CHR. COATMELEC

Quelques théorèmes de Whitney et applications à l'analyse numérique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1965-1966
« Publications des séminaires de mathématiques », , exp. n° 2, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1965-1966____A2_0>

"QUELQUES THEOREMES DE WHITNEY ET APPLICATIONS A L'ANALYSE NUMERIQUE"

par Chr. COATMELEC

I NOTATIONS - DEFINITIONS PRELIMINAIRES - POSITIONS DU PROBLEME

$\mathbb{R}^n$ est supposé rapporté à une base : $(X_1, \dots, X_n)$ sont les coordonnées de $M \in \mathbb{R}^n$

$M_1 M_2$ est la distance de 2 points dans $\mathbb{R}^n$.

E : compact dans $\mathbb{R}^n$ et E_1 : ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant E.

Si on a $f \in \mathcal{C}^k(E_1)$ on pose : $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ et $k = k_1 + \dots + k_n$ avec $0 \leq k_i \leq k$. $\quad \|f\|_E = \max\limits_{M \in E} |f(M)|$.

(Nous supposons que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$)

$$\|f\|_E^k = \max_{0 \leq i \leq k} \left\| \frac{\partial^I f}{\partial X^I} \right\|_E$$

$$M_k(f, E) = \max_{k_1 + \dots + k_n = k} \left\| \frac{\partial^K f}{\partial X^K} \right\|_E$$

Pour $f \in \mathcal{C}^m(E_1)$ et $A \in E_1$ nous appellerons $T_A[f]$ le polynôme de Taylor de f en A. C'est un élément, pour A fixé, d'un espace vectoriel à $m_1 = \binom{m+n}{n}$ dimensions, défini par exemple par les données des m_1 valeurs réelles $\frac{\partial^K f}{\partial X^K}(A)$ où K est un multiindice prenant toutes valeurs possibles telles que $0 \leq k \leq m$. La valeur en $M \in \mathbb{R}^n$ de $T_A[f]$ sera notée $T_A[f](M)$. Une fonction $f \in \mathcal{C}^m(E_1)$ induit sur E un champ de polynômes défini par $A \longrightarrow T_A[f]$. Ce champ est appelé le champ taylorien associé à f sur E.

Réciproquement étant donné sur E un champ (de polynômes de degrés $\leq m$) défini par $A \longrightarrow T_A$ nous nous demandons à quelles conditions doit satisfaire ce champ pour qu'il soit la restriction à E du champ taylorien associé à une fonction $f \in \mathcal{C}^m(E_1)$ où E_1 est un ouvert contenant E. Si nous avons trouvé une telle fonction f nous dirons que nous avons prolongé le champ donné en une fonction de classe $\mathcal{C}^m$.

II MODULES DE CONTINUITE

Dans ce paragraphe nous généralisons à $\mathbb{R}^n$ une définition de de la Vallée Poussin [I] et un théorème de Steckin et Efimov [I] pour introduire naturellement le module concave de continuité introduit par Glaeser dans sa thèse.

(II, 1) Module de continuité d'une fonction f uniformément continue sur un convexe C de $\mathbb{R}^n$.

Si f est uniformément continue sur C nous poserons

$$\omega(f, \delta) = \sup_{M_1M_2 \leq \delta} |f(M_1) - f(M_2)| \text{ avec } M_1 \in C \text{ et } M_2 \in C.$$

La fonction $\omega(f, \bullet)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie ainsi est le module de continuité de f sur C.

Les propriétés suivantes sont vérifiées par $\omega(f, \bullet)$:

(II, 1, 1) $\quad \omega(f, 0) = 0$

(II, 1, 2) $\quad \omega(f, \bullet)$ est non décroissante.

(II, 1, 3) $\quad \omega(f, \bullet)$ est continue à l'origine

(II, 1, 4) $\quad \omega(f, \delta_1 + \delta_2) \leq \omega(f, \delta_1) + \omega(f, \delta_2)$ pour $\delta_1 \geq 0$ et $\delta_2 \geq 0$

La continuité de $\omega(f, \circ)$ sur $[0, +\infty[$ en résulte.

