PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. HOUDEBINE

**Catégories triangulées**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1965-1966
« Publications des séminaires de mathématiques », , exp. nº 6, p. 1-36
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1965-1966____A6_0>

# CATEGORIES TRIANGULEES

par

J. HOUDEBINE

## INTRODUCTION

Le but du "Groupe de Travail d'Algèbre" était d'étudier les catégories triangulées à partir du résumé de Monsieur VERDIER et d'un article de Monsieur HARTSHORNE, en s'imposant de faire des démonstrations complètes et si possible, élémentaires.

Le seul résultat original, dû à Monsieur HOUDEBINE, qui a été le membre le plus actif de ce groupe de Travail, est le suivant :

- Les axiomes désignés ici par FR4 et FR5, qui sont toujours les plus difficiles à vérifier, sont conséquences de FR1, FR2 et FR3.

Ce groupe de travail poursuit cette année l'étude, d'une part, de la dualité locale, et d'autre part, de la dualité de Poincaré d'après l'exposé de Monsieur VERDIER au Séminaire de Bourbaki (1965).

I. GIORGIUTTI

## CATEGORIES TRIANGULEES

I. - Définition 1. *On appelle catégorie triangulée une catégorie additive munie :*

1) *d'un foncteur T qui est un automorphisme de C sur C appelé foncteur Translation*
2) *d'une classe $\mathcal{E}$ de sextuples $(X, Y, Z, u, v, w)$ appelés triangles de C, où X, Y, Z sont des objets de C et u, v, w des morphismes :*
*$u : X \longrightarrow Y$, $v : Y \longrightarrow Z$, $w : Z \longrightarrow T(X)$, tel que $\mathcal{E}$ possède les propriétés TR1, TR2, TR3, et TR4 énoncés ci-dessous.*

Un triangle sera noté

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "w"'] & \\ X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

Un morphisme de triangle est un triplet de morphismes (f,g,h) tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & T(X') \end{tikzcd}$$

Avec ces notations, on énonce les propriétés :

TR1 - chaque sextuple $(X, Y, Z, u, v, w)$ isomorphe à un triangle est un triangle.
- Chaque morphisme $u : X \longrightarrow Y$ est contenu dans un triangle.
- Le sextuple $(X, X, 0, I_X, 0, 0)$ est un triangle.(1)

TR2 $(X, Y, Z, u, v, w)$ est un triangle, si et seulement si $\big(Y, Z, T(X), v, w, -T(u)\big)$ l'est (on l'appellera translaté du triangle initial).

TR3 Etant donné deux triangles $(X, Y, Z, u, v, w)$ et $(X', Y', Z', u', v', w')$ et deux morphismes $f : X \longrightarrow X'$ et $g : Y \longrightarrow Y'$ commutant avec u et u', il existe un morphisme $h : Z \longrightarrow Z'$ (non nécessairement unique) tel que (f,g,h) soit un morphisme de triangle.

---

(1) Nous noterons I le morphisme $I_X$ quand il n'y a pas de confusion possible.

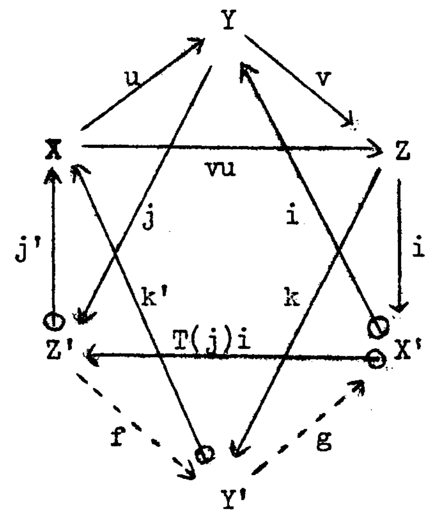
TR4 (C'est une sorte de loi de composition des triangles).

Supposons donnés trois triangles

$(X, Y, Z', u, j, j')$

$(Y, Z, X', v, i', i)$

$(X, Z, Y', vu, k, k')$




alors il existe des morphismes $f : Z' \longrightarrow Y'$ et $g : Y' \longrightarrow X'$, tel que $(Z', Y', X', f, g, T(j)\, i)$ soit un triangle, et que $f\, j = k\, v$, $T(u)\, k' = ig$, $k'f = j'$ et $g\, k = i'$. Ceci peut encore s'énoncer : $(I_X, v, f)$ et $(u, I_Z, g)$ sont des morphismes de triangles.

Remarque. Il résulte de TR1 et TR3 que dans un triangle, le composé de deux morphismes consécutifs est nul.

Définition 2. *Un foncteur additif $F : C \longrightarrow C'$ d'une catégorie triangulée dans une autre est appelé $\partial$-foncteur s'il transforme triangles en triangles.*

Définition 3. *Un foncteur additif $H : C \longrightarrow A$ d'une catégorie triangulée dans une catégorie abélienne est appelé foncteur cohomologique si pour chaque triangle $(X, Y, Z, u, v, w)$, la suite*

$$\dots\ H(T^i(X)) \xrightarrow{H(T^i(u))} H(T^i(Y)) \xrightarrow{H(T^i(v))} H(T^i(Z)) \xrightarrow{H(T^i(w))} H(T^{i+1}(X)) \dots$$

*est exacte*

Proposition 1. *Les foncteurs $\mathrm{Hom}_C(M, \cdot)$ et $\mathrm{Hom}_C(\cdot, M)$ sont des foncteurs cohomologiques.*

Montrons par exemple que $\mathrm{Hom}_C(M, \cdot)$ est un foncteur cohomologique. Pour cela, il suffit de montrer que pour un triangle $(X,Y,Z,u,v,w)$ la suite : $\mathrm{Hom}_C(M,X) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}_C(M,Y) \xrightarrow{v^*} \mathrm{Hom}_C(M,Z)$ est exacte, les autres exactitudes s'en déduisant par translation (TR2). On a évidemment $v^*u^* = 0$ puisque $v\,u = 0$. D'autre part, soit $\alpha \in \mathrm{Ker}\, v^*$ c'est-à-dire tel que $v\,\alpha = 0$. TR1 montre que $(M, 0, T(M), 0, 0, -I)$ est un triangle. On a alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & T(M) \arrow[r, "-I"] \arrow[d, dashed, "\beta"] & T(M) \arrow[d, "T(\alpha)"] \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & T(X) \arrow[r, "-T(u)"] & T(Y)
\end{tikzcd}$$

qui se complète par $\beta$ en vertu de TR3 . Comme T est un automorphisme, posons $\gamma = T^{-1}(\beta)$ et alors $u\gamma = \alpha$ d'où le résultat.

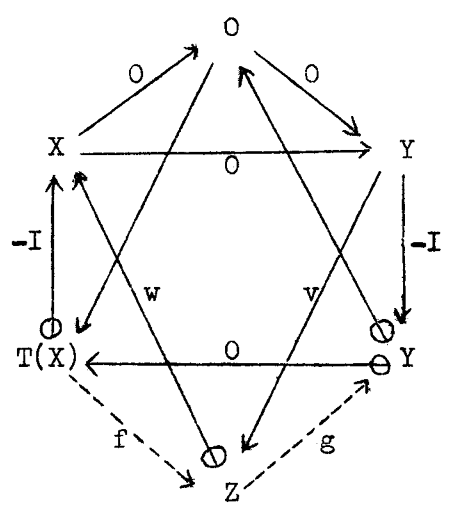
Corollaire 1. *Si* f *et* g *de l'axiome TR3 sont des isomorphismes, il en est de même de* h. (Lemme des cinq).

Proposition 2. *Soit* $(X,Y,Z,0,v,w)$ *un triangle. Alors il y a un isomorphisme* f *de* Z *dans* $Y \oplus T(X)$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dr, "w"] \arrow[dd, leftrightarrow] & \\
Y \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "\binom{I}{0}"'] & & T(X) \\
& Y \oplus T(X) \arrow[ur, "(0\ I)"'] &
\end{tikzcd}$$

*soit commutatif.*

En effet, TR4 donne :



Il suffit de montrer que Z est le produit direct de Y et de T(X) avec les projections -g et w. Pour cela, utilisons la proposition 1 et le lemme des cinq avec le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathrm{Hom}(M,Y) \arrow[r] \arrow[d, "I"] & \mathrm{Hom}(M,Z) \arrow[r] \arrow[d, "\binom{-g^*}{w^*}"] & \mathrm{Hom}(M,T(X)) \arrow[r] \arrow[d, "I"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,Y) \arrow[r, "(I\,o)"] & \mathrm{Hom}(M,Y) \oplus \mathrm{Hom}(M\ T(X)) \arrow[r, "\binom{o}{I}"] & \mathrm{Hom}(M,T(X)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Cela montre que $\binom{-g}{w}$ est un isomorphisme entre Z et $Y \oplus T(X)$.

L'isomorphisme réciproque est (v f).

