LE CALVE

Modèles linéaires d'apprentissage

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Seminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 5, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A5_0>

MODELES LINEAIRES D'APPRENTISSAGE

° °   ° °

°

Dans cet exposé nous reprenons un type particulier du modèle général présenté dans [6].

1 FORMALISATION

Il s'agit d'un processus $X_n = (Z_n, S_n, A_n, E_n)$ indexé par $\mathbb{N}$, à valeurs dans $(Z, \mathcal{Z}) \times (S, \mathcal{S}) \times (A, \mathcal{A}) \times (E, \mathcal{E})$.

Nous rappelons que Z représente l'ensemble des états intérieurs, S l'ensemble des stimuli, A l'ensemble des réponses, E l'ensemble des renforcements. A chaque état intérieur $z \in Z$ correspond un opérateur T_z de passage de S dans A : $T_z(s, a)$.

On se donne les probabilités $Q_\circ$ sur Z, $Q'_\circ$ sur S ; les probabilités de passage $P_1(s, a, .)$ de $S \times A \to E$, $P_2(s, a, e, .)$ de $S \times A \times E \to S$, qui permettent de formuler les règles opératoires suivantes (cf. [6])

$R_\circ$) $\quad P(Z_\circ \in \Delta) = Q_\circ(\Delta) \qquad P(S_\circ \in \Lambda) = Q'_\circ(\Lambda)$

R_1) $\quad P(A_n \in \Gamma / Z_n, S_n, X_{n-1}, \ldots .. X_\circ) = T_{Z_n}(S_n, \Gamma)$

$R_3)$ $P(E_n \in H / Z_n, S_n, A_n, X_{n-1}, \ldots X_\circ) = P_1(S_n, A_n, H)$

$R_4)$ $P(S_{n+1} \in G / Z_{n+1}, X_n, \ldots, X_\circ) = P_2(S_n, A_n, E_n, G)$

La règle R_2, qui donne la loi de l'évolution de l''opérateur T_{Z_n} lié à l'état intérieur Z_n, s'exprime cette fois au moyen d'un opérateur linéaire L_{S_n, E_n}, défini sur les fonctions de transition de S dans A, laissant invariant le sous-ensemble convexe des probabilités de transition.

L'application affine L_{S_n, E_n} du convexe $\mathcal{M}_S(A)$ ensemble des probabilités de transition de S dans A) dans lui-même est dans les applications souvent définie de la façon suivante :

On se donne $(s, A', e) \longrightarrow \theta(s, A', e)$ une application mesurable de $S \times \mathcal{A} \times E$ dans $[0,1]$ et $(s, e) \longrightarrow \Lambda(s, e)$ encore notée $\Lambda_e(s)$ une application mesurable de $S \times E$ dans $\mathcal{M}_S(A)$. On pose alors :

$$L_{S_n, E_n}[\gamma(s, \Gamma)] = [1 - \theta(S_n, \Gamma, E_n)]\, \gamma(s, \Gamma) + \theta(S_n, \Gamma, E_n)\, \Lambda_{E_n}(S_n, s, \Gamma)$$

$\forall\, \gamma(\ldots) \in \mathcal{M}_S(A)$

On a donc :

$R_2)$ $T_{Z_n+1}(\ldots) = L_{S_n, E_n}\left[T_{Z_n}(\ldots)\right]$

L'opérateur L_{S_n, E_n} ainsi défini est appelé <u>fonction d'adaptation linéaire de</u> caractéristiques θ et Λ .

Remarquons que la connaissance de Z_n, S_n, E_n, détermine complètement l'opérateur T_{Z_n+1}.

Remarquons également que les axiomes (R_3) et (R_4) entrainent que Z_n est indépendant de S_n et E_n.

2 PROPRIETES ASYMPTOTIQUES

2.1. - Etude de $P(A_{n+1} \in \Gamma / S_{n+1})$

Si les probabilités conditionnelles $P(A_n \in \Gamma / S_n)$ sont régulières, et Z_n étant indépéndant de S_n, on a

$$P(A_n \in \Gamma / S_n) = \int P(A_n \in \Gamma / Z_n, S_n)\ P(dZ_n) \quad \text{(cf. appendice).}$$

Nous nous placerons dans ce cas.

