PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

W. HANSEN

Processus stochastiques avec des trajectoires continues

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1965-1966
« Publications des séminaires de mathématiques », , exp. n° 5, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1965-1966____A5_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PROCESSUS STOCHASTIQUES AVEC DES TRAJECTOIRES CONTINUES

PAR

W. HANSEN

(Assistant à l'Université d'Erlangen - Allemagne Fédérale)

Les choses que je dirai ont été écrites par M. Sieveking et moi-même en l'hiver 1963/64. Une possibilité d'approcher le problème est la suivante :

Considérons un système physique qui se développe aléatoirement. Nous supposons que l'on ne puisse rien faire avec ce système sauf mesurer la position pendant un ensemble fini de moments. Donc on peut seulement éxiger du modèle mathématique qui décrit ce système (i.e. d'un processus stochastique correspondant) qu'il donne les distributions correctes de dimension finie. I.e.

$$P([X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n])$$

(où $B_1, \dots, B_n$ sont des ensembles boréliens) doit être la probabilité trouvée par l'expérience.

Dans cette situation on peut se poser la question naturelle : Quels systèmes peuvent être décrits lorsqu'on suppose que la position change continuement. Dans une formulation mathématique : Pour quelles familles projectives de mesures de probabilité éxiste un processus correspondant avec des trajectoires continues ? Une réponse à cette question est le :

Théorème 1 :

Soit E un espace polonais, ρ une distance complète qui est compatible avec la topologie et soit $(P_I)_{I \text{ finie} \subset \mathbb{R}_+}$ une famille projective de mesures de probabilité sur les $\mathcal{L}(E)^I$, $P_T = \varprojlim P_I$.

Alors les deux conditions sont équivalentes :

I - Il existe un processus stochastique avec des trajectoires continues dont les distributions de dimension finie sont les P_I.

II - Il existe une partie S de $\mathbb{R}_+$, dénombrable et dense dans $\mathbb{R}_+$ avec :

a) Pour η, $k > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} P_T\left(\bigcup_{\substack{|s-t| \leq \delta \\ s,t \in S_k}} [\rho(X_1, X_t) \geq \eta] \right) = 0 \qquad (S_k = S \cap [0,k])$$

b) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ il existe $s_n \in S$ avec $s_n \longrightarrow t$ et

$$\lim_{n \to \infty} P_T([\rho(X_{s_n}, X_t) \geq \eta]) = 0 \qquad \forall \eta > 0$$

Démonstration :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, E, (X_t)_{t \geq 0})$ un processus stochastique pour les P_I avec des trajectoires continues. Soit $S \subset \mathbb{R}_+$, dénombrable et dense, η, $k > 0$. On définit

$$A_n := \bigcup_{\substack{|s-t| \leq 1/n \\ x,t \in S_k}} [\rho(X_s, X_t) \geq \eta]$$

Parce que l'application $t \longrightarrow X_t(\omega)$ est uniformément continue sur $[0,k]$ pour chaque $\omega \in \Omega$, on a $A_n \downarrow \emptyset$ ce qui entraîne $P(A_n) \downarrow 0$. Donc (II a). (II b) est encore plus simple. Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $s_n \in S$ convergeant vers t, $k > t$, $\eta > 0$.

Pour

$$B_n := \bigcup_{\substack{|s-t| \leq 1/n \\ s \in S_k}} [\rho(X_{s_n}, X_t) \geq \eta]$$

on a pour la même raison $B_n \downarrow \emptyset$, d'où $P(B_n) \downarrow 0$. Donc a fortiori :

$$\lim_{n \to \infty} P([\rho(X_{s_n}, X_t) \geq \eta]) = 0$$

L'autre direction d'implication est la plus intéressante : Soit (II) satisfaite. Le théorème de Kolmogorov garantît l'existence d'un processus stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, P, E, (X_t)_{t \geq 0})$ pour les P_I. Pour tous k, η, $\varepsilon > 0$ il existe alors $\delta > 0$:

$$P\Big(\bigcup_{\substack{|s-t| \leq \delta \\ s,t \in S_k}} [\rho(X_s, X_t) \geq \eta] \Big) \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Choisissons un δ_n pour $k = n$, $\eta = 1/n$, $\varepsilon = \varepsilon_0/2^n$ et définissons :

$$A_{\varepsilon_0} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{\substack{|s-t| \leq \delta_n \\ s,t \in S_n}} [\rho(X_s, X_t) \geq \tfrac{1}{n}] \Big)$$

On a $P(A_{\varepsilon_0}) \leq \varepsilon_0$ et l'application $s \longrightarrow X_s(\omega)$ est uniformément continue sur chaque S_n pour $\omega \in \complement A_{\varepsilon_0}$. Et c'est vrai pour chaque $\varepsilon \in \Omega_0 = \cup \complement A_{1/n}$. On a $P(\Omega_0) = 1$ et peut définir avec un point $a \in E$ fixe :

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{s \to t \\ s \in S}} X_s(\omega) & (\omega \in \Omega_0) \\ a & (\omega \notin \Omega_0) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

Evidemment on a :

$$\begin{array}{lll} \tilde{X}_s = X_s & P\text{-p.s.} & \forall\, s \in S \\ t \longrightarrow \tilde{X}_t(\omega) & \text{continue} & \forall\, \omega \in \Omega \\ \omega \longrightarrow \tilde{X}_t(\omega) & \text{variable aléatoire} & \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \end{array}$$

Donc $(\Omega, \mathcal{F}, P, E, (\tilde{X}_t)_{t \geq 0})$ est un processus stochastique avec des trajectoires continues. Il a les P_I comme distributions de dimension finie parce que nous avons :

$$\tilde{X}_t = X_t \quad P\text{-p.s.}$$

même pour les $t \in \mathbb{R}_+$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. D'après (II b) il existe $s_n \in S$ avec $s_n \longrightarrow t$ et st-lim $X_{s_n} = X_t$. Mais parce que $X_{s_n} \longrightarrow \tilde{X}_t$ P-p.s., on a aussi st-lim $X_{s_n} = \tilde{X}_t$.

Nous avons fait la démonstration du théorème de telle sorte que nous avons prouvé:

<u>Théorème 1*</u> :

La situation du théorème 1 et la condition (II) entraînent :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P; E, (X_t)_{t \geq 0})$ un processus correspondant à la famille des P_I.

Alors (*) On peut modifier chaque X_t sur un ensemble de probabilité zéro de façon que l'on obtienne des trajectoires continues.

Naturellement, la condition (II a) n'est pas maniable et c'est pourquoi nous démontrerons un deuxième théorème, un corollaire du premier, qui s'offre mieux aux applications.

<u>Théorème 2</u> :

Dans la situation du théorème 1 les deux conditions soient satisfaites :

(II a)* Pour $\eta > 0$ soit

$$q_m(\eta) = \sup_{0 \leq i < m2^m} P_T\,[\,\rho(X_{(i+1)2^{-m}}, X_{i2^{-m}}) \geq \eta\,]$$

Il existe une suite (η_m) de nombres réels avec :

$$\eta_m > 0 \quad , \quad \Sigma\, \eta_m < \infty \quad , \quad \Sigma\, m\, 2^m\, q_m(\eta_m) < \infty$$

(II b)* Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ il existe une suite (s_m) de nombres dyadiques avec

$$\lim_{m \to \infty} P_T([\rho(X_{s_m}, X_t) \geq \eta]) = 0 \qquad \forall\, \eta > 0$$

Alors la propriété (*) du théoreme 1 est vraie.