De plus on a :

$\omega(f, N\delta) \leq N\ \omega(f, \delta)$ pour N entier ≥ 0 et $\delta \geq 0$

$\omega(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\ \omega(f, \delta)$ pour δ et $\lambda \geq 0$

(II, 2) Module de Continuité.

Soit ω fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant à

(II, 2, 1) $\omega(0) = 0$

(II, 2, 2) pour h et δ positifs quelconques : $0 \leq \omega(\delta + h) - \omega(\delta) \leq \omega(h)$

Nous dirons que ω est un module de continuité et nous désignerons par $H(a, \omega, C)$ l'ensemble des f uniformément continues sur C telles que :

$\omega(f, \delta) \leq a\,\omega(\delta)$

(II, 3) Module concave de continuité.

Soit $\hat{\omega}$ une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

(II, 3, 1) $\hat{\omega}(0) = 0$

(II, 3, 2) $\hat{\omega}$ est non décroissante

(II, 3, 3) $\hat{\omega}$ est concave

(II, 3, 4) $\hat{\omega}$ est continue à l'origine

Nous dirons que $\hat{\omega}$ est un module concave de continuité.

Le théorème de Steckin (Efimov [I]) s'énonce ainsi :

Si ω est un module de continuité défini sur un segment $[0, d]$ de $\mathbb{R}^+$ comme on l'a fait en (II, 2) alors il existe un module concave $\hat{\omega}$ de continuité défini sur $[0, d]$ tel que :

(II, 3, 5) $\omega(\delta) \leq \hat{\omega}(\delta) \leq 2\omega(\delta)$

La constante 2 ne peut être remplacée par $2 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

A toute fonction $f \in \mathscr{C}^{o}(E)$ on peut donc associer son module de continuité $\omega(f, o)$ et un module concave de continuité $\hat{\omega}_f(o)$ tel que (II, 3, 5) soit satisfaite.

III LE THEOREME DU PROLONGEMENT DE WHITNEY DANS $\mathbb{R}^n$

Soit un champ de polynômes, de degrés $\leq m$, défini sur un compact E de $\mathbb{R}^n$ par $A \longrightarrow T_A$.

Nous poserons :

$$(\text{III}, 1) \qquad \mathscr{C}_1(A, B, T, m) = \sup_{M \in \mathbb{R}^n} \frac{|T_A(M) - T_B(M)|}{(AM + BM)^m} \quad \text{pour A et B dans E.}$$

$$(\text{III}, 2) \qquad \mathscr{C}_2(A, B, T, m) = \sup_{0 \leq k \leq m} \frac{\left| \frac{\partial^K T_B}{\partial X^K}(A) - \frac{\partial^K T_A}{\partial X^K}(A) \right|}{AB^{m-k}} \quad \text{pour A et B dans E.}$$

$$(\text{III}, 3) \qquad \mathscr{C}_3(A, B, T, m) = \sup_{M \in C_{AB}} \frac{|T_A(M) - T_B(M)|}{(AM + BM)^m}$$

où C_{AB} est un hypercube à côtés parallèles aux axes et contenant A et B points de E. Le côté de C_{AB} est égal à AB.

Proposition (III, 4)

Dans notre travail indiqué en bibliographie nous démontrons que :

$$\mathscr{C}_3(A, B, T, m) \leq \mathscr{C}_1(A, B, T, m) \leq e\, \mathscr{C}_2(A, B, T, m) \leq e.\, 2^{2m}(m!)^2 . n^{\frac{m}{2}} . \mathscr{C}_3(A, B, T, m)$$

$\mathscr{C}_1$ a été introduit par Glaeser dans Glaeser [I]

$\mathscr{C}_2$ a été introduit par Whitney dans Whitney [I]

Théorème du prolongement :

Pour qu'il existe une fonction f, m fois continûment dérivable dans $\mathbb{R}^n$, dont le champ taylorien $A \longrightarrow T_A[f]$ coïncide en restriction sur E avec le champ donné à l'avance sur E : $A \longrightarrow T_A$ il faut et il suffit qu'il existe un module concave de continuité $\hat{\omega}$ tel que

(III, 5) $\mathscr{C}_i(A, B, T, m) \leq \hat{\omega}(A B)$ | pour i = 1 ou 2 ou 3 et quels que soient A et B dans E.

