MICHEL MÉTIVIER

Mesurabilités dans les espaces topologiques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. nº 11, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A11_0>

MESURABILITES DANS LES ESPACES TOPOLOGIQUES

Par Michel METIVIER

Dans tout cet exposé une mesure **devra toujours être entendue** au sens suivant : μ est une fonction d'ensembles σ-additive positive bornée définie sur la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens d'un espace topologique T, et régulière relativement aux compacts. ie :

Pour tout $B \in \mathcal{B}$ $\quad \mu(B) = \sup\{ \mu(K) : K \subset B, K \text{ compact}\}$.

Une telle mesure est encore appelée mesure de Radon. Même si nous omettons les qualificatifs "de Radon" ou positive il faudra entendre une telle mesure.

Remarque :

Si on ne considérait plus seulement des mesures bornées il faudrait ajouter la condition que μ est localement bornée ; i.e tout point possède un voisinage V tel que $\mu(V) < +\infty$.

I - Diverses notions de Mesurabilité.

1 - Définitions.

Soient X et T deux espaces topologiques et soit f une application de X dans T.

a) f est dite borelienne si l'image réciproque par f de tout borelien de T est une borelien de X.

b) f est dite Lebesgue-μ-mesurable si l'image réciproque par f de tout borelien de T appartient à la tribu μ-complétée de la tribu des Boreliens de X.

c) f est dite Lusin μ-mesurable si et seulement si pour tout compact $\varepsilon > 0$ il existe un compact K dans X tel que $\mu(X \setminus K) \leq \varepsilon$ et la restriction de f à K est continue.

Remarque

Si au lieu de considérer μ bornée on considérait μ de Radon quelconque, il conviendrait de remplacer c) par : pour tout compact C de X, il existe un compact $K \subset X$ tel que $\mu(C\setminus K) < \varepsilon$ et la restriction de f à K est continue.

2 - Propriété équivalente à la Lusin-mesurabilité.

Soit T un espace uniforme muni d'un écart δ. Nous définissons la δ-distance en mesure de deux applications f et g de X dans T par :

$$p_\delta (f,g) = \inf\{\alpha \ : \ \mu^*\{x \ : \ \delta(f(x),g(x)) \geq \alpha \ \} < \alpha\}$$

μ^* désignant la mesure extérieure associée à μ .

On vérifie facilement que p_δ est un écart sur l'espace $\mathcal{F}(X,T)$ de toutes les applications de X dans T.

On a le résultat suivant :

Théorème 1.

Une application f de X dans un espace métrisable T est Lusin-mesurable, si et seulement si f appartient à l'adhérence de l'ensemble des fonctions Boreliennes étagées dans $\mathcal{F}(X,T)$ muni de la convergence en mesure.

Démonstration :

1° L'ensemble des fonctions Lusin-μ-mesurables est fermé pour la convergence en mesure :

Soit δ une distance sur T. La topologie de la convergence en mesure sur $\mathcal{F}(X,T)$ étant définie par le seul écart p_δ, donc nous avons à montrer que si $\lim\limits_n p_\delta(f,f_n) = 0$, f_n étant Lusin μ-mesurable pour tout n, f est également Lusin μ-mesurable.

Donnons nous $\varepsilon > 0$. On extrait facilement par récurrence sur k une sous suite (f_{n_k}) de (f_n) telle que, si on désigne par $E_k = \{x : \delta(f(x), f_{n_k}(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2^k}\}$, on ait $\mu^*(E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Pour tout k existe par hypothèse un compact $K_k \subset X \setminus E_k$ tel que $\mu(K_k) > \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^k}$ et tel que la restriction de f_{n_k} à K_k soit continue. Posons $K = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} K_k$. On vérifie immédiatement que

$\mu(K) \geq \mu(X) - \varepsilon$ la suite (f_{n_k}) convergeant en outre uniformément vers f sur $X - \bigcup\limits_k E_k$ en vertu de la définition des E_k, donc sur $K \subset X \setminus \bigcup\limits_k E_k$. Ceci prouve que f jouit de la propriété de Lusin-μ-mesurabilité.

