Fauconnet

Décomposition orthogonale propre d'une F.A du 2ème ordre continue en M.G

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Seminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 8, p. 19-29
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A8_0>

DECOMPOSITION ORTHOGONALE PROPRE D'UNE F.A. DU 2ème ORDRE CONTINUE EN M.G.

I THEOREME DE MERCER

Soit X(t) une fonction aléatoire du second ordre, continue en m.q sur $[a,b]$. Sa covariance $\Gamma(t,t') = E\, X(t)\, \overline{X}(t')$ est continue sur IxI et c'est un e fonction de type non-négatif. Onpeut la considérer comme le noyau d'une transformation linéaire A symétrique et positive de L^2. Cette transformation est complètement continue. On peut lui appliquer le <u>théorème de Mercer</u>

Si la transformation A engendrée par le noyau symétrique et continu A(x,y) est positive la série $\sum_n \mu_n \varphi_n x\ \overline{\varphi}_n(y)$ est uniformément et absolument convergente de somme A(x,y), les μ_n sont les valeurs propres non nulles de la transformation A et les $\varphi_n(x)$ sont les fonctions propres correspondates formant un système orthonormé, la transformation étant positive les μ_n sont positifs. Posons $\mu_n = |\lambda_n|^2$

Donc $\Gamma(t,t') = \sum_n |\lambda_n|^2\, \psi_n(t)\, \overline{\psi}_n(t')$ (I)

$$\int_a^b \Gamma(t;t')\, \psi_n(t')\, dt' = |\lambda_n|^2\, \psi_n(t) \qquad (2)$$

$$\int_a^b \psi_m(t)\, \overline{\psi}_n(t)\, dt = \delta_{mn} \qquad (3)$$

De plus les fonctions propres $\psi_n(t)$ sont continues

II DECOMPOSITION ORTHOGONALE PROPRE DE X(t) [I] p.478 et479

Une fonction aléatoire X(t), continue en m.q sur I, asur I une décomposition orthogonale:

$$X(t) = \sum_n \lambda_n\, \xi_n\, \psi_n(t) \qquad (4)$$

avec $E\, \xi_m \overline{\xi}_n = \delta_{mn}$ $\int \psi_m(t)\, \overline{\psi}_n(t)\, dt = \delta_{mn}$ (5)

si et seulement si les $|\lambda_n|^2$ sont les valeurs propres et $\psi_n(t)$ les fonctions propres (formant un système orthonormé) de sa covariance $\Gamma(t,t')$;

la série converge en m.q uniformément sur I.

Démonstration:

_ Posons $X_n(t) = \sum_{k=I}^{n} \lambda_k \xi_k \psi_k(t)$.

Les conditions (5) étant vérifiées, si $X(t) = \lim_{\substack{m.q \\ n\to\infty}} X_n(t)$ alors :

$E\left(X(t)\,\bar{X}(t')\right) = \lim_n E\left(X_n(t)\,\bar{X}_n(t')\right)$ d'où $\Gamma(t,t') = \sum_n |\lambda_n|^2 \psi_n(t)\,\bar{\psi}_n(t')$

_ Réciproquement , supposons connue la décomposition orthogonale propre de $\Gamma(t,t')$ $\left((I),(2),(3)\right)$. Formons $\lambda_n \xi_n = \int_a^b X(t)\,\bar{\psi}_n(t)\,dt$ $(m.q)$

l'intégrale existe car $X(t)$ est continue en m.q et $\psi_n(t)$ est continue sur I