<u>Proposition 3</u>. *Lorsque dans un triangle, l'un des morphismes admet un noyau, (respect. un conoyau), le triangle se scinde, c'est-à-dire est de la forme*

$$\begin{tikzcd}
 & Z \oplus T(X) \arrow[dl] & \\
X \oplus Y \arrow[rr, "\begin{pmatrix} o & I \\ o & o \end{pmatrix}"] & & Y \oplus Z \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

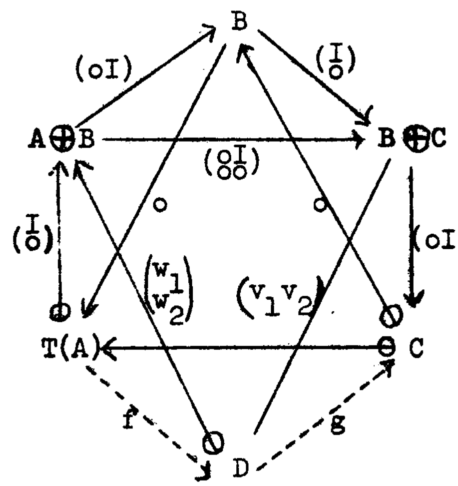
La proposition 2 démontre la proposition dans le cas où **u = o.** Supposons que v admette un noyau. Comme vu = 0, u se factorise à travers Ker v : u = (Ker v)u'. u et u' sont contenus dans deux triangles.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "I"] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "\mathrm{Ker}\ v"] & Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "f"] & T(X) \arrow[d, "I"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & T(X)
\end{tikzcd}$$

Le couple I, Ker v se complète par f d'après TR3, et I et Ker v étant des monomorphismes, f l'est aussi (Proposition 1 et lemme des cinq). On en déduit que v' = 0 donc T(X) est isomorphe à $Z' \oplus T(Y')$ (Proposition 2). D'autre part, dans le triangle contenant Ker v : (Y',Y,Z", Ker v, v", w"), w" est nul car Ker v est injectif, donc Y est isomorphe à $Y' \oplus Z''$. Plus précisément, on a le diagramme commutatif où $\alpha$, $\beta$, sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "u'"] \arrow[dd, leftrightarrow, "\alpha"'] & & Y \arrow[r] \arrow[dd, leftrightarrow, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[dd, dashed, leftrightarrow, "\gamma"] & T(X) \arrow[dd, dashed, leftrightarrow] \\
& Y' \arrow[ur, "\mathrm{Ker}\, v"] \arrow[dr, "\binom{I}{o}"'] & & & \\
T^{-1}(Z')\oplus Y' \arrow[ur, "(o\ I)"'] & & Y'\oplus Z'' \arrow[r] & D \arrow[r] & Z'\oplus T(Y')
\end{tikzcd}$$

et ce diagramme se complète comme il est indiqué. Il suffit maintenant de montrer que dans un triangle :




$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "\begin{smallmatrix}w_1\\ w_2\end{smallmatrix}"'] & \\
A\oplus B \arrow[rr, "\begin{pmatrix}o&I\\o&o\end{pmatrix}"] & & B\oplus C \arrow[ul, "(v_1 v_2)"']
\end{tikzcd}$$

D se scinde. Pour cela, utilisons TR4. On en déduit $w_2 = o$, $g\, v_1 = o$ et $g\, v_2 = I$ ; d'où le diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(M,A\oplus B) \arrow[r] \arrow[d, "I"] & \mathrm{Hom}(M,B\oplus C) \arrow[r, "(v_1 v_2)^*"] \arrow[d, "I"] & \mathrm{Hom}(M,D) \arrow[r, "\binom{w_1}{w_2}^*"] \arrow[d, "\binom{g}{w_1}^*"] & \mathrm{Hom}\big(M,T(A)\oplus T(B)\big) \arrow[r] \arrow[d, "I"] & \mathrm{Hom}(M,T(B)\oplus T(C)) \arrow[d, "I"] \\
\mathrm{Hom}(M,A\oplus B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,B\oplus C) \arrow[r, "\begin{pmatrix}o&I\\o&o\end{pmatrix}"] & \mathrm{Hom}(M,C\oplus A) \arrow[r, "\begin{pmatrix}o&I\\o&o\end{pmatrix}"] & \mathrm{Hom}\big(M,T(A)\oplus T(B)\big) \arrow[r] & \mathrm{Hom}\big(M,T(B)\oplus T(C)\big)
\end{tikzcd}$$

la suite de la 2ème ligne étant exacte, le lemme des cinq montre alors que $\binom{g}{w_1}$ est un isomorphisme et il en résulte un isomorphisme du triangle initial dans le triangle :

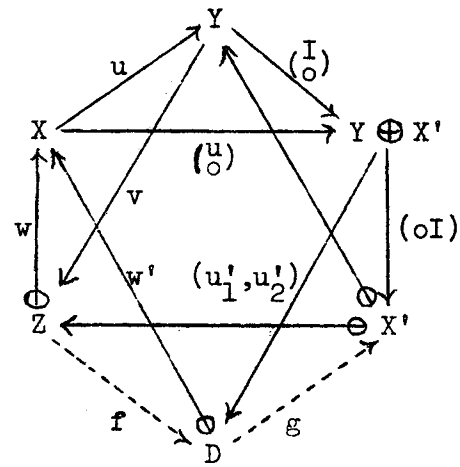
$$\begin{tikzcd}
& C\oplus A \arrow[dl, "\begin{pmatrix}o&I\\o&o\end{pmatrix}"'] & \\
A\oplus B \arrow[rr, "\begin{pmatrix}o&I\\o&o\end{pmatrix}"] & & B\oplus C \arrow[ul, "\begin{pmatrix}o&I\\o&o\end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

<u>Proposition 4</u>. *La somme de deux triangles est un triangle.*

Montrons d'abord la proposition pour les triangles :

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "w"'] & \\ X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X' \arrow[dl] & \\ 0 \arrow[rr] & & X' \arrow[ul, "I"'] \end{tikzcd}$$

Appliquons TR4 : on obtient les relations $fv = u'_1$, $w'f = w$ et $w'\ u'_2 = o$. Ces relations montrent qu'il existe un diagramme commutatif analogue à celui de la démonstration précédente. Le lemme des cinq montre alors que $(f\ u'_2)$ est un isomorphisme de $Z \oplus X'$ dans D qui définit un isomorphisme du triangle




$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "w'"'] & \\ X \arrow[rr, "\binom{u}{o}"] & & Y \oplus X' \arrow[ul, "(u'_1{,}u'_2)"'] \end{tikzcd} \quad \text{dans} \quad \begin{tikzcd} & Z \oplus X' \arrow[dl, "(wo)"'] & \\ X \arrow[rr, "\binom{u}{o}"] & & Y \oplus X' \arrow[ul, "\begin{pmatrix} vo \\ oI \end{pmatrix}"'] \end{tikzcd}$$

Considérons maintenant deux triangles quelconques : $(X,Y,Z,u,v,w)$ et $(X',Y',Z',u',v',w')$. Le résultat précédent montre que :

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\binom{w}{o}"'] & \\ X \oplus X' \arrow[rr, "\begin{pmatrix} uo \\ oI \end{pmatrix}"] & & Y \oplus Y' \arrow[ul, "(vo)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "\binom{o}{w'}"'] & \\ Y \oplus X' \arrow[rr, "\begin{pmatrix} Io \\ ou' \end{pmatrix}"] & & Y \oplus Y' \arrow[ul, "(ov')"'] \end{tikzcd}$$

sont des triangles. On obtient le résultat ci-dessus en appliquant TR4 au diagramme :

$$\begin{tikzcd} & Y \oplus X' \arrow[dr, "\begin{pmatrix} Io \\ ou' \end{pmatrix}"] & \\ X \oplus X' \arrow[ur, "\begin{pmatrix} uo \\ oI \end{pmatrix}"] \arrow[rr, "\begin{pmatrix} uo \\ ou' \end{pmatrix}"] & & Y \oplus Y' \end{tikzcd}$$

## 2. - LA CATEGORIE TRIANGULEE K(A).

Soit A une catégorie abélienne. Soit K(A) la catégorie dont les objets sont des complexes de A et dont les morphismes sont des classes d'équivalence d'homotopie de morphismes de complexes.

Remarque. K(A) n'est pas en général abélienne. Par exemple si A = Ab, soit

$$X : 0 \longrightarrow Z \xrightarrow{2} Z \longrightarrow 0$$

$$Y : 0 \longrightarrow Z \xrightarrow{2} Z \longrightarrow \frac{Z}{2} \longrightarrow 0$$

Les morphismes 0, 2, 2, 0 et 0,0,0,0 sont homotopes par 0,1, 0 et les noyaux sont respectivement 0 et X qui ne sont pas homotopes puisque 0 est acyclique et X ne l'est pas.

Le foncteur de translation T appliqué à un complexe X change les indices d'une unité et le signe de la différentielle. T appliqué à un morphisme f change les indices d'une unité :

$$\big(T(X)\big)^n = X^{n+1} \qquad d^n_{T(X)} = -d^{n+1}_X \qquad \big(T(f)\big)^n = f^{n+1}$$

Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de K(A) et désignons par $X \square_u Y$ le complexe tel que $(X \square_u Y)^n = X^{n+1} \oplus Y^n$ et

$$d_{X \square_u Y} = \begin{pmatrix} -T(d_X) & 0 \\ T(u) & d_Y \end{pmatrix}$$

Par définition, un sextuple est un triangle si et seulement s'il est isomorphe à un sextuple de la forme : $\left(X, Y, X \square_u Y, u, \binom{0}{I}, (I\,0)\right)$

Vérifions les axiomes TRi

TR1. Il suffit de vérifier que les triangles suivants sont isomorphes.

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[rr, "I"'] & & X \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} & X \square_I X \arrow[dl] & \\ X \arrow[rr, "I"'] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Pour cela, montrons que $I_{X \square X}$ est homotope à zéro. L'opérateur d'homotopie est $k = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>TR2</u>. Il faut d'abord montrer que les ~~triangles~~ sextuples suivants sont isomorphes :

$$\begin{tikzcd} & T(X) \arrow[dl, "-T(u)"'] & \\ Y \arrow[rr, "\binom{o}{I}"] & & X\square_u Y \arrow[ul, "(Io)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y\square(X\square Y) \arrow[dl, "(Ioo)"'] & \\ Y \arrow[rr, "\binom{o}{I}"] & & X\square_u Y \arrow[ul, "\begin{pmatrix} oo \\ Io \\ oI \end{pmatrix}"'] \end{tikzcd}$$

L'isomorphisme du second dans le premier est $\left(I, \begin{pmatrix} Io \\ oI \end{pmatrix}, (oIo)\right)$ et l'isomorphisme réciproque $\left(I, \begin{pmatrix} Io \\ oI \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -T(u) \\ I \\ o \end{pmatrix}\right)$. Pour le montrer, il faut d'abord s'assurer que $(oIo)$ et $\begin{pmatrix} -T(u) \\ I \\ o \end{pmatrix}$ sont des morphismes de complexes, c'est-à-dire que

$$-T(d_X)\,(o\ I\ o) = (o\ I\ o) \begin{pmatrix} -T(d_Y) & 0 & 0 \\ 0 & -T(d_X) & 0 \\ I & T(u) & d_Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -T^2(u) \\ I \\ 0 \end{pmatrix} \left(-T(d_X)\right) = \begin{pmatrix} -T(d_Y) & 0 & 0 \\ 0 & -T(d_X) & 0 \\ I & T(u) & d_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T(u) \\ I \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puis il faut montrer que certains diagrammes sont commutatifs à une homotopie près. On trouve en particulier que :

