = \{(\underline{X},\mathcal{B}),(\underline{Z},\mathfrak{z}),(p_n)_{n \in \mathbb{N}},T\}$. *Il existe* $(\Omega,\mathcal{F})$, *un processus de Markov* $(\Omega,\mathcal{F},(P_{n,z}),(\mathcal{F}_n),(\theta_n),(Z_n)_{n \in \mathbb{N}},z \in \underline{Z})$ *à valeurs dans* $(\underline{Z},\mathfrak{z})$, *une fonction aléatoire* $(\Omega,\mathcal{F},(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$, *à valeurs dans* $(\underline{X},\mathcal{B})$, *tels que pour tout* $z \in \underline{Z}$ *le processus* $(\Omega,\mathcal{F},P_{o,z},(X_n),n \in \mathbb{N}^*)$ *soit associé à* $\mathcal{C}$, *d'état initial* z, *les deux processus* $X_n$ *et* $Z_n$ *étant reliés par :*

$$(3.1) \qquad Z_n = T^{(n)}(z;X_1 \dots X_n) \qquad P_{o,z}\text{-p.s.}$$

Démonstration : Posons, pour simplifier l'écriture, $\tilde{\Omega} = \underline{X}^{\mathbb{N}^*}$. $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}^{\mathbb{N}^*}$ et considérons pour tout m le processus canonique associé à

$\mathscr{C}_m$ : $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},\tilde{P}_{m,z},(\tilde{X}_n),n \in \mathbb{N}^*)$ d'état initial z. Posons :

(3.2) $\qquad \Omega = \tilde{\Omega} \times \underline{Z} \qquad \mathscr{F} = \tilde{\mathscr{F}} \otimes \mathfrak{z}$

(3.3) $\qquad \forall \omega = (\tilde{\omega},z) \in \Omega \qquad Z_n(\omega) = T^{(n)}(z;\tilde{X}^{(n)}(\tilde{\omega}))$

(cf. la convention de notations en 1.1)

(3.4) $\qquad \forall m \in \mathbb{N} \quad z \in \underline{Z} \qquad P_{m,z} = \tilde{P}_{m,z} \otimes \varepsilon_z$

(3.5) $\forall n \in \mathbb{N}$ , $\omega = (\tilde{\omega},z) \in \Omega$ et $\tilde{\theta}_n$ désignant l'opérateur de translation canonique sur $\tilde{\Omega}$ :

$$\theta_n(\omega) = (T_1^{(n)}(z;\tilde{X}_1(\tilde{\omega}),\ldots,\tilde{X}_n(\tilde{\omega})),\tilde{\theta}_n(\tilde{\omega})).$$

(3.6) $\qquad X_n(\tilde{\omega},z) = \tilde{X}_n(\tilde{\omega})$ et $\mathscr{F}_n$ tribu engendrée par $X_1,\ldots,X_n,Z_1\ldots Z_n$.

Les relations (3.2) à (3.6) définissent le terme $(\Omega,\mathscr{F},(P_{n,z}),(\theta_n),(Z_n)\ n \in \mathbb{N}\ ,\ z \in \underline{Z})$ ainsi que le processus $(\Omega,\mathscr{F},P_{o,z},(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$, vérifiant (3.1) en vertu de (3.3), (3.4) et (3.6). Nous allons montrer maintenant que le premier de ces termes est un processus de Markov.

Montrons d'abord que pour tout n $(P_{n,z})_{z \in \underline{Z}}$ est une diffusion de $(\underline{Z},\mathfrak{z})$ dans $(\Omega,\mathscr{F})$. Pour tout $F = \tilde{F} \times \Gamma$, avec $\tilde{F} \in \tilde{\mathscr{F}}$ et $\Gamma \in \mathfrak{z}$ on a d'après (3.4) :

$$P_{n,z}(F) = 1_\Gamma(z) \cdot \tilde{P}_{n,z}(\tilde{F}).$$

D'où la mesurabilité de l'application $z \rightsquigarrow P_{n,z}(\tilde{F} \times \Gamma)$ pour tout $\tilde{F} \in \tilde{\mathscr{F}}$ et $\Gamma \in z$ (d'après la proposition 1, 2°). Le principe de prolongement par mesurabilité déjà utilisé prouve que $z \rightsquigarrow P_{n,z}(F)$ est mesurable pour tout $F \in \tilde{\mathscr{F}} \otimes \mathfrak{z}$.