Posons $\alpha_n = E\left[T_{Z_n}\right]$ que nous noterons encore

$$\alpha_n(\cdot,\cdot) = \int T_{Z_n}(\cdot,\cdot)\, dP \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\forall s \in \mathcal{S},\ \Gamma \in \mathcal{A} : \alpha_n(s,\Gamma) = \int T_{Z_{n(\omega)}}(s,\Gamma)\, dP(\omega)$$ On vérifie facilement que $\alpha_n(s,\Gamma)$ défini par cette intégrale appartient à $\mathcal{M}_S(A)$.

Donc $$\underline{\alpha_n(S_n,\Gamma) = P(A_n \in \Gamma / S_n)}$$

De plus on peut écrire : $$P(dZ_{n+1}) = \int P(dZ_{n+1} / Z_n, S_n, E_n) \times P(dZ_n, dS_n, dE_n)$$

Donc :

$$\alpha_{n+1}(.,.) = \int T_{Z_{n+1}}(.,.)\, P(dZ_{n+1})$$

$$= \iint T_{Z_{n+1}}(.,.)\, P(dZ_{n+1}/Z_n, S_n, E_n)\, P(dZ_n, dS_n, dE_n)$$

Or la connaissance de Z_n, S_n, E_n entraînant la connaissance de $T_{Z_{n+1}}$ ($T_{Z_{n+1}} = L_{S_n, E_n}\left[T_{Z_n}\right]$) :

$$\alpha_{n+1}(.,.) = \int L_{S_n, E_n}\left[T_{Z_n}(.,.)\right] P(dZ_n, dS_n, dE_n)$$

De plus, Z_n étant indépendant de S_n et E_n :

$$\alpha_{n+1}(.,.) = \int P(dS_n, dE_n) \int L_{S_n, E_n}\left[T_{Z_n}(.,.)\right] P(dZ_n)$$

La linéarité de L_{S_n, E_n} permet alors d'écrire

$$\alpha_{n+1}(.,.) = \int L_{S_n, E_n}\left[E\left(T_{Z_n}(.,.)\right)\right] P(dS_n, dE_n)$$

Soit encore :

$$\alpha_{n+1}(.,.) = \int L_{S_n, E_n}\left[\alpha_n(.,.)\right] P(dS_n, dE_n)$$

Comme enfin l'application $L_{S_n, E_n} \rightarrow L_{S_n, E_n}\left[\alpha_n(s, r)\right]$ est linéaire en L, on a :

$$\alpha_{n+1}(.,.) = \left[\int L_{S_n, E_n}\, P(dS_n, dE_n)\right] \alpha_n(.,.).$$

Et en remarquant que l'opérateur agissant sur α_n ne dépend que de n :

$$\boxed{\alpha_{n+1}(.,.) = T_n\left[\alpha_n(.,.)\right. \text{ avec } T_n = \int L_{S_n, E_n} P(dS_n, dE_n)}$$

2.2. - Etude de $P(A_n \in \Gamma)$.

Nous avons $P(A_n \in \Gamma) = \int P(A_n \in \Gamma / S_n) P(dS_n)$

donc $P(A_n \in \Gamma) = \int \alpha_n (S_n, \Gamma) P(dS_n)$

Alors $P(A_{n+1} \in \Gamma) = \int \alpha_{n+1} (S_{n+1}, \Gamma) P(dS_{n+1})$

$= T_n \left[\int \alpha_n (S_{n+1}, \Gamma) P(dS_{n+1})\right.$

Donc $\underline{\underline{P(A_{n+1} \in \Gamma) = T_n\left[P(A_n \in \Gamma)\right]}}$

3. PARTICULARISATIONS DU MODELE GENERAL

3.1. $S = \{s_1, s_2\}$, $A = E = \{a, a'\}$ et règle totalement indépendante stationnaire. (Pour la Terminologie cf [8])

On prend $(T_z)_{z \in Z} = [0,1]^2$ isomorphe à $\mathcal{M}_S(A)$ puisque la donnée de T_z est équivalente à celle de $T_z(s_1, a)$ et $T_z(s_2, a)$.

Les caractéristiques de la fonction d'adaptation seront $\theta(s, \Gamma, e) = \theta$ constante et $\Lambda(S_n, E_n, s_i, a) = 1_{\{s_i\}} S_n \times \mathcal{E}_{E_n}(a)$

avec $\mathcal{E}_{E_n}(a) = 1$ si $E_n = a$, 0 autrement.

