FAUCONNET

Covariance d'une fonction aléatoire du second ordre

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Seminaire d'initiation aux probabilités », , exp. nº 6, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A6_0>

COVARIANCE D'UNE FONCTION ALEATOIRE DU SECOND ORDRE

I - Définition.

Nous étudions les fonctions aléatoires complexes du second ordre : $X(t) = Y(t) + i\,Z(t)$ $\quad t \in T \subset \mathbb{R}$; $Z(t)$, $Y(t)$ sont des fonctions aléatoires réelles et $t \in T$: $E\,|X(t)|^2 < +\infty$

Donc $E(X(t))$ est finie $\forall\, t \in T$, et d'après l'inégalité de Schwarz $\Gamma_X(t, t') = E(X(t)\,\overline{X}(t'))$ existe, finie pour tout $(t, t') \in T \times T$. $\Gamma_X(\circ, \circ)$ est une fonction définie sur $T \times T$, à valeurs complexes, appelée covariance de la fonction aléatoire $X(\circ)$ sur T.

- Réciproquement si $\Gamma_X(t, t')$ est fini sur $T \times T$ alors $\Gamma_X(t, t) =$
$E\,|X(t)|^2 < +\infty$, $t \in T$
et $X(t)$ est une fonction aléatoire du second ordre.

- Remarque.

Etant données une f. a. $X(t)$ du 2è ordre de covariance $\Gamma_X(t, t')$ et une v. a H indépendante de $X(t)$ $\forall\, t \in T$, telle que $E(H) = 0$, $E\,|H|^2 = 1$ la f. a. $Y(t) = H\,X(t)$ est du second ordre.

Sa covariance est $\Gamma_Y(t, t') = \Gamma_X(t, t')$

et de plus $E(Y(t)) = 0 \quad \forall t \in T$.

Donc, dans la suite on supposera que $X(t)$ est centrée $\forall t \in T$ i. e. $\quad E(X(t)) = 0$. , sauf lorsque le contraire sera explicitement mentionné.

II. - Propriété caractéristique des covariances.

$$\Gamma(t,t) = E|X(t)|^2 \geqslant 0$$

$$\Gamma(t,t') = E\left(X(t)\,\overline{X}(t')\right) = \overline{E\left(X(t')\,\overline{X}(t)\right)}$$

soit : $\Gamma(t,t') = \overline{\Gamma(t',t)}$

Donc Γ est hermitienne.

Définition.

$F(t,t')$ sur $T \times T$ est dite définie de type non - négatif si $\forall n$, $\forall (t_1, t_2, \dots t_n)$ suite de n éléments de T et $\forall\, a_1, a_2, \dots a_n$ réels ou complexes

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} F(t_j, t_k)\, a_j\, \overline{a}_k \geqslant 0$$

Une fonction de type non négatif est hermitienne.

en effet en prenant $n = 1$ on obtient $F(t,t) \geqslant 0 \quad \forall t$

en prenant $n = 2$, la suite (t, t') et les nombres complexes a et b on obtient

$$(a)^2\, F(t,t) + a\,\overline{b}\, F(t,t') + \overline{a}\, b\, F(t',t) + |b|^2 F(t',t') \geqslant 0$$

or $\quad |a|^2\, F(t,t) + |b|^2\, F(t',t') \geqslant 0$

donc $a\overline{b}\, F(t,t') + \overline{a}b\, F(t',t)$ est réel :

en donnant à $a\overline{b}$ les valeurs 1 et i on trouve donc $F(t,t') = \overline{F(t',t)}$

THEOREME.

Pour qu'une fonction (t, t') définie sur $T \times T$ soit une convariance il faut et ilsuffit qu'elle soit de type non - négatif sur $T \times T$.

- Condition nécessaire : Soit une f. a. $X(t)$ du second ordre et $\Gamma_X(t,t')$ sa covariance

$\forall n$, $\forall (t_1, t_2, \ldots t_n)$ et $\forall (a_1, a_2 \ldots a_n)$ formons

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma(t_j, t_k)\, a_j\, \bar{a}_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} E\,(X(t_j)\, \bar{X}(t_k)\, a_j\, \bar{a}_k$$

$$= E\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\, X(t_j)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k\, \bar{X}(t_k)\right)$$

$$= E \sum_{j=1}^{n} |a_j\, X(t_j)|^2$$

Donc $S_n \geqslant 0$.

- <u>Condition suffisante</u>.

$\Gamma(t, t')$ étant de type non - négatif sur T x T on va démontrer qu'il existe une f. a. gaussienne dont la covariance est $\Gamma(t, t')$.

