PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. P. RAOULT

Limites projectives et désintégration de mesures σ-finies

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1965-1966
« Publications des séminaires de mathématiques », , exp. nº 1, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1965-1966____A1_0>

LIMITES PROJECTIVES ET

DESINTEGRATION DE MESURES σ-FINIES

Exposé de J.P. RAOULT

INTRODUCTION. -

Cet exposé est consacré à une étude d'ensemble du problème de Bochner relatif à l'existence de limites projectives de mesures σ-finies et, plus particulièrement, à la présentation d'une solution qui, utilisant des hypothèses relatives à la désintégration des mesures considérées, généralise le théorème de Tulcea sur les espaces produits.

I. DEFINITIONS - ENONCE DU PROBLEME DE BOCHNER. -

1. - Système projectif de mesures σ-finies ((2) et (6))

Un système projectif de mesures σ-finies

$$(X_\alpha , \mathcal{B}_\alpha , \mu_\alpha , \pi_{\alpha\beta})_I$$

est constitué par la donnée :

- d'un ensemble ordonné filtrant à droite $(I, \leq)$ (On notera G son graphe)

  (c'est-à-dire que

  $(\forall (\alpha , \beta) \in I^2)$ $(\exists \gamma \in I)$ $(\alpha , \gamma) \in G$ et $(\beta, \gamma) \in G)$

- pour tout $\alpha \in I$, d'un espace de mesure σ-finie $(X_\alpha , \mathcal{B}_\alpha , \mu_\alpha)$
- pour tout $(\alpha , \beta) \in G$, d'une application mesurable $\pi_{\alpha\beta}$ de $(X_\beta, \mathcal{B}_\beta)$

  dans $(X_\alpha , \mathcal{B}_\alpha)$, telle que

$$\mu_\alpha = \mu_\beta \circ \pi_{\alpha\beta}^{-1}$$

(si $\alpha = \beta$, $\pi_{\alpha\alpha}$ est l'application identique de X_α

pour tout triplet (α , β, γ) tel que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, on suppose que

$$\pi_{\alpha\gamma} = \pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma}$$

.../...

On appelle limite projective du système projectif donné l'ensemble

$$= \varprojlim (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta})_I = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in I} \; ; (\forall \alpha \in I) \quad x_\alpha \in X_\alpha \, , \, (\forall (\alpha, \beta) \in G) \, \pi_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha \right\}$$

J étant un sous-ensemble de I, filtrant à droite pour l'ordre défini par restriction de l'ordre donné sur I, on note

$$X^J = \varprojlim (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta})_J$$

Il existe une application canonique de X dans X^J, notée π_J, qui, à toute famille $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ appartenant à X associe la sous-famille obtenue par restriction au sous-ensemble d'indices J. En particulier, pour tout $\alpha \in I$, on note

$$\pi_{\{\alpha\}} = \pi_\alpha$$

et, si $\alpha \in J$, on note π_α^J la projection canonique de X^J dans X_α ;

Pour tout α appartenant à I (resp. J), on note

$$B_\alpha^* = \pi_\alpha^{-1} (\mathcal{B}_\alpha) \text{ (resp. } \mathcal{B}_\alpha^J = (\pi_\alpha^J)^{-1} (\mathcal{B}_\alpha))$$

La condition de compatibilité des mesures

$$\text{(i. e.} \quad (\forall (\alpha, \beta) \in G) \; \mu_\alpha = \mu_\beta \circ \pi_{\alpha\beta}^{-1})$$

permet de définir sur $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha^*$ (resp. $\bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{B}_\alpha^J$) un contenu (i. e. une fonction positive, finiment additive d'ensembles) m (resp. m^J) et vérifiant, pour tout α appartenant à I (resp. J),

$$m \circ \pi_\alpha^{-1} = \mu_\alpha \quad \text{(resp. } m^J \circ (\pi_\alpha^J)^{-1} = \mu_\alpha)$$

2. - Problème -

- Trouver des conditions suffisantes pour que le contenu m soit σ-additif (et donc se prolonge en une mesure unique sur la tribu engendrée par

$$\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha^* .$$

3. - Rappel de quelques notions. -

a) Compacité.