2° <u>Toute fonction Lusin μ-mesurable est limite en mesure d'une suite de fonctions étagées sur un clan quelconque de parties de X engendré par une base de la topologie de X.</u>

Soit $\mathcal{L}$ une base de la topologie de X et $\mathcal{C}$ le clan des parties engendré par $\mathcal{L}$. Si f est continue sur un compact K on peut l'approcher uniformément à $\frac{1}{n}$ près sur K par une fonction étagée f_n sur $\mathcal{C}$:

$f_n = \sum\limits_{i=1}^{N_n} \lambda_n^i 1_{E_i}$ les E_i étant disjoints de la forme $U - \bigcup\limits_{i=1}^{r} U_i$ où U et

U_i sont des ouverts de la base . Comme $\{ x : \delta(f_n(x),f(x)) \geq \frac{2}{n}\} \subset X \setminus K$ on a, si K a été choisi tel que $\mu(X \setminus K) \leq \frac{2}{n}$; $p_\delta\,(f,f_n) \leq \frac{2}{n}$. D'où le résultat.

3 - Enoncé des relations entre les diverses notions de mesurabilité.

Théorème 2.

1° *Si* T *est un espace métrisable séparable (i.e admettant un sous ensemble dénombrable partout dense),* f *une application de* X *dans* T, *on a les implications suivantes:*

f *Borelienne* $\Longrightarrow$ f *Lebesgue* μ-*mesurable* $\Longleftrightarrow$ f *Lusin* μ-*mesurable*

2° *Si* T *est un espace vectoriel topologique sur* $\mathbb{R}$ *localement convexe métrisable complet et séparable on a en outre :* f *Lusin* μ-*mesurable* $\Longleftrightarrow$ f *scalairement* μ-*mesurable, ie. pour toute forme linéaire* v *continue sur* T v o f *est une fonction réelle Lusin* μ-*mesurable (ou, ce qui est équivalent d'après le* 1° *ci dessus, Lebesgue* μ-*mesurable).*

3° *Dans le cas où* T *est topologique quelconque on a seulement*

f *Lusin* μ-*mesurable* $\Longrightarrow$ f *Lebesgue* μ-*mesurable* $\Longleftarrow$ f *Borelienne.*

Remarque :

L'implication f-Borelienne $\Longrightarrow$ f Lebesgue μ-mesurable est évidemment triviale d'après la définition.

Les autres équivalences et implications résultent des diverses propositions qui seront établies dans ce qui va suivre maintenant.

4 -Démonstrationsdes implications précédentes.

Proposition 1

Soit f *une application de* X *topologique dans* T *topologique et soit* μ *une mesure de Radon sur* X. *Si* f *est Lusin* μ *-mesurable,* f *est Lebesgue* μ*-mesurable.*

Démonstration :

Par hypothèse pour tout n, il existe $K_n \subset X$ tel que $(\mu(X \setminus K_n) \leq \frac{1}{n}$, et la restriction de f à K_n est continue. Pour tout ouvert $O \subset T$ on a :

$f^{-1}(O) = (\bigcup_n (f^{-1}(O) \cap K_n)) \cup (f^{-1}(O) \cap \bigcup_n (X \setminus K_n))$. Comme le deuxième des ensembles de cette réunion est de mesure nulle et le premier borelien, $f^{-1}(O)$ appartient bien à la tribu complétée pour μ de la tribu des boréliens.

Proposition 2.

Soit F *un espace métrisable et* μ *une mesure de Radon sur un espace topologique* X *quelconque. Pour qu'une application* f *de* X *dans* F *soit Lusin* μ*-mesurable il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :*

a) f *est Lebesgue* μ*-mesurable*

b) *Il existe une partie* X_o *de* X *telle que* $\mu^*(X \setminus X_o) = 0$ *et* $\overline{f(X_o)}$ *est séparable.*

Remarque :

Si on considérait une mesure de Radon μ non bornée, il conviendrait de remplacer b) par b') : pour tout compact K, il existe $X_K \subset K$ avec $\mu^*(K \setminus X_K) = 0$ et $\overline{f(X_K)}$ séparable.