Les axiomes s'écrivent donc :

R_1) $P(A_n = a / Z_n, S_n, X_{n-1} \ldots\ldots X_0) = T_{Z_n}(S_n, a)$

R_2) $T_{Z_{n+1}}(s_i, a) = (1-\theta) T_{Z_n}(s_i, a) + \mathcal{E}_{E_n}(a)\ 1_{\{s_i\}} S_n$

R_3) $P(E_n = a / Z_n, S_n, A_n, X_0 \ldots\ldots X_{n-1}) = \pi(S_n)$

On posera $P(E_n = a) = \pi$

R_4) $P(S_n = s_i / Z_n, X_{n-1} \ldots\ldots X_o) = \alpha_i$

L'opérateur L_{S_n, E_n} est donc défini ici par :

$$L_{S_n, E_n} f(s_i, a) = (1-\theta) f(s_i, a) + \theta\, \mathcal{E}_{E_n}(a) \cdot 1_{\{s_i\}} S_n$$

donc $T_n f(s_i, a) = (1-\theta) f(s_i, a) + \theta P(E_n = a, S_n = s_i)$

$$P(A_{n+1} = a / S_{n+1} = s_i) = (1-\theta) P(A_n = a / S_n = s_i) + \theta P(E_n = a, S_n = s_i)$$

$$\underline{P(A_{n+1} = a / S_n = s_i) = (1-\theta) P(A_n = a / S_n = s_i) + \theta\alpha_i \pi(s_i)}$$

Or θ étant inférieur à 1, on a donc

$$\underline{\lim_{n\to\infty} P(A_n = a / S_n = s_i) = P(E_n = a, S_n = s_i) = \alpha_i \pi(s_i)}$$

De même

$$\underline{P(A_{n+1} = a) = (1-\theta) P(A_n = a) + \theta P(E_n = a)}$$

et $\underline{\lim_{n\to\infty} P(A_n = a) = \lim_{n\to\infty} P(E_n = a) = \pi}$

Résultat pouvant être considéré comme une sorte de loi de l'ajustement.

3.2. - <u>Modèles continus d'Estes et Suppes pour $S = \{s\}$ $A = E = [a, b] \subset \mathbb{R}$</u>

Pour Z on prend l'ensemble des fonctions de répartition. La fonction d'adaptation linéaire est définie par :

$$L_{E_n} T_{Z_n}(A) = (1-\theta)\, T_{Z_n}(A) + \theta\, K(A, E_n)$$

θ étant une constante et $K(A, E_n) = \int_A k(x, E_n)\, dx$

La fonction $k(x, E_n)$ porte le nom de fonction de répartition d'étalement. Elle exprime que le renforcement n'agit pas seulement au point x, mais "s'étale" sur les points voisins.

On se donne en plus la distribution de probabilité de E_n :

$$P(E_n \leq y) = \int_a^y f_n(t)\, dt$$

Pour simplifier l'écriture on posera

$$P(A_n \leq x) = R_n(x) = \int_a^x r_n(t)\, dt \quad \text{et} \lim_{n \to \infty} R_n(x) = R(x)$$

Dans ces conditions l'opérateur T_n, défini par

$\int L_{S_n, E_n} P(dS_n, dE_n)$ devient

$$T_n\left[h(A)\right] = (1-\theta)\, h(A) + \theta \int_a^b \int_A k(x, t)\, f_n(t)\, dx\, dt$$

Donc $$\underline{P(A_{n+1} \leq x) = (1-\theta)\, P(A_n \leq x) + \theta \int_a^b \int_a^x k(x, t)\, f_n(t)\, dx\, d}$$

Nous allons voir ce que devient cette relation suivant différents types de loi de renforcement.

3.2.1. - <u>Renforcement indépendant</u>.

Dans ce cas $f_n(t) = f(t)$. L'opérateur T_n est alors indépendant de n. Il est alors immédiat que

$$R(x) = \int_a^b \int_a^x k(x,t)\, f(t)\, dx\, dt.$$

3.2.2. - Renforcement "simplement contingent"

Cette loi est constituée par la donnée de fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ et d'un point C de l'intervalle $[a, b]$ tels que

$$f_n(y) = \int_a^C f_1(y)\, r_n(x)\, dx + \int_C^b f_2(y)\, r_n(x)\, dx$$

On a alors

$$R(x) = \int_a^b \int_a^x k(x, y)\left[R(c) f_1(y) + (1 - R(c)) f_2(y)\right] dx\, dy$$

3.2.3. - Renforcement "contingent continu"

Ce cas est obtenu comme limite du cas précédent, en prenant une suite croissante de points de subdivision c.

