PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

FAUCONNET

Calcul en moyenne quadratique : continuité, dérivation et intégration

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Seminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 7, p. 9-17
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A7_0>

CALCUL EN MOYENNE QUADRATIQUE :
CONTINUITE, DERIVATION ET INTEGRATION

I - Remarques préliminaires.

Soit une fonction aléatoire $X(t)$ du second ordre sur T considéré comme application de T dans $\mathcal{V}$ = ensemble des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Plus précédemment pour tout $t \in T$, $X(t)$ est un élément de $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de Hilbert quand on prend pour produit scalaire : $\langle X, Y\rangle = \int X \, \overline{Y} \, dP$

$$\text{Donc} \quad E \; X(t) \, \overline{X}(t') = \Gamma(t, t') = \langle X(t), X(t')\rangle$$

$$E \, |X(t)|^2 = \Gamma(t, t) = \| X(t) \|^2 .$$

L'inégalité de Schwarz montre que le produit scalaire est continu : $E\left(\lim_{\substack{m.q \\ s \to s_0}} X_s \, . \, \overline{X}_0 \right) = \langle \lim_{\substack{m.q \\ s \to s_0}} X_s, X_0 \rangle = \lim_{s \to s_0} \langle X_s, X_0 \rangle$

$$= \lim_{s \to s_0} E\,(X_s \, . \, \overline{X}_0)$$

$\lim\limits_{\substack{m.q \\ s \to s_0}} X_s = X$ signifie $\lim\limits_{s \to s_0} \| X_s - X \| = 0$

ou $\lim\limits_{s \to s_0} E \, | X_s - X |^2 = 0$

$$\text{et } E\left(\lim_{\substack{m\,q \\ s \to s_0}} X_s \lim_{\substack{m.q \\ t \to t_0}} \overline{X}_t \right) = \lim_{\substack{s \to s_0 \\ t \to t_0}} E\,(X_s \, \overline{X}_t)$$

Lemme.

Soit $X_s(t)$ une fonction aléatoire du second ordre, elle converge en moyenne quadratique vers une fonction aléatoire $X(t)$ (nécessairement du second ordre).

ıand $s \to s_0$, si et seulement si $E(X_s(t)\ \overline{X}_{s'}(t))$ converge vers une fonction finie $F(t)$ sur T quand $s \to s_0$ et $s' \to s_0$.

Alors $\Gamma_{X_s}(t, t')$ converge vers $\Gamma_X(t, t')$

Démonstration : de la condition suffisante :

H) $E\left(X_s(t)\ \overline{X}_{s'}(t)\right) \to F(t)$ finie quand $s \to s_0$ et $s' \to s_0$.

Par suite : $\|X_s(t) - X_{s'}(t)\|^2 = \|X_s(t)\|^2 + \|X_{s'}(t)\|^2$

$$- \langle X_s(t), X_{s'}(t)\rangle - \langle X_{s'}(t), X_s(t)\rangle .$$

converge vers 0 quand $s \to s_0$ et $s' \to s_0$

$(X_s(t))_{s \to s_0}$ est un filtre de Cauchy donc converge en moyenne quadratique.

La condition nécessaire et la propriété $\Gamma_{X_s}(t, t') \to \Gamma_X(t, t')$ résultent de la continuité du produit scalaire.

II. - Continuité en m. q.

Pour que $X(t)$ soit continu en m. q. sur T il faut et il suffit que $\Gamma(t, t')$ soit continue sur la diagonale Δ de $T \times T$. Et alors $\Gamma(t, t')$ est continue dans $T \times T$

$X(t)$ continue en m. q : $X(t+h) \xrightarrow[\text{m. q}]{} X(t)$ quand $h \to 0$

- La condition nécessaire résulte de la continuité du produit scalaire.

- Condition suffisante.

On suppose $\Gamma(t, t')$ continue en tout point de Δ.

$\|X(t+h) - X(t)\|^2 = \|X(t+h)\|^2 - \langle X(t+h), X(t)\rangle - \langle X(t), X(t+h)\rangle + \|X(t)\|^2 = \Gamma(t+h, t+h) - \Gamma(t+h, t) - \Gamma(t, t+h) + \Gamma(t, t)$

L'hypothèse entraine donc $\|X(t+h) - X(t)\|^2 \to 0$ quand $h \to 0$ c'est-à-dire $X(t+h) \underset{m.q}{\longrightarrow} X(t)$ quand $h \to 0$.