Démonstration

La condition a) est necessaire en vertu de la proposition 1 et la condition b) l'est en vertu de la possibilité d'approcher en mesure f par une suite (f_n) de fonctions étagées. A un ensemble de mesure nulle près, f prend donc ses valeurs dans l'existence de $\cup f_n(X)$ qui est dénombrable.

Montrons maintenant que a) et b) réunis entrainent la Lusin μ-mesurabilité. Soit (a_n) dense dans $\overline{f(X_o)}$. Soit d une distance sur T. Pour tout n et p posons :

$$A_{n,p} = \{x : d(f(x),a_n) \leq \frac{1}{p}\}$$

Pour p fixé nous considérons la suite $(B_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence comme suit :

$$B_{1,p} = A_{1,p} \ \ldots \qquad B_{n,p} = A_{n,p} \setminus \bigcup_{k<n} A_{k,p}$$

En vertu de a) les $A_{n,p}$ et par suite les $B_{n,p}$ appartiennent à la tribu complétée de $\mathcal{B}$ pour μ . L'indicateur d'un tel ensemble est évidemment Lusin μ-mesurable (conséquence immédiate de la régularité de μ relativement aux compacts de X). L'hypothèse de densité sur (a_n) implique que $\mu(X \setminus \bigcup_{n=1} A_{n,p}) = 0$ pour tout p. On peut donc déterminer un indice n_p tel que $\mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{n_p} A_{n,p}) = \mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{n_p} B_{n,p}) \leq \frac{1}{p}$.

Si nous définissons alors les fonctions g_p suivantes :

$$g_p(x) = \begin{cases} a_n & \text{si } x \in B_{n,p} \quad \text{pour} \quad 1 \leq n \leq n_p \\ a & \text{fixé choisi dans } F \text{ si } \quad n > n_p \end{cases}$$

les fonctions g_p sont Lusin μ-mesurables d'après ce qui précède et en outre $\mu \{x : d(g(x), g_p(x)) > \frac{1}{p}\} \leq \frac{1}{p}$. La fonction g qui est ainsi la limite en mesure des fonctions g_p est Lusin μ-mesurable d'après le théorème 1.

Si nous considérons la démonstration de la proposition 2 nous avons en fait démontré le :

Corollaire

Soit F *un espace métrisable et* μ *une mesure de Radon sur un espace topologique* X *quelconque. Pour qu'une application* f *de* X *dans* F *soit Lusin-*μ *-mesurable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :*

a') *l'image réciproque par* f *de toute boule fermée de* F *est* μ*-mesurable.*

b) *Il existe dans* X *une partie* X_o *telle que* $\mu^*(X \setminus X_o) = 0$ *et* $\overline{f(X_o)}$ *est séparable.*

Proposition 3 - (Pettis)

Si F *est un espace de Banach une application* f *de* X *dans* F *est Lusin* μ*-mesurable, si et seulement si :*

a") f *est scalairement* μ-*mesurable.*

b) *Il existe* X_o *dans* X *tel que* $\mu^*(X \setminus X_o) = 0$ *et* $\overline{f(X_o)}$ *est une partie séparable de* F.

Démonstration

La necessité de a") est évidente. Celle de b) résulte de la proposition précédente.

Pour montrer que a") et b) impliquent la Lusin μ-mesurabilité il suffit, en vertu du corollaire de la proposition 2, de montrer que si a") et b) sont vraies l'image réciproque d'une boule quelconque de F est un ensemble μ-mesurable.