On a alors $f_n(y) = \int_a^b f(y/x)\, r_n(x)\, dx$

On peut montrer que :

$$R(x) = \int_a^b \int_a^b \int_a^x k(x, y)\ f(y/t)\, r(t)\, dx\, dt\, dy$$

Remarque : Le résultat le plus frappant est que la loi de l'ajustement $(R(x) = P(E \leqslant x))$ a disparue.On la retrouverait en prenant $k(x, y) = 1_{\{x\}}\ y$.

3.2.4. - Exemples.

Nous prendrons $[a, b] = [0, 2\pi]$. Nous nous placerons dans le cas du renforcement indépendant, (encore appelé cas non contingent), les fonctions f et K_i étant prises périodiques de période 2π.

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\pi^2} & \text{Si } 0 \leqslant y \leqslant \pi \\ \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{y}{\pi^2} & \pi < y \leqslant 2\pi \end{cases}$$

a) Distribution d'étalement parabolique.

$$k_1(x-y) = \begin{cases} (3/4)^{2/3} - (x-y)^2 & \text{Si } |x-y| \leq (3/4)^{1/3} \\ 0 & \text{Si } (3/4)^{1/3} < |x-y| \leq \pi \end{cases}$$

On obtient alors

$$r_1(x) = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{x^4}{6} - \frac{2\pi}{3}x^3 + (\pi^2 - a^2)x^2 + \left(2a^2\pi - \frac{2}{3}\pi^3\right)x + \frac{\pi^4}{6} - a^2\pi^2 + \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{a^4}{4}\right]$$

En posant $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

b) Distribution d'étalement exponentielle.

$$k_2(x, y) = \frac{e^{-|x-y|}}{2(1-e^{-\pi})} \qquad \text{pour } -\pi < x-y < \pi$$

On trouve alors

$$r_2(x) = -\frac{e^{x-\pi} + (x-\pi)e^{-\pi} + e^{-x} + x}{\pi^2(1-e^{-\pi})}$$

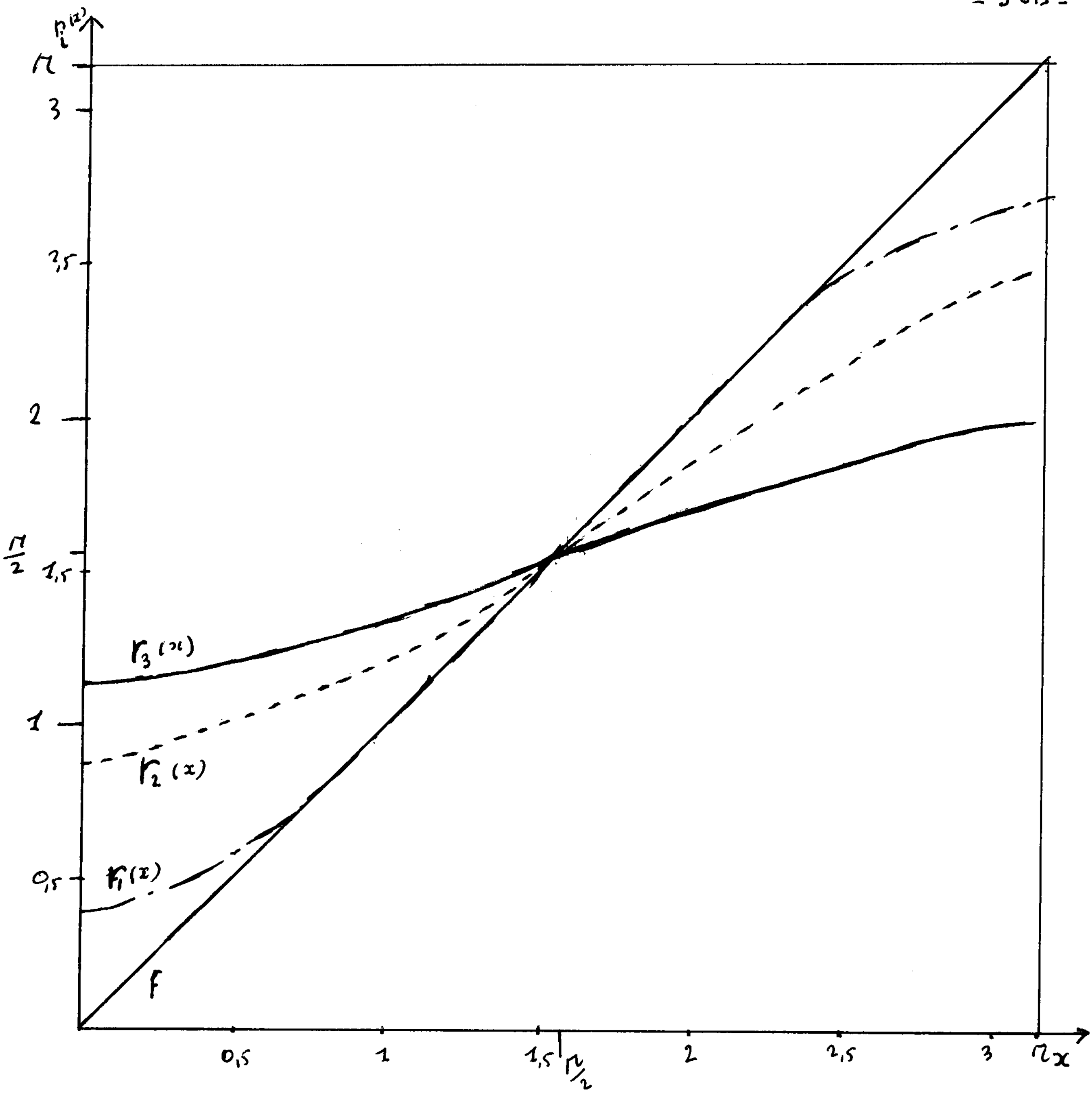
c) Distribution d'étalement trigonométrique.