$$\begin{aligned}
E\left(\lambda_n \bar{\lambda}_m \xi_n \bar{\xi}_m\right) &= \int_a^b\!\!\int_a^b E\left(X(t)\,\bar{X}(t')\right)\bar{\psi}_n(t)\,\psi_m(t')\,dt\,dt' \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b \Gamma(t,t')\,\psi_m(t')\,dt'\right]\bar{\psi}_n(t)\,dt \\
&= \int_a^b |\lambda_m|^2\,\psi_m(t)\,\bar{\psi}_n(t)\,dt \\
&= |\lambda_m|^2\,\delta_{mn} \qquad \text{d'où } \underline{E\left(\xi_n \bar{\xi}_m\right) = \delta_{mn}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(X(t)\,\bar{\lambda}_n \bar{\xi}_n\right) &= E\left(X(t)\int_a^b \bar{X}(t')\,\psi_n(t')\,dt'\right) \\
&= \int_a^b \Gamma(t,t')\,\psi_n(t')\,dt' = |\lambda_n|^2\,\psi_n(t)
\end{aligned}$$

d'où $\underline{E\left(X(t)\,\bar{\xi}_n\right) = \lambda_n \psi_n(t)}$

$$E|X(t) - X_n(t)|^2 = \Gamma(t,t) - E\left(X_n(t)\,\bar{X}(t)\right) - E\left(X(t)\,\bar{X}_n(t)\right) + E\,|X_n(t)|^2$$

D'après le théorème de Mercer :

$$\Gamma(t,t) = \sum_k |\lambda_k|^2\,\psi_k(t)\,\bar{\psi}_k(t)$$

$$E\left(X_n(t)\,\bar{X}(t)\right) = \sum_{k=I}^{n} E\left(\lambda_k \xi_k \psi_k(t)\,\bar{X}(t)\right) = \sum_{k=I}^{n} \lambda_k \psi_k(t)\,\bar{\lambda}_k \bar{\psi}_k(t)$$

$$E\,|X_n(t)|^2 = \sum_{k=I}^{n}\sum_{k'=I}^{n} (\lambda\xi)_k \overline{(\lambda\xi)}_{k'}\,\psi_k(t)\,\bar{\psi}_{k'}(t) = \sum_{k=I}^{n} |\lambda_k|^2\,\psi_k(t)\,\bar{\psi}_k(t)$$

Donc $E\left|X(t) - X_n(t)\right|^2$ converge vers 0 uniformément sur I quand $n \to +\infty$

III Rappels sur les transformations linéaires dans $L^2[a,b]$ [2] n°66 chap IV

Soit une fonction de carré sommable dans $[a,b]\times[a,b]$: $K(x,y)$

On lui associe la transformation linéaire $\mathbb{K}$ qui à $f \in L^2$ fait correspondre $\mathbb{K}f \in L^2$

$$\mathbb{K}f(x) = \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy$$

$K(.,.) \in \mathbf{L}^2$, soit $|K| = \int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2\, dx\, dy$

$$\|\mathbb{K}f(.)\|^2 = \int_a^b \left|\int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy\right|^2 dx$$

Posons $k(x) = \left(\int_a^b |K(x,y)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}}$ Ceci est défini pour presque tout x d'après le théorème de Fubini, et $\int_a^b |k(x)|^2\, dx = |K|^2 = \|k\|^2$

donc $k \in L^1[a,b]$

$$\left|\int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy\right|^2 \leq \int_a^b |K(x,y)|^2\, dy \times \int_a^b |f(y)|^2\, dy \qquad \text{(Hölder)}$$

$$\leq k^2(x)\, \|f\|^2$$

Donc $\|\mathbb{K}f\|^2 \leq \int_a^b k^2(x)\, dx\, \|f\|^2 = \|k\|^2\, \|f\|^2$ Soit $\underline{\|\mathbb{K}f\| \leq |K|\, \|f\|}$

$\mathbb{K}$ est donc bornée de norme : $\|\mathbb{K}\| \leq |K|$

On appelle <u>noyau de rang fini</u> $K(x,y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)\, \overline{\psi_i}(y)$
où
$\varphi_i \in L^2$ et $\psi_i \in L^2$

On démontre que l'ensemble des noyaux de rang fini est dense dans l'ensemble des noyaux (au sens de la convergence en moyenne dans $\mathbf{L}^2$)

Etant donnée la transformation T définie par le noyau K(x,y) , la transfor-
-mation <u>adjointe</u> T^* est définie par le noyau $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$

Ainsi $\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle$

Une <u>transformation est symétrique</u> ou autoadjointe si elle coïncide avec sa transformation adjointe

<u>Eléments propres d'une transformation symétrique sur un espace de Hilbert</u>

Eléments propres d une transformation symétrique sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$

f est fonction propre de la transformation linéaire T si $Tf = \mu f$ $\mu \in \mathbb{C}$

μ est la valeur propre correspondante. Les fonctions propres correspondant à une va leur propre μ forment un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ dont la dimension est par définition la multiplicité de μ.