Une famille $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble X est dite compacte si et seulement si, de toute famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$ d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

Une mesure μ, définie sur un espace mesurable $(X,\mathcal{B})$, est dite compacte (ou régulière) par rapport à une famille compacte $\mathcal{C}$ contenue dans $\mathcal{B}$ si et seulement si, pour toute partie mesurable B, de mesure non nulle,

$$(B) = \operatorname{Sup} \left\{\mu(C) \; ; \; C \in \mathcal{C}, \; C \subset A\right\}$$

(le lecteur intéressé par ces notions pourra en trouver une étude d'ensemble dans :

Roland GRÜNIG. Mesures compactes. Mesures parfaites. Thèse de 3° cycle en calcul des Probabilités. Paris - 1965 -

b) DESINTEGRATION DES MESURES.

Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in G$, et pour tout $B_\beta \in \mathcal{B}_\beta$, l'hypothèse de compatibilité des mesures permet, par application du théorème de Radon-Nikodym, de définir, à une égalité μ_α-presque-sure près, une application

$$\mu^\alpha_\beta(B_\beta) : \; x_\alpha \rightsquigarrow \mu^\alpha_\beta(x_\alpha, B_\beta)$$

Vérifiant

$$(\forall B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha) \qquad \int_{B_\alpha} \mu^\alpha_\beta(x_\alpha, B_\beta)\, \mu_\alpha(d\, x_\alpha) = \mu_\beta\left(B_\beta \cap \pi^{-1}_{\alpha\beta}(B_\alpha)\right)$$

Si, pour tout x_α, l'application

$$B_\beta \rightsquigarrow \mu^\alpha_\beta(x_\alpha, B_\beta)$$

est σ-additive (et on voit aisément, en considérant le cas où $B_\beta = X_\beta$, qu'elle peut alors être prise de masse totale égale à l'unité), on dit que μ^α_β est une version de la probabilité $\mathcal{B}_\alpha$-conditionnelle régulière définie sur $(X_\beta, \mathcal{B}_\beta, \mu_\beta)$, ou encore que c'est une désintégration stricte de la mesure μ_β relativement à la tribu $\mathcal{B}_\alpha$.

c) PARTITION ENGENDREE PAR UNE TRIBU.

Etant donné un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$, on appelle partition engendrée par $\mathcal{B}$ la partition la moins fine telle que toute partie mesurable en soit réunion d'atomes (c'est la partition associée à la relation d'équivalence selon laquelle deux éléments de X sont équivalents si et seulement si ils ne sont séparés par aucune partie mesurable).

On remarque que les atomes de cette partition ne sont pas nécessairement mesurables.

.../...

d) PSEUDO-SUPPORT D'UNE MESURE.

Etant donné un espace de mesure $(X, \mathcal{B}, \mu)$, μ est dite pseudo-portée par une partie A de X si et seulement si la mesure extérieure associée à μ est portée par A (autrement dit la mesure de toute partie mesurable disjointe de A est nulle).

....

II. - CAS PARTICULIER DES ESPACES PRODUITS.

1. Présentation des espaces produits comme limites projectives.

Soit $(E_\tau, \mathcal{F}_\tau)_{\tau\in T}$ une famille quelconque d'espaces mesurables.

Soit I l'ensemble des parties finies de T, ordonné par inclusion (il est alors bien filtrant à droite).

Soit, pour tout α appartenant à I,

$$(X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) = (\prod_{\tau\in\alpha} E_\tau, \bigotimes_{\tau\in\alpha} \mathcal{F}_\tau)$$

Soit, pour tout $(\alpha, \beta)\in G$, $\pi_{\alpha\beta}$ la projection canonique de X_β sur X_α (à toute famille finie $(e_\tau)_{\tau\in T}$ (où, pour tout $\tau\in\beta$, $e_\tau \in E_\tau$), $\pi_{\alpha\beta}$ associe la sous-famille obtenue par restriction au sous-ensemble d'indices α de β)

On vérifie qu'alors :

- $\prod_{\tau\in T} E_\tau = \varprojlim (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta})_I$
- $\bigotimes_{\tau\in T} \mathcal{F}_\tau$ est la tribu engendrée par $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{B}^*_\alpha$

C'est une situation fréquente dans l'étude des processus stochastiques que de connaître, sur chaque produit fini $\prod_{\tau\in\alpha} E_\tau$, une probabilité P_α, la famille $(P_\alpha)_{\alpha\in I}$ vérifiant la condition de compatibilité des mesures.

$$(X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha, P_\alpha, \pi_{\alpha\beta})_I$$

est alors bien un système projectif de mesures σ-finies.