Remarque : Nous savons que si f est m fois continûment différentiable dans un ouvert borné E_1 de $\mathbb{R}^n$ et si nous désignons par $\omega(f, m, .)$ le sup des modules de continuité des dérivées partielles d'ordre m que l'on peut définir sur $\bar{E}_1$ alors $|f(M) - T_A[f](M)| \leq \frac{AM^m}{m!}\omega(f, m, AM)$ ce qui entraîne que pour tout couple $(A, B) \in E . E$ on a :

(III, 6) $|T_A[f](M) - T_B[f](M)| \leq \frac{1}{m!}(AM^m . \omega(f, m, AM) + BM^m \omega(f, m, BM))$

Réciproquement nous avons le théorème :

Si, étant donné un champ T sur E il existe un module concave de continuité $\hat{\omega}_1$ tel que $\forall A \in E$, $B \in E$ et $M \in \mathbb{R}^n$:

(III, 7) $|T_A(M) - T_B(M)| \leq AM^m \hat{\omega}_1(AM) + BM^m \hat{\omega}_1(BM)$

alors les conclusions du théorème du prolongement sont vérifiées

Plus exactement nous montrons qu'il en résulte que

$$\mathscr{C}_2(A, B, T, m) \leq 2^{m+1} . m! . n^{\frac{m+1}{2}} . \hat{\omega}_1(AB)$$

(III, 8) <u>Définition</u> : Si l'une des conditions (III, 5) avec i = 1 ou 2 ou 3 ou si la condition (III, 7) est vérifiée nous dirons que T est un champ taylorien sur E et que T définit une fonction m fois continûment dérivable sur le fermé E.

IV QUELQUES MAJORATIONS

Nous venons de voir qu'un champ taylorien T d'ordre m défini sur E peut être prolongé à $\mathbb{R}^n$ en une fonction m fois continûment dérivable. Il est intéressant de savoir ce que l'on peut dire d'un prolongement f [T] associé à T. Soit C un compact de diamètre d, convexe de $\mathbb{R}^n$. Nous pouvons par (II, 1) définir le k-module de continuité d'une fonction f k fois continûment dérivable sur C.

$$\omega(f, C, k, \delta) = \max_{k_1+\dots+k_n=k} \left(\max_{\substack{M_1 \in C \\ M_2 \in C \\ M_1M_2 \leq \delta}} \left| \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M_1) - \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M_2) \right| \right)$$

Nous allons donner des majorations concernant $\omega(f(T), C, k, .)$ et $\|f\|^k_c$ en fonction des données du problème.

Signalons auparavant que dans Whitney [II] il est démontré que l'on peut choisir un prolongement f(T) abalytique dans C - E mais un tel prolongement n'est pas obtenu en général par un opérateur linéaire de prolongement.

Au contraire, pour m fini la méthode donnée dans Whitney [I] définit un opérateur linéaire continu de prolongement et la fonction prolongée $f(T)$ est dans $\mathcal{C}^{\infty}{}'(C - E)$ et satisfait aux inégalités (IV, 1) et (IV, 2). Par contre $f(T)$ est en général seulement m fois continûment dérivable sur C, même lorsque T est le champ induit sur E par une fonction $f_1 \in \mathcal{C}^{m+k}(E_1)$ avec $k \geq 1$. Il n'y a exception que lorsque E est fini.

Soit T un champ taylorien d'ordre m et soit $\hat{\omega}$ un module concave de continuité associé à T sur E. Supposons par exemple qu'il existe $\hat{\omega}$ tel que $\mathcal{C}_2(A, B, T, m) \leq \hat{\omega}(AB)$ pour $A \in E$ et $B \in E$.

Posons comme dans Glaeser II :

$$|||f|||^m_E = \max\left(\|f\|^m_E ,\ \max_{\substack{A \in E,\ B \in E \\ M \in C}} \mathcal{C}_1(A, B, T, m)\right)$$

C'est une norme sur $W^m(E)$ espace des champs tayloriens d'ordre m définis sur E. $W^m(E)$ est d'ailleurs isomorphe au quotient de l'ensemble des fonctions m fois continûment dérivables sur C par l'idéal fermé des fonctions m fois continûment dérivables sur K et m plates en tout point de E.