1°) <u>Rappels</u> : X obéit à la loi de Gauss si sa densité de répartition est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{Alors} \quad E(X) = 0 \quad E(X^2) = 1$$

Sa fonction caractéristique est $\varphi(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$

$Y = \sigma X + m$ est du type de X

Sa densité de répartition est $g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}$

$E(Y) = m$

$E\,|Y - m|^2 = \sigma^2$

Sa fonction caractéristique est $e^{ium}\, e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}$

- Une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes, du type de Gauss, est une variable aléatoire du type de Gauss.

Soit $Y = \sum_j a_j\, X_j = \sum_j Y_j$

La fonction caractéristique de Y est le produit des fonctions caractéristiques des Y_j

donc $\varphi(u) = \prod_j e^{ium_j}\, e^{-\frac{\sigma_j^2 u^2}{2}}$

$$= e^{iu\sum(m_j)}\, e^{-\sum \sigma_j^2 \frac{u^2}{2}}$$

2°) Lemme de Loëve [2] p. 466

Soit une forme quadratique $Q(u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{jk} u_j u_k$ positive : $Q(u) \geqslant 0$ quels que soient les u_j réels, à coefficients réels : $m_{jk} \in (-\infty, +\infty)$, et $m_{jk} = m_{kj}$.

Il existe des variables aléatoires gaussiennes X_k (certaines peuvent être dégénérées) à valeurs réelles telles que

$$m_{jk} = E(X_j X_k).$$

- Démonstration.

$Q(u) = R(v) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 v_k^2$ c'est la décomposition en somme de carrés à coefficients positifs d'une forme quadratique positive.

$\forall k$ v_k est une combinaison linéaire de $u_1, u_2 \dots u_n$.

$e^{-\frac{R(v)}{2}} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\sigma_k^2 \frac{v_k^2}{2}}$ est la fonction caractéristique conjointe de $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ où Y_k est la variable aléatoire gaussienne centrée, d'écart $E(Y^2) = \sigma_k^2$

Les Y_k étant indépendantes.

Donc $R(v) = \sum_{k=1}^{n} v_k^2 \; E(Y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} E(v_k Y_k)^2 = E(\sum_{k=1}^{n} v_k Y_k)^2$

Par suite $Q(u) = E(\sum u_k X_k)^2$

où les X_k sont des combinaisons linéaires des v. a. gaussiennes indépendants Y_j.

Les X_k sont donc des variables aléatoires gaussiennes et $m_{jk} = E(X_j X_k)$.

La densité de répartition de $(X_1, X_2, \dots X_n)$ est

$k \, e^{-\frac{1}{2} P(x_1, x_2, \dots x_n)}$ où $P(x_1, x_2 \dots x_n)$ est la forme quadratique réciproque de $Q(u_1, u_2, \dots u_n)$ [3] chap. VIII

3°) Démonstration de la condition suffisante du théorème. [2] p. 467
[4] p. 71 . 73

Soit T_n un sous-ensemble fini de T. $T_n = \{t_1, t_2 \dots t_n\}$

$$S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \Gamma(t_j, t_k)\, a_j\, \bar{a}_k \geqslant 0$$ quels que soient les nombres complexes a_j .

Posons $a_j = u_j - i\, v_j$ (u_j, v_j réels)

et $\Gamma(t_j, t_k) = A(t_j, t_k) + i\, B(t_j, t_k)$ A et B fonctions réelles).

d'où $S = \sum_j \sum_k \frac{1}{2} A(t_j, t_k)(u_j u_k - v_j v_k) - \frac{1}{2} B(t_j, t_k)(u_j v_k - v_j u_k)$

$= Q(u, v)$. $Q(u, v)$ est une forme quadratique des 2n variables u_j et v_k, positive ou nulle.

On va pouvoir appliquer le lemme de Loëve si on vérifie que $Q(u, v)$ est une forme symétrique c'est-à-dire si :

$$A(t_j, t_k) = A(t_k, t_j) \quad \text{et} \quad B(t_j, t_k) = -B(t_k, t_j)$$

Or ceci résulte du fait que Γ est de type non - négatif et par suite hermitienne.

Donc il existe une v. a. gaussienne de dimension 2 $(Y_1, Y_2 \dots Y_n, Z_1, Z_2 \dots Z_n)$, de fonction caractéristique $e^{-\frac{1}{2} Q(u, \;)}$

telle que $E(Y_j Y_k) =$ coefficient de $u_j u_k = \frac{1}{2} A(t_j, t_k)$

$E(Z_j Z_k) =$ " $v_j v_k = \frac{1}{2} A(t_j, t_k)$

$E(Z_j Y_k) =$ coefficient de $v_j u_k = \frac{1}{2} B(t_j, t_k)$

Posons $X_j = Y_j + i\, Z_j$.

$E(X_j X_k) = E(Y_j + i Z_j)(Y_k + i Z_k) = 0$.