Les solutions qui furent données au problème de Bochner dans ce cas particulier sont de deux types, que nous précisons ci-dessous en 2 et 3. Ce sont les deux voies ainsi définies que nous reprendrons en III et IV pour l'étude du problème général.

2. - Solutions utilisant des hypothèses de compacité (voir par ex.([8]) III 3)

Théorème : Pour qu'une famille de probabilités compatibles, définies sur les espaces produits finis $(\prod_{\tau\in\alpha} E_\tau, \bigotimes_{\tau\in\alpha} \mathcal{F}_\tau)$, notée $(P_\alpha)_{\alpha\in I}$, admette un prolongement σ-additif unique sur $(\prod_{\tau\in T} E_\tau, \bigotimes_{\tau\in T} \mathcal{F}_\tau)$, il suffit que pour tout τ appartenant à T, la probabilité $P_{\{\tau\}}$ soit compacte.

Un cas particulier important est celui où, pour tout τ, $\mathcal{F}_\tau$ est la tribu borélienne associée à une topologie munissant X_τ de la structure d'espace polonais (i.e. métrisable, complet, de type séparable) ; la condition suffisante du théorème ci-dessus est alors toujours vérifiée, les classes compactes en jeu étant les classes des compacts, au sens topologique du terme, de chacun des espaces (voir par ex. ([8]) II 7.3.)

3. - Solutions utilisant des hypothèses de désintégration des mesures.

Théorème de Tulcea (nous respectons, aux notations près, la forme donnée à ce résultat par C.T. Ionescu Tulcea en ([4])) (voir aussi ([8]) V 1).

Pour qu'une famille de probabilités compatibles, définies sur les espaces produits finis $(\prod_{\tau\in\alpha} E_\tau, \bigotimes_{\tau\in\alpha} \mathcal{F}_\tau)$ notée $(P_\alpha)_{\alpha\in I}$, admette un prolongement σ-additif unique sur $(\prod_{\tau\in T} E_\tau, \bigotimes_{\tau\in I} \mathcal{B}_\tau)$, il suffit que, pour tout τ appartenant à T et toute partie finie α à laquelle n'appartient pas τ, il existe une version régulière de la probabilité $\mathcal{B}^*_\alpha$-conditionnelle définie sur $(\prod_{\tau\in T} E_\tau, B^*_{\tau\cup\{\alpha\}}, P_{\tau\cup\{\alpha\}})$.

Un cas particulier important est celui où, pour tout α, $P_\alpha = \prod_{\tau\in\alpha} P_{\{\tau\}}$

(théorème de Kolmogorov)

....

III. - SOLUTIONS DU PROBLEME DE BOCHNER AVEC HYPOTHESES DE COMPACITE.

1. Les conditions de "retour au dénombrable".

En III et IV, quelles que soient les hypothèses faites, les démonstrations de σ-additivité de m reposent toujours sur la considération d'une suite décroissante $(C^*_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties de $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{B}^*_\alpha$, dont on suppose qu'elle vérifie

$$\lim_{i\to\infty} m(C^*_i) \neq 0$$

.../...

et dont on démontre qu'alors

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i^* \neq \emptyset$$

Il faudra donc se ramener systématiquement au cas où I est dénombrable ; ceci sera assuré par l'une des hypothèses suivantes, que nous appelerons hypothèses de "retour au dénombrable" :

a) Pour toute suite croissante extraite de I, la projection π_J est surjective.