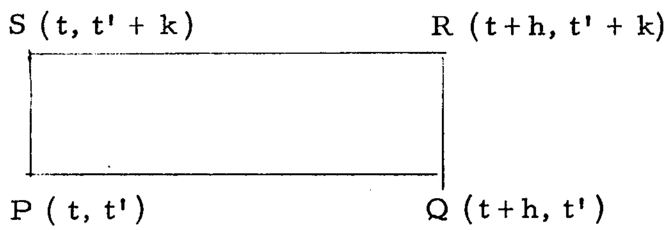
III. - <u>Différentiation en moyenne quadratique</u>.

- une f. a. $X(t)$ a une dérivée en m. q. en t si $\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}$ a une limite en moyenne quadratique quand $h \to 0$. Cette limite est la dérivée en m. q. notée $X'(t)_{m.q.}$

- une fonction à valeurs complexes $F(t, t')$ a une dérivée seconde généralisée en (t, t') si $\dfrac{1}{hk} \Delta_h \Delta_k F(t, t')$ a une limite quand $h \to 0$ et $k \to 0$. Cette limite est la dérivée seconde généralisée notée $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial t'}(t, t')_g$.

$$\Delta_h \Delta_k F(t, t') = F(t+h, t'+k) - F(t+h, t') - F(t, t'+k) + F(t, t')$$

$$\Delta_h \Delta_k F(t, t') = F(R) - F(Q) - F(S) + F(P$$



- <u>Théorème</u>.

Pour que la fonction aléatoire du second ordre $X(t)$ ait une dérivée en m. q. sur T il faut et il suffit que la dérivée seconde généralisée de sa covariance existe et soit finie sur la diagonale de $T \times T$.

D'après le lemme $\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}$ converge en m. q. vers une limite notée $X'(t)_{\text{m. q.}}$ quand $h \to 0$.

si et seulement si $E\left(\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h} \; \dfrac{\overline{X}(t+k)-\overline{X}(t)}{k}\right)$ a une limite quand $\begin{cases} h \to 0 \\ k \to 0 \end{cases}$ or ceci est $\dfrac{1}{h\,k}\,\Delta_h\,\Delta_k\,\Gamma\,(t,t)$

<u>Corollaire 1.</u>

Si $\dfrac{\partial^2}{\partial t\,\partial t'}\,\Gamma(t,t')_g$ existe finie en tout point de Δ alors les dérivées

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\,(t,t') \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial t'}\,(t,t') \quad \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\,\partial t'}\,(t,t')_g$$

existent finies en tout point de $T \times T$.

Cela résulte de la continuité du produit scalaire.

$$E\left(X'(t)\;\overline{X}\,(t')\right) = E\left(\lim_{\substack{\text{m. q.}\\ h\to 0}} \frac{X(t+h)-X(t)}{h}\;\overline{X}\,(t')\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\Gamma(t+h,t') - \Gamma(t,t')\right) = \frac{\partial\Gamma}{\partial t}\,(t,t')$$

$$E\left(X'(t)\;\overline{X}'(t')\right) = \Gamma_{X'}(t,t') = \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\,\partial t'}\,(t,t')_g$$

- Donc $\dfrac{\partial^2\Gamma}{\partial t\,\partial t'}\,(t,t')_g$ est la covariance de $X'(t)_{\text{m. q.}}$

<u>Corollaire 2.</u>

Si $X(t)$ a des dérivées en m. q. jusqu'à l'ordre n les dérivées généralisées de Γ existent jusqu'à l'ordre $m \leqslant n$ en t, $p \leqslant n$ en t'

et $$\frac{\partial^{m+p}\Gamma}{\partial t^m\,\partial t'^p}\,(t,t')_g = E\;\left(\frac{d^m X(t)}{dt^m}\right)_{\text{m. q.}}\;\left(\frac{d^p X(t')}{dt'^p}\right)_{\text{m. q.}}$$

Corollaire 3.

Une f.a. du 2è ordre $X(t)$ sur T est analytique en moyenne quadratique si et seulement si $\Gamma_X(t, t')$ est analytique en tout point de la diagonale Δ.

Et alors $\Gamma_X(t, t')$ est analytique sur $T \times T$.

- Si $\Gamma(t, t')$ est analytique sur Δ, alors les dérivées de $X(t)$ en moyenne quadratique, de tout ordre $n \in N$ existent pour tout $t \in T$, en particulier pour $t = 0$.