Nous considérons maintenant une transformation linéaire A symétrique.

- Propriété 1 :

La "forme quadratique" $\langle Af, f\rangle$ est réelle $\forall f$.
en effet $\langle Af, f\rangle = \langle f, A^{*}f\rangle = \langle f, Af\rangle = \overline{\langle Af, f\rangle}$

- Propriété 2 :

La "forme quadratique" $\langle Af, f\rangle$ étant réelle les valeurs propres sont réelles

- Propriété 3 :

Deux fonctions propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonales.

$Af = \mu f$ et $Ag = \nu g$.

formons $\langle Af, g\rangle = \mu\langle f, g\rangle$, $\langle f, Ag\rangle = \nu\langle f, g\rangle$ car ν est réel

$\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$ donc $(\mu - \nu)\langle f, g\rangle = 0$ et $\langle f, g\rangle = 0$

- Propriété 4 :

Si A est une transformation symétrique $\|A\|$ est le plus petit nombre tel que

$$\langle Af, f\rangle \leq \|A\| \, \|f\|^2$$

Transformation symétrique complètement continue [2] chap V et VI

- Définition 1. Une transformation linéaire est complètement continue si elle transforme tout ensemble infini borné en un compact.

- Définition 2. équivalente : si elle transforme toute suite (f_n) faiblement convergente en une suite Tf_n fortement convergente.

On démontre que les noyaux de rang fini engendrent des transformations linéaires complètement continues, puisque les noyaux de L^2 engendrent des transformations ayant la même propriété

- Théorème 1.

A étant une transformation symétrique complètement continue le problème suivant : existe - t-il une fonction f telle que $|\langle A f, f\rangle|$ soit maximum, sous la condition $\|f\| = 1$, a des solutions et toute solution est un élément propre f_1 correspondant à la valeur propre μ_1 $(|\mu_1| = \|A\|)$.

Donc toute transformation symétrique complètement continue $A \neq 0$ admet au moins une valeur propre $\neq 0$.

- Démonstration

Considérons $\|f\| = 1$. $\sup|\langle A f, f\rangle| = \|A\| = \sup \|A f\|$

Soit (f_n) une suite telle que $\|f_n\| = 1$ et $\langle A f_n \, f_n\rangle \to \|A\|$

On peut supposer (f_n) telle que $\langle A f_n, f_n\rangle \to \mu$ $|\mu_1| = \|A\|$

On va démontrer qu'on peut extraire de (f_n) une suite qui converge fortement vers f tel que $A f = \mu_1 f$.

$$0 \leq \|A f_n - \mu_1 f_n\|^2 = \|A f_n\|^2 - 2\mu_1\langle A f_n, f_n\rangle + \mu_1^2 \|f_n\|^2$$

donc $\| A f_n - \mu_1 f_n \| \to 0$.

La transformation A étant complètement continue, de la suite bornée (f_n) on peut extraire une suite (f_{n_k}) qui converge faiblement donc telle que (Af_{n_k}) converge fortement.

Soit $g = \lim (Af_{n_k})$.

Or $\|Af_n - \mu_1 f_n\| \to 0$ donc $\| A f_{n_k} - \mu_1 f_{n_k} \| \to 0$

donc $\mu_1 f_{n_k}$ converge fortement vers g.

Posons $f = \lim f_{n_k}$ (convergence forte) $\| f \| = \| f_{n_k} \| = 1$.

$$A f = \lim A f_{n_k} = \lim \mu_1 f_{n_k} = \mu_1 f.$$

$$\langle Af , f \rangle = \langle \mu_1 f, f \rangle = \mu_1 \quad \text{donc} \quad |\langle A f , f \rangle| = \|A\|$$

$$\text{et } \| A f \| = \| \mu_1 f \| = \| A \|$$

- Théorème 2.