Son utilisation repose sur le lemme suivant (10) :

Lemme.- Soit un système projectif de mesures σ-finies, indexé par I filtrant à droite et tel que, quelle que soit la suite croissante J extraite de I, la projection π_J soit surjective [condition s.m. (sequential maximality) de Bochner (1) . Il suffit, pour que le contenu m soit σ-additif que, quelle que soit la suite croissante J extraite de I, le contenu m^J soit σ-additif.

Démonstration. - Pour que m soit σ-additif, il faut et il suffit que, pour toute suite croissante J extraite de I, sa restriction à $\bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha^*$ le soit (5).
Or, étant donnée J, $\bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha^* = \pi_J^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha^J\right)$ et $m \circ \pi_J^{-1} = m^J$.
Si π_J est surjective, π_J^{-1} établit un isomorphisme entre $\bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha^J$ et $\bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha^*$

et donc, si m^J est σ-additif, la restriction de m à $\bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha^*$ l'est aussi.

Remarque : L'hypothèse s.m. implique que toutes les applications π_α et $\pi_{\alpha\beta}$ sont surjectives (ce qui en particulier implique que π_α^{-1} établit une bijection de $\mathcal{B}_\alpha$ sur $\mathcal{B}_\alpha^*$).

b) I, filtrant à droite, admet un ensemble cofinal dénombrable I° et toutes les applications π_α sont surjectives.

Son utilisation repose sur le fait que, dans ce cas, X est isomorphe à la limite du système projectif réduit à l'ensemble d'indices I° (2).

2. - Le théorème de Métivier. (6)

Soit $(X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha, \mu_\alpha, \pi_{\alpha\beta})_I$ un système projectif de mesures σ-finies tel que :

.../...

1) une condition de "retour au dénombrable" est assurée

2) pour tout α, μ_α est compacte relativement à une classe compacte $\mathcal{C}_\alpha$

3) pour toute suite croissante $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de I, tout système projectif $(C_n, \pi_{\alpha_n \alpha_m} \mid C_m)_{\mathbb{N}}$ où, pour tout n, C_n appartient à $\mathcal{C}_{\alpha_n}$,

a une limite projective non vide

Alors le contenu m est σ-additif.

Remarques :

1) Métivier propose, pour assurer l'hypothèse 3, les conditions suivantes : pour toute suite croissante J extraite de I,

$$- (\forall \alpha \in J)\ \mathcal{K}^J_\alpha = \bigcup_{(\alpha,\beta) \in G \cap J^2} \pi_{\alpha\beta} (\mathcal{C}_\beta) \text{ est une classe compacte}$$

$$- (\forall (\alpha,\beta) \in G \cap J^2)\ (\forall x_\alpha \in X_\alpha)\ \pi^{-1}_{\alpha\beta}(x_\alpha) \cap \mathcal{K}^J_\beta \text{ est une classe compacte}$$

Ces conditions sont plus générales que celles données par Bourbaki

((2) , 7 , n° 4, Th. 1)

2) Le cas particulier où, pour tout α, $\mathcal{B}_\alpha$ est la tribu borélienne associée à une topologie séparée sur X_α, et où μ_α est compacte par rapport à la classe des compacts de la topologie avait fait l'objet d'un théorème de Bochner (1) (on retrouve ici encore le cas des espaces polonais, toute mesure est compacte).

3) Une version moins générale (et erronée) du théorème de Métivier a été donnée par Choksi (3).

4) Métivier donne également le résultat suivant relatif à la compacité de la mesure limite projective :

Si, dans l'énoncé du théorème ci-dessus,

- l'hyp. 1 est assurée par le b) de III 1.
- l'hyp. 2 est particularisée par le fait que, pour tout α, $\mathcal{C}_\alpha$ soit fermée pour les intersections de familles dénombrables.
- l'hyp. 3 est particularisée par les conditions de la remarque 1, où de plus :

$$(\forall (\alpha, \beta) \in G)\quad \pi_{\alpha\beta} (\mathcal{C}_\beta) \subset \mathcal{C}_\alpha$$

alors la mesure limite projective est compacte par rapport à la classe des parties de X qui peuvent être canoniquement identifiées aux limites des systèmes projectifs $(C_\alpha, \pi_{\alpha\beta} \mid C_\beta)_I$ (où, pour tout α, C_α appartient à $\mathcal{C}_\alpha$)

.../...