$(I\ o\ o)$ et $(o\ -T(u)\ o)$ sont homotopes avec $k = (v\ o\ I)$

Ce qui montre que le premier morphisme est un morphisme de triangle

$$\begin{pmatrix} -T(u) & o \\ I & o \\ o & o \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} o & o \\ I & o \\ o & I \end{pmatrix} \text{ sont homotopes avec } k = \begin{pmatrix} o & o & I \\ o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix}$$

Ce qui montre que le second morphisme est un morphisme de triangle

$$\begin{pmatrix} o & -T(u) & o \\ o & I & o \\ o & o & o \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I & o & o \\ o & I & o \\ o & o & I \end{pmatrix} \text{ sont homotopes avec } k = \begin{pmatrix} o & o & I \\ o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix}$$

Ce qui montre que ce sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Il faut montrer de même que les triangles suivants sont isomorphes :

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "\binom{o}{I}"'] & \\
T^{-1}(X \square_u Y) \arrow[rr, "-(Io)"] & & X \arrow[ul, "u"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & T^{-1}(X \square_u Y) \square X \arrow[dl, "\begin{pmatrix} I & o & o \\ o & I & o \end{pmatrix}"'] & \\
T^{-1}(X \square_u Y) \arrow[rr, "-(Io)"] & & X \arrow[ul, "\begin{pmatrix} o \\ o \\ I \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}
$$

L'isomorphisme du premier triangle dans le second est $\left(\begin{pmatrix} Io \\ oI \end{pmatrix}, I, \begin{pmatrix} o \\ I \\ o \end{pmatrix}\right)$, l'isomorphisme réciproque est $\left(\begin{pmatrix} Io \\ oI \end{pmatrix}, I, (o, I, u)\right)$. On le démontre comme ci-dessus.

<u>TR3</u>. Le morphisme h est $\begin{pmatrix} T(f) & o \\ o & g \end{pmatrix}$

<u>TR4</u>.

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "v"] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
X \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "w"] & & Z \arrow[d] \arrow[ddl] \\
X \square_u Y \arrow[u] \arrow[dr, dashed, "f"'] & & Y \square_v Z \arrow[ll, "\begin{pmatrix} o & o \\ I & o \end{pmatrix}"'] \\
 & X \square_w Z \arrow[uul] \arrow[ur, dashed, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Les morphismes f et g seront $f = \binom{Io}{ov}$ et $g = \begin{pmatrix} T(u) & o \\ o & I \end{pmatrix}$. Il faut donc montrer l'isomorphisme des triangles :

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \square Z \arrow[dl, "\binom{oo}{Io}"'] & \\
X \square Y \arrow[rr, "f"] & & X \square Z \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (X \square Y) \square (X \square Z) \arrow[dl, "\begin{pmatrix} Iooo \\ oIoo \end{pmatrix}"'] & \\
(X \square Y) \arrow[rr, "f"] & & X \square Z \arrow[ul, "\begin{pmatrix} oo \\ oo \\ Io \\ oI \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}
$$

L'isomorphisme du premier dans le second est $\left(I, I, \begin{pmatrix} oo \\ Io \\ oo \\ oI \end{pmatrix}\right)$, l'isomorphisme réciproque est $\left(I, I, \begin{pmatrix} o & I & T(u) & o \\ o & o & o & I \end{pmatrix}\right)$

Définition 4. *Nous désignerons par* H *le foncteur de* K(A) *dans* A *qui à un complexe fait correspondre son* $0^{\text{ème}}$ *groupe de cohomologie et par* $H^i, H \circ T^i (i \in Z)$.

Proposition 5. H *est un foncteur cohomologique.*

Pour le démontrer, il suffit de vérifier que

$$H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H\binom{0}{I}} H(X \square_u Y)$$

est une suite exacte. C'est une zéro suite. Montrons que c'est une suite exacte dans le cas où A = Ab.

Si $a \in \operatorname{Ker} H \binom{0}{I}$, il existe y tel que $y \in \operatorname{Ker} d_Y^0$ et $a = \bar{y}$, et que $\binom{0}{y} \in \operatorname{Im} (d^{-1}(X \square Y))$ ; c'est-à-dire qu'il existe $\alpha = \binom{x}{y'}$ élément de $X^0 \oplus Y^{-1}$ tel que $\begin{pmatrix} -d_X^0 & 0 \\ u^0 & d_Y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

D'où $d_X^0 (x) = 0$ et $d_Y^{-1}(y') + u^0 (x) = y$

$\bar{x}$ est élément de H(X) et $u^0(x)$ ne diffère de y que par un bord donc $\bar{y}$ est un élément de Im $(H(u))$.

## 3. - SYSTEME MULTIPLICATIF ET CATEGORIE LOCALISEE.

Définition 5. *Soit* C *une catégorie triangulée une classe* S *de morphismes de* C *est appelée système multiplicatif s'il satisfait aux conditions suivantes :*

FR1. *Si* f *et* $g \in S$ *et* gf *existe alors* $gf \in S$. *Pour tout objet* X *de* C, $I_X \in S$.

FR2. $s \in S \Longleftrightarrow T(s) \in S$ *où* T *est le foncteur translation.*

FR3. *Dans l'axiome TR3, si on suppose que* f *et* g *sont éléments de* S, *le morphisme* h *peut être choisi élément de* S.

On en déduit deux conséquences importantes.

FR4. *Un diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

*où* s $\in$ S *peut être complété en un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "v"] \arrow[d, "t"'] & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

*où* t $\in$ S. *La propriété symétrique est vraie.*

En effet, u peut se plonger dans un triangle (X,Y,Y', u,u',u"). De même u's peut se plonger dans un triangle, et d'après FR3, il existe t $\in$ S tel que le diagramme soit commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "u's"] \arrow[d, "s"] & Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "I"] & Z'' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "t"] & T(Z) \arrow[d, "T(s)"] \\ Y \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "u''"'] & T(X) \arrow[r, "-T(u)"'] & T(Y) \end{tikzcd}$$

et le diagramme

$$\begin{tikzcd} T^{-1}(Z'') \arrow[r, "-T^{-1}(v')"] \arrow[d, "T^{-1}(t)"'] & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif.

La propriété symétrique se démontre de la même manière, à l'aide du diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & Y' \arrow[r] \arrow[dr] & T(X) \arrow[r, "-T(u)"] \arrow[d, "T(s)"] & T(Y) \arrow[r] \arrow[d, "t"] & T(Y') \arrow[d, "I"] \\ & & & T(Z) \arrow[r] & Z'' \arrow[r] & T(Y') \end{tikzcd}$$

<u>FR5</u>. *Si* f *et* g *sont des morphismes de* C *les conditions suivantes sont équivalentes.*

*1) il existe* s $\in$ S *tel que* sf = sg

*2) il existe* t $\in$ S *tel que* ft = gt.

On peut se ramener au cas où g = 0. Supposons alors par exemple que sf = 0 ; on a :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I"] & X \arrow[r] \arrow[d, "s"] & T \arrow[r, "v"] \arrow[d, "s'"] & T(Z) \arrow[d, "I"] \\
Z \arrow[r, "o"] & Y \arrow[r, "\binom{I}{o}"] & Y+T(Z) \arrow[r, "(oI)"] & T(Z)
\end{tikzcd}$$

avec s' ∈ S d'après la proposition 2 et FR3. D'après FR4, le diagramme suivant se complète avec t ∈ S

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, dashed, "w"] \arrow[d, dashed, "t"] & T \arrow[d, "s'"] \\
T(Z) \arrow[r, "\binom{o}{I}"] & Y+T(Z)
\end{tikzcd}$$

et $T(f)\, t = T\,(f)\,(oI)\,\binom{o}{I}\, t = T\,(f)\,(oI)\, s'\, w = T\,(f)\, v\, w = 0.$

De même, on a les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "0"] \arrow[d, "s"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "I"] & T(Y)+Z \arrow[r] \arrow[d, "s'"] & T(X) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & Z \arrow[r] & T \arrow[r] & T(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(Y)+Z \arrow[r, "(oI)"] \arrow[d, "s'"] & Z \arrow[d, dashed, "t"] \\
T \arrow[r, dashed] & U
\end{tikzcd}$$

qui démontrent la réciproque.

<u>Définition 6</u>. *Soit* C *une catégorie triangulée et* S *un système multiplicatif. Une catégorie localisée de* C *par rapport à* S *est une catégorie triangulée* $C_S$ *avec un* ∂*-foncteur* $Q : C \longrightarrow C_S$ *tel que :*

*a)* Q (s) *est un isomorphisme pour chaque* s ∈ S

*b)* $C_S$ *est universel pour la propriété a), c'est-à-dire : Si* Q' *est un* ∂*-foncteur de* C *dans* D *possédant la propriété a), il y a un unique* ∂*-foncteur* R *de* $C_S$ *dans* D *tel que* Q' = R o Q.

<u>Proposition 6</u>. *Si* C *est une catégorie triangulée et* S *un système multiplicatif, alors* $C_S$ *existe.*

Définissons $C_S$ comme suit : les objets de $C_S$ sont les objets de C. Si X et Y sont deux objets, on considère la classe des couples. (s,f) où s est élément de S, $s : X' \longrightarrow X$ et $f : X' \longrightarrow Y$. On dira que deux couples $(s_1,f_1)$ et $(s_2,f_2)$ sont équivalents, s'il existe un X' et deux morphismes $a_1 : X' \longrightarrow X_1$ et $a_2 : X' \longrightarrow X_2$ tels que $s_1\, a_1 = s_2\, a_2 \in S$ et $f_1\, a_1 = f_2\, a_2$.

Il est équivalent de dire qu'il existe deux morphismes $t : X' \longrightarrow X_1$ et $a : X' \longrightarrow X_2$ tels que $t \in S$, $s_1\, t = s_2\, a$ et $f_1\, t = f_2\, a$.

En effet, la seconde relation entraîne la première. Réciproquement, appliquons FR4, (fig. 1) au couple $s_1$, $s_2\, a_2$.