A étant une transformation symétrique non nulle complètement continue, on obtient par la méthode d'extrumum toutes les valeurs propres non nulles de A, (chacune est obtenue autant de fois que l'indique sa multiplicité) . Elles sont de multiplicité finie, et ou bien de nombre fini ou bien dénombrables. Dans ce dernier cas, elles forment une suite de limite O.

Enfin $A f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Af, \varphi_i \rangle \varphi_i$

les φ_i forment un système orthogonal de fonctions propres.

- Pour obtenir les fonctions φ_i on procède de la façon suivante :

Soit φ_1 la fonction propre correspondant à la valeur propre μ_1 (théorème 1).

Soit $\mathcal{H}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ orthogonal à φ_1. Par A il est transformé en lui-même.

En effet $\langle A f, \varphi_1 \rangle = \langle f, A\varphi_1 \rangle = \langle f, \mu_1 \varphi_1 \rangle = 0$.

Si $\varphi_1 \in \mathcal{H}_1$

Sur $\mathcal{H}_1$ on recommence ce qu'on a fait sur l'espace entier...

- <u>Théorème 3</u>.

Pour que la suite des éléments propres φ_i de A correspondant aux valeurs propres $\mu_i \neq 0$ forme une suite orthogonale complète de l'espace L^2 il faut et il suffit que 0 ne soit pas valeur propre.

En effet soit $g \in L^2$ $\sum_i \langle g, \varphi_i \rangle \varphi_i$ est une série fortement convergente de somme $f \in L^2$.

$$\left(\sum |\langle g, \varphi_i \rangle|^2 \leq \|g\|^2 \quad \text{inégalité de Bessel} \right)$$

donc $$g = h + \sum_i \langle g, \varphi_i \rangle \varphi_i$$

et $$Ag = Ah + \sum \langle g, \varphi_i \rangle A\varphi_i = Ah + \sum_i \langle g, \varphi_i \rangle \mu_i \varphi_i$$

or d'après le théorème 2 $$\begin{aligned} Ag &= \sum \langle Ag, \varphi_i \rangle \varphi_i \\ &= \sum \langle g, A\varphi_i \rangle \varphi_i \\ &= \sum \mu_i \langle g, \varphi_i \rangle \varphi_i \end{aligned}$$

donc $Ah = 0$

si 0 n'est pas valeur propre $Ah = 0 \implies h = 0$

Transformation à noyau symétrique sur L^2

- Théorème.

Si le noyau $A(x, y)$ ne s'annule pas presque partout les résultats du paragraphe précédent montrent que toute fonction g admet le développement fortement convergent

$$g = h(x) + \sum \langle g, \varphi_i \rangle \varphi_i(x)$$

h est une fonction telle que $Ah(x) = 0$ et orthogonale aux φ_i et $Ag(x) = \sum \mu_i \langle g, \varphi_i \rangle \varphi_i(x)$.

Il n'y a qu'à démontrer le fait suivant :

la transformation A ne peut s'annuler pour tous les éléments de L^2 sans que $A(x, y)$ soit nul presque partout

$$\mu_i \langle h, \varphi_i \rangle = \langle h, \mu_i \varphi_i \rangle = \langle h, A\varphi_i \rangle = \langle Ah, \varphi_i \rangle = 0$$

donc $h \perp \varphi_i$.

Théorème de Schmidt.

Toute fonction symétrique de carré sommable, peut être développée au sens de la convergence en moyenne en la série

$$A(x, y) = \sum_n \mu_n \varphi_n(x) \overline{\varphi}_n(y)$$

- Démonstration

Les fonctions $\Phi_n(x, y) = \varphi_n(x) \overline{\varphi}_n(y)$ forment un système orthogonal dans $\mathbf{L}^2$.