IV. - SOLUTIONS DU PROBLÈME DE BOCHNER AVEC HYPOTHESES DE DESINTEGRATION.

1. - Théorème. - Soit $(X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha, \mu_\alpha, \pi_{\alpha\beta})_I$ un système projectif de mesures σ-finies tel que :

1° Une condition de "retour au dénombrable" est assurée

2° Pour tout α est définie sur X_α une partition $\mathcal{A}_\alpha$ plus fine que celle engendrée par $\mathcal{B}_\alpha$; pour tout couple (α, β) tel que $\alpha \leq \beta$, $\mathcal{A}_\beta$ est plus fine que $\pi_{\alpha\beta}^{-1}(\mathcal{A}_\alpha)$;

3° Pour tout couple (α, β) tel que $\alpha \leq \beta$, il existe, sur l'espace $(X_\beta, \mathcal{B}_\beta, \mu_\beta)$ une version de la probabilité $\mathcal{B}_\alpha$-conditionnelle, notée μ^α_β, qui soit :

- régulière ;
- telle que, pour μ_α-presque tout x_α appartenant à X_α, la probabilité $\mu^\alpha_B(x_\alpha)$ soit pseudo-portée par $\pi_{\alpha\beta}^{-1}[A_\alpha(x_\alpha)$, où $A_\alpha(x_\alpha)$ est l'atome de la partition $\mathcal{A}_\alpha$ auquel appartient x_α ;

4° pour toute suite croissante $(\alpha_n)_{n\in N}$ extraite de I, tout système projectif $(A_n, \pi_{\alpha_n\alpha_m} | A_m)_N$, où pour tout n, A_n appartient à $\mathcal{A}_{\alpha n}$, a une limite projective non vide.

Alors le contenu m est σ-additif.

2. - Démonstration. - [10] 1° Il suffit (III 1), de démontrer que, étant donné un système projectif indexé par N, et satisfaisant aux hypothèses 2° à 4°, si $(C^*_i)_{i\in N}$ est une suite décroissante de parties de X telle que, pour tout i, C^*_i appartienne à $\mathcal{B}^*_i$ et que $\lim_{i\to\infty} m(C^*_i) = r \neq 0$, alors

$$\bigcap_{i\in N} C^*_i \neq \emptyset.$$

2° Pour tout i, soit C_i, appartenant à $\mathcal{B}_i$, telle que $\pi_i^{-1}(C_i) = C^*_i$.

$$m(C^*_i) = \mu_i(C_i) = \mu_o[\mu^o_1[\ldots[\mu^n_{n+1}[\ldots[\mu^{i-1}_i[\mu^i_i(C_i)]]\ldots]]\ldots]]$$

(on adopte la même notation pour une mesure et pour l'intégrale qu'elle définit ; on suppose avoir, si besoin est, modifié les probabilités conditionnelles régulières de façon que l'hypothèse 3° soit satisfaite partout au lieu de presque partout et que, pour tout i, $\mu^i_i(C_i) = I_{C_i}$ [indicateur de (C_i) .

.../...

Pour tout couple (i, n) tel que $i \geq n$, on note

$$R_i^n = \mu_{n+1}^n \left[\mu_{n+2}^{n+1}\left[\cdots\left[\mu_i^{i-1}\left[\mu_i^i(C_i)\right]\right]\cdots\right]\right] = \mu_{n+1}^n \, (R_i^{n+1}).$$

R_i^n est une fonction $\mathcal{B}_n$ -mesurable, μ_n -presque partout supérieure ou égale à R_{i+1}^n et μ_n -presque partout égale à $\mu_i^n\,(C_i)$.

3°) Pour tout n, on définit $R_\infty^n = \inf\limits_{i \geq n} R_i^n$.