Montrons maintenant que les $\theta_n$ sont bien des opérateurs de translation de la fonction aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, (Z_n)_{n \in \mathbb{N}})$. On a pour tout $\omega = (\tilde{\omega}, z)$ ; d'après (3.3) et (3.5) (avec $\omega = (\tilde{\omega}, \mathfrak{z})$) :

$$\begin{aligned} Z_n(\theta_m(\omega)) &= T^{(n)}(T^{(m)}(z;\tilde{X}_1(\tilde{\omega}),\ldots\tilde{X}_m(\tilde{\omega}));\tilde{X}^{(n)} \circ \tilde{\theta}_m(\tilde{\omega})) \\ &= T^{(n)}(T^{(m)}(z;\tilde{X}_1(\tilde{\omega}),\ldots\tilde{X}_m(\tilde{\omega}),\ldots\tilde{X}_{m+1}(\tilde{\omega}),\ldots\tilde{X}_{m+n}(\tilde{\omega})) \\ &= T^{(n+m)}(z;\tilde{X}_1(\tilde{\omega}),\ldots,\tilde{X}_{m+n}(\tilde{\omega})) = Z_{n+m}(\omega). \end{aligned}$$

Pour montrer maintenant que $(\Omega, \mathcal{F}, (P_{n,z}), (\mathcal{F}_n), (\theta_n), (Z_n), n \in \mathbb{N}, z \in \underline{Z})$ est un processus de Markov, nous prouvons que pour tout $z \in \underline{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi$ $\mathfrak{Z}$-mesurable :

$$(3.7) \qquad E_{o,z}(\varphi \circ Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E_{n,Z_n}(\varphi \circ Z_1)$$

Pour tout $A_i \in \mathcal{B}$ et $\Gamma \in \mathfrak{Z}$ $[\tilde{X}_1 \in A_1, \ldots, \tilde{X}_n \in A_n] \times \Gamma \in \mathcal{F}_n$, calculons, en remarquant que $P_{o,z}$ est portée par $\tilde{\Omega} \times \{z\}$ et utilisant (3.3):

$$\begin{aligned} &\int_{[\tilde{X}_1 \in A_1,\ldots,\tilde{X}_n \in A_n] \times \Gamma} \varphi \circ Z_{n+1} \, dP_{o,z} = \\ &\qquad = \varepsilon_z(\Gamma) \int_{[\tilde{X}_1 \in A_1,\ldots\tilde{X}_n \in A_n]} \varphi \circ T^{(n+1)}(z;\tilde{X}^{(n+1)}) \, d\tilde{P}_{o,z} \\ &\qquad = \varepsilon_z(\Gamma) \int_{A_1 \times \ldots \times A_n} \varphi \circ T^{(n+1)}(z;x^{(n+1)}) P^{(n+1)}_{o,z}(dx_1,\ldots dx_{n+1}) \end{aligned}$$

Comme en vertu de la définition du système projectif $(P^{(n)}_{o,z})_{n \in \mathbb{N}}$ (cf. en 2 ci-dessus), pour toute fonction $\Phi$ sur $\underline{X}^{(n+1)}$, $\mathcal{B}^{(n+1)}$-mesurable on a :

$$\begin{aligned} &\int \Phi(x^{(n+1)}) \, P^{(n+1)}_{o,z}(dx_1,\ldots,dx_{n+1}) = \\ &\qquad = \int P^{(n)}_{o,z}(dx_1 \times \ldots \times dx_n) \int p_n(T^{(n)}(z;x^{(n)}), dx_{n+1}) \, \Phi(x^{(n+1)}) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\int_{[\tilde{X}_1 \in A_1 \ldots \tilde{X}_n \in A_n] \times \Gamma} \varphi \circ Z_{n+1} \, dP_{o,z} =$$

$$\varepsilon_z(\Gamma) \int_{A_1 \times \ldots \times A_n} P^{(n)}_{o,z} (dx_1 \times \ldots \times dx_n) \int p_n(T^{(n)}(z;x^{(n)});dx_{n+1}) \varphi_o T^{(n+1)}(z;x^{(n+1)})$$

Si donc nous posons :

$$\Psi(z,x^{(n)}) = \int p_n(T^n(z,x^{(n)};dx_{n+1}) \ \varphi \circ T^{(n+1)}(z;x^{(n+1)})$$

$$= \int p_n \ (T^n(z,x^{(n)});dx_{n+1}) \ \varphi \circ T^1(T^n(z;x^{(n)});x_{n+1})$$

compte tenu de la relation suivante, conséquence immédiate de (2.3), (3.3) et (3.4)

$$E_{n,z'}(\varphi_o Z_1) = \int p_n(z',dx_1) \ \varphi \circ T^1(z',x_1)$$

nous avons

$$\Psi(z,x^{(n)}) = E_{n,T^{(n)}(z;x^{(n)})}(\varphi(Z_1))$$

soit

$$\int_{[\tilde{X}_1 \in A_1,\ldots\tilde{X}_n \in A_n]\times\Gamma} \varphi \circ Z_{n+1} \, dP_{o,z} =$$

$$\varepsilon(\Gamma) \int_{A_1 \times \ldots \times A_n} P^{(n)}_{o,z} (dx_1 \ldots dx_n) \ E_{n,T^{(n)}(z;x^{(n)})} (\varphi_o Z_1)$$

ce qui compte tenu de (3.4) s'écrit :

$$\int_{[\tilde{X}_1 \in A_1,\ldots\tilde{X}_n \in A_n]} \varphi \circ Z_{n+1} \, dP_{o,z} =$$

$$\int_{[\tilde{X}_1 \in A_1,\ldots\tilde{X}_n \in A_n]\times\Gamma} E_{n,Z_n(\omega)}(\varphi_o Z_1) \ P_{o,z}(d\omega)$$

Cette égalité exprime précisément que

$$E_{o,z}(\varphi_o Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E_{n,Z_n} (\varphi_o Z_1)$$

soit la propriété de Markov.