$$k_3(x-y) = \frac{1}{4}\cos\frac{x-y}{2} \qquad -\pi < x-y < \pi$$

On trouve $\quad r_3(x) = \dfrac{1}{\pi^2}\left[2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) - 2\cos\dfrac{x}{2} + \pi - x\right]$

4. - SUR UN MODELE ETUDIE PAR M. C. BERT (cf. [2])

Ce modèle ne rentre pas dans notre schéma pour la raison suivante : l'axiome R_3 du renforcement est remplacé ici par un axiome R'_3 moins restrictif.



Distribution asymptotique des réponses pour le modele linéaire continu d'ESTES-SUPPES, correspondant aux trois distributions d'étalement parabolique ($r_1(x)$), exponentielle ($r_2(x)$) et trigonométrique ($r_3(x)$), avec renforcement indépendant.

Signalons que l'on peut étendre notre cadre de façon à inclure le modèle de M. C. BERT en remplaçant (R_3) par un analogue de (R'_3) et qu'en particulier les résultats du paragraphe 2 restent valables.

On se place dans le cas où $S = \{s\}$ c'est-à-dire un seul stimulus. L'ensemble des opérateurs T_{Z_n} est identifiable à l'ensemble $\mathcal{M}(A)$ des mesures sur A.

Les caractéristiques $\theta(s, \Gamma, e)$ et $\Lambda(s, e)$ de la fonction d'adaptation sont prises ainsi :

$$\theta(s, \Gamma, e) = \theta \text{ constante}, \quad \theta \in [0,1]$$

$$\Lambda(s, \Gamma, e) = G(e, \Gamma)$$ probabilité de transition de E dans A.

Donc $$L_{E_n}\left[T_{Z_n}(\Gamma)\right] = (1-\theta)\, T_{Z_n}(\Gamma) + \theta\, G(E_n, \Gamma)$$

Enfin, $\beta_n(\,.\,,\,.\,)$ étant une probabilité de transition de $A^n \times E^{n-1}$ dans E, on pose

$$P(E_n \in H / X_0 \ldots . X_{n-1}, Z_n, A_n)$$

$$= \beta_n(X_0, X_1 \ldots\ldots\ldots X_{n-1}, A_n, H)$$

On désignera par $\mathcal{B}_n$ la sous-tribu engendrée par $X_0 \ldots . X_n$

THEOREME

- Hypothèses.

1°) La probabilité de transition $G(\,.\,,\,.\,)$ définie à partir d'une partition dénombrable $\sum_i D_i$ de $(E, \mathcal{E})$ et d'une famille de probabilités $(G_{D_i})_i$ sur $(A, \mathcal{A})$ par la formule $G(E_n, .) = \sum_i 1_{D_i}(E_n) \times G_{D_i}(\,.\,)$.

