LE CALVE

# Quelques modèles stochastiques d'apprentissage

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1964-1965
« Seminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 4, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A4_0>

# QUELQUES MODELES STOCHASTIQUES D'APPRENTISSAGE

-----------

## I - INTRODUCTION.

Considérons l'expérience suivante : un rat est placé à l'entrée d'un couloir se ramifiant ensuite en deux autres couloirs, droit et gauche. A l'extrémité d'un couloir (le droit par exemple) on place de la nourriture, et on observe le comportement du rat, en particulier quel est le premier couloir emprunté :

Cette expérience peut se schématiser de la façon suivante ;

A un signal s (ici ouverture de la cage du rat) le sujet a fait une réponse a (le couloir de droite par exemple) on lui a présenté un renforcement e (présence de nourriture au bout du couloir ou non).

Dans l'exemple très simple précédent, l'espace S des signaux est réduit à un seul élément (ouverture de la cage), l'espace A des réponses à deux éléments (couloir de droite, couloir de gauche) et le renforcement constant (présence de la nourriture au bout du couloir de droite).

On constate qu'au bout d'un certain nombre d'essais (une cinquantaine), l'animal emprunte toujours en premier le couloir de droite. On dit qu'il y a eu "apprentissage de la réponse droite".

Si l'on change la loi du renforcement, plaçant par exemple la nourriture à droite avec une probabilité $\Pi$ , on constate, après un certain nombre d'essais, beaucoup plus grand que dans le premier cas, que le rat tend à donner la réponse droite avec la probabilité $\Pi$ . Ce résultat porte en général le nom de "loi de l'ajustement".

° Bien entendu il est possible de varier à l'infini. de tels modèles, soit en changeant les espaces S, A, E, soit en changeant les règles de présentation des signaux ou des renforcements.

Nous allons donner un modèle mathématique général pour de telles expériences, et, le particularisant, étudier quelques modèles simples.

## II - MODELE GENERAL.

a) On se donne quatres espaces mesurables $(S, \mathcal{S})$, $(A, \mathcal{A})$, $(E, \mathcal{E})$ et $(Z, \mathcal{Z})$ dits respectivement des stimuli , des réponses, des renforcements, et des états.

b) Une probabilité $Q_o$ sur $(Z, \mathcal{Z})$ et une probabilité Ro sur $(S, \mathcal{S})$

c) Une probabilité de passage $Pa(z, s, \cdot)$ de $Z \times S \to A$ dite règle de réponse.

d) Une probabilité de passage $P_z(z, s, a, e, .)$ de

$Z \times S \times A \times E \to Z$ dite règle de conditionnement.

e) Une probabilité de passage $Pe(s, a, .)$ de $S \times A \to E$ dite règle de renforcement.

f) Une probabilité de passage Ps $(s, a, e, .)$ de $S \times A \times E \rightsquigarrow S$ dite règle de présentation des stimuli.

Concrètement, les données de S, A, E sont des <u>données observables</u>, les probabilités Pe et Ps définissant les <u>règles d'expérimentation</u>, Z, $P_z$ et Pa des <u>constructions hypothétiques</u> liées au comportement du sujet sur lequel au fait l'expérience. ($Z_{n+1} \in Z$ pouvant être considéré comme "l'état d'esprit " du sujet après le $n^{ième}$ essai, $P_z$ la façon dont sans "état d'esprit " évolué, en fonction des essais, et Pa sa façon de répondre en fonction du stimulus présenté et de son "état d'esprit".

-----

On cherche alors à fabriquer un processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_n))$ à valeurs dans $(Z \times S \times A \times E, \mathcal{Z} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{E})$ et satisfaisant aux relations suivantes

(R o) $P(Zo \in \Delta) = Qo(\Delta) \quad \forall \Delta \in \mathcal{Z}$, $P(So \in \Lambda) = R_o(\Lambda) \quad \forall \Lambda \in \mathcal{S}$

($R_1$) $P(A_n \in \Gamma / Z_n, S_n ; X_o, X_1 \ldots . X_{n-1}) = P_a(Z_n, S_n, \Gamma) \forall \Gamma \in \mathcal{A}$

($R_2$) $P(Z_{n+1} \in \Delta / Z_n, S_n, A_n, E_n . X_o, X, \ldots . X_{n-1} =$

$= P_z \quad (Z_n, S_n, A_n, E_n, \Delta) \forall \Delta \in \mathcal{Z}$

($R_3$) $P(E_n \in H / S_n, A_n ; X_o, X_1, \ldots . X_{n-1}) = P_e \quad (S_n, A_n, H) \forall H \in \mathcal{E}$

($R_4$) $P(S_{n+1} \in G / S_n, A_n, E_n ; X_o, X_1, \ldots . X_{n-1}) = P_s(S_n, A_n, E_n, G) \forall G \in$

Nous énoncerons sans démonstration un résultat de [6]