On a $s_1\, s_3 = s_1\, a_1\, a_3$ et d'après FR5, il existe $s_4$ tel que $s_3\, s_4 = a_1\, a_3\, s_4$, d'où le résultat.

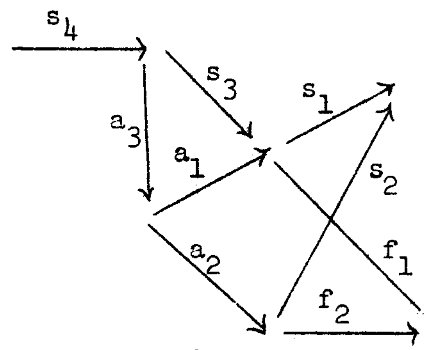


fig. 1

Il est évident que la relation ci-dessus est réflexive et symétrique. On montre qu'elle est transitive en appliquant FR4 (fig. 2).

$\mathrm{Hom}_{C_S}(X,Y)$ sera le quotient de la classe de ces couples par cette relation d'équivalence. On notera f/s l'élément représenté par le couple (s,f).

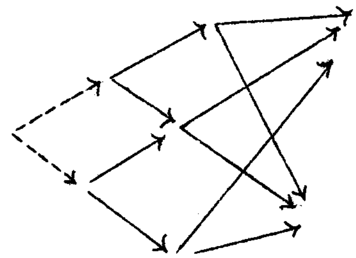


fig. 2

Soient $f_1/s_1 : X \longrightarrow Y$ et $f_2/s_2 : Y \longrightarrow Z$ deux morphismes de $C_S$. On définit la composition en utilisant FR4 (fig. 3). On montre alors que cette définition est compatible avec la relation d'équivalence en appliquant successivement FR4 et FR5. L'identité de X est $I_X/I_X$. Pour vérifier l'associativité, on utilise FR4, puis 2 fois FR5. Le foncteur Q de C dans $C_S$ qui a f fait correspondre f/I est le foncteur canonique. Désormais, on écrira f pour f/I.

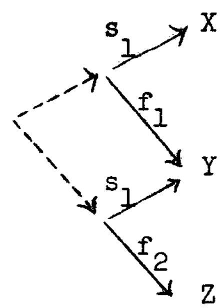


fig. 3

Soit maintenant deux morphismes $f_1/s_1 : X \longrightarrow Y$ et $f_2/s_2\ X \longrightarrow Y$. On applique FR4 (fig. 4) au couple $s_1\ s_2$ :

et on pose $f_1/s_1 + f_2/s_2 = (f_1\, s_3 + f_2\, f_3)/s_1 s_3$

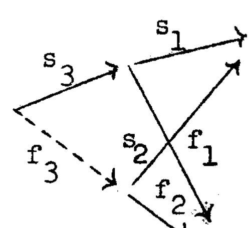


fig. 4

On vérifie qu'on définit ainsi une loi de groupe abélien sur $\mathrm{Hom}_{C_S}(X,Y)$ distributive par rapport à la composition. L'objet nul de C est un objet nul dans $C_S$. La somme directe dans $C_S$ est la somme directe dans C, comme il résulte immédiatement du théorème sur les sommes et produits directs de deux objets dans une catégorie préadditive.

$$X_1 \underset{p_1/I}{\overset{i_1/I}{\rightrightarrows}} X_1 \oplus X_2 \underset{p_2/I}{\overset{i_2/I}{\rightrightarrows}} X_2$$

Le foncteur T passe au quotient et devient un automorphisme puisque $s \in S \Longleftrightarrow T(s) \in S$. Enfin, nous définissons les triangles de $C_S$ comme isomorphes à l'image de triangles de C.

<u>Remarque</u>. Il est facile de montrer que l'on peut représenter aussi un morphisme de $C_S$ à l'aide d'un couple dual $(s_1,f_1)$ ou $s_1 \in S$, $f_1 : X \longrightarrow X_1$ et $s_1 : Y \longrightarrow X_1$. On notera $s_1 \backslash f_1$ l'élément représenté par le couple $(s_1,f_1)$.

Montrons que $C_S$ est triangulée.

<u>TR1</u>. Il suffit de montrer qu'un morphisme f/s peut s'introduire dans un triangle. Or f peut être mis dans un triangle $(X',Y,Z,f,u,v)$ et comme les éléments de S sont des isomorphismes pour $C_S$, $\big(X,Y,Z,\ f/s,\ u/I,\ T(s)\ v\big)$ est un triangle de $C_S$.

<u>TR2</u>. est évident.

<u>TR3</u>. Il suffit de le montrer pour deux triangles qui sont images de triangles de C. En écrivant que le diagramme est commutatif, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & T(X) \\
X_o \arrow[u, "r"] \arrow[r, "u_o"] \arrow[d, "f"'] & Y_o \arrow[u, "s"'] \arrow[r, dashed, "v_o"] \arrow[d, "g"'] & Z_o \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed, "w_o"] \arrow[d, dashed, "h"'] & T(X_o) \arrow[u, dashed] \arrow[d, dashed] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & T(X')
\end{tikzcd}$$

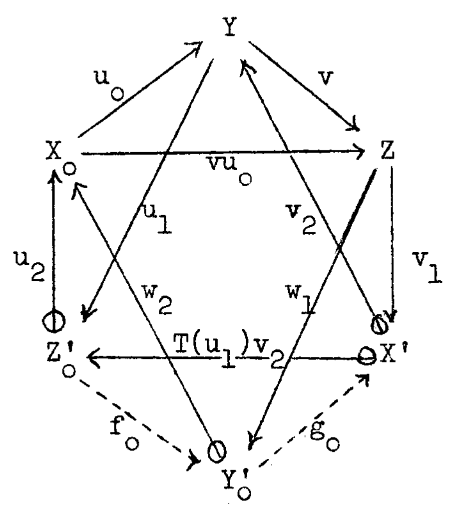
En complétant le diagramme, on a le résultat.

<u>TR4</u>. On peut se ramener au cas où v est l'image de $v \in C$, u et u v de la forme $u_o/s$ et v $u_o/s$ et où le triangle construit sur v est l'image d'un triangle de C. On a alors les isomorphismes (puisque TR1, TR2, TR3 sont vérifiés dans $C_S$) :

$$\begin{tikzcd}
X_o \arrow[r, "u_o"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "I"] & Z'_o \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "\alpha"] & T(X_o) \arrow[d, "T(s)"] \\
X \arrow[r, "u_o/s"] & Y \arrow[r, "u'_1"] & Z' \arrow[r, "u'_2"] & T(X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_o \arrow[r, "vu_o"] \arrow[d] & Z \arrow[r, "w_1"] \arrow[d] & Y'_o \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "\beta"] & T(X_o) \arrow[d, "T(s)"] \\
X \arrow[r, "vu_o/s"] & Z \arrow[r, "w'_1"] & Y' \arrow[r, "w'_2"] & T(X)
\end{tikzcd}$$

En appliquant TR4, on obtient :




alors le triangle$(Z', Y', X', \beta f_o \alpha^{-1}, g_o \beta^{-1}, T(\alpha u_1) v_2)$ résoud le problème. En effet, il est isomorphe à $(Z'_o, y'_o, X', f_o, g_o, T(u_1) v_2)$ par $(\alpha , \beta, I)$ et d'autre part, on a bien les relations :

$$w'_2\ \beta\ f_o\ \alpha^{-1} = T(s)\ w_2\ f_o\ \alpha^{-1} = u'_2$$

$$\beta\ f_o\ \alpha^{-1}\ u'_1 = \beta\ f_o\ \alpha^{-1}\ \alpha\ u_1 = \beta\ w_1\ v = w'_1\ v$$

$$v_2\ \ g_o\ \beta^{-1} = T(u_o)\ w_2\ \beta^{-1} = T(u_o)\ T(s)^{-1}\ T(s)\ w_2\ \beta^{-1} = u\ w'_2$$

$$g_o\ \ \beta^{-1}\ w'_1 = g_o\ \beta^{-1}\ \beta\ w_1 = g_o\ w_1 = v_1$$

$C_S$ est bien universel, le foncteur Q' étant défini par $Q'(f/s) = fs^{-1}$ (ce qui est compatible avec la relation d'équivalence).

Proposition 7. *Soit* C *une catégorie triangulée,* S *un système multiplicatif dans* C, *et* D *une sous-catégorie triangulée de* C *(pleine). Alors* $S \cap D$ *est un système multiplicatif dans* D. *D'autre part, si l'une des conditions suivantes est réalisée, le foncteur canonique de* $D_{S\cap D}$ *dans* $C_S$ *est pleinement fidèle.*

*1°) Pour tout objet* X *de* D *et tout morphisme* $s : R \longrightarrow X$ *où* $s \in S$, *il existe* $s' \in S$, $s' : R' \longrightarrow R$ *tel que* $ss'$ *soit un élément de* S *et* $R' \in D$.

*2°) La condition duale.*

La première partie de la proposition est évidente.

Montrons que 1) entraîne que le foncteur est pleinement fidèle. En effet, soit u/s un morphisme de X dans Y de $C_S$ où X et Y sont éléments de D. Il existe $R \in D$ et t tel que $st \in S$. ut/us est un morphisme de $D_{S\cap D}$.

Soit maintenant deux morphismes dans $D_{S\cap D}$ dont les images sont identiques dans $C_S$. C'est-à-dire qu'il existe X''' tel que le diagramme ci-contre soit commutatif. Alors, il existe R et t' tel que $R \in D$ et $stt' \in S$, d'où le résultat.

$$\begin{tikzcd}
 & & X' \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "u"] & X \\
R \arrow[r, dashed, "t'"] & X''' \arrow[ur, "t"] \arrow[dr] & & \\
 & & X'' \arrow[uur, "s'"] \arrow[r, "u'"] & Y
\end{tikzcd}$$

## 4. - Qis (A) ET LA CATEGORIE DERIVEE.

Soit A une catégorie abélienne et K(A) la catégorie triangulée du § 2. Nous appellerons quasi isomorphisme dans K(A) un morphisme qui induit un isomorphisme sur la cohomologie. Appelons Qis (A) la classe des quasi-isomorphismes.

Proposition 8. Qis (A) *est un système multiplicatif dans* K(A).

FR1 et FR2 sont évidents.