Corollaire.

*Lorsque le système de liaison $\mathscr{C}$ est homogène, le processus de Markov* $(\Omega,\mathscr{F},(P_{n,z}),(\Theta_n),(Z_n))$ *est homogène (i.e. :* $P_{n,z} = P_{o,z}$ , $\forall$ n et z).

## 4. Un problème ergodique pour les systèmes homogènes.

Un problème limite naturel pour un processus stochastique est de savoir si les distributions de dimension finie des variables $(X_n,\ldots X_{n+m})$ "convergent" vers une distribution limite lorsque n tends vers l'infini.

Posons pour tout $B^{(\ell)} \in \bigotimes_{i=1}^{\ell} \mathscr{B}_i$ :

$$p_\ell^{(n)}(z,B^{(\ell)}) = P_{o;z}[(X_{n+1}\ldots X_{n+\ell}) \in B^{(\ell)}]$$

Le problème précédent se formule : la limite $\lim\limits_{n\to\infty} p^{(n)}(z,B^{(\ell)})$ existe-t-elle pour tout $\ell$ et tout $B^{(\ell)} \in \mathscr{B}^{(\ell)}$.

Si nous considérons uniquement le cas d'une chaine homogène et si nous désignons par $\tau$ la fonction de transition du processus de Markov associé, $\tau(z,\Gamma) = P_{o,z}\,[Z_1 \in \Gamma] = P^{(1)}_{o,z}\,[T(z,X_1) \in \Gamma]$ soit :

$$\tau(z,\Gamma) = \int 1_\Gamma\,(T(z;x))\,p(z,dx) \tag{4.1}$$

l'opérateur associé à cette fonction de transition, opérant sur les fonctions mesurables bornés sur $(Z,\mathfrak{Z})$ : $\varphi \rightsquigarrow \tau\varphi$ est défini par :

$$\tau\varphi(z) = \int \tau(z,dz')\,\varphi(z') \tag{4.2}$$

On voit facilement que si $F \in \mathscr{F}_n$ (tribu engendrée par $Z_1\ldots Z_n$) et si on pose $\varphi_F(z) = P_{o,z}(F)$ :

$$P_{o,z}\,[\Theta_n^{-1}(F)] = \tau^n\,\varphi_F(z) \tag{4.3}$$

et dans le cas particulier où $F = [(X_1,\dots X\ )] \in B^{(\ell)}$ soit :

$$\varphi_F(z) = p_\ell^{(o)}(z,B^{(\ell)}) \quad \text{et donc} \quad p_\ell^{(n)}(z,B^{(\ell)}) = \tau^n\, \varphi_F(z),$$

le problème limite que nous avons posé plus haut apparait donc à certains égards comme un cas particulier du problème suivant : dans quelles conditions la limite $\lim\limits_{n \to \infty} \tau^n\, \varphi(z)$ existe-t-elle ?

Il s'agit d'un problème ergodique fort typique. Il y a des résultats généraux allant dans ce sens (voir par exemple : J. Neveu [6], Doeblin [1] et [2]).

---

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE.


[1] DOEBLIN - Thèse Bucarest.

[2] DOEBLIN et FORTET - Sur les chaînes à liaisons complètes. Bull. Soc. Math. France, LXV (1937), 132-148.

[3] IOSIFESCU - Systèmes aléatoires à liaisons complètes à un ensemble quelconque d'états. Revue Math. Pures et Appl. Acad. R.P.R. 1963, 8, 611-645, 9, 91-92 (en Russe).

[4] IOSIFESCU - Sur l'ergodicité uniforme des systèmes aléatoires homogènes à liaisons complètes à un ensemble quelconque d'é d'états. Bull. Math. de la soc. Math. Phys. de la R.P.R. Tome 7 (55), n° 3-4, 1963.

[5] IOSIFESCU - Quelques propriétés asymptotiques des systèmes aléatoires homogènes à liaisons complètes. Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées. Tome X n° 5, 1965.

[6] NEVEU - Bases mathématiques du calcul des Probabilités. Masson.

[7] THEODORESCU - Une propriété limite pour les chaînes à liaisons complètes. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 259 (21 sept. 1964).


---