Soit une boule B de centre a et de rayon r dans F. Désignons par E l'espace vectoriel fermé engendré par $f(X_o)$. Nous avons seulement à montrer que l'image réciproque par f de $B \cap E$ est μ-mesurable. En vertu de la séparabilité de E, il existe dans le dual E' de E un sous ensemble dénombrable $\{a'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ partout dense pour la topologie $\sigma(E',E)$. D'où :

$$\{x : x \in E, \ \|f(x) - a\| \leq r\} = \bigcap_n \{x : x \in E \ \frac{\langle f(x) - a, a'_n \rangle}{\|a'_n\|} \leq r\}$$

l'hypothèse a") implique la μ-mesurabilité de l'ensemble à droite de cette égalité. D'où la proposition.

Proposition 4.

Soit $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *une famille dénombrable d'espaces topologiques et* f *une application de* X *dans* $\prod_{i=1}^{\infty} F_i$. *Pour que* f *soit Lusin* μ-*mesurable il faut et ilssuffit que pour tout* n *l'application* *l'application* $\pi_n \circ f$ *soit Lusin-*μ*-mesurable de* X *dans* F_n , (π_n *désignant la projection canonique* $\prod_{i=1}^{\infty} F_i \longrightarrow F_n$).

Démonstration

La necessité est évidente en vertu de la définition de la Lusin mesurabilité et de la continuité des π_n.

Réciproquement, supposons que pourttout n, $\pi_n \circ f$ soit Lusin-μ-mesurable. Pour tout $\varepsilon > 0$ soit K_n compact dans X tel que $\mu(K_n) \geq \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^n}$ la restriction de $\pi_n \circ f$ à K_n étant continue. La restriction de $\pi_n \circ f$ au compact $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ est donc continue pour tout n. La restriction de f à K est donc continue et comme $\mu(K) \geq \mu(X) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \mu(X) - \varepsilon$ nous avons aussi montré que f est Lusin-μ-mesurable.

Proposition 5.

Si F *est un espace localement convexe métrisable, une application* f *de* X *dans* F *est Lusin-*μ*-mesurable si et seulement si :*

a") *f est scalairement* μ*-mesurable.*

b) *Il existe* X_o *dans* X *tel que* $\mu^*(X - X_o) = 0$ *et* $\overline{f(X_o)}$ *est une partie séparable de* F.

Démonstration

La necessité est triviale en vertu des propositions précédentes.

Pour montrer que a") et b) impliquent la mesurabilité

Lusin de f, il suffit de remarquer que le sous espace fermé engendré par $f(X_0)$ dans F étant métrisable de type dénombrable, il est isomorphe à un sous espace d'un produit $\prod_{i=1}^{\infty} F_i$ d'espaces de Banach F_i de type dénombrable. D'après le proposition 3 les applications $\pi_i \circ f$ sont Lusin-μ-mesurables, d'où aussi l'application f d'après la proposition 4.

Avec la démonstration de cette proposition 5 s'achève la démonstration des diverses implications énoncées dans le théorème 2.

II - Mesures de Radon équivalentes - Topologies Radon-équivalentes.

1 - Mesures de Radon équivalentes.

Définition 2

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X, μ_1 une mesure de Radon pour $\mathcal{T}_1$, μ_2 une mesure de Radon pour $\mathcal{T}_2$. Les mesures μ_1 et μ_2 sont dites équivalentes si :

(M_1) elles ont les mêmes ensembles mesurables avec les mêmes mesures.

(M_2) Pour tout espace topologique T l'ensemble des fonctions Lusin μ_1-mesurables de X dans T est le même que l'ensemble des fonctions Lusin μ_2-mesurables.

Proposition 6

La condition (M_1) est équivalente à :

(M'_1) *Pour tout compact* K_1 *pour* $\mathcal{T}_1$ *(resp* K_2 *pour* $\mathcal{T}_2$*) et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un compact* K_2 *pour* $\mathcal{T}_2$ *(resp* K_1 *pour* $\mathcal{T}_1$*) tel que :*

$K_2 \subset K_1$ *et* $\mu_1(K_1) - \varepsilon \leq \mu_2(K_2) \leq \mu_1(K_1)$

Démonstration

L'implication $(M_1) \Longrightarrow (M'_1)$ est triviale en vertu de la régularité des mesures de Radon.