FR3. On se donne

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & T(X') \end{tikzcd}$$

où f et g $\in$ Qis. Le diagramme se complète avec h. $H^i$ étant un foncteur cohomologique, on a les suites exactes :

$$\begin{tikzcd} H^i(X) \arrow[r] \arrow[d, "H^i(f)"] & H^i(Y) \arrow[r] \arrow[d, "H^i(g)"] & H^i(Z) \arrow[r] \arrow[d, "H^i(h)"] & H^{i+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "H^{i+1}(f)"] & H^{i+1}(Y) \arrow[d, "H^{i+1}(g)"] \\ H^i(X') \arrow[r] & H^i(Y') \arrow[r] & H^i(Z') \arrow[r] & H^{i+1}(X') \arrow[r] & H^{i+1}(Y') \end{tikzcd}$$

Et le lemme des cinq montre que $H^i(h)$ est un isomorphisme pour tout i.

Définition 7. *La catégorie dérivée de* A,D(A) *est la catégorie* $K(A)_{Qis(A)}$

Désignons par $K^+(A)$, $K^-(A)$ et $K^b(A)$ les catégories des complexes limités à gauche, limités à droite, limités des deux côtés. Ce sont des sous-catégories triangulées de K(A). On peut définir d'une manière analogue à D(A) : $D^+(A)$, $D^-(A)$, $D^b(A)$, qui sont des sous-catégories de D(A), d'après la proposition 7.

Montrons par exemple que $K^+(A)$ satisfait la condition 2). Soit

$s : X \longrightarrow R$ un quasi-isomorphisme tel que $X^n = o$ pour $n < o$. R' est alors défini par $R'_n = o$ pour $n < -1$, $R'_{-1} = \operatorname{Im} d_R^{-1}$ et $R_n$ pour $n \geq o$. s' se définissant d'une manière évidente.

?

<u>Proposition 9</u>. *Si* f : $X \longrightarrow Y$ *est un morphisme de complexe, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il représente le morphisme nul dans* D(A) *est qu'il existe* s : $Y \longrightarrow Y'$, *avec* $s \in$ Qis (A) *et* sf *homotope à zéro.*

Cela résulte immédiatement de la définition de D(A).

<u>Remarques</u>.

1°) Si f est homotope à zéro, il satisfait à la condition de la proposition 9, mais la réciproque est fausse.

Par exemple, soient X le complexe :

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{2} Z \longrightarrow \frac{Z}{2} \longrightarrow 0$$

f l'identité de X et g le morphisme nul g : $X \longrightarrow 0$. Alors $g \in$ Qis (A) puisque X est acyclique et gf = 0, mais cependant f n'est pas homotope à zéro. En effet, si k est l'opérateur d'homotopie, on aurait I = 2 k ce qui est impossible.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "2"] \arrow[dl, "0"'] \arrow[d, "I"] & Z \arrow[dl, "k"] \\
0 \arrow[r] & Z &
\end{tikzcd}$$

2°) Si f satisfait à la condition de la proposition 9, f induit le morphisme nul sur la cohomologie, mais la réciproque est fausse.

Par exemple, soit f : $X \longrightarrow Y$ le morphisme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "2"] \arrow[d, "I"] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Y & 0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & Z/3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le diagramme pour la cohomologie est :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & Z/2 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 & 3Z & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

f induit donc 0 sur la cohomologie. D'autre part, dans la situation où t est un quasi-isomorphisme, t f n'est pas homotope à zéro. En effet, supposons qu'il le soit par l'opérateur k. En $X_2$, le groupe de cohomologie est Z/2. Prenons un $x \in X_2$ qui soit un cycle et dont l'image dans Z/2 est 1. 2 x est un bord, donc il existe $y \in X_1$ tel que $d(y) = 2x$.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "t_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "t_2"] \arrow[dl, "k"'] & {} \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "1"] & Z/3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'autre part, $k\,d\,(y) = t_1\,(y)$ et $t_2\,(2x) = 2\,t_1\,(y)$ donc $k\,(2x) = t_2\,(x)$. Or $t_2(x)$ est impair, d'où la contradiction.

Nous avons donc les implications strictes suivantes :
$f = g \Longrightarrow$ f homotope à g $\Longrightarrow$ f et g sont le même morphisme dans D(A) $\Longrightarrow$ f et g donne le même morphisme sur la cohomologie.

Proposition 10. *Soit une suite exacte de complexe de* K(A)

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$$

*Posons* $s_1 = (o\,v) : T(X) \square Y \longrightarrow Z$ et $v_1 = (I\,o) : T(X) \square Y \longrightarrow T(X)$ *Alors* $(X, Y, Z, u', v', w')$ avec $u' = u$, $v' = v$, $w' = v_1/s_1$ *est un triangle de* D(A). *Réciproquement, tout triangle de* D(A) *est isomorphe à un triangle de cette forme.*

Montrons d'abord que, dans les conditions de l'énoncé, $s_1$ est un élément de Qis(A). Il suffit de le démontrer dans le cas où A est Ab.

$$\begin{tikzcd}
X_n \oplus Y_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "(0\ v_{n-1})"] & X_{n+1} \oplus Y_n \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ u_{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(0\ v_n)"] & X_{n+2} \oplus Y_{n+1} \arrow[d, "(0\ v_{n+1})"] \\
Z_{n-1} \arrow[r] & Z_n \arrow[r] & Z_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Soit donc un cycle de $X_{n+1} \oplus Y_n$ tel que $(o v_n)\binom{x}{y}$ soit un bord dans $Z_n$. On a donc $d_X^{n+1}(x) = o$ , $u_{n+1}(x) + d_Y^n(y) = o$ et $\big((\exists z)\ (v_n(y) = d_Z^{n-1}(z)\big)$. Puisque v est surjectif, il existe $y_o$ tel que $v_{n-1}(y_o) = z$ et on a :

$$v_n(y) = d_Z^{n-1}(v_{n-1}(y_o)) = v_n\ d_Y^{n-1}(y_o).$$

Donc $y - d_Y^{n-1}(y_o)$ est élément de Ker v, c'est-à-dire de Im u et il existe $x_o$ tel que : $y - d_Y^{n-1}(y_o) = u_n(x_o)$. D'où : $u_{n+1}(d_X^n(x_o)) = d_Y^n\ u_n(x_o) = d_Y^n(y) = -u_{n+1}(x)$. Comme $u_{n+1}$ est injectif $x = -d_X^n(x_o)$. La relation :

$$\begin{pmatrix} -d_X^n & o \\ u_n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

montre alors que $\binom{x}{y}$ est un bord, donc que l'application déduite de $s_1$ est injective.

Soit maintenant z un cycle de $Z_n$ ; comme v est surjectif, on sait qu'il existe y tel que $v_n(y) = z$ et $v_{n+1}\ d_Y^n(y) = d_z^n\ v_n(y) = d_Z^n(z) = o$. Donc $d_Y^n(y)$ appartient à l'image de u et il existe x tel que $u_{n+1}(x) + d_Y^n(y) = o$.

D'autre part $d_Y^{n+1}\big(u_{n+1}(x)\big) = u_{n+2}\big(d_X^{n+1}(x)\big) = o$. Comme $u_{n+2}$ est injectif $d_X^{n+1}(x) = o$. Ce qui montre que $\binom{x}{y}$ est un cycle et que l'application déduite de $s_1$ est surjective.

Le résultat se déduit alors du fait que $(X,Y,T(X)\square Y, u, \binom{o}{I}, (I o))$ et $(X,Y,Z,u,v, v_1/s_1)$ sont deux triangles isomorphes dans D(A).

Pour montrer que tous les triangles sont de cette forme, il suffit de remarquer que tous les triangles construits sur un morphisme u sont isomorphes et qu'un morphisme quelconque u est équivalent à un morphisme injectif.

Considérons le morphisme $\begin{pmatrix} u \\ 0 \\ I \end{pmatrix} : X \longrightarrow Y \oplus (X \square_I X)$

Comme $\binom{o}{I}$ est homotope à 0 ce morphisme est homotope à $\begin{pmatrix} u \\ o \\ o \end{pmatrix}$

On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "I"'] & Y \arrow[d, "\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}"] \\
X \arrow[r, "\begin{pmatrix} u \\ 0 \\ I \end{pmatrix}"] & Y \oplus (X \square_I X)
\end{tikzcd}$$

$\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un quasi-isomorphisme.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
Y_{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] \arrow[d] & Y_n \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}"] & Y_{n+1} \arrow[d] \\
Y_{-1} \oplus X_n \oplus X_{n-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} d_Y^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^n & 0 \\ 0 & I & d_X^{n-1} \end{pmatrix}"] & X_n \oplus X_{n+1} \oplus X_n \arrow[r, "\begin{pmatrix} d_Y^{n} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & I & d_X^{n} \end{pmatrix}"] & Y_{n+1} \oplus X_{n+2} \oplus X_{n+1}
\end{tikzcd}$$

En effet, soit $\begin{pmatrix} y \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$ un cycle. On a $d_X^n(y) = 0$ et $d_X^{n+1}(x') = 0$ et $x' + d_X^n(x'') = 0$. Alors $\begin{pmatrix} 0 \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$ est un bord puisqu'il est l'image de $\begin{pmatrix} 0 \\ x'' \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} y \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$ et l'image de y ne diffèrent que par un bord. Cela montre la surjectivité de l'application sur l'homologie, l'injectivité est évidente.

Proposition 11. *Le foncteur* $H : K(A) \longrightarrow A$ *passe au quotient dans* $D(A)$, $H' : D(A) \longrightarrow A$ *et* $H'$ *est un foncteur cohomologique.*

Proposition 12. *Soit* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ *une suite exacte de complexe. Il existe des morphismes* $\delta_i$ *tels que la suite :*

$$\cdots\cdots H_i(X) \xrightarrow{H_i(u)} H_i(Y) \xrightarrow{H_i(v)} H_i(Z) \xrightarrow{\delta_i} H_{i+1}(X) \cdots\cdots$$

*soit exacte.*

Proposition 13. *Le foncteur de* $A$ *dans* $D(A)$ *qui à chaque objet* $X$ *fait correspondre le complexe constitué de* $X$ *en degré* $0$ *et* $0$ *ailleurs est pleinement fidèle.*

Proposition 14. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $s : X \longrightarrow Y$ *soit un quasi-isomorphisme est que* $X \square_s Y$ *soit un complexe acyclique.*

La démonstration de ces propositions est évidente.