Pour cette norme $|||.|||^m_E$ $W^m(E)$ est complet alors qu'il ne l'est pas en général pour la norme $\|.\|^m_E$.

<u>Théorème (IV, 1)</u> (Glaeser [I] p. 31) : Il existe $\Gamma_1(m, n, d)$ tel que

$$\left\|\frac{\partial^K f}{\partial X^K}\right\|_C \leq e^d \|f\|^m_E + \Gamma_1 \cdot d^{m-k}\, \hat{\omega}(d) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq m$$

<u>Théorème (IV, 2)</u> (Glaeser I p.32) : Il existe Γ_2 (m, n, d) tel que

$$\omega(f, C, m, .) \leq \Gamma_2 \cdot \hat{\omega}(.)$$

V PROLONGEMENT A R D'UNE FONCTION DEFINIE SUR UN COMPACT E DE R

Dans le théorème général de Whitney dans $\mathbb{R}^n$ on suppose donné sur E une champ taylorien T. Le problème (non résolu dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$) qui se pose est le suivant :

Etant donné f par ses valeurs sur E : à quelles conditions doivent satisfaire ces valeurs pour que l'on puisse prolonger f à C de telle façon que la fonction prolongée soit m fois continûment différentiable et coïncide en restriction sur E avec f. Il suffit pour le faire de trouver en fonction des données un champ taylorien d'ordre m sur E et d'appliquer le théorème général. Dans un article difficile Whitney a résolu ce problème lorsque n=1. Les démonstrations sont nettement clarifiées et des résultats sont améliorés dans l'article de Merrien : Merrien [I] . Dans ce paragraphe nous donnons les résultats importants:

Le théorème de Whitney [11] donné plus loin en (V,3), donne une une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs de f sur E (et non plus sur le champ taylorien que l'on ne connait d'ailleurs pas a-priori) pour qu'une fonction f définie sur E soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^m$.

Les théorèmes (V,4) et (V,5) précisent la "forme" du prolongement.

Soit $\mathcal{A}_{m+1} = (a_o, a_1, \ldots, a_m)$ un ensemble de m+1 points de $\mathbb{R}$: on permet à 2 ou plusieurs points de $\mathcal{A}_{m+1}$ d'être confondus et on suppose que pour i = 1 à m on a $a_{i-1} \leq a_i$. Soit $\mathbb{R}_{m+1}$ l'ensemble des $\mathcal{A}_{m+1}$.
Soit E un compact de $\mathbb{R}$ et E_{m+1} l'ensemble des $\mathcal{A}_{m+1}$ correspondant à des points a_i de E. Soit C un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ contenant E, soit d le diamètre de C et C_{m+1} l'ensemble qui lui correspond.

E^*_{m+1} désignera l'ensemble des $\mathcal{A}_{m+1}$ de E_{m+1} définis par (m+1) points distincts dans E.

Dans l'article cité en bibliographie Merrien considère le quotient de $\mathbb{R}^{m+1}$ par le groupe des permutations des m+1 coordonnées de $\mathcal{A}_{m+1}$. C'est donc ce que nous appelons $\mathbb{R}_{m+1}$. Il pose alors :

$d\ (\mathcal{A}_{m+1}, \mathcal{B}_{m+1}) = \inf\limits_{\sigma} \sum\limits_{i=o}^{m} \left| a_i - b_{\sigma\ (i)} \right|$ où σ est une permutation des m+1 coordonnées et montre que $d\ (\mathcal{A}_{m+1}, \mathcal{B}_{m+1})$ définit une distance égale à $\sum\limits_{i=o}^{m} \left| a_i - b_i \right|$ sur $\mathbb{R}_{m+1}$.

C'est cette dernière distance ou plus exactement :

$$d\ (\mathcal{A}_{m+1}, \mathcal{B}_{m+1}) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=o}^{m} \left| a_i - b_i \right|$$ que nous considérons.

