M. MÉTIVIER

Lemme de Brunel et applications

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. nº 10, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A10_0>

LEMME DE BRUNEL ET APPLICATIONS

Par M. METIVIER.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé.

1 - Préléminaires sur les contractions.

T contraction positive de L^1. T^* son adjointe.

1.1 - Fonction excessive.

h est dite excessive dans la suite si $h \geq T^* h$.

1.2 - Proposition 1 :

Il existe une plus petite fonction excessive majorant $\varphi > 0$. Cette fonction est définie comme limite croissante de la suite Φ_n définie par récurrence

$$\Phi_0 = \varphi \qquad \Phi_{k+1} = \varphi \vee T^* \Phi_k.$$

Démonstration :

Comme T^* est une contraction, on voit immédiatement par récurrence sur k que : $\|\Phi_k\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$

En outre $\Phi_1 \geq \varphi_0$ et si $\Phi_k \geq \Phi_{k-1}$ on a :

$$\Phi_{k+1} = \varphi \vee T^* \Phi_k \geq \varphi \vee T^* \Phi_{k-1} = \Phi_k$$ d'où par récurrence sur k la croissance de la suite (Φ_n).

La suite Φ_n converge donc vers une fontion Ψ_φ. Montrons que cette fonction est excessive :

$$T^* \Psi_\varphi = \lim_n T^* \Phi_n \leq \lim_n \Phi_{n+1} = \Psi_\varphi$$

1.3 - Autre expression de Ψ_Ψ lorsque $\Psi = 1_E$ $E \in \mathcal{A}$

On a , (en vertu de $T^* 1_E \leq 1$) :

$$\Phi_1 = 1_E \vee T^* 1_E = 1_E + T^*(1_E) - 1_E \wedge T^* 1_E = 1_E + T^* 1_E - 1_E \; T^* 1_E =$$

$$= 1_E + 1_{E^c} \, T^* 1_E .$$

Posons alors $T_E = T \circ J_{E^c}$

avec $J_{E^c} : f \longmapsto 1_{E^c} \cdot f$

On a : $T_E^* = J_{E^c} \circ T^*$.

D'où

$$\Phi_1 = 1_E + T_E^* \, 1_E$$

et par récurrence sur k du fait que :

$$\Phi_k = 1_E + 1_{E^c} \, T^* \Phi_{k-1} = 1_E + T_E^* \, \Phi_{k-1}$$

on déduit :

$$\Phi_n = \sum_{k=0}^{n} T_E^{*\,k} \; 1_E .$$

D'où :

$$\boxed{\Psi_E = \sum_{k=0}^{\infty} T_E^{*\,k} \; 1_E .}$$

2 - Lemme ergodique

Pour tout $k \leq n$ *on pose* $T_{k,n} = \sum_{\lambda=k}^{n} T^{\lambda}$

$$E_f = \bigcap_{k=0}^{\infty} \; \bigcup_{n>k} \{ \, T_{k,n} \, f \geq 0 \, \}$$

Alors pour tout $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *et tout* $E \in \mathcal{A}$ $E \subset E_f$ *on a* $\int f.\Psi_E \, d\mu \geq 0$.

Démonstration :

Soit $e_n = \bigcap_{i=0}^{n} \{ T_{i,n} f \geq 0 \} \cap E$

1°) On a $E = \bigcup_{k>n} e_k$ pour tout n soit $E = \limsup_k e_k$:

Si $x \in e_k \subset E_f$ il existe un $l > k$ tel que $T_{k,l} f(x) > 0$. Soit l le plus petit des indices possédant cette propriété. On a nécessairement $T_{k'l} f(x) \geq 0$ pour tout $k+1 \leq k' < l$ sinon $T_{k'l} f(x) < 0$ joint à $T_{kl} f(x) = T_{k,k'} f(x) + T_{k'l} f(x) \geq 0$ impliquerait $T_{kk'} f(x) > 0$ contrairement à l'hypothèse que l est le plus petit des indices $> k$ tel que $T_{kl} f(x) > 0$. Soit $i < k$. Comme $T_{il} f(x) = T_{ik} f(x) + T_{kl} f(x) \geq 0$ On a donc pour tout $x \in e_k$:

$T_{il} f(x) \geq 0$ pour tout $i \leq l$. Soit $x \in e_l$. Ceci prouve que

$\forall k \quad e_k \subset \bigcup_{l>k} e_l$ d'où $\bigcup_{k\geq 0} e_k = \bigcup_{k\geq n} e_k \quad \forall n.$

En outre si $x \in E_f \cap E$, d'après la définition de E_f

$x \in \bigcup_{n>0} [T_k f \geq 0]$ donc il existe un plus petit $n > 0$ tel que $T_n f(x) \geq 0$ et en reprenant le raisonnement précédent $x \in e_n$. D'où

$$E \subset \bigcup_{n>0} e_n = \bigcup_{k\geq n} e_k.$$

(2.1) On pose $E_{i,n} = e_i \cup e_{i+1} \dots \cup e_n$

D'après ce qui précède $1_{E_{i,n}} = \Psi_{i,n} \xrightarrow{n} 1_E$ pour tout i.

2°) <u>Construction de $\Phi_{o,n} \leq \Psi_E$ telle que $\int f.\ \Phi_{o,n}\, d\mu \geq 0.$</u>

Nous définissons $\Phi_{i,n}$ $i \leq n$ de la façon suivante : $(\Phi_{i,n} \in L^\infty)$:

(2.2)
$$\begin{cases} \Phi_{n,n} = \Psi_{n,n} \\ \Phi_{n-1,n} = \Psi_{n-1,n} \vee T^* \Phi_{n,n} \\ \vdots \\ \Phi_{0,n} = \Psi_{0,n} \vee T^* \Phi_{1,n} \end{cases}$$

On a (en vertu de $\Psi_{n,n} < \Psi_{n-1,n}$) $\Phi_{n,n} \leq \Phi_{n-1,n}$. Par récurrence sur $k = n \dots 0$ on voit que $\Phi_{k,n} \leq \Phi_{k-1,n} \leq 1$ $\forall\, k = 1 \dots n$: en effet une telle inégalité jointe à $\Psi_{k,n} \leq \Psi_{k-1,n}$ et à la positivité de T^* implique trivialement

$$\Phi_{k-2,n} = \Psi_{k-2,n} \vee T^* \Phi_{k-1,n} \geq \Psi_{k-1,n} \vee T^* \Phi_{k,n} = \Phi_{k-1,n}.$$

Nous définissons également :

$$\Gamma_{0,n} = \Phi_{0,n} - T^* \Phi_{1,n}$$

$$\Gamma_{1,n} = \Phi_{1,n} - T^* \Phi_{2,n}$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_{n,n} = \Phi_{n,n}$$

(2.3)
$$\Gamma_{0,n} + T^* \Gamma_{1,n} + \dots + T^{*n} \Gamma_{n,n} = \Phi_{0,n}$$

Si $x \in E_{k,n}$ on a pour tout $i \geq k$ $\varphi_{i,n}(x) = 0$ d'où :

$$\Phi_{i,n}(x) = T^* \Phi_{i+1,n}(x)$$

d'où :

$x \notin E_{k,n} \Longrightarrow \Gamma_{i,n}(x) = 0$ pour tout $i \geq k$

Si donc $x \in E_{k,n} - E_{k+1,n}$ on a :

(2.4) $\Gamma_{k+1,n}(x) = \Gamma_{k+2,n}(x) = \dots = \Gamma_{n,n}(x) = 0$

et

(2.5) $1 = \varphi_{k,n}(x) = \Phi_{k,n}(x) = \dots = \Phi_{0,n}(x)$

Comme la suite $(T^* \Phi_{i,n})_{i \leq n}$ est décroissante il résulte de (2.5) et de la définition des $\Gamma_{i,n}$ que $\Gamma_{0,n} \leq \Gamma_{1,n} \leq \dots \leq \Gamma_{k,n}$ sur $E_{k,n} - E_{k+1,n}$. Ceci entraine que sur $E_{k,n} - E_{k+1,n} \subset e_k$:

$$\Gamma_{0,n} f + \Gamma_{1,n} T f + \dots + \Gamma_{k,n} T^k f = \Gamma_0 f + \dots + \Gamma_k T^k f =$$

$$= T_{0,k} f . \Gamma_0 + (\Gamma_1 - \Gamma_0) T_{1,k} f + \dots + (\Gamma_k - \Gamma_{k-1}) T^k_{k,k} f$$

$$\geq 0$$

D'où finalement sur $E_{0,n} = \bigcup_k E_{k,n} - E_{k+1,n}$:

$$\Gamma_{0,n} f + \Gamma_{1,n} T f + \dots + \Gamma_{n,n} T^n f \geq 0$$

Comme sur $\complement E_{0,n}$ $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \dots = \Gamma_n = 0$ on a :

$$0 \leq \int (\Gamma_{0,n} f + \Gamma_{1,n} Tf + \ldots + \Gamma_{n,n} T^n f)\, d\mu = \int f(\Gamma_{0,n} + T^* \Gamma_{1,n} + \ldots + T^{*n} \Gamma_{n,n})\, d\mu$$

Soit d'après (2.3) :

(2.6) $$0 \leq \int f \cdot \Phi_{0,n}\, d\mu$$

<u>3°) $\Phi_{0,n} \longrightarrow \Psi_E$</u>

Comme $\varphi_{i,n} \leq 1_E$ pour qtout i et tout n, il résulte de la définition de Ψ_E donnée en (1.1) que :

(2.7) $\Phi_{i,n} \leq \Psi_E$ pour touti i et n.

Remarquons que : en vertu de la croissance de $i \longrightarrow \varphi_{i,n}$:

$$\Phi_{0,n} = \varphi_{0,n} \vee T^*(\varphi_{1,n} \vee T^*(\varphi_{2,n} \vee T^* \ldots (\varphi_{i,n} \vee T^* \ldots \vee T^* \varphi_{n,n}))))$$

(2.8) $$\geq \underbrace{\varphi_{i,n} \vee T^*(\varphi_{i,n} \vee T^*(\ldots\ T^*(\varphi_{i,n})))}_{i \text{ termes}} \quad \text{pour tout } i$$

En revenant aux notations de 1°), soit Φ_i telle que

$\Phi_i(x) \geq \Psi_E(x) - \varepsilon$

$$\Phi_i(x) = \underbrace{1_E \vee T^*(1_E \vee T^*(\ \ldots \vee T^* 1_E)))}_{i \text{ termes}}$$

Comme $\varphi_{i,n} \xrightarrow{n} 1_E$ (limite croissante), on peut trouver n_ε tel que compte tenu de (2.8) pour tout $n \geq n_\varepsilon$:

(2.9) $$\Phi_{0,n}(x) \geq \Psi_E(x) - 2\varepsilon$$

En vertu de (2.7) et (2.9) on a donc :

(2.10) $$\lim_{n\to\infty} \Phi_{0,n}(x) = \Psi_E(x).$$

4°) De (2.6) (2.7) et (2.10) résulte la formule :

En effet d'après le théorème de la convergence bornée de Lebesgue :

$$\int f . \Psi_E \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f . \Phi_{0,n} \, d\mu \geq 0.$$

3 - Deuxième lemme de Brunel.

$$E''_f = (\{\overline{\lim_n} T_{0n} f > -\infty\} \cap C) \cup (\{\lim T_{0,n} f \geq 0\} \cap D).$$ [1]

(Cet ensemble contient l'ensemble $E'_f = \{\lim_n T_{0,n} f \geq 0\}$ *(A. Koglu).)*

Alors si $E \subset E''_f$ $\quad \int f\Psi \, d\mu \geq 0.$

Démonstration :

$E_1 = E \cap C$

$E_2 = E \cap D$

1°) Soit $f_0 > 0$ telle que $\left[\sum_{k=0}^{\infty} T^k f_0 = +\infty\right] = C$

Sur E_1 $\quad \overline{\lim_n} \sup T_{on}(f + \varepsilon f_0) = +\infty$

D'où $\quad E_1 \subset E_{f+\varepsilon f_0} \xRightarrow{\text{(lemme de Brunel)}} \int \Psi_{E_1} (f + \varepsilon f_0) \, d\mu \geq 0$

comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\int \Psi_{E_i} f \, d\mu \geq 0.$$

---

(1) : C : partie dissipative de l'opérateur T : non la définitive dans le cours de la démonstration.
D : partie conservative.