2.1
<u>LEMME</u>. Soit $X = [\Omega, \mathcal{F}, P, (X_n) \quad n \in N]$ un processus à valeurs dans $Z \times S \times A \times E$. La condition nécessaire et suffisante pour que X satisfasse aux relations Ri est que X soit un processus de Markov à transition

stationnaire admettant Q comme probabilité de transition et $\Pi_o$ pour distribution initiale, avec

$$Q(z, s, a, e, M) = \int_Z P_z(z, s, a, e, dz') \int_S P_s(s, a, e, ds') \int_A P_a(z', a', da')$$

$$\int_E P_e(s', a', de')\ 1_M(z', s', a', e')$$

et

$$\Pi_o(M) = \int_Z Q_o(dz) \int_S R_o(ds) \int_A P_a(z, s, da) \int_E P_e(s, a, de)\ 1_M(z, s$$

En appliquant le théorème de Ionescu Tulcea on obtient alors le théorème : (cf. [6])

2-2

THEOREME FONDAMENTAL D'EXISTENCE.

Soit $\Omega = (Z \times S \times A \times E)^N$ et pour tout $n \in N$, soit $X_n$ la projection de $\Omega$ sur $Z_n \times S_n \times A_n \times E_n$. Soit $\mathfrak{F}$ la tribu sur $\Omega$ engendrée par les $X_n$ ($n \in N$). Alors

- il existe une probabilité P et une seule sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{F})$ telle que le processus $X = (\Omega, \mathfrak{F}, P, (X_n)\ n \in N)$ satisfasse aux relations ( caractère Markovien stationnaire).

$$P\left[X_{n+1} \in M / X_o, X, \dots X_n\right] = P\left[X_{n+1} \in M / X_n\right] = Q\left[X_n, M\right]$$

$$P\left[X_o \in M\right] = \Pi_o(M)$$

Les fonctions $\Pi_o$ et Q étant définies comme précédemment.

Nous n'avons pu affirmer le caractère markovien et l'unicité qu'en faisant des hypothèses particulières sur les règles de renforcement et de présentation des stimuli (à caractère simplement dépendant : ne dépendant des évènements antérieurs que par l'intermédiaire des derniers évènements observés).

Dans le cas de règles plus générales, on peut encore montrer l'existence et l'unicité d'un processus, mais celui-ci n'est plus en général Markovien.

Dans le cas où $X_n = (Z_n, S_n, A_n, E_n)$ est Markovien on peut montrer que les processus faisant intervenir le couple $(Z_n, S_n)$, tels que $(Z_n, S_n, A_n)$, $(Z_n, S_n, E_n)$, $(Z_n, S_n)$ sont markoviens, mais, en général, les autres tels que $(S_n, A_n, E_n)$ processus des évènements observables ne le sont pas.

On étudiera donc, dans les cas particuliers, les propriétés des processus markoviens et on en déduira ceux des évènements observables.

En faisant des hypothèses simplificatrices sur les fonctions $P_e$ et $P_s$ on obtient des cas particuliers intéressants :

- $P_s$ est constante en s, a, e : la règle de présentation des stimulis est dite <u>indépendante.</u>

- $P_s$ est une mesure ponctuelle pour chaque s, a, e la règle de présentation est dite <u>déterministe.</u>

- La conjonction des deux cas précédents correspond au cas où le stimulus $S_n$ est constant d'essai à essai.

- Si $P_e$ est une fonction constante en $S_n$, la règle de renforcement dite "<u>aléatoire indépendante</u>".

- Si $P_e$ est une mesure ponctuelle pour chaque $S_n$, la règle de renforcement est dite <u>déterministe</u>.

- La conjonction des deux cas précédents correspond au cas du renforcement constant.

## III - PARTICULARISATIONS DU MODELE GENERAL.

Nous prendrons $\mathcal{S} = \{s\}$ c'est-à-dire un seul stimulus. Il suffit alors de se donner les espaces A, E, Z, les probabilités $P_a$ de Z dans P,

$P_e$ de A dans E, et $P_z$ de Z x A x E dans Z

De plus, si la fonction $z \to P_a(z, .)$ est injective il est possible d'identifier Z à l'ensemble des mesures de probabilité sur $(A, \mathcal{A})$, soit $\mathcal{M}(A, \mathcal{A})$.

Bien souvent on ne prendra pour Z qu'un sous-ensemble de $\mathcal{M}(A, \mathcal{A})$.

Dans bien des cas il est possible également de faire E = A.

Pratiquement deux cas seulement ont été bien étudiés :

1°) A ( ou E ) est fini $(\mathcal{A} = \mathcal{P}(A)$

2°) A ( ou E ) est la droite réelle R $(\mathcal{A}$ est la tribu des boréliens).

Pour ces deux cas Estes et Suppes (cf. [3] ont défini deux modèles : le modèle linéaire, le modèle à *un* élément.