La série $\sum_n \langle A, \Phi_n \rangle \Phi_n(x, y)$ converge en moyenne vers une fonction $S(x, y) \in \mathbf{L}^2$.

or $\langle A, \Phi_n \rangle = \iint A(x, y) \varphi_n(y) \overline{\varphi}_n(x) \, dx \, dy$

$$= \langle A \varphi_n , \varphi_n \rangle = \mu_n$$

Donc $\mathcal{S}(x, y) = \sum_n \mu_n \Phi_n$

Il faut démontrer $A(x, y) = \mathcal{S}(x, y)$

Soit $F(x, y) = g(x) \overline{f}(y)$ où $g \in L^2$ et $f \in L^2$

$$\langle S, F \rangle = \sum_n \mu_n \langle \Phi_n , F \rangle$$

or $\quad \langle A, F \rangle = \langle A f, g \rangle \qquad g = h + \sum_n \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n$

Calculons $\langle A f, g \rangle = \langle A f, h \rangle + \sum_n \langle A f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, g \rangle$

$A h = 0$ donc $\langle A f, g \rangle = \sum_n \langle f, A\varphi_n \rangle \langle \varphi_n, g \rangle = \sum_n \mu_n \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, g \rangle$

$$= \sum_n \mu_n \langle \Phi_n , F \rangle$$

donc $\langle S, F \rangle = \langle A, F \rangle$; $A - S$ est orthogonal à tous les éléments F de L^2 et par suite à tous les noyaux de rang fini.

Ceux-ci forment un ensemble partout deux dans l ensemble des noyaux donc $A - S$ orthogonal à lui-même est nul

$$A(x, y) - S(x, y) = 0 \quad \text{presque partout}$$

- Théorème

Si le noyau symétrique $A(x, y)$ satisfait à la condition $\int_a^b |A(x, y)|^2 \, dy < C^2 \quad \forall x$ alors le développement $Ag = \sum_n \mu_n \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n(x)$ converge absolument et uniformément.

- Théorème de Mercer

Si la transformation A engendrée par le noyau symétrique continu $A(x, y)$ est positive c'est-à-dire si $\langle A f, f \rangle \geq 0 \quad \forall f$, alors le développement

$$A\ (x, y) = \sum_n \mu_n \ \varphi_n\ (x)\ \bar{\varphi}_n\ (y)$$ est uniformément

absolument convergent, et les fonctions propres sont continues.

démonstration du théorème de Mercer page 242.

<u>Application à $\Gamma(t,t')$.</u>

$\Gamma(t, t')$ est une fonction continue de typé non - négatif. Donc elle engendre une transformation linéaire complètement continue A.

Cette transformation est symétrique car $\Gamma(t, t') = \overline{\Gamma(t, t')}$ (conséquence du fait que Γ est de type non- négatif).

Montrons que A est positive, c'est-à-dire que $\langle A f, f \rangle \geqslant 0$ $\forall f \in L^2$.

$$\langle A\ f,\ f \rangle = \int_a^b \int_a^b \Gamma(t, t')\ f(t')\ \bar{f}(t)\ dt\ dt'$$

1°) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Considérons une subdivision $t_o = a < t_1 < t_2 \cdot < t_n = b$ de $[a, b]$ en n parties égales.

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \Gamma(t_k, t_h)\ \bar{f}(t_k)\ f\ (t_h) \quad \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = R_n$$

$R_n \geqslant 0$ car Γ est de type non - négatif.

$$\text{et} \quad \lim_n\ R_n = \int_a^b \int_a^b \Gamma(t, t')\ f\ (t')\ \bar{f}\ (t)\ dt\ dt' = \langle Af,\ f \rangle$$

donc $\lim R_n \geqslant 0$ Soit $\langle Af, f \rangle \geqslant 0$.

2°) L'ensemble des fonctions continues est dense dans L^2.

B I B L I O G R A P H I E

------

[1] M. Loève :: Probability Theory.

[2] F. Riesz et B. S Z. Nagy : Leçons d'analyse fonctionnelle 3 è édition.

° ° ° °

o