$E(X_j \bar{X}_k) = A(t_j, t_k) + i\, B(t_j, t_k) = \Gamma(t_j, t_k)$

Pour $t_j \in T_n$ posons $X(t_j) = X_j$.

Pour toute famille finie T_n d'indices on obtient aussi une v. a gaussienne complexe de dimension n dont la covariance est $\Gamma(t, t')$ sur $T_n \times T_n$., associée à une variable aléatoire gaussienne réelle de dimension 2_n.

Il reste la question suivante : ces lois forment-elles un système projectif ? [1] chap. III. A. 3.
i e : Si $T_m \subset T_n$ est-ce que la loi marginale sur T_m coïncide avec la loi sur T_m ?

Il suffit de le vérifier pour $m = n - 1$

Soit $(Y_1, Y_2, \dots Y_n, Z_1, Z_2 \dots Z_n)$ la variable aléatoire gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$ associée à $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots X_{t_n})$

$X_{t_j} = Y_j + i Z_j$ comme ci-dessus.

Sa fonction caractéristique est : $e^{-\frac{1}{2} Q(u, v)}$

Sa densité de répartition $K e^{-\frac{1}{2} P(y_1, \dots y_n, z_1, \dots z_n)}$

$$= \delta_n(y_1, \dots y_n, z_1, z_2 \dots z_n) = (y, z)$$

$$C^{-\frac{1}{2} Q(u, v)} = \iint \cdots \int e^{iu_1 y_1 + iu_2 y_2 + \dots iu_n y_n + \dots iv_n z_n} \delta_n(y, z)\, dy_1 \dots dz_n$$

$$= \iint \cdots \int e^{iu_1 y_1 + \dots + iu_{n-1} y_{n-1}} e^{iv_1 z_1 + \dots iv_{n-1} z_{n-1}}$$

$$\iint e^{iu_n y_n + iv z_n} \delta_n(y, z)\, dy_1 \dots dz_n$$

Or la densité marginale de $(Y_1, \dots Y_{n-1}, Z_1 \dots Z_{n-1})$ est :

$$\delta_{n-1}(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(y_1 \dots y_n\ z_1 \dots z_n)\, dy_n\, dz_n .$$

Sa fonction caractéristique est donc :

$$\iint \cdots \int e^{iu_1 y_1 + \dots + iu_{n-1} y_{n-1}} e^{iv_1 z_1 + \dots iv_{n-1} z_{n-1}} \delta_{n-1}(y, z)$$

$$dy_1 \dots dy_{n-1}\, dz_1 \dots dz_{n-1}$$

$$- \frac{1}{2} \; Q\,(u_1, \dots u_{n-1}, 0, v_1, v_2 \dots v_{n-1}, 0)$$

C'est donc e

Les conditions de Kolmogorov sont donc satisfaites.

III- Propriétés des covariances.

1. - La partie réelle d'une covariance en est une
la partie imaginaire non. (sauf si elle est nulle)

Ceci résulte de la démonstration de la condition suffisante dans le théorème précédent.

$\Gamma(t, t') = A(t, t') + i\,B(t, t')$, $E(\sqrt{2}\,Y(t) \;\; \sqrt{2}\,Y(t') = A(t, t')$

$B(t, t) = 0$ car $\Gamma(t, t) \geqslant 0$

Si il existe $X(t)$ f. a telle que $B(t, t') = E\; X(t)\; \overline{X}(t')$
alors $E\,|X(t)|^2 = 0 \quad \forall t \in T$
donc $X(t) = 0$ presque partout

2. - La somme de deux covariances en est une
le produit " " " " "

Soient $\Gamma_1(t, t')$ et $\Gamma_2(t, t')$ deux covariances.

Soit $X_1(t)$ f. a gaussienne sur l'espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ de covariance $\Gamma_1(t, t')$.

et soit $X_2(t)$ f. a gaussienne sur $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$

Formons l'espace produit avec la probabilité $P_1 \times P_2$. On obtient ainsi deux fonctions aléatoires indépendantes et centrées.

d'où $E\,(X_1(t) + X_2(t))\,(\overline{X}_1(t') + \overline{X}_2(t')) = \Gamma_1(t, t') + \Gamma_2(t, t')$

$E\,(X_1(t)\; X_2(t))(\overline{X}_1(t')\; \overline{X}_2(t')) = \Gamma_1(t, t')\; \Gamma_2(t, t')$

3. - Si une suite de covariances $\Gamma_n(t, t')$ a une limite finie $\Gamma(t, t')$ sur $T \times T$ quand $n \to \infty$, $\Gamma(t, t')$ est une covariance.

- Toute combinaison linéaire à coefficients positifs d'un nombre fini de covariances en est une.

[2] p. 468 - 469