MICHEL MÉTIVIER

Fonctionnelles aléatoires et processus généralisés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 12, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A12_0>

FONCTIONNELLES ALEATOIRES ET PROCESSUS GENERALISES.

Par Michel METIVIER

Dans la suite $\mathcal{M}(\Omega.\mathcal{F})$ désignera l'espace des fonctions réelles $\mathcal{F}$-mesurables finies définies sur Ω, et $M(\Omega,\mathcal{F},P)$ l'espace quotient de $\mathcal{M}$ par le sous espace des fonctions P-négligeables.

En outre S^* désignera toujours le dual algébrique de l'espace vectoriel S.

1. - Fonctionnelles aléatoires et processus généralisés.

1.1 - Fonctionnelle. linéaire aléatoire, définie sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ à valeurs dans S'.

Définition 1.

Soit $S' \subset S^*$, on appellera Fonct. Lin. Aléa. définie sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ à valeurs dans S' toute application $\omega \rightsquigarrow \mathcal{L}(\omega) \in S'$ de Ω dans S' telle que $\forall\ x \in S$, l'application $\omega \rightsquigarrow \langle x,\mathcal{L}(\omega)\rangle$ notée $\langle x, \mathcal{L}(.)\rangle$ soit un élément de $\mathcal{M}(\Omega.\mathcal{F})$.

Définition 2.

On dira que la fonctionnelle $\mathcal{L}_1$ est une modification de $\mathcal{L}$, si $\forall\ x \in S \quad \langle x, \mathcal{L}(\omega)\rangle = \langle x, \mathcal{L}_1(\omega)\rangle$ P.S.

1.2 - Processus généralisé.

Définition 3.

On appellera processus généralisé sur S, base sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ toute application linéaire L de S dans $M(\Omega,\mathcal{F},P)$

Il convient de noter que , si $\varphi_1, \dots \varphi_n \in S$, quel que soit le représentant $X_1 \dots X_n$ choisi dans chaque classe $L(\varphi_1) \dots L(\varphi_n)$, la distribution conjointe des variables aléatoires $X_1 \dots X_n$ est la même. Cette distribution conjointe sera désormais appelée distribution conjointe de $L(\varphi_1) \dots L(\varphi_n)$.

Définition 4.

Deux processus L et L' basés sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ et $(\Omega',\mathcal{F}',P')$ respectivement sont dits équivalents si : $\forall \varphi_1 \dots \varphi_n \in S$ les systèmes $(L(\varphi_1) \dots L(\varphi_n))$ et $(L'(\varphi_1) \dots L'(\varphi_n))$ ont même distribution conjointe.

Proposition 1.

A toute fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}$ correspond de façon unique un processus généralisé sur S par :

$$\forall \varphi \in S \qquad L(\varphi) = \widetilde{<\varphi, \mathcal{L}(.)>} \qquad (*)$$

1.3 - Fonctionnelle linéaire aléatoire canonique.

Soit sur S' la tribu $\mathcal{C}'$ engendrée par les cylindres :

$\{ f' : <\varphi , f' > \in B \}$ où B est un Borelien de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in S$.

On peut évidemment parler de la mesure P' image de P par $\mathcal{L}$.

Considérons la fonctionnelle linéaire aléatoire $\mathcal{L}_c$ définie sur $(S',\mathcal{C}',P')$ par :

(1.3.1) $\qquad \mathcal{L}_c(f') = f'$.

Définition 5.

La fonctionnelle aléatoire $\mathcal{L}_c$ definie sur $(S',\mathcal{C}',P')$ par

(*) $\tilde{f}$ *désigne la classe d'équivalence dans* $M(\Omega,\mathcal{F},P)$ *de* $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$.

(1.3.1), à valeurs dans S', est appelee fonctionnelle linéaire aléatoire canonique associée à $\mathcal{L}$.

Proposition 2.

Deux fonctionnelles aléatoires $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, à valeurs dans S' ont même fonctionnelle aléatoire canonique associée, si et seulement si les processus généralisés L_1 et L_2 sont équivalents.

Demonstration :

Evidente en vertu de :

$$P\left[(L_i(\varphi_1), \ldots, L_i(\varphi_n)) \in B_1 \times \ldots \times B_n\right] =$$

$$= P\left[(<\varphi_1, \mathcal{L}_i(.)>, \ldots <\varphi_n, \mathcal{L}_i(.)>) \in B_1 x \ldots x B_n\right]$$

$$= P'_i \{ f' : (<\varphi_1, f'>, \ldots <\varphi_n, f'>) \in B_1 x \ldots B_n \}$$

P'_i désignant la mesure image de P par $\mathcal{L}_i$ sur $(S', \mathcal{B}')$.