Montrons $(M'_1) \Longrightarrow (M_1)$: en effet M est mesurable pour μ_1 (la mesure M_1 étant bornée) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_1 pour $\mathcal{T}_1$ et un ouvert O_1 pour $\mathcal{T}_1$ tels que :

$$K_1 \subset M \subset O_1 \qquad \text{et} \quad \mu_1(O_2 \setminus K_1) \leq \varepsilon$$

Or par dualité, l'hypothèse (M'_1) implique **que pour tout ouvert** O_1 pour $\mathcal{T}_1$ (resp. O_2 pour $\mathcal{T}_2$) on a $\mu_1(O) \geq \inf\{\mu_2(O_2) : O_2 \in \mathcal{T}_2, O_2 \supset O\}$:

On peut donc d'après (M'_1) pour tout M μ_1-mesurable, trouver K_2 compact pour $\mathcal{T}_2$ et O_2 ouvert de $\mathcal{T}_2$ tels que :

$$K_2 \subset M \subset O_2 \qquad \text{et} \qquad \mu_2(O_2 \setminus K_2) \leq \varepsilon$$

ce qui implique la μ_2-mesurabilité de M.

Proposition 7

Soient μ_1 *et* μ_2 *deux mesures de Radon sur* X *pour les topologies respectives* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$*. Les mesures* μ_1 *et* μ_2 *sont équivalentes si et seulement si :*

(M) : *les applications identiques* $(X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ *et* $(X, \mathcal{T}_2) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_1)$ *sont respectivement* μ_1 *et* μ_2*- Lusin mesurables et si* μ_2 *est l'image de* μ_1.

Demonstration

1°) (M_1) et $(M_2) \Longrightarrow (M)$.

Si (M_2) est vraie, l'application identique $(X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_1)$ étant continue donc Lusin μ_1-mesurable, il doit en être de même de l'application $(X, \mathcal{T}_2) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_1)$. La condition (M_1) exprime alors que μ_1 est l'image de μ_2.

2°) $(M) \Longrightarrow (M_1)$ et (M_2).

La condition μ_2 est mesure image de μ_1 implique trivialement M_1. Pour tout espace topologique T et toute application μ_2-mesurable f de $(X, \mathcal{T}_2)$ dans T, l'application composée $(X, \mathcal{T}_1) \xrightarrow{I} (X, \mathcal{T}_2) \xrightarrow{f} T$

f o I est Lusin μ_1-mesurable parce que μ_2 est l'image de μ_1 par l'application Lusin μ_1-mesurable I.

Corollaire

Si $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$ séparée, pour que μ_1(de Radon pour $\mathcal{T}_1$) soit équivalente à μ_2(de Radon pour $\mathcal{T}_2$) il faut et il suffit que l'application identique $(X, \mathcal{T}_2) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_1)$ soit μ_2-mesurable, et que μ_1 et μ_2 donnent la même mesure aux ensembles compacts pour $\mathcal{T}_2$ et à l'espace tout entier.

Toute topologie moins fine que $\mathcal{T}_1$ et plus fine que $\mathcal{T}_2$ est alors Radon équivalente à $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

Démonstration

En effet $(X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est trivialement Lusin

μ -mesurable puisque continue, et si pour tout compact K_2 pour $\mathcal{T}_2$ on a $\mu_2(K_2) = \mu_1(K_2)$ on a pour tout M μ_2-mesurable :

$$\mu_2(M) = \sup \{\mu_2(K_2) : K_2 \text{ compact pour } \mathcal{T}_2, K_2 \subset M\}$$

$$= \sup \{\mu_1(K_2) : K_2 \text{ compact pour } \mathcal{T}_2, K_2 \subset M\}$$

Et comme tout compact pour $\mathcal{T}_1$ est un compact pour $\mathcal{T}_2$, on a :

$$\mu_2(M) \geq \sup \{\mu_1(K_1) : K_1 \text{ compact pour } \mathcal{T}_1, K_1 \subset M\} = \mu_1(M).$$

Comme alors $\mu_2(\complement M) \geq \mu_1(\complement M)$ et $\mu_2(X) = \mu_1(X)$ par hypothèse on a donc $\mu_2(M) = \mu_1(M)$ pour tout M μ_1-mesurable, ce qui exprime que μ_2 est la mesure image de μ_1.