## 5. - FONCTEURS DERIVES.

exemple Γ ou ⊗

Soit A et B deux catégories abéliennes et F un foncteur de K(A) dans K(B). En général, F ne peut passer au quotient de D(A) dans D(B). On essaiera d'associer à F un foncteur RF : $D(A) \longrightarrow D(B)$, qui soit presque le passage au quotient de F.

Définition 8. *Un foncteur dérivé à droite de F est un ∂-foncteur :*

$$RF : D(A) \longrightarrow D(B)$$

*avec un morphisme fonctoriel* $\zeta : Q_B \circ F \longrightarrow RF \circ Q_A$ *qui est universel, c'est-à-dire que quel que soient* $G : D(A) \longrightarrow D(B)$ *et* $\xi : Q_B \circ F \longrightarrow G \circ Q_A$, *il existe un morphisme unique* $\eta : RF \longrightarrow G$, *tel que soit commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
\underset{(K(A)\to D(B))}{Q_B \circ F} \arrow[r, "\zeta"] \arrow[dr, "\xi"'] & \underset{(K(A)\to D(B))}{RF \circ Q_A} \arrow[d, "\eta(Q_A)"] \\
& \underset{(K(A)\to D(B))}{G \circ Q_A}
\end{tikzcd}$$

On définirait dualement le foncteur dérivé à gauche SF, c'est-à-dire : SF est un ∂-foncteur

$$SF : D(A) \longrightarrow D(B)$$

avec un morphisme fonctoriel

$$\zeta : SF \circ Q_A \longrightarrow Q_B \circ F$$

tel que pour tout $G : D(A) \longrightarrow D(B)$ et $\xi : G \circ Q_A \longrightarrow Q_B \circ F$ il existe un morphisme unique $\eta : G \longrightarrow SF$ tel que soit commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Q \circ Q_A \arrow[d, "\eta(Q_A)"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\
SF \circ Q_A \arrow[r, "\zeta"] & Q_B \circ F
\end{tikzcd}$$

De la même manière, on définirait $R^+F$, $S^+F$, $R^-F$, $S^-F$, $R^bF$, $S^bF$ et tous ces foncteurs sont définis à un isomorphisme près.

Théorème 1. *Soit* $F : K^*(A) \longrightarrow K^*(B)$ *un* $\partial$-*foncteur ( où* $*$ *signifie* +, -, b *ou rien). Supposons qu'il existe une sous-catégorie triangulée* $K' \subset K^*(A)$, *telle que :*

*1) Pour chaque objet* $X$ *de* $K^*(A)$ *il existe un objet* $I$ *de* $K'$ *et un quasi isomorphisme* $i : X \longrightarrow I$

*2) Soit* $s : I_1 \longrightarrow I_2$ *un quasi isomorphisme entre deux objets de* $K'$. *Alors* $F(s)$ *est un quasi-isomorphisme.*

*Dans ces conditions :*

*a) il y a des foncteurs* $R^*F$

*b) on peut choisir* $R^*F$ *de sorte qu'il existe pour chaque* $X$ *un quasi-isomorphisme* $i : X \longrightarrow I$ *où* $I$ *est un objet de* $K'$ *tel que* $R^*F \circ Q_A(X) = Q_B \circ F(I)$.

En effet, la proposition 7 appliquée à $K'$ montre que $K' \cap Qis(A)$ est un système multiplicatif et que le foncteur canonique $J$ de $K'_{K' \cap Qis(A)}$ dans $D^*(A)$ est pleinement fidèle. De plus, la première condition entraîne que c'est une équivalence de catégorie. On peut définir un quasi-inverse $J^{-1}$ de $J$ en associant à chaque $X$ un quasi-isomorphisme $i : X \longrightarrow I$ et en posant : $J^{-1}(X) = I$.

La 2ème condition montre qu'à $F$, on peut associer un foncteur
$\bar{F} : K'_{K' \cap Qis(A)} \longrightarrow D^*(B)$

On pose $R^*F = \bar{F} \circ J^{-1}$ et on définit $\zeta : Q_B \circ F \longrightarrow R^*F \circ Q_A$ par $\zeta_X = Q_B \circ F(i)$

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r] \arrow[dd, "Q_{K'}"] & K(A) \arrow[r] \arrow[d, "Q_A"] & K(B) \arrow[d, "Q_B"] \\
 & D^*(A) \arrow[r, dashed, shift left, "R^*F"] \arrow[r, dashed, shift right, "G"'] \arrow[dl, dashed, shift left, "J^{-1}"] & D^*(B) \\
K'_{K \cap Qis(A)} \arrow[ur, shift left, "J"] \arrow[urr, "\bar{F}"'] & &
\end{tikzcd}$$

La condition b) est vérifiée, et il reste à montrer que $R^*F$ muni de $\zeta$ est un foncteur dérivé de F. En effet, soit $G : D^*(A) \longrightarrow D^*(B)$ et $\xi : Q_B \circ F \longrightarrow G \circ Q_A$, le morphisme $\eta$ sera défini en posant pour $\eta_X$ le couple de morphisme :

$$\begin{tikzcd} & R^*F(X) \\ Q_B \circ F(X) \arrow[ur, "\zeta_X"] \arrow[dr, "\xi_X"'] & \\ & G(X) \end{tikzcd}$$

## 6. - DERIVATION D'UN FONCTEUR PROVENANT D'UN FONCTEUR ADDITIF.

A un foncteur additif $F : A \longrightarrow B$, on peut associer un $\partial$-foncteur $F : K^*(A) \longrightarrow K^*(B)$ car $F(A \,\square_u\, B) = F(A) \,\square_{F(u)}\, F(B)$. Nous allons appliquer le théorème 1 à ce cas particulier. Démontrons d'abord le lemme :

Lemme 1.

a) *Soit* A *une catégorie abélienne et* P *une sous-catégorie de* A *satisfaisant à la condition :*

C1. *Chaque objet de* A *peut être envoyé injectivement dans un objet de* P.

*Alors chaque* $X \in K^+(A)$ *admet un quasi-isomorphisme* $i : X \longrightarrow I$ *où* $I_p$ *est élément de* P *pour tout* p.

b) *Supposons de plus que* P *satisfait aux conditions :*

C2. *Si* $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ *est une suite exacte avec* $X \in P$, *alors* $Y \in P \Longleftrightarrow Z \in P$.

C3. *Il existe un entier positif* n, *tel que si*

$X^0 \longrightarrow X^1 \text{-----} X^n \longrightarrow 0$ *est une suite exacte dans* A *et*

*si* $X^i$ $(0 \leq i \leq n-1) \in P$, *alors* $X^n \in P$.

*Alors chaque* $X \in K(A)$ *admet un quasi-isomorphisme* $X \longrightarrow I$ *où* $I_p \in P$ *pour tout* p.

Soit X un élément de K(A). On va construire un complexe X', quasi-isomorphe à X, tel que $X'_p \in P$ et $X_q = X'_q$ pour $q \neq p$ et $p+1$.

Pour cela, on plonge $X_p$ dans un élément $X'_p$ de P et on prend pour $X'_{p+1}$ la somme amalgamée de $X_{p+1}$ et de $X'_p$ au dessus de $X_p$ : $X'_{p+1} = X_{p+1} \oplus_{X_p} X'_p$. On définit $d'_{p+1}$ à l'aide de $d_{p+1}$ et de $0 : X'_p \longrightarrow X_{p+2}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
X_{p-1} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[dd] & X_p \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{S. A.}"] & X_{p+1} \arrow[r, "d_{p+1}"] \arrow[d] & X_{p+2} \arrow[dd] \\
& X'_p \arrow[r] \arrow[dd] & X'_{p+1} \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
0 \arrow[dr] & & & 0 \\
& Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On obtient alors une suite exacte de complexe qui donne la suite exacte de cohomologie (proposition 12).

$$0 \longrightarrow H_p \longrightarrow H'_p \longrightarrow 0 \longrightarrow H_{p+1} \longrightarrow H'_{p+1} \longrightarrow 0$$

ce qui montre que $X'$ est quasi-isomorphe à $X$.

Maintenant, soit $0 \longrightarrow X_0 \text{-----} X_p \text{-----}$ un complexe de $K^+(A)$. On obtient un complexe quasi-isomorphe composé d'objets de P par récurrence en utilisant le procédé ci-dessus à partir de $X_0$ :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[dr] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{S.A.}"] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{S.A.}"] & X_2 \arrow[d] \arrow[r, dash, dashed] & X_p \arrow[d] \arrow[r, dash, dashed] & {} \\
& I_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[ur] \arrow[d] & A_2 \arrow[d] \arrow[r, dash, dashed] & A_p \arrow[d] \arrow[r, dash, dashed] & {} \\
& & I_1 \arrow[ur] & I_2 & I_p &
\end{tikzcd}$$

ce qui montre a).

Soit Y un élément de K(A), tel que les objets d'indices positifs soient éléments de P. On va construire un complexe Y' quasi-isomorphe à Y et tel que $Y'_p \in P$ pour $p \geq -1$ et $Y'_q = Y_q$ pour $q \notin [-1,n-1]$. Pour cela, utilisons n fois la construction déjà indiquée :

$$
\begin{tikzcd}
Y_{-2} \arrow[r] \arrow[dr, dash] & Y_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & I_o \arrow[r] \arrow[d] & I_1 \arrow[r] \arrow[d] & I_2 \arrow[r, dashed, dash] \arrow[d] & I_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & I_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & I_n \\
 & I'_{-1} \arrow[r] & A_o \arrow[ur] \arrow[d] & A_1 \arrow[ur] \arrow[d] & A_2 \arrow[r, dashed, dash] & A_{n-2} \arrow[ur] \arrow[d] & A_{n-1} \arrow[ur] & \\
 & & I'_o \arrow[ur] & I'_1 \arrow[ur] & & I'_{n-2} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

et montrons que $A_{n-1} \in P$. En effet, des propriétés, des sommes amalgamées et le fait que les flèches $A_p \longrightarrow I'_p$ soient injectives donnent les suites exactes :

$$0 \longrightarrow Y_{-1} \longrightarrow I_o \oplus I'_{-1} \longrightarrow A_o \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A_p \longrightarrow I_{p+1} \oplus I'_p \longrightarrow A_{p+1} \longrightarrow 0$$

On en déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow Y_{-1} \longrightarrow I_o \oplus I'_{-1} \longrightarrow I_1 \oplus I'_o \text{-----} I_{n-1} \oplus I'_{n-2} \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow 0$$

Les propriétés C2 et C3 montrent que $A_{n-1} \in P$.