2°) $1_E \leq \psi_{E_1} + \psi_{E_2}$ $\psi_E \leq \psi_{E_1} + \psi_{E_2}$

$$0 \leq \psi_E - \psi_{E_1} \leq \psi_{E_2}$$

en vertu de la propriété suivante de la partie dissipative :

$$\varphi \geq 0 \text{ et } \{\varphi > 0\} \subset D \Longrightarrow [T^* \varphi > 0] \subset D.$$

on a $[\psi_{E_2} > 0] \subset D$ ou encore ψ_{E_2} nulle en C d'où ;

$\psi_E - \psi_{E_1}$ nulle en C.

Posons $X = (1 - T^*)\,\psi_E = (1 - T^*)(\psi_E - \psi_{E_1})$ (parce que ψ_{E_1} harmonique).

Si nous pouvons montrer que $T^{*n}(\psi_E - \psi_{E_1}) \to 0$ il en résultera que :

$$X + T^* X + \dots + T^{*n} X + \dots = \psi_E - \psi_{E_1}$$

1) Supposons que $f_o + T f_o + \dots + =$ intégrale sur E_2 alors :

$$+\infty > \int 1_{E_2} \cdot (f_o + T f_o + \dots + T^n f_o + \dots)\, d\mu.$$

Soit

$$+\infty > \int f_o (1_{E_2} + T^* 1_{E_2} + \dots +)\, d\mu.$$

D'où :

$$1_{E_2} + T^* 1_{E_2} + \dots + < +\infty$$

$$\text{et} \lim_{k\to\infty} T^{*n} 1_{E_2} + T^{*n+1} 1_{E_2} \dots = 0$$

ce qui implique :

$$\lim_{n\to\infty} T^{*n} \Psi_{E_2} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} T^{*n} 1_{E_2} = 0$$

D'où :

$$\lim_{n\to\infty} T^{*n} (\Psi_E - \Psi_{E_1}) = 0$$

ce qui implique :

$$\Psi_E - \Psi_{E_1} = \sum_{k\geq 0} T^{*k} X.$$

Evaluons :

$$\int f (\Psi_E - \Psi_{E_1}) \, d\mu = \lim_n \int X \left(\sum_{k=0}^{n} T^k f \right) d\mu$$

Or $\quad X \leq \Psi_E - \Psi_{E_1}$ nul sur C

$X \leq (1 - T^*) \Psi_E$ nul en dehors de E.

Comme $\quad 0 \leq X$ et que $\lim_{n\to\infty} f + T f + \ldots + T^n f \geq 0$ par définition sur

$E_f'' \cap D$, si en outre :

(2) (f) + T(f) + ... + intégrable sur E_2, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int X \left(\sum_{k\geq 0}^{n} T^{*k} f \right) d\mu \geq 0$$

Nous avons maintenant à nous affranchir de (1) et (2) .

Comme sur D (par définition) :

$$\sum_{k\geq 0} T^k f_o < +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\geq 0} T^k (f) < +\infty$$

on peut trouver une suite $E_2^m \nearrow E_2$ telle que sur chaque E_2 (1) et (2)

soient vrais.

On pose $E^m = E_1 \cup E_2^m$

et $\quad \Psi_{E^n} \longrightarrow \Psi_E$

Comme d'après la première partie de la démonstration on a :

$\int f \; \Psi_{E^n} \, d\mu = 0$

on en déduit : $\quad \int f \, \Psi_E \, d\mu = 0$