1.4 - Les mesures $\mu^L_{(\varphi_1 \ldots \varphi_n)}$ et le système projectif $(S^*_{/VO}, P^L_V)$ de probabilités.

Dans la suite on notera $\mu^L_{(\varphi_1 \ldots \varphi_n)}$ la répartition conjointe de $(L(\varphi_1) \ldots L(\varphi_n))$, (ou plus brièvement $\mu_{(\varphi_1 \ldots \varphi_n)}$ si L est clair et aucune ambiguité possible).

Soit S^* le dual algébrique de S.

Pour tout système fini $\alpha = (\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ extrait de S, on notera

$\mathcal{E}_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$ le sous espace de S engendré par $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$, par $(\mathcal{E}_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)})^\circ$ son polaire dans S^*, et par $\Psi_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$ l'application de S^* dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\Psi_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}(f) = (<\varphi_i, f>)_{i=1 \dots n}$$

L'image de S^* par $\Psi_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$ sera notée $S^*_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$.

Nous avons la décomposition algébrique canonique :

$$S^* \xrightarrow{\Pi_\alpha} S^*/(\mathcal{E}_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)})^\circ \xrightarrow{I_{\varphi_1 \dots \varphi_n}} S^*_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)} \subset \mathbb{R}^n$$

la projection canonique Π_α ne dépendant que du sous espace V de S engendré par les $\varphi_1 \dots \varphi_n$, à la différence de l'isomorphisme canonique $I_{\varphi_1 \dots \varphi_n}$.

Nous allons montrer successivement que $\mu^L_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$ est portée par $S^*_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$ dans $\mathbb{R}^n$ et que si l'on considère alors la mesure sur $S^*/(\mathcal{E}_{\varphi_1 \dots \varphi_n})^\circ$ transportée de $\mu^L_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$ par l'isomorphisme canonique $I_{\varphi_1 \dots \varphi_n}$, cette mesure ne dépend que du sous espace V engendré par $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ dans S.

Nous utiliserons d'abord le :

Lemme 1.

Pour tout sous espace de dimension finie V de S il est possible de choisir un représentant $\mathcal{L}_V \varphi$ dans chaque classe d'équivalence $L(\varphi)$, $\varphi \in V$ de telle sorte que $\forall\ \omega \in \Omega$ l'application $\varphi \rightsquigarrow \mathcal{L}_V \varphi(\omega)$ soit linéaire.

Démonstration :

Soit $(\varphi_1 \ldots \varphi_r)$ une base de V. Choisissons de façon arbitraire $\mathcal{L}_V \varphi$ dans chaque classe $L\varphi$ pour tous les φ qui sont combinaisons linéaires à coefficients rationnels de $\varphi_1 \ldots \varphi_r$. Comme l'ensemble D de ces φ est un ensemble dénombrable, à l'exception d'un ensemble de probabilité nulle $\Omega_0 \subset \Omega$, pour tout $\varphi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi_i \in D$ on a, en vertu de la linéarité de L :

$$\mathcal{L}_V \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathcal{L}_V \varphi_i(\omega).$$

Modifions $\mathcal{L}_V \varphi$ sur Ω_0 en posant par exemple $\mathcal{L}_V \varphi(\omega) = 0$ $\forall\ \omega \in \Omega_0$. Nous voyons alors que :

$\forall\ \omega \in \Omega$ $\qquad \varphi \dashrightarrow \mathcal{L}_V \varphi(\omega)$ est lineaire sur D, et continue pour la topologie induite sur D par $\mathbb{R}^n$. Elle se prolonge donc de façon unique en une forme linéaire (necessairement continue) sur V, que nous notons $\mathcal{L}_V \varphi(\omega)$. Si (φ_n) est une suite extraite de D telle que $\varphi = \lim_n \varphi_n$ on a pour tout ω $\mathcal{L}_V \varphi(\omega) = \lim_n \mathcal{L}_V \varphi_n(\omega)$. D'où la mesurabilité de $\mathcal{L}_V \varphi$ pour tout $\varphi \in S$.

Par ailleurs si $\varphi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi_i$ les λ_i étant quelconques, pour tout représentant $\mathcal{L}\varphi$ de $L\varphi$ on a, en vertu de la linéarité de L :

$$\mathcal{L}\varphi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathcal{L}_V \varphi_i = \mathcal{L}_V \varphi \text{. P.S.}$$

Ceci prouve que $\mathcal{L}_V\varphi$ est un élément de la classe $L\varphi$. D'où le lemme 1. Dans ce qui suit nous appellerons $\mathcal{L}_V$ un relèvement de L associé au sous espace V.