Pour μ_{n+1} -presque tout x_{n+1}, $R_\infty^{n+1}\,(x_{n+1})$ est égal à la limite de la suite décroissante $(\,R_i^{n+1}\,(x_{n+1}))_{\,i \geq n+1}$, et donc, μ_n -presque partout,

$$\mu_{n+1}^n\,(x_n,\, R_\infty^{n+1}) = \lim_{i \to \infty} R_i^n\,(x_n).$$

On définit

$$Q_n^n = \left\{ x_n : \mu_{n+1}^n\,(x_n,\, R_\infty^{n+1}) = \lim_{i \to \infty} R_i^n\,(x_n).\right.$$

qui vérifie $\mu_n\,(Q_n^n) = I$.

Par récurrence, étant donné $m < n$ et Q_n^{m+1}, qui vérifie $\mu_{m+1}\,(Q^{m+1}) = I$, on définit $Q_n^m = \left\{ x_m : \mu_{m+1}^m\,(x_m,\, Q_n^{m+1}) = I \right\}$, qui vérifie $\mu_m\,(Q_n^m) = I$.

On définit alors, pour tout m, $Q_m = \bigcap\limits_{n \geq m} Q_n^m$. Q_m appartient à $\mathcal{B}_m$, $\mu_m\,(Q_m) = I$ et, pour tout x_m appartenant à Q_m, $\mu_{m+1}^m\,(x_m,\, Q_{m+1}) = I$.

4°) Pour tout i, $m\,(C_i^*) = \mu_o\,(R_i^o) \geq r$. Donc R_∞^o vérifie $\mu_o\,(R_\infty^o) \geq r$.

D'après l'hypothèse 2°, il existe donc A_o, appartenant à $\mathcal{A}_o$, et $r' > o$, tels que

- $A_o \subset Q_o$;
- pour tout i et tout x_o appartenant à A_o, $R_i^o\,(x_o) \geq r'$.

5°) n étant fixé, supposons qu'existe A_n, appartenant à $\mathcal{A}_n$, tel que :

- $A_n \subset Q_n$;
- pour tout $i \geq n$ et tout x_n appartenant à A_n, $R_i^n\,(x_n) \geq r'$, et donc, car $A_n \subset Q_n^n$, $\mu_{n+1}^n\,(x_n,\, R_\infty^{n+1}) \geq r'$.

.../...

Il existe donc A_{n+1}, appartenant à $\mathcal{A}_{n+1}$, tel que :

- $A_{n+1} \subset Q_{n+1}$ [car $\mu^{n}_{n+1}(x_n, Q_{n+1}) = I$];

- pour tout x_{n+1} appartenant à A_{n+1},

$$R^{n+1}_{\infty}(x_{n+1}) \geq r'.$$

et donc, pour tout $i \geq n+I$,

$$R^{n+1}_{i}(x_{n+1}) \geq r'$$

[cas où $i = n+I$: $R^{n+1}_{n+1}(x_{n+1}) = I_{C_{n+1}}(x_{n+1}) = I$];

- $A_{n+1} \subset \pi^{-1}_{n,n+1}(A_n)$ (hypothèse 3°).

6°) On construit ainsi par récurrence un système projectif $(A_n, \pi_{nm}|A_m)_N$ qui, d'après l'hypothèse 4°, a une limite non vide, identifiable à une partie de X. Soit x appartenant à cette limite ; pour tout n, $\pi_n(x)$ appartient à C_n, donc $\bigcap_{n \in N} C^*_n \neq \emptyset$.

3. Remarques :

a) Les hypothèses du théorème restent vérifiées si, pour tout x, on remplace la partition $\mathcal{A}_\alpha$ par la partition engendrée par $\mathcal{B}_\alpha$

b) Dans le cas où le système projectif est constitué par une famille croissante de tribus sur un même ensemble, on retrouve le résultat (9) (à corriger comme suit : Hypothèse E, lire Quel que soit t, $\mathcal{A}_t$ est plus fine que la partition engendrée par $\mathcal{B}_t$).

c) Dans le cas où, pour tout α, $\mathcal{A}_\alpha$ est la partition discrète de X_α, on retrouve le théorème de Choksi (3) ; on peut déduire notre théorème de celui de Choksi par les considérations suivantes :