Posons $X_n(t) = X(0) + \frac{t}{1!} X'(0) + \dots \frac{t^n}{n!} X^{\widehat{n}}(0)$

Il faut montrer que $E\,|X(t) - X_n(t)|^2$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$

$$E\,|X(t) - X_n(t)|^2 = \|X(t) - X_n(t)\|^2 = \|X(t)\|^2 - \langle X(t), X_n(t)\rangle - \langle X_n(t), X(t)\rangle + \|X_n(t)$$

$$\Gamma(t, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m+k}}{k!\ m!} \frac{\partial^{m+k}\Gamma}{\partial t^m \partial t'^k}(0, 0) = \|X(t)\|^2$$

$$\langle X(t), X_n(t)\rangle = \sum_{k=0}^{n} E\left(X(t)\, \overline{X}^{k}(0) \frac{t^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \frac{\partial^k \Gamma}{\partial t'^k}(t, 0)$$

et $$\frac{\partial^k \Gamma}{\partial t'^k}(t, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}\Gamma}{\partial t^m\, t'^k}(0, 0) \frac{t^m}{m!}$$

Finalement on obtient $$E\,|X(t) - X_n(t)|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{t^{m+k}}{k!m!} \frac{\partial^{m+k}\Gamma}{t^m\, t'^k} (0$$

- Réciproquement si $X(t) = \lim_{\substack{m.q. \\ n \to +\infty}} X_n(t)$ (où $X_n(t)$ est un polynome en t, à coefficients aléatoires)

$$X(t') = \lim_{\substack{m.q. \\ n' \to +\infty}} X_{n'}(t') \text{ et } E\left(X(t)\, \overline{X}(t')\right) = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ n' \to +\infty}} E\left(X_n(t)\, \overline{X}_n(t')\right)$$

Donc $\Gamma(t, t')$ est la somme d'une série entière en t et t'.

IV. - Intégration en moyenne quadratique.

Soient $X(t)$, $Y(t)$ deux fonctions aléatoires du second ordre, de covariances $\Gamma_X(t, t')$ et $\Gamma_Y(t, t')$, qui ne sont pas supposées centrées. En effet on considèrera des cas particuliers dans lesquels l'une ou l'autre de ces fonctions sera une fonction sûre.

1. - Définition de $\int_a^b X(t) \, dY(t)$ intégrale de Riemann-Stieltjes m. q.

Soit $a = t_1 \leq \theta_1 < t_2 \leq \theta_2 \ldots t_n \leq \theta_n < t_{n+1} = b$

$$D = (a, \theta_1, t_2, \ldots \theta_n, b). \quad |D| = \operatorname{Sup}_k |t_{k+1} - t_k|$$

$$S_D = \sum_{k=1}^{n} X(\theta_k) \left(Y(t_{k+1}) - Y(t_k) \right)$$

Si S_D a une limite en m. q. quand $|D| \to 0$ on pose

$$\text{i. m. q.} \int_a^b X(t) \, dY(t) = \lim_{\substack{|D| \to 0 \\ \text{m. q.}}} \sum_{k=1}^{n} X(\theta_k) \left(Y(t_{k+1}) - Y(t_k) \right)$$

Il suffit de se donner $Y(t)$ définie à l'addition près d'une variable aléatoire (indépendante de t).

$$\text{i. m. q.} \int_a^{+\infty} X(t) \, dY(t) = \lim_{\substack{\text{m. q.} \\ b \to +\infty}} \int_a^b X(t) \, dY(t)$$ à condition que cette limite existe.

2. - Théorème.

Soit I un intervalle fini ou infini.

Si $X(t)$ est une f. a. du second ordre indépendante de la fonction aléatoire du second ordre $Y(t')$ sur $I \times I$ pour que i. m. q. $\int_I X(t) \, dY(t)$ existe il faut et suffit que

$$\text{i. R. S;} \iint_{I \times I} \Gamma_X(t, t') \, d \, d' \, \Gamma_Y(t, t') \quad \text{existe} .$$

Supposons I fini. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de toutes les subdivisions pointées D de I. $(S_D)_{D \in \mathcal{D}}$ est une famille de v. a. du second ordre ; à "covariances" finies :

$$E\ (S_D\ \bar{S}_{D'}) < +\infty$$

en effet :

$$E\ (S_D\ \bar{S}_{D'}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n'} E\left(X(\theta_k) \left[Y(t_{k+1}) - Y(t_k) \right] X(\theta'_{k'}) \left[Y(t'_{k'+1}) - Y(t'_{k'}) \right] \right)$$

$$(E) \qquad = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n'} \Gamma_X\ (\theta_k, \theta'_{k'})\ \Delta_{t_{k+1} - t_k}\ \Delta_{t'_{k'+1} - t'_{k'}}\ \Gamma_Y\ (t_k, t'_{k'})$$

Par une extension du lemme (2 IV) pour que S_D ait une limite en m. q. quand $|D| \to 0$ il faut et suffit que $E\ (S_D\ \bar{S}_{D'})$ ait une limite quand $|D| \to 0$ et $|D'| \to 0$.