Lemme 2.

Pour tout système fini $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ *extrait de* S *(libre ou non), la mesure* $\mu^L_{(\varphi_1\ldots\varphi_n)}$ *est portée par* $S^*_{\varphi_1\ldots\varphi_n}$ *dans* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration :

Soit en effet $\mathcal{L}_V$ un relèvement de L associé au sous espace V engendré par $\{\varphi_1 \ldots \varphi_n\}$ dans S. La mesure $\mu^L_{(\varphi_1\ldots\varphi_n)}$ est la mesure image de P par l'application $\omega \dashrightarrow \mathcal{L}_V(\omega)$, $\mathcal{L}_V(\omega)$ étant la forme linéaire sur V identifiée à l'élément $(<\varphi_i, \mathcal{L}_V(\omega)>)_{i=1\ldots n}$ de $\mathbb{R}^n$. Or toute forme linéaire sur V se prolongeant en une forme linéaire f sur S, et $S^{\lambda}_{\varphi_1\ldots\varphi_n}$ étant l'ensemble des éléments de la forme $(<\varphi_i, f>)_{i=1\ldots n}$ où f est une forme linéaire sur S, on a $\mathcal{L}_V(\omega) \in S^*_{\varphi_1\ldots\varphi_n}$ pour tout ω.

D'où le lemme 2.

Théorème 1.

Soit V *le sous espace de* S *engendré par* $\{\varphi_1 \ldots \varphi_n\}$. *Soit* P^L_V *la mesure sur* S^*/V^o *transportée de* $\mu^L_{(\varphi_1\ldots\varphi_n)}$ *par l'isomorphisme* *canonique* $S^*_{/V^o} \xrightarrow{I_{\varphi_1 \dots \varphi_n}} S^*_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$. *La mesure* P_V^L *est indépendante du système de générateurs* $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ *de* V *considéré. En outre* $(S^*_{/V^o}, \mathcal{B}^*_V, P_V^L)$ *est un système projectif, indexé par l'ensemble filtrant à droite pour* $\subset$ *des sous espaces de dimension finie de* V *, de mesures de Borel régulières.*

Démonstration :

$$\begin{tikzcd}
 & S^* \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
V_2^* \approx S^*_{/V_2^o} \arrow[rr, "I_{\varphi'_1 \dots \varphi'_m}"] \arrow[d, "H_{V_1 V_2}"'] & & S^*_{\varphi'_1 \dots \varphi'_m} \in \mathbb{R}^m \arrow[d, "H^{\varphi'_1 \dots \varphi'_m}_{\varphi_1 \dots \varphi_n}"] \\
V_1^* \approx S^*_{/V_1^o} \arrow[rr, "I_{\varphi_1 \dots \varphi_n}"] & & S^*_{\varphi_1 \dots \varphi_n} \in \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Supposons V_2 engendré par $\{\varphi'_1 \dots \varphi'_m\}$ (non nécessairement libre) et V_1 engendré par $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ (non nécessairement libre également), avec $V_1 \subset V_2$. On a le diagramme canonique commutatif ci-dessus.

Nous voyons par conséquent que si $x = (<\varphi'_i, f>)_{i=1\dots n} \in S^*_{\varphi'_1 \dots \varphi'_m}$ on a : $H^{\varphi'_1 \dots \varphi'_m}_{\varphi_1 \dots \varphi_n}(x) = (<\varphi_i, f>)_{i=1\dots m}$

Soit alors $\mathcal{L}_{V_1+V_2}$ un relèvement de L relatif au sous espace V engendré par $\{\varphi'_1 \dots \varphi'_m, \varphi_1 \dots \varphi_n\}$. Si on désigne par $\mathcal{L}^1_V$ (resp $\mathcal{L}^2_V$)

$$\begin{tikzcd}
S^*_{\varphi'_1\cdots\varphi'_m} \arrow[d, "H^{\varphi'_1\cdots\varphi'_m}_{\varphi_1\cdots\varphi_m}"'] & & \Omega \arrow[ll, "\mathcal{L}^1_V"'] \arrow[dll, "\mathcal{L}^2_V"] \\
S^*_{\varphi_1\cdots\varphi_n} & &
\end{tikzcd}$$

l'application :

$$\omega \rightsquigarrow (<\varphi'_i, \mathcal{L}_V(\omega)>)_{i=1\ldots m}$$

(resp. l'application :