2 - Topologies Radon équivalentes.

Définition 3

Deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sur X sont dites **Radon-équivalentes** si toute mesure de Radon positive bornée μ_1 pour $\mathcal{T}_1$ (resp. μ_2 pour $\mathcal{T}_2$) est équivalente à une mesure de Radon μ_2 pour $\mathcal{T}_2$ (resp. μ_1 pour $\mathcal{T}_2$).

Si $\mathcal{T}_1$ est une topologie plus fine que $\mathcal{T}_1$ séparé sur X, pour que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ soient Radon équivalentes, il faut et il suffit d'après le corollaire de la proposition 7 que l'application identique $(X, \mathcal{T}_2) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_1)$ soit μ_2-mesurable, la mesure μ_1 de Radon pour $\mathcal{T}_1$ équivalente à μ_2 étant alors donnée par la mesure image de μ_2.

Nous nous proposons de donner un cas important de Radon équivalentes :

Théorème 3.

Si E est un espace vectoriel convexe métrisable de dual E', deux topologies sur E compatibles avec la dualité (E,E') sont Radon équivalentes.

Démonstration.

D'après le corollaire de la proposition 7 et la remarque qui suit la définition 3 nous avons seulement à prouver que l'application $(E, \sigma(E,E')) \longrightarrow (E, \tau(E,E'))$ est μ-mesurable pour toute mesure de Radon faible μ sur E. ($\tau(E,E')$ désigne la topologie de Mackey de E identique à la topologie métrisable donnée initialement sur E).

Supposons que μ soit portée par un sous ensemble fermé S séparable de E. Alors l'application identique $I : (E, \sigma(E,E')) \longrightarrow (E,\tau)$ prenant μ-presque partout ses valeurs dans une partie fermée séparable de E, et I étant trivialement scalairement μ-mesurable il résulte de la proposition 5 ci-dessus que I est μ-mesurable.

Or, pour toute μ de Radon faible on peut trouver une famille dénombrable (K_n) de compacts faibles tels que $\mu(X \setminus \bigcup_n K_n) = 0$, et si S_n est le support dans K_n de la mesure μ_n, restriction de μ à K_n, $S = \overline{\bigcup_n S_n}$ est un ensemble fermé portant la norme μ et séparable si les S_n le sont. Le théorème 3 dans le cas où E est complet résulte donc complètement du lemme suivant :

Lemme :

Si E est un espace de Frechet, K une partie de E compacte pour

$\sigma(E,E')$, μ *une mesure de Radon sur K, alors le support de μ est séparable.*

Démonstration du lemme :

-Pour tout $f \in L^1(\mu)$ considérons l'intégrale faible suivante (à valeurs dans E'') :

$$\alpha(f) = \int_K x\, f(x)\, \mu(dx).$$

après le théorème de Krein-Šmulian on peut supposer que K est convexe équilibrée fermée. Comme alors $\alpha(f) \in \| f \|_1 \| \mu \| . K$ on voit que $\alpha(f) \in E$. Nous définissons ainsi une application $f \rightsquigarrow \alpha(f)$ continue de $L^1(\mu)$ dans (E,τ). D'après le théorème de Dunford-Pettes-Grothendieck (voir par exemple : Grothendieck [ ] ou Espaces nucléaires - Groupes de travail Rennes [ ]. Chapitre VI), α transforme toute partie faiblement compacte de $L^1(\mu)$ en une partie fortement compacte de (E,τ). En particulier si B_∞ désigne la boule unité de $L^\infty(\mu) \subset L^1(\mu)$, $\alpha(B_\infty)$ est compacte dans (E,τ). Mais (E,τ) étant métrisable $\alpha(B_\infty)$ est séparable pour τ. Il en est de même par suite pour le sous espace $F = \alpha(L^\infty(\mu))$. Nous allons montrer que le support de μ, supp. $\mu \subset \overline{F}$.