Les théorèmes énoncés dans l'article conduisent aux théorèmes :

THEOREME (V, 1) : Si $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$ alors la différence divisée généralisée (plusieurs points de $\mathcal{A}_{m+1}$ peuvent être confondus) relative à f sur $\mathcal{A}_{m+1}$ est une fonction $\mathcal{F}_{m+1}$ définie sur $\mathbb{R}_{m+1}$ et continue sur $\mathbb{R}_{m+1}$. Plus exactement si $\omega(f, c, m, .)$ désigne le m-module de continuité de f sur C on a, en omettant l'indice (m+1) sur $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{F}$:

$$\forall \mathcal{A} \in C_{m+1} \text{ et } \forall \mathcal{B} \in C_{m+1} : \left| \mathcal{F}(\mathcal{A}) - \mathcal{F}(\mathcal{B}) \right| \leq \frac{2m+1}{m!} \omega(f, c, m, d\ \ (\mathcal{A}, \mathcal{B}))$$

Réciproquement :

THEOREME (V,2) : Si f est définie sur C et si $\mathcal{F}_{m+1}$, qui lui est associé sur C^*_{m+1}, est uniformément continue sur C^*_{m+1} alors on a $f \in \mathcal{C}^m$ (C).

THEOREME (V,3) : Théorème de Whitney : Whitney [11]

La condition nécessaire et suffisante pour que f définie sur E puisse être prolongée à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ est qu'il existe un module concave de continuité $\hat{\omega}$ tel que :

$$\forall \mathcal{A}_{m+1} \in E^*_{m+1} \quad \text{et} \; \forall \mathcal{B}_{m+1} \in E^*_{m+1} \quad : \left| \mathcal{F}_{m+1} (\mathcal{A}_{m+1}) - \mathcal{F}(\mathcal{B}_{m+1}) \right| \leqslant \hat{\omega} (d\, (\mathcal{A}_{m+1}, \mathcal{B}_{m+1}))$$

Dans la démonstration de ce théorème on commence par définir sur l'ensemble $\hat{E}$ des points d'accumulation de E un champ taylorien d'ordre m. Pour cela on considère $\mathcal{F}_p$ pour $1 \leqslant p \leqslant m+1$ défini sur E^*_p. On prolonge par continuité à $\hat{E}_p$. Puis on définit sur $E - \hat{E}$ un champ taylorien d'ordre m (c'est la partie délicate de la démonstration). Le champ taylorien obtenu sur E satisfait à la condition (111,5) et se prolonge donc (par le théorème général de Whitney) en une fonction f de classe $\mathcal{C}^m$.

THEOREME (V,4) : Si on pose $M_m = \sup\limits_{1 \leqslant p \leqslant m+1} \left(\sup\limits_{\mathcal{A}_p \in E^*_p} \left| \mathcal{F}_p(\mathcal{A}_p) \right| \right)$

il existe Γ_1 (m,d) et Γ_2 (m,d) tels que pour la fonction prolongée à C contenant E on ait :

$$\| f^{(k)} \|_C \leqslant \Gamma_1 e^d M_m + \Gamma_2 d^{m-k} \hat{\omega} (d)$$

pour k = o on a d'ailleurs $\| f \|_C \leqslant \Gamma_1 e^d M_m$

THEOREME (V,5) : Le m-module de continuité de f sur C est tel qu'il qu'il existe K (m,d) et tel que

$$\omega (f,c,m, \cdot) \leqslant K (m,d) \hat{\omega} (\cdot)$$

VI APPLICATIONS.

(VI, 1) Extrapolation à la limite.

Soit $H = \{h_o, h_1, \ldots, h_p, \ldots\}$ ensemble de réels positifs tels que :

(VI, 1, 1) : $\exists$ k positif < 1 tel que $\forall$ i entier $\geqslant 1$ on ait $h_{i+1} \leqslant k h_i$.

Soit $\overline{H} = H \cup \{o\}$ et considérons l'ensemble G des fonctions g, à valeurs réelles, définies sur H et telles que :

(VI, 1, 2) : $\lim\limits_{i \to +\infty} g\ (h_i) = g\ (o)$ existe pour chaque g de G.