D'après l'égalité ci-dessus (E) cela revient à dire que l'intégrale de R.S $\iint_{I \times I} \Gamma_X\ (t, t')\ d\ d' \Gamma_Y\ (t, t')$ existe.

3. - Corollaire.

Soient $X^s\ (t)$ et $Y\ (t')$ des fonctions aléatoires du second ordre indépendantes. Si les intégrales en m. q. ci-dessous existent, alors

$$E\left(\int_I X^s(t)\ dY\ (t) \int_{I'} \bar{X}^{s'}(t)\ d\bar{Y}\ (t') \right) = \iint_{I \times I'} E\left(X^s(t)\ \bar{X}^{s'}(t') \right) d\,d' \Gamma_Y\,(t, t')$$

L'intégrale double étant l'intégrale de Riemann- Stieltjes

Si I et I' sont des intervalles finis $\int_I X^s(t)\ dY\,(t) = \lim_{\substack{\text{m. q.} \\ |D| \to 0}} S_D$

$$\int_{I'} \bar{X}^{s'}(t')\ d\bar{Y}\ (t') = \lim_{|D'| \to 0} \bar{S}'_{D'}$$

où $S_D = \sum_{k=1}^{n} X^s\ (\theta_k) \left[Y\ (t_{k+1}) - Y\ (t_k) \right]$

$$\bar{S}'_{D'} = \sum_{k'=1}^{n} \bar{X}^{s'} (\Theta'_{k'}) \left[\bar{Y}(t'_{k'+1}) - \bar{Y}(t'_{k'})\right]$$

Or $E\left(\lim_{\substack{m.q. \\ |D|\to 0}} S_D \times \lim_{\substack{m.q. \\ |D'|\to 0}} \bar{S}'_{D'}\right) = \lim_{\substack{|D|\to 0 \\ |D'|\to 0}} E(S_D \, \bar{S}_{D'})$ d'où le résultat.

Pour I et I' infinis les intégrales quand elles existent sont définies comme limites d'intégrales sur des intervalles finis.

Cas particuliers.

1°) Si $\xi_n = \int_a^b X_n(t)\, dt$ i. m. q. existe

$$E(\xi_n \, \bar{\xi}_m) = \int_a^b \int_a^b E(X_n(t) \, \bar{X}_m(t'))\, dt\, dt'$$

2°) $z(t) = \int_a^b f_t(s)\, dY(s)$ où $f_t(s)$ est une fonction certaine.

Si $z(t)$ existe (i. m. q.) $E\left(z(t)\, \bar{z}(t)\right) =$

$$\int_a^b \int_a^b f_t(s)\, \bar{f}_t(s')\, d\, d'\, \Gamma_Y(s, s')$$

4. - Critère d'existence.

Si la fonction aléatoire du second ordre $X(t)$ est continue en m. q., indépendante sur I x I de la fonction aléatoire du second ordre $Y(t')$.

Si la covariance $\Gamma_X(t, t')$ est bornée sur I x I.

et si la covariance $\Gamma_Y(t, t')$ est à variation bornée sur I x I.

Alors $\int_I X(t)\, dY(t)$ existe.

$\Gamma_Y(t, t')$ est à variation bornée sur I x I où I est fini si il existe une constante C_I telle que D et D' étant deux subdivisions quelconques de I.

$$\sum_{\substack{t_j \in D \\ t'_k \in D'}} \left| \Gamma_Y(t_{j+1}, t'_{k+1}) - \Gamma_Y(t_j, t'_{k+1}) - \Gamma_Y(t_{j+1}, t'_k) + \Gamma_Y(t_j, t'_k)\right| < C_I < +\infty$$

notation abrégée : $\sum_{t \in D} \sum_{t' \in D'} |\Delta \Delta'_Y(t, t')| < C_I < +\infty$

Quand I est infini.

$\Gamma_Y(t, t')$ est à variation bornée sur $I \times I$ si pour tout I' fini, inclus dans I $C_{I'} \leq C < +\infty$

BIBLIOGRAPHIE

-----

[1] A. Blanc - Lapierre et R. Fortet

Théorie des Fonctions Aléatoires.

[2]. M. Loëve :

Probability Theory.

[3]. A. Tortrat : Calcul des Probabilités.

[4]. J. L. Doob. Stochastic Processes.

° ° ° °

o