Démonstration :

Soit $S = D^+$ l'ensemble des nombres dyadiques ≥ 0. Pour $k, \varepsilon, \eta > 0$ choisissons un m_o tel que :

$$m_o > k \ , \ \sum_{m=m_o}^{\infty} \eta_m < \frac{1}{2}\eta \ , \ \sum_{m=m_o}^{\infty} m\, 2^m q_m(\eta_m) < \varepsilon$$

Soit

$$B := \bigcup_{m=m_o}^{\infty} \ \bigcup_{i=o}^{m_o 2^m - 1} [\rho(X_{(i+1)2^{-m}}, X_{i2^{-m}}) \geq \eta_m]$$

On a :

$$P_T(B) \leq \sum_{m=m_o}^{\infty} m_o\, 2^m q_m(\eta_m) < \varepsilon$$

Soit $X \in \complement B$, $s, t \in S_k$, $|s-t| \leq 2^{-m_o}$. On découpe l'intervalle $[s,t]$ dans des intervalles $[i\, 2^{-\nu}, (i+1)\, 2^{-\nu}]$ le moins nombreux possible. Chaque ν est $\geq m_o$ et apparaît tout au plus deux fois. Parce que $\rho(X_{(i+1)2^{-m}}, X_{i2^{-m}}) < \eta_m$ on a :

$$\rho(X_s, X_t) \leq 2 \sum_{m=m_o}^{\infty} \eta_m < \eta$$

Donc

$$A := \bigcup_{\substack{|s-t| \leq 2^{-m_o} \\ s,t \in S_k}} [\rho(X_s, X_t) \geq \eta] \subset B$$

et $P_T(A) \leq P_T(B) < \varepsilon$, i.e. (II a). (II b)* signifie (II b). D'où le résultat.

Le corollaire suivant est le plus important :

Corollaire 1 :

(l'existence du processus brownien) : Soit (P_I) une famille projective pour la fonction de transition brownienne. Alors on a (*).

Démonstration :

Dans le $\mathbb{R}^n$ on a :

$$[|X_t - X_{t+\delta}| \geq \eta] \subset \bigcup_{i=1}^{n} [|X_t^i - X_{t+\delta}^i| \geq \frac{\eta}{n}]$$

et

$$P[|X_t^i - X_{t+\delta}^i| \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\delta}{\pi}} \; e^{-\lambda^2/2\delta}$$

par une évaluation simple.

On réussit en choisissant $\eta_m := 2^{-m/4}$.

Un théorème plus général, mais aussi bien connu est le :

Corollaire 2 :

La situation du théorème 1 et l'existence de : $a > 0$, $b > 1$, $c > 0$ tels que

$$\int \rho(X_s, X_t) \, dP_T \leq c \, . \, |t-s|^b$$

entraîne la conclusion (*).

Démonstration :

$$P_T [\rho(X_{(i+1)2^{-m}}, X_{i2^{-m}}) \geq \eta]$$

$$= P_T [\rho(X_{(i+1)2^{-m}}, X_{i2^{-m}})^a \geq \eta^a]$$

$$\leq \frac{\int \eta(X_{(i+1)2^{-m}}, X_{i2^{-m}}) \, dP_T}{\eta^a} \leq c \, . \, \frac{2^{-mb}}{\eta^a}$$

Soit $\delta > 0$ tel que $b - a\delta > 1$ et choisissons $\eta_m := 2^{-m\delta}$. Alors

$$\eta_m > 0 \, , \quad \Sigma \, \eta_m < \infty \quad \text{et}$$

$$\Sigma \, m \, 2^m \, q_m(\eta_m) \leq c \, . \, \Sigma \, m \, 2^{-m(b-a\delta-1)} < \infty$$

Et pour $t \in \mathbb{R}_+$, $s_n \in S$, $s_n \longrightarrow t$

$$P_T [\rho(X_{s_n}, X_t) \geq \eta] \leq c \, . \, (|t(s_n)^b|)/\eta^a$$

ce qui tend vers zéro.