$$\omega \rightsquigarrow (<\varphi_i, \mathcal{L}_V(\omega)>)_{i=1\ldots n})$$

on sait d'après le lemme 2 et sa démonstration, que $\mathcal{L}^1_V(\Omega) \subset S^*_{\varphi'_1\cdots\varphi'_m}$ et $\mathcal{L}^2_V(\Omega) \subset S^*_{\varphi_1\cdots\varphi_m}$. En outre de la définition de $\mathcal{L}^1_V$ et $\mathcal{L}^2_V$ et de la propriété énoncée ci-dessus pour $H^{\varphi'_1\cdots\varphi'_m}_{\varphi_1\cdots\varphi_n}$, il résulte que :

$$\mathcal{L}^2_V = H^{\varphi'_1\cdots\varphi'_m}_{\varphi_1\cdots\varphi_n} \circ \mathcal{L}^1_V .$$

La mesure $\mu^L_{\varphi_1\cdots\varphi_n}$, image de P par $\mathcal{L}^2_V$ est donc image de $\mu^L_{\varphi'_1\cdots\varphi'_m}$ par $H^{\varphi'_1\cdots\varphi'_m}_{\varphi_1\cdots\varphi_n}$.

Enfin si l'on a V engendré à la fois par $\{\varphi_1\cdots\varphi_n\}$ et $\{\varphi'_1\cdots\varphi'_m\}$ le diagramme ci-dessus s'écrit :

$$\begin{tikzcd}
 & S^* \arrow[dr] & \\
V^* \simeq S^*_{/V^\circ} \arrow[ur, dash] \arrow[rr, "I_{\varphi'_1\cdots\varphi'_m}"] \arrow[dr, dash, "I_{\varphi_1\cdots\varphi_n}"'] & & S^*_{\varphi'_1\cdots\varphi'_m} \arrow[dl, shift left] \\
 & S^*_{\varphi_1\cdots\varphi_n} \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

Ce qui prouve que la mesure P_V^L est independante du système de générateurs (libre ou non) considéré pour $\widetilde{V}$. D'ou le théorème.

Théorème 2.

1° *Un processus généralisé* L *défini sur* S *est associé de façon unique, à une équivalence près, à tout système projectif d'espace probabilisés* ($S_{/V^o}$, $\mathcal{B}_{V^*}$, P_V , $H_{V_1V_2}$).

2° *Ce système projectif définit de façon unique une fonctionnelle aléatoire **canonique** à valeurs dans* S^* *admettant pour processus généralisé associé un processus équivalent à* L.

Démonstration :

D'après le théorème précédent, à tout processus généralisé correspond un système projectif (V^*, $\mathcal{B}_{V^*}$, P_V^L, $H_{V_1V_2}$) unique.

Reciproquement, donnons nous un système projectif (V^*, $\mathcal{B}_{V^*}$, P_V , $H_{V_1V_2}$) avec $V^* \approx S_{/V^o}$, V décrivant l'ensemble des sous espaces de dimension finie de S. Remarquons d'abord que $\varprojlim (V^*, H_{V_1V_2})$ s'identifie à S^*. En effet, se donner une famille (x_V) telle que $\forall$ $V_1 \subset V_2$ on ait $x_{V_1} = H_{V_1V_2}(x_{V_2})$ revient à se donner un système compatible de formes linéaires sur tous les sous espaces vectoriels de dimension finie de S, donc une forme linéaire sur S. Réciproquement tout élément de S^* définit trivialement un élément (x_V) de la limite projective. (Cf le premier diagramme de la démonstration du th. 1). De même, si (V_n) est une suite croissante de sous espaces de dimension finie de S et si (x_n) est une suite telle que : $x_n \in V_n^*$ et

$\Pi_{V_n V_{n+1}}(x_{n+1}) = x_n$ pour tout n, il lui correspond de façon unique une forme linéaire sur le sous espace vectoriel $\bigcup_n V_n$, soit f' telle que $\forall n \quad x_n$ s'identifie à la restriction de f à V_n, et par consequent il existe $f \in S^*$ telle que x_n = projection canonique de f sur $S^*_{/V_n^o} \approx V_n^*$.

Autrement dit la condition de "séquentiel maximality" du théorème de Bochner (cf Bochner - Harmonic Analysis and the theory of probabilities Chap. V) est vérifiée. Il existe donc une mesure P^* limite projective des mesures P_V, définie sur la plus petite tribu $\mathcal{C}^*$ de S^* rendant mesurables les applications canoniques $S^* \longrightarrow S^*_{/V_n^o}$, c'est a dire la tribu engendrée par les cylindres de la forme :

$\{f : f \in S^*, \exists \varphi_1 \ldots \varphi_n \in S$ et B borélien de $\mathbb{R}^n$, $(<\varphi_i, f>)_{i=1\ldots n} \in B\}$.