2°) $\beta = (\beta_n)_{n \in N}$ est définie par la donnée de $m + 1$ probabilités de transition β_h $(0 \leq h \leq m)$, probabilités de transition de $(A \times E)^h \rightarrow E$ (m entier positif) et par :

$$\forall n > m, \quad \beta_n(X_0, \ldots X_n, .) = \beta_m(X_{n-m}, \ldots X_n \; .)$$

3°) $\exists\, D \in \mathcal{E}$, élément de la partition $\sum_i D_i$ et $0 < \eta < 1$ $\forall h \leq m$, $\forall u \in (A \times E)^h \times A$: $\beta_h(u, D) \geq \eta$

Soit alors $C \in \mathcal{A}$: $G_D(c) = \alpha > 0$ et $\sum_j C_j$ une partition dénombrable de $(A, \mathcal{A})$ dont C est élément.

4°) La probabilité de transition $\beta_m(.,.)$ est définie à partir de la partition $\sum_k A_k$ de $(A \times E)^m \times A$ induite par les partitions $\sum_i D_i$ et $\sum_j C_J$ de E et A respectivement, et d'une famille de probabilités $Q_{A_K}(.)$ sur $(E, \mathcal{E})$ par la formule

$$\beta_m(X_{n-m}, \ldots\ldots X_n, .) = \sum_K 1_{A_K}(X_{n-m}, \ldots X_n)\, Q_{A_K}(.)$$

Les probabilités de transition $\beta_h(.,.)$ $0 \leq h \leq m$ sont définies suivant un schéma analogue.

- CONCLUSIONS.

Il existe une probabilité sur $(A, \mathcal{A})$ telle que $\forall\, k \in N$:

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{A_{K+n} \in H / B_K\right\} = \Pi(H)$$

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{A_n \in H\right\} = \Pi(H)$$

APPENDICE

-=-=-=-

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires à valeurs dans $(A, \mathcal{A})$, $(B, \mathcal{B})$, $(C, \mathcal{C})$ respectivement.

Si Z admet distribution conditionnelle régulière $\nu^{Y}(\,.\,)$ par rapport à Y, pour tout $A' \in \mathcal{A}$ on a :

$$P(X \in A' / Y) = \int P(X \in A' / Y, Z)\, \nu^{Y}(dz)$$

- <u>Démonstration</u>.

Soit $F \in \mathcal{C}(Y)$, $F = Y^{-1}(B')$ $B' \in \mathcal{B}$:

par définition de $P(X \in A' / Y, Z)$, et P_{YZ} désignant la distribution conjointe de Y et Z :

$$\int_F 1_{[X \in A']}\, dP = \int_{B \times C} P(X \in A' / Y = y, Z = z)\, P_{YZ}(dy, dz)$$

L'hypothèse sur la régularité de $\nu^{Y}(C')$ permet d'écrire :

$$\int_F 1_{[X \in A']}\, dP = \int_{B'} P_Y(dy) \left[\int_C P(X \quad A' / Y = y, Z = z)\, \nu^{Y}(dz) \right]$$

Ceci prouve la formule

<u>COROLLAIRE :</u> Si Y et Z sont indépendants :

$$P(X \in A' / Y) = \int P(X \in A' / Y, Z = z)\, P_Z(dz)$$

BIBLIOGRAPHIE

- = - = - = -

[1] BUSH, ESTES et al : Studies in Mathematical learning Theory (Stanford, Calif. Stanford Univ. Press 1959).

[2] M. C. BERT Convergence d'une chaîne à liaisons complètes et application à un modèle d'apprentissage (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 259 (21 - 9- 64).

[3] BUSH, LUCE, GALANTER : Handbook of Mathematical Psychology (New-York, Wiley 1963 5 volumes)

[4] COURREGE et ROUANET : Sur les fondements des modèles stochastiques d'Adaptation. (Paris 1964).

[5] ESTES et SUPPES

a) Foundations of linear Models (chap. 8 in Bush, Estes cf [1]).

b) Foundations of statistical learning Theory : II stimulus Sampling Models for simple learning, Technical Report n° 4, 1959, Institute for Math. Studies in Soc. Sciences Stanford Calif.

[6] LE CALVE : Quelques modèles stochastiques d'apprentissage. Université de Rennes. Fac. des Sciences. Seminaire de Probabilités. Exposé n° 4 du 16-12-64.

[7] LUCE. D. Indivudual chance Behaviour. (ch. 4. New-York, Wiley 1959).

[8] ROUANET : Les modèles stochastiques de l'apprentissage. (Mathématiques et sciences humaines (E. P. H. E. Paris. n° 5 - 6 - 8 1964).

[9] SUPPES et ATKINSON : Markov learning Models for multiperson Interaction (Stanford Calif. Stanford Univ. Press 1960).

Nombreux articles dans la revue PSHYCHOMETRIKA

-°-°-°-°-°-°-°-°-