Soit donc $a \in \operatorname{Supp} \mu$, et soit V un voisinage faible convexe fermé de a. En vertu de la définition de Supp μ on a $\mu(V) \neq 0$ d'où $f = \dfrac{1_V}{\mu(V)} \in L^\infty(\mu)$. Comme $\alpha f = \int x \dfrac{1_V(x)}{\mu(V)} \mu\,(dx)$ appartient d'une part à $F \subset E$ d'après ce qui précède, d'autre part à l'enveloppe convexe fermée $\tilde{V}$ de V dans E'' pour $\sigma(E'',E')$, $\alpha f \in \tilde{V} \cap E = V$. Ceci prouve que $\alpha f \in F \cap V$, donc que $F \cap V \neq 0$. Ceci prouve que :

$a \in \operatorname{Supp} \mu \Longrightarrow a \in \overline{F}$. D'où le lemme et d'où le théorème dans le cas où E est complet.

Si E est métrisable non complet, soit $\hat{E}$ le complété de E. Comme $(\hat{E})' = E'$ l'application identique $(E, \sigma(E,E')) \longrightarrow (\hat{E}, \sigma(\hat{E},E'))$ est continue, et comme l'application $(\hat{E},\sigma) \longrightarrow (\hat{E},\tau)$ est mesurable pour toute mesure de Radon sur $(\hat{E},\sigma)$ l'application identique $(E,\sigma) \longrightarrow (\hat{E},\tau)$ est mesurable pour toute mesure de Radon sur (E,σ). Comme enfin cette application prend ses valeurs dans E, l'application identique $(E,\sigma) \longrightarrow (E,\tau)$ est mesurable pour toute mesure de Radon sur (E,σ). D'où le théorème pour E localement convexe métrisable quelconque.

Remarque

Le contre exemple suivant montre qu'en général une topologie moins fine que $\sigma(E,E')$ n'est pas Radon équivalente à la topologie de E. (Cf. Schwartz [5]).

E = Dual de l'espace $\mathscr{C}[0,1]$ des fonctions continues sur $[0,1]$

$\mathscr{T}_1 = \sigma(E,\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C}',\mathscr{C})$

$\mathscr{T}_2 = \tau(E,E') = \tau(\mathscr{C}',\mathscr{C}'')$.

Sur $E = \mathscr{C}'$ on considère la mesure μ image de la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$ par l'application $t \rightsquigarrow \varepsilon_t$ qui applique homéomorphiquement $[0,1]$ sur une partie de $\mathscr{C}'$. Si l'application identique $(\mathscr{C}', \sigma(\mathscr{C}',\mathscr{C})) \longrightarrow (\mathscr{C}', \tau(\mathscr{C}',\mathscr{C}''))$ était μ-mesurable, l'application $t \rightsquigarrow \varepsilon_t$ de $[0,1]$ dans l'espace de Banach $\mathscr{C}'$ serait

λ -mesurable. Or $(\varepsilon_t)_{t \in [0,1]}$ est un sous espace S discret de cet espace de Banach, il existerait donc pour toute mesure de Radon portée par S un sous ensemble compact donc fini de mesure > 0, ce qui impliquerait pour la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$ un ensemble fini de mesures non nulles, ce qui est faux.

On peut montrer par contre Cf. Schwartz [5] que si E est un espace de Fréchet séparable, la topologie de E est équivalente à toute topologie complètement régulière plus faible sur E.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI — Espaces Vectoriels Topologiques. Paris Hermann

[2] GROTHENDIECK — Sur les applications faiblement compactes du type C(K). Can. Jour. of Math. Vol p.

[3] GROUPE DE TRAVAIL PROBABILITES - Rennes 1966-1967 - Espaces Nucléaires.

[4] SCHWARTZ - L — Séminaire 1954-1955.

[5] SCHWARTZ - L — "Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires". Cours de 3ème cycle. 1964-1965.