Soit X un élément de K(A). On peut construire par récurrence en utilisant le premier procédé un complexe quasi-isomorphe à X et satisfaisant aux mêmes conditions que Y. En utilisant le 2ème procédé, on pourra construire par récurrence un complexe satisfaisant aux conditions b).

Remarque. Les quasi-isomorphismes $f : X \longrightarrow I$ ainsi construits sont tels que $f_p$ est une injection. On appellera f une résolution injective de X.

Proposition 15. *Les hypothèses (et par conséquent les conclusions du théorème 1) sont satisfaites dans les cas suivants :*

*a) $*$ est + ; F provient d'un foncteur additif $F : A \longrightarrow B$ et il y a une sous-catégorie $P \subseteq A$ qui satisfait aux conditions C1 et C2 et à la condition C4.*

$\{0\} \hookrightarrow I \longrightarrow A$

$\underset{\sim j.}{X^0} \longrightarrow X^1 \longrightarrow 0$

$Hom(M, X^\bullet) \longrightarrow Hom$

C4. *F transforme les courtes suites exactes d'objets de P en suites exactes.*

b) *On considère K(A) au lieu de $K^+(A)$. F et P vérifient les conditions du a) et P satisfait de plus la condition C3.*

*De plus, la restriction de RF à $D^+(A)$ est un foncteur dérivé de F dans $K^+(A)$.*

Démontrons-le pour le premier cas. Pour cela, on prend pour K' la sous-catégorie des complexes d'objets de P. K' est une sous-catégorie triangulée puisque si X et Y sont éléments de K', $X \sqcup_u Y$ est élément de K' d'après C2. Elle satisfait à la condition 1 du théorème 1 d'après le lemme 1.

Pour montrer qu'elle satisfait à la condition 2, utilisons la proposition 14. Pour montrer que l'image d'un quasi-isomorphisme $s : X \longrightarrow Y$, où X et Y sont objets de K', est un quasi-isomorphisme, il suffit de montrer que l'image par F de tous les objets acycliques de K' sont acycliques. Soit Z un tel objet. Pour tout p on sait que :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d_Z^p \longrightarrow Z_p \longrightarrow \operatorname{Ker} d_Z^{p+1} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte. On démontre alors par récurrence que $\operatorname{Ker} d_Z^{p+1} \in P$ puisque $\operatorname{Ker} d_Z^p$ et $Z_p$ le sont. La condition C4 montre alors que F(Z) est acyclique.

Dans le 2ème cas, la démonstration est la même sauf pour montrer que $\operatorname{Ker} d_Z^p$ est élément de P . La suite :

$$Z_{p-n} \longrightarrow Z_{p-n+1} \text{-------------} Z_{p-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_Z^p \longrightarrow 0$$

est exacte et la condition C3 montre que $\operatorname{Ker} d_Z^p \in P$ .

Si RF est construit comme l'indique le théorème 1, il est évident que sa restriction à $D^+(A)$ est un foncteur dérivé de la restriction de F à $K^+(A)$.

Exemple 1. *Les conditions du a) sont vérifiées si* A *a assez d'injectifs et si* P *est la sous-catégorie des injectifs.*

C1. est évident.

C2. Puisque X est injectif, la suite exacte se scinde :

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow X + Z \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

et d'autre part, la somme X + Z est injective, si et seulement si X et Z le sont.

C4. Si F est un foncteur additif, il transforme la suite exacte courte d'injectifs en suite exacte (puisqu'elle se scinde).

Proposition 16. *Soit* F *un foncteur additif de* A *dans* B *et supposons que* A *possède assez d'injectifs. Alors le foncteur* $H \circ T^i \circ R^+F$ *est le* $i^{\text{ème}}$ *foncteur dérivé* $R^iF$.

Cela résulte immédiatement de la façon dont $R^+F$ est calculé.

Proposition 17. *Avec les hypothèses de la proposition 16, si*

$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ *est une suite exacte d'objets de* A *on a la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow R^oF(X) \longrightarrow R^oF(Y) \longrightarrow R^oF(Z) \longrightarrow R^1F(X) \longrightarrow R^1F(Y) \text{----}$$

A l'aide de la technique du lemme 1, on peut construire une résolution injective du complexe constitué par la suite exacte. Cette résolution quasi-isomorphe à la suite exacte est une suite exacte. En prenant les conoyaux des flèches verticales, on obtient un nouveau complexe qui est une suite exacte comme le montre la suite exacte de cohomologie (prop. 12) appliquée à la suite exacte des complexes constitués par les lignes. On peut alors de nouveau construire une résolution injective du complexe des conoyaux et finalement on obtient le diagramme ci-contre dont les lignes et les colonnes sont exactes. Désignons par I le complexe $0 \longrightarrow I_o \longrightarrow I_1 ---$ et définissons I' et I" d'une manière analogue. I, I', et I" sont des résolutions injectives des complexes associés à X, Y et Z. D'autre part, le diagramme nous donne une suite exacte :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_o \arrow[r] \arrow[d] & I'_o \arrow[r] \arrow[d] & I''_o \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{C\,o\,Ker} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{C\,o\,Ker} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{C\,o\,Ker} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_o \arrow[r] \arrow[d] & I'_o \arrow[r] \arrow[d] & I''_o \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, dash] & I'_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, dash] & I''_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, dash] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_n \arrow[r] \arrow[d, dashed, dash] & I'_n \arrow[r] \arrow[d, dashed, dash] & I''_n \arrow[r] \arrow[d, dashed, dash] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow I' \longrightarrow I'' \longrightarrow 0$$

F étant un foncteur additif et les complexes étant composés d'injectifs, la suite :

$$0 \longrightarrow F(I) \longrightarrow F(I') \longrightarrow F(I'') \longrightarrow 0$$

est exacte et en appliquant la suite exacte de cohomologie, on obtient le résultat.

Remarque. Si F est exact à gauche, alors le diagramme précédent montre que $R^oF = F$. D'autre part, $R^oF$ est toujours exact à gauche.

Exemple 2. *Supposons les conditions de l'exemple 1 vérifiées. On dira que* F *est de dimension cohomologique finie, s'il existe* n *tel que pour tout objet* X *de* A *et tout* $i \geq n$, $R^iF(X) = 0$. *On dira que* $X \in A$ *est* F*-acyclique, si* $R^iF(X) = 0$ *pour* $i \geq 1$.

*Alors les conditions du b) de la proposition 15 sont vérifiées si* F *est exact à gauche et de dimension cohomologique finie et si l'on prend pour* P *les objets* F*-acycliques.*

C1. est vérifié car les injectifs sont F-acycliques. En effet, si I est injectif $R^+F(I)$ est le complexe dont le seul objet non nul est le $0^{\text{ème}}$ qui est égal à $F(I)$.

La proposition 17 montre la propriété C2. Le fait que $R^oF = F$ montre la propriété C4.

C3. Soient $X_o \longrightarrow X_1 \cdots\cdots X_n \longrightarrow 0$ une suite exacte où les $X_i$ sont f-acycliques, sauf peut-être pour $i = n$.

A l'aide d'une technique analogue à celle de la proposition 17, on peut construire le diagramme ci-contre où les lignes et les colonnes sont exactes. Les lignes composées d'injectifs étant des complexes acycliques sont transformées en suites exactes par F (démonstration de la prop. 15). Les objets $X_i$ étant F-acycliques, le foncteur F transforme les colonnes en suites exactes à l'exception de la 1ère et de la dernière. Le foncteur F étant de dimension cohomologique $\leq n$, la transformée de la première colonne par F est exacte à partir de $F(I'_n)$. De ces propriétés on peut déduire que le diagramme est exact en $F(I^n_1)$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker} \arrow[r] \arrow[d] & X_o \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d] & X_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I'_o \arrow[r] \arrow[d] & I^o_o \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d] & I^n_o \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I'_1 \arrow[d, dashed, no head] \arrow[r] & I^o_1 \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, dashed, no head] & I^n_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, no head] & 0 \\
0 \arrow[r] & I'_n \arrow[r] & I^o_n \arrow[r, dashed, no head] & I^n_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Indiquons la méthode $n = 1$.

Soit $x_1 \in F(I_1^1)$ tel que $f_1(x_1) = 0$

$f_2$ étant surjectif, il existe $x_2$ tel que $f_2(x_2) = x_1$ et on a $f_4(f_3(x_2)) = 0$. Donc

$(\exists\, x_4)(f_3(x_2) = f_5(x_4))$

On a $f_6 f_5(x_4) = 0 = f_7 f_8(x_4)$

Comme $f_7$ est injectif $f_8(x_4) = 0$

Donc $(\exists\, x_5)(g_1(x_5) = x_4)$

On a $f_3 g_2(x_5) = f_5 g_1(x_5) = f_3(x_2)$

Donc $(\exists\, x_6)(g_3(x_6) = x_2 - g_2(x_5))$

D'où $g_5 g_4(x_6) = f_2 g_3(x_6) = f_2(x_2) = x_1$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & F(\mathrm{Ker}) \arrow[r] \arrow[d] & F(x_o) \arrow[r] \arrow[d] & F(x_1) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F(I_o) \arrow[r] \arrow[d] & F(I_o^o) \arrow[r, "g_4"] \arrow[d, "g_3"] & F(I_o^1) \arrow[r] \arrow[d, "g_5"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(I_1) \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "g_1"] & F(I_1^o) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_3"] & F(I_1^1) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(I_2) \arrow[r, "f_5"] \arrow[d, "f_8"] & F(I_2^o) \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "f_6"] & F(I_2^1) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(I_3) \arrow[r, "f_7"] & F(I_3^o) & &
\end{tikzcd}$$

Cela montre que le premier foncteur dérivé est nul pour $X_n$. Il est alors facile d'en déduire par récurrence que $X_n$ est acyclique puisque la $p^{\text{ème}}$ ligne est une résolution du conoyau des lignes précédentes, ce conoyau étant F-acyclique sauf en n d'après $C_2$.