Soit $P_N\ [g]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $\leqslant N$ relatif à g sur $H_N = \{h_o,\ h_1, \ldots, h_N\}$

Par Laurent [I] nous savons que la condition nécessaire et suffisante pour que $\forall\, g \in G$: $\lim\limits_{N \to +\infty} \left| g\ (o) - P_N\ [g]\ (o) \right| = o$ est que (VI, 1, 1) soit vérifié. Quelle majoration peut-on donner lorsque l'on suppose que g satisfait à une condition plus forte que (VI, 1, 2) ?

(VI, 1, 3) $\exists\ c_o,\ c_1, \ldots,\ c_q$ dans $\mathbb{R}$ et un module de continuité $\omega_q(g, .)$ tels que :

$$\forall\, h \in H : \left| g\ (h) - c_o - c_1 h \ldots - c_q h^q \right| \leqslant h^q\, \omega_q\ (g,\ h)\ .$$

<u>Théorème (VI, 1, 4)</u> : Si (VI, 1, 1) est vérifiée par H et (VI, 1, 3) par g alors $\exists\ B_q\ (k)$ et $K_1\ (q,\ h_o, k)$ tels que :

$$\left| g\ (o) - P_N\ [g]\ (o) \right| \leqslant B_q\ (k)\ .\ \frac{(2q+1)\,!}{q!}\ .\ \pi^q . h_o{}^q .\ \frac{\omega_q\ (g,\ h_o)}{(N+1)^q}$$

$$\left| g\,(o) - P_N\,[g]\,(o) \right| \leqslant K_1\,(q,\, h_o,\, k).\, h_o^{\,q}.\, \frac{1}{(N+1)^q}\,.\,\omega_q\,(g, \frac{h_o}{N+1})$$

Pour démontrer ce théorème il suffit :

a) de prolonger g à $[o,\, h_o]$ en une fonction q fois continûment dérivable après avoir vérifié la condition (V, 3) . On a par (V, 4) et (V, 5) une majoration de $\| g^q \|_{[o,h_o]}$. On peut aussi opérer directement comme nous l'avons fait pour obtenir des précisions sur $B_q\,(k)$. Nous avons obtenu

$$B_q\,(k) \leqslant 2 \left[1 + \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-k^j)} \right)^2 \right] . \frac{1 + k^q}{(1-k)^q}$$

b) d'introduire le polynôme Q_1 , de degré $\leqslant N$ de meilleure approximation de g sur $K_N = (h_o,\, h_1, \ldots, h_N,\, o)$ puis Q_2 le polynôme de degré $\leqslant N$ de meilleure approximation de g sur $[o,\, h_o]$. Par utilisation des résultats cités dans de la Vallée Poussin [I] et Golomb [I] on obtient les conclusions du théorème.

Les majorations obtenues prouvent que la convergence est au moins de l'ordre de $\frac{1}{N^q}$ lorsque N tend vers $+\infty$ et ceci explique l'efficacité du procédé d'extrapolation de Richardson.

Notons que dans presque tous les problèmes d'analyse numérique il s'agit de calculer un nombre fini de valeurs $g_i\,(o)$ ou les g_i satisfont à (VI, 1, 3) en discrétisant et en approchant $g_i\,(o)$ par $g_i\,(h)$. h doit satisfaire alors à deux conditions contradictoires : être assez voisin de o pour avoir une bonne précision théorique, être assez éloigné de o pour que les erreurs d'arrondi (qui croissent lorsque h décroît) ne soient pas trop grandes. La méthode donnée précédemment est <u>très</u> efficace. Le théorème (VI, 1, 4) précise la nature de la convergence en fonction de h_0 d'une part, en fonction de N d'autre part.

La condition (VI, 1, 3) s'exprime souvent plus simplement (VI, 1, 3bis) : $\exists\, c_0$ dans R et M_{q+1} (g) tel que : $\left| g(h)-c_0 \right| \leqslant M_{q+1} h^{q+1}$

Il en est ainsi par exemple lorsque g_i est défini par une méthode de quadrature, d'interpolation, de différentiation...etc...

Nous donnons des exemples numériques.