Il suffit de démontrer que, si J est une suite croissante de I, le contenu m^J est σ-additif. Pour tout α, soient R_α la relation d'équivalence sur X_α associée à $\mathcal{A}_\alpha$, $\bar{X}_\alpha = X_\alpha / R_\alpha$, et Θ_α la projection canonique de X_α sur $\bar{X}_\alpha$; on définit canoniquement le système projectif $(\bar{X}_\alpha, \bar{\mathcal{B}}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha, \bar{\pi}_{\alpha\beta})_J$; sa limite $\bar{X}^J$ se projette sur chaque $\bar{X}_\alpha$ par l'application $\bar{\pi}_\alpha$. Le contenu $\bar{m}^J$ défini sur $\bigcup_{\alpha \in J} (\bar{\pi}^J_\alpha)^{-1}(\bar{\mathcal{B}}_\alpha)$ est σ-additif d'après le théorème de Choksi.

.../...

$(\theta_\alpha)_J$ est un système projectif d'applications (2) et donc il existe θ^J, application de X^J dans $\overline{X}^J$, telle que, pour tout α de J, $\overline{\pi}_\alpha^J \circ \theta^J = \theta_\alpha \circ \pi_\alpha^J$; l'hypothèse 4° exprime que θ^J est surjective [alors que la limite du système projectif d'applications $(\theta_\alpha)_I$ ne l'est pas nécessairement] et donc que $(\theta^J)^{-1}$ établit un isomorphisme entre $\bigcup_{\alpha\in J} (\pi_\alpha^J)^{-1}(\mathcal{B}_\alpha)$ et $\bigcup_{\alpha\in J} (\overline{\pi}_\alpha^J)^{-1}(\overline{\mathcal{B}}_\alpha)$;

or, $\overline{m}^J = m^J \circ (\theta^J)^{-1}$; on en déduit que le contenu m^J est σ-additif.

En particulier ce sont les hypothèses de Choksi qui sont vérifiées dans le cas des espaces produits (et on retrouve alors le théorème de Tulcea) Les systèmes projectifs considérés dans l'hypothèse 4 s'identifient alors aux suites (x_{α_n}) telles que

$$(\forall n)\ (\forall m \geq n)\quad x_{\alpha_n} = \pi_{\alpha_n \alpha_m}(x_{\alpha_m})$$

La limite projective du système

$$(\{x_{\alpha_n}\}, \pi_{\alpha_n\alpha_m}(x_{\alpha_m}))_{\mathbb{N}}$$

est alors identifiée à un point de l'espace $\varprojlim (X_{\alpha_n}, \pi_{\alpha_n\alpha_m})_{\mathbb{N}}$

Voici maintenant un exemple où les hypothèses de notre théorème sont satisfaites alors que celles de Choksi ne le sont pas :

On considère le système projectif, indexé par $\mathbb{N}$, tel que :

- $(\forall n\in \mathbb{N})\quad X_n = [0, 1]$
- $(\forall (n,m)\in G)\ \pi_{nm}$ est l'application identique de $[0, 1]$
- $(\forall n\in \mathbb{N})\ \mathcal{A}_n = \{[0, 2^{-n}], \ldots,]2^{-k}, 2^{-k+1}], \ldots,]2^{-1}, 1]\}$

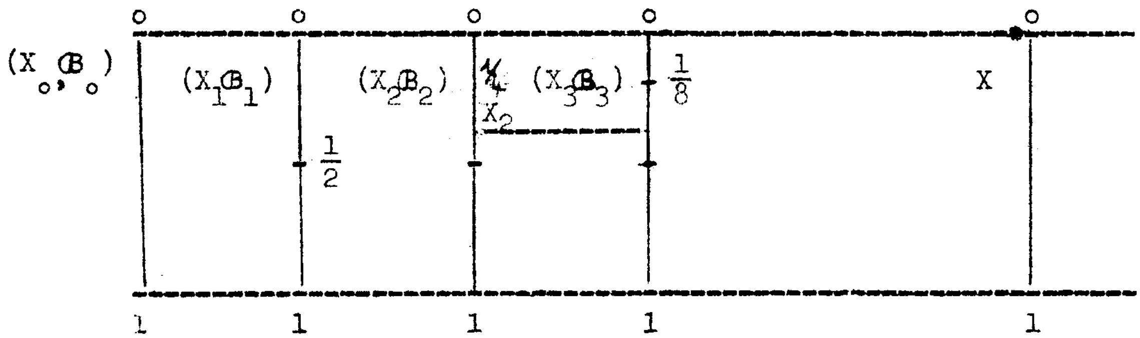
et $\mathcal{B}_n$ est la tribu engendrée par cette partition

(on s'assurera aisément que les hypothèses 1, 2 et 4 sont satisfaites).