<u>Exemple 3</u>. *Si* A *a assez d'injectif, on peut calculer* $R^+F$ *à l'aide des résolutions par des objets* F*-acycliques.*

Supposons d'abord que F soit exact à gauche. Alors la démonstration précédente montre que les conditions du a) de la proposition 15 sont vérifiées. Si F n'est pas exact à gauche, montrons que $R^+(R^oF) = R^+F$ : en effet, si I est un complexe dont les objets sont injectifs, $R^oF(I) = F(I)$.

<u>Proposition 16</u>. *Soit* A, B, C *trois catégories abéliennes et* $F : A \longrightarrow B$ *et* $G : B \longrightarrow C$ *deux foncteurs additifs. Si* A *et* B *ont assez d'injectifs, si* F *transforme les injectifs en objets* G*-acycliques, alors :*

$$R^+(G \circ F) = R^+G \circ R^+F$$

En effet, $R^+G$ ; $R^+F$ et $R^+(G \circ F)$ existent d'après les exemples ci-dessus. Pour calculer $R^+F(X)$ on cherche un quasi-isomorphisme de $X \longrightarrow I$ et on pose $R^+F(X) = F(I)$. Mais $F(I)$ est G-acyclique donc $R^+(G)\ (F(I)) = GF(I)$, ce qui montre le résultat.

## 7. - FONCTEUR Ext.

Définition 9. *Soit A une catégorie abélienne, et soit X, Y des objets de D(A)* *On définit le $i^{\text{ème}}$ foncteur hyperext de X dans Y par :*

$$\mathrm{Ext}^i(X,Y) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(X,T^i(Y))$$

Remarque. Si X et Y sont éléments de $D^+(A)$ alors on obtient le même Ext en prenant $\mathrm{Hom}_{D^+(A)}(X,T^i(Y))$.

Proposition 19. *Soit* $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ *une courte suite exacte dans* K(A), *et soit* $V \in K(A)$. *On a les suites exactes :*

$$\cdots\; \mathrm{Ext}^i(V,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(V,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(V,Z) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(V,X) \;\cdots$$

$$\cdots\; \mathrm{Ext}^i(Z,V) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(Y,V) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(X,V) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i-1}(Z,V) \;\cdots$$

Cela résulte immédiatement du fait que le foncteur Hom est un foncteur cohomologique dans les catégories triangulées.

Lemme 2. *Soient A une catégorie abélienne et* $f : Z \longrightarrow I$ *un morphisme de complexes d'objets de A. Supposons que Z soit acyclique, les objets de I injectifs et I borné inférieurement; alors f est homotope à zéro.*

En effet, on construit l'opérateur d'homotopie par récurrence de la façon suivante : $k_{-1} = 0$.

On a $(f_n - d_I^{n-1} k_n)\, d_Z^{n-1} = 0$.
Donc le premier facteur se factorise à travers Im en $k'_n$ et $I_n$ étant injectif $k'_n$ se factorise à travers $Z_{n+1}$ en $k_{n+1}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Im} \arrow[dr] \arrow[ddl, "k'_n"] & \\
Z_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & & Z_n \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "f_n"] \arrow[ddll, "k_n"] & & Z_{n+1} \arrow[dd, "f_{n+1}"] \arrow[ddll, "k_{n+1}"] \\
 & & & & \\
I_{n-1} \arrow[rr, "d_I^{n-1}"] & & I_n \arrow[rr] & & I_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Lemme 3. *Soient A une catégorie abélienne et* $X \in K(A)$ *et* $I \in K^+(A)$ *où les objets de I sont injectifs. Alors :*

$$\mathrm{Hom}_{K(A)}(X,I) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(X,I)$$

Montrons d'abord que si $s : I \longrightarrow Y$ est un quasi-isomorphisme, on peut trouver $t : Y \longrightarrow I$ tel que $ts$ soit homotope à l'identité : pour cela, on pose : $Z = I \,\square_s\, Y$. $Z$ est acyclique (proposition 14).

Le morphisme $v : Z \longrightarrow T(I)$ est homotope à zéro d'après le lemme précédent.

Soit $(k_n \; t_n)$ l'opérateur d'homotopie. On a :

$$(k_n \; t_n) \begin{pmatrix} -d_I^{n+1} & 0 \\ s_{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} + (-d_I^n)(k_{n-1} \; t_{n-1}) = (I \; 0)$$

ce qui donne : $t_n \, d_Y^n - d_I^n \; t_{n-1} = 0$ donc $t_n$ est un morphisme de $Y \longrightarrow I$

et $d_I^n \; k_{n-1} + k_n \; d_I^{n-1} = t_n \; s_{n+1} - I$ ce qui montre que $k_n$ est un opérateur d'homotopie et $I$ homotope à $ts$.

Montrons que $\varphi : \mathrm{Hom}_{K(A)}(X,I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D(A)}(X,I)$ est injective et surjective : soit $u/s$ un morphisme de $D(A)$. Alors il est égal $tu/ts$ et l'application est surjective. Si $u/I$ et $v/I$ dans $D(A)$, il y a un $s$ tel que $su = sv$. Alors $t\,s\,u = t\,s\,v \Longrightarrow u = v$.

Définition 10. *Etant donné* $X$ *et* $Y$ *deux complexes d'objets d'une catégorie abélienne* $A$*, nous définissons* $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ *comme le complexe de terme :*

$$(\mathrm{Hom}(X,Y))^n = \prod_p \mathrm{Hom}(X^p, Y^{p+n})$$

*et de différentielle :*

$$d^n(\{u_p\}) = \{u_{p+1} \quad d_X^p + (-1)^{n+1} \, d_Y^{p+n} \quad u_p\}$$

*On obtient ainsi un foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}$ *de* $K(A)^* \times K(A)$ *dans* $K(Ab)$.

En effet, si f et f' : $X' \longrightarrow X$ sont homotopes à l'aide de l'operateur k, et si g et g' : $Y \longrightarrow Y'$ sont homotopes à l'aide de l'opérateur k', on montre que $\underline{\mathrm{Hom}}(f,g)$ est homotope à $\underline{\mathrm{Hom}}(f',g')$ par l'opérateur k tel que :

$$k''_n(\{u_p\}) = \{g_{p+n}\, u_{p-1}\, k_{p-1} + (-1)^{n+1}\, k'_{p+n}\, u_p\, f'_p\}$$

Lemme 4. *Soit* X *et* Y *deux objets d'une catégorie abélienne* A. *On a :*

$$H^i \circ \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{K(A)}\big(X, T^i(Y)\big)$$

Soit en effet un élément f de $\mathrm{Hom}_{K(A)}(X,T^i(Y))$, on peut lui faire correspondre un élément de $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)^i$ en prenant la famille $\{f_p\}$. Montrons que f est homotope à zéro si et seulement si son image est un bord. En effet, l'un et l'autre veulent dire qu'il existe $k_n$ tel que :

$$f_p = k_p\, d_X^p + (-1)^i\, d_Y^{p+i-1}\, k_{p-1}$$

D'autre part, l'image de f est un cycle si et seulement si f est un morphisme de complexe. En effet, cela signifie :

$$f_{p+1}\, d_X^p + (-1)^{i+1}\, d_Y^{p+i}\, f_p = 0$$

On a aussi, d'une manière évidente, l'isomorphisme des deux foncteurs ainsi définis.

Si A a assez d'injectif, on peut définir à partir de $\underline{\mathrm{Hom}}$ un foncteur $\underline{\underline{D^+\mathrm{Hom}}}$, $D(A)^* \times D^+(A)$ dans D(Ab). En effet, si A assez d'injectifs, on peut dériver le foncteur Hom par rapport au deuxième argument.

$$\underline{D^+\mathrm{Hom}} : K(A)^* \times D^+(A) \longrightarrow D(Ab)$$

$\underline{D^+\mathrm{Hom}}(X,Y)$ se calcule en prenant une résolution injective de Y : $Y \longrightarrow I$ et en posant :

$$\underline{D^+\mathrm{Hom}}(X,Y) = \underline{\mathrm{Hom}}(X,I)$$

Le lemme 3 montre que si $f : X \longrightarrow Y$ est un quasi-isomorphisme. On a :

$$\mathrm{Hom}_{K(A)}(X,I) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(X,I) \sim \mathrm{Hom}_{D(A)}(Y,I) = \mathrm{Hom}_{K(A)}(Y,I).$$

Le lemme 4 montre alors que le transformé de f par $\underline{D^+\mathrm{Hom}}(\cdot,I)$ est un quasi-isomorphisme ; d'où le résultat.

<u>Théorème 2</u>. *Soit* A *une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs. Alors pour* X *objet de* D(A) *et* Y *objet de* $D^+(A)$, *on a :*

$$H^i(\underline{\underline{D^+\mathrm{Hom}}}(X,Y)) = \mathrm{Ext}^i(X,Y).$$

En effet, prenons une résolution de Y : $Y \longrightarrow I$. Alors :

$\mathrm{Ext}^i(X,Y) = \mathrm{Ext}^i(X,I)$ puisque Y et I sont isomorphes dans D(A).

$\mathrm{Ext}^i(X,I) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(X,T^i(I)) = \mathrm{Hom}_{K(A)}(X,T^i(I))$ d'après le lemme 3.

D'autre part :

$H^i(\underline{\underline{D^+\mathrm{Hom}}}(X,Y)) = H^i(\underline{\mathrm{Hom}}(X,I)) = \mathrm{Hom}_{K(A)}(X,T^i(I))$ d'après le lemme 4.

<u>Corollaire 2</u>. *Si* A *a assez d'injectifs, alors pour* X *et* $Y \in A$, *les* $\mathrm{Ext}^i(X,Y)$ *définis ci-dessus sont les* Ext *habituels.*

En effet, si I est une résolution injective de Y, le théorème précédent montre que $\mathrm{Ext}^i(X,Y) = H^i(\mathrm{Hom}(X,I))$ qui est la définition habituelle.