Le système projectif $(V^*, \mathcal{B}_{V^*}, P_V, \Pi_{V_1 V_2})$ définit donc une fonctionnelle linéaire canonique sur S^* unique.

Considérons ainsi, la fonctionnelle linéaire aléatoire canonique unique sur S^* associée à $(V^*, \mathcal{B}_{V^*}, P_V^L, \Pi_{V_1 V_2})$ L étant un processus généralisé quelconque sur S. Pour tout système $\{\varphi_1 \ldots \varphi_n\}$ libre ou non engendrant V, et tout borelien B de $\mathbb{R}^n$, on a par définition :

$$P^*\{f : (<\varphi_i, f>)_{i=1\ldots n} \in B\} = \mu^L_{\varphi_1 \ldots \varphi_n}(B).$$

Le processus généralisé associé à la fonctionnelle aléatoire canonique (S^*, P^*) est donc bien équivalent à L. D'où le theorème.

1.5 - Cas où P^* est portée par $S' \subset S^*$.

Si P^* est portée par $S' \subset S^*$, la fonctionnelle aléatoire canonique à valeurs dans S^* associée au processus généralisé L prend ses valeurs dans S' presque sûrement. On peut donc alors parler de la fonctionnelle aléatoire canonique (S', P^*) associé au processus généralisé L.

Remarque :

Si S' est un sous espace muni d'une norme, de S^*, et si P^* est portée par S' on doit avoir, b désignant la boule unité de S', et P^*ext la mesure extérieure associée à P^* :

$P^*\text{ext.}(b) \neq 0.$

Sinon on auratit $P^*\text{ext.}(S') = 0.$

1.6 - Exemple d'une fonctionnelle aléatoire, associée à un processus généralisé définie sur un Hilbert H, et non portée par le sous espace $\overline{H}$ (conjugué de H) $\subset H^*$. (H : Hilbert séparable).

Soit L un isomorphisme de H dans $G \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, G étant un sous espace de variables aléatoires gaussiennes de L^2. (Pour montrer l'existence d'un tel isomorphisme, on prend une base (φ_n) orthonormée complète de H et on prend pour $L(\varphi_n)$ des variables gaussiennes indépendantes normalisées. Il est toujours possible de construire Ω pour qu'un tel choix soit possible).

Il existe donc une fonctionnelle aléatoire canonique $(H^*, \mathcal{C}^*, P^*)$ telle en particulier que les distributions conjointes finies de variables aléatoires $L(\varphi_n)$ soient les mêmes que celles des variables aléatoires $f \rightsquigarrow \langle \varphi_n, f \rangle$ définies sur l'espace probabilisé $(H^*, \mathcal{C}^*, P^*)$.

Or les variables aléatoires $L(\varphi_n)$ étant indépendantes, gaussiennes, de norme 1, on a $P\left[|L\varphi_n|^2 > \alpha\right] = a \neq 0$, $\forall n$.

En vertu du lemme de Borel Cantelli :

$$P\left[\limsup_n \left[|L\varphi_n|^2 > \alpha\right]\right] = 1.$$

D'où :

$$P\left[\sum_n |L\varphi_n|^2 = +\infty\right] = 1.$$

D'où encore :

$$P^*\left[\{ f : \sum_n |<\varphi_n, f>|^2 = \infty\right] = 1.$$

Comme la boule unité b de $\tilde{H} \subset H^*$ est telle que :

$$b = \{ f : \sum_n |<\varphi_n, f>|^2 \leq 1 \}$$

on en déduit que :

$$P^* \text{ext} (b) = 0$$

D'où :

<u>Proposition.</u>

Une isométrie L d'un espace de Hilbert H dans un espace de variables aléatoires gaussiennes, n'admet aucune représentation comme fonctionnelle aléatoire à valeurs dans H .

<u>Remarque :</u>

On peut montrer, et nous montrerons sans doute dans la suite que (Minlos - Kolmogoroff) : pour qu'un processus généralisé L défini sur un espace de Hilbert H, soit représentable par une fonctionnelle aléatoire, à valeurs dans $\tilde{H}$, il faut et il suffit que L puisse s'écrire :

$$L = M \circ A$$

où A est un opérateur de Hilbert - Schmidt dans H, et M un processus généralisé tel que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans H implique $M(\varphi_n) \longrightarrow M(\varphi)$ en probabilité dans $M(\Omega, \mathcal{F}, P)$.