- $(\forall n\in \mathbb{N})\ \mu_n$ est la probabilité concentrée sur le seul atome $[0, 2^{-n}]$

(l'hypothèse 3 est donc bien satisfaite ; par contre, si on considère $x_n \in]2^{-n-1}, 2^{-n}]$, $\mu_{n+1}^n(x_n)$ est portée par $]0, 2^{-n-1}]$ alors que $\pi_{n,n+1}^{-1}(x_n) = x_n$ est situé dans $]2^{-n-1}, 2^{-n}]$.

.../...



(dans chaque espace, on a renforcé l'atome sur lequel sont portés la probabilité correspondante, et toutes les probabilités conditionnées par des indices inférieurs).

La mesure limite projective est dans ce cas la probabilité dont toute la masse est concentrée au point 0 ; on remarque que si on modifiait cet exemple en remplaçant $[0,1]$ par $]0,1]$, la mesure limite projective n'existerait plus (c'est l'hypothèse 4 qui n'est plus vérifiée).

4. - Conditions de réalisation des hypothèses du théorème.

a) Hypothèse 4 -

Cette hypothèse joue dans notre théorème un rôle analogue à l'hypothèse 3 dans celui de Métivier ; on peut donc l'assurer par les conditions données en Remarque 1 dans III 2., en y remplaçant partout $\mathcal{C}$ par $\mathcal{T}$. (une partition est en effet trivialement compacte).

b) Hypothèse 3 -

Les théorèmes connus d'existence et de décomposition ~~de~~ probabilités conditionnelles régulières font intervenir des hypothèses de compacité. Le Théorème de relèvement de Tulcea (5) permet ainsi d'assurer l'hypothèse 3 par les conditions suivantes (7) :

Quel que soit α , $\mathcal{B}_\alpha$ admet un système dénombrable de générateurs et μ_α est compacte.

On peut alors se demander dans quelle mesure, quoiqu'ayant donné un théorème d'esprit très différent de celui de Métivier, nous avons, dans l'état actuel des connaissances sur la désintégration des mesures, effectivement gagné quelque chose ; pour avoir progressé, il faudrait que notre hypothèse 4 soit moins forte que l'hypothèse 3 de Métivier ; nous n'avons pas trouvé d'exemple de telle situation et terminerons donc en livrant ce problème à la sagacité du lecteur.

....

(1) BOCHNER S. , Harmonic analysis and the theory of probability, Berkeley 1955

(2) BOURBAKI N. , Théorie des ensembles, Ch. III, Hermann, Paris 1963

(3) CHOKSI J.R. , Inverse limits of measure spaces, Proc. of London Math. Soc., Vol. 8 , 1958 , p. 321-342

(4) IONESCU TULCEA C.T, Mesures dans les espaces produits, Atti Accad. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. , 7, 1949, p. 208-211.

(5) IONESCU TULCEA A. et C.T., On the lifting property, Bull. Amer. Math. Soc., Jan. 1964

(6) METIVIER M. , Limites projectives de mesures, Annali di Mat. Pura ed. Ap. (IV), Vol. LXIII (1963) p. 225-352

(7) METIVIER M. , Probabilités cond. régulières, Séminaire d'initiation aux Probabilités, Secrétariat de Math., Fac. Sc. Rennes (64-65)

(8) NEVEU J. , Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités, Masson Paris (1964)

(9) RAOULT J.P. , Sur une généralisation d'un théorème de Tulcea, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 259 p. 2769

(10) RAOULT J.P. , Limites projectives de mesures σ-finies et probabilités conditionnelles, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260, p. 4893