Nous avons pensé à remplacer $P_N \left[g \right]$ par le polynôme $P_{N+q} \left[g \right]$ de degré N+q qui satisfait à la condition d'interpolation sur H_N et dont les dérivées possèdent les mêmes propriétés de platitude en 0 que g. Cette méthode peut être étudiée théoriquement de la même façon qu'en (VI, 1, 4) . Numériquement elle ne donne pas de meilleurs résultats (au contraire) que l'extrapolation classique sauf si k est voisin de 1. Ceci s'explique aisément par le fait que les conditions de platitude sont déjà vérifiées par $P_N \left[g \right]$ à cause des propriétés des différences divisées et des polynômes d'interpolation. Néanmoins lorsque k est assez voisin de 1 la méthode est bonne.

(VI, 2) Interpolation de fonctions de plusieurs variables.

Etant donné $f \in \mathcal{C}^m (\Omega)$ où Ω boule ouverte de R^n contient M il s'agit d'approcher $\dfrac{\partial^k f}{\partial X^k}$ (M) en n'utilisant que les valeurs de f sur une partie de Ω.

Soit $\left\{ \mathcal{A}_i \right\}$ une suite, de systèmes unisolvents de $m_1 = \begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix}$ points dans R^n, sa tisfaisant aux conditions :

(VI, 2, 1) : $\forall$ i : les m_1 points A_k de $\mathcal{R}_i$ sont dans un hypercube C_i, contenant M, de coté d_i et si Q_j ($\mathcal{R}_i$, .) est le polynôme de degré $\leq$ m tel que $Q_j(\mathcal{R}_i, A_k) = \delta_{jk}$ pour $A_k \in \mathcal{R}_i$ alors il existe Γ tel que :

$$\forall i : \sup_{\mu \in C_i} \sum_{j=1}^{m_1} \left| Q_j(\mathcal{R}_i, \mu) \right| \leq \Gamma$$

(VI, 2, 2) : $\lim\limits_{i \to +\infty} d_i = 0$

Ces relations sont vérifiées en particulier lorsque les $\mathcal{R}_i$ sont obtenus, à partir de $\mathcal{R}_0$ fixé, par des déplacements homothéties de centre M et de rapport r (i) décroissant vers o.

<u>Théorème (VI,2,3)</u> : Si (VI, 2, 1) et (VI,2 ,2) sont vérifiés alors, en désignant par $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_i}[f]$ le polynôme d'interpolation relatif à f sur $\mathcal{R}_i$, on a :

$$\forall K \text{ tel que } k \leq m : \lim_{i \to +\infty} \frac{\partial^K \mathcal{P}_{\mathcal{R}_i}[f]}{\partial X^K}(M) = \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M)$$

ou plus exactement on a une majoration du type :

$$\left| \frac{\partial^K \mathcal{P}_{\mathcal{R}_i}[f]}{\partial X^K}(M) - \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M) \right| \leq \Lambda\, d_i^{\,m-k}\ \omega(f, m, d_i)$$

Ce théorème nous permet d'obtenir systématiquement des approximations pour $\frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M)$. Le paragraphe (VI, 1) nous permet d'améliorer nos approximations en faisant croître i assez vite .

BIBLIOGRAPHIE

COATMELEC (C) : Thèse

EFIMOV (A. V) [I] : Math. Sb. (N. S) 54 (96) 5(1961)

GLAESER (G.) [I] : Etude de quelques algèbres tayloriennes - J. d'Analyse Math. Jérusalem (1958)

GOLOMB (M) [I] : Lectures on theory of approximation . Argonne National Laboratory (1962)

KORNEICUK (N. P) : The exact constant in D. Jackon's theorem on best uniform approximation of continuous periodic functions. DOKLADY (July 1962) vol 3 n° 4

LAURENT (P. J) [I] : Etude de procédés d'approximation en analyse numérique (Thèse 15 juin 1964)

MERRIEN (J.) [I] : Prolongateurs de fonctions différentiables d'une variable réelle. (à paraître et séminaire d'analyse RENNES 1964)

VALLEE POUSSIN (C. de la) [I] : Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle (Gauthier Villars 1919)

WHITNEY [I] : Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets - (Trans. Amer. Math. Soc. 36-1 (1934))

[II] : Differentiable functions defined in closed sets - (Trans. Amer. Math. Soc. 36 -2 (1934))