### 3 - 1°) Modèle linéaire $A = E = \{a, a'\}$

3.1.1 On prend $Z = \mathcal{M}(A)$. On peut d'ailleurs caractériser une probabilité sur A par la mesure de $\{a\}$, et par suite, identifier Z à $[0;1]$ (voir $R_1$ ci-dessous).

Les règles se réduisent à

$R_o)$ $Z_o = P_o$ où $P_o$ est un paramètre $o \leq P_o \leq 1$

$R_1)$ $P(A_n = a / Z_n, X_{n-1}, \ldots X_o) = Z_n$

$R'_2$) $Z_{n+1} = (1-\theta) Z_n + \theta 1_{\{a\}} E_n$

$R_3$) $P(E_n = a / Z_n, A_n, X_{n-1} \ldots\ldots X_o) = \Pi$

L'axiome $R_3$ correspondant à la règle dite du renforcement indépendant. $R'_2$ indique que $Z_{n+1}$ est parfaitement déterminé par la connaissance de $Z_n$ et de $E_n$.

### 3-1-2 LOI DE L'AJUSTEMENT

On a :

$$P(A_n = a) = \int_\Omega P(A_n = a / Z_n) \, dP = \int_\Omega Z_n \, dP$$

donc

$$\underline{P(A_{n+1} = a) = (1-\theta) \, P(A_n = a) + \theta \, \Pi}$$

de plus $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n = a) = \Pi$ on retrouve ici la loi de l'ajustement

### 3-1-3 PROBABILITES SEQUENTIELLES

$$P(A_{n+1} = a, E_n = a) = \int_\Omega P(A_{n+1} = a, E_n = a / Z_{n+1}) \, dP(A_{n+1} = a, E_n = a, z)$$

$$= \int_\Omega P(A_{n+1} = a / Z_{n+1}) . P(E_n = a / A_{n+1}, Z_{n+1}) \, dP = \Pi \int_\Omega Z_{n+1} \, dP(.,.,., z)$$

$$= \left[ (1-\theta) \, P(A_n = a) + \theta \right] \Pi$$

$$\begin{cases} P(A_{n+1} = a / E_n = a) = (1-\theta) \, P(A_n = a) + \theta \longrightarrow (1-\theta) \, \Pi + \theta \\ P(A_{n+1} = a / E_n = a') = (1-\theta) \, P(A_n = a) \longrightarrow (1-\theta) \, \Pi \end{cases}$$

$$\boxed{P(A_{n+1} = a / E_n = a,\ A_n = a)}$$

$$P(A_{n+1} = a,\ E_n = a,\ A_n = a) = \int_{\Omega} P(A_{n+1} = a,\ E_n = a,\ A_n = a / Z_n)\, dP$$

$$= \int_{\Omega} P(A_n = a/Z_n) \,.\, P(E_n = a/A_n = a,\ Z_n) \,.\, P(A_{n+1} = a/E_n = a,\ A_n = a, Z_n)\, dP$$

$$= \int_{\Omega} Z_n \,.\, \pi \,.\, Z_{n+1}\, dP = \pi \left[ (1-\theta)\, E(Z_n^2) + \theta\, E(Z_n) \right]$$

et $P(E_n = a,\ A_n = a) = P(A_n = a) \times P(E_n = a/A_n = a) = \pi\, E(Z_n)$

donc

$$P(A_{n+1} = a/E_n = a,\ A_n = a) = (1-\theta)\, \frac{E(Z_n^2)}{E(Z_n)} + \theta$$

$$P(A_{n+1} = a/E_n = a',\ A_n = a) = (1-\theta)\, \frac{E(Z_n^2)}{E(Z_n)}$$

$$P(A_{n+1} = a/E_n = a,\ A_n = a') = (1-\theta) \left[ \frac{E(Z_n) - E(Z_n^2)}{1 - E(Z_n)} \right] + \theta$$

$$P(A_{n+1} = a/E_n = a',\ A_n = a') = (1-\theta)\, \frac{\left[ E(Z_n) - E(Z_n^2) \right]}{1 - E(Z_n)}$$

$$\boxed{E(Z_n^P)}$$

$$Z_{n+1}^P = \sum_{i=0}^{P} C_P^i\, \theta^i (1-\theta)^{P-i}\, Z_n^{P-i}\, 1_{\{a\}} E_n$$

donc $\underline{E(Z_{n+1}^P) = \sum_{i=0}^{P} \Pi_{oi}\ \theta^i (1-\theta)^{P-i}\ E(Z_n^{P-i})}$

avec

$$\Pi_{oi} = \Pi \quad \text{si } i \neq 0 \quad \text{et } \Pi_{oo} = 1$$

3-1-4

## CONVERGENCE FAIBLE DE $Z_n$

Nous allons montrer que la suite $(Z_n)$ de variables aléatoires converge faiblement vers une variable $z$

Comme $0 \leq Z_n \leq 1$ presque sûrement les moments $E(Z_n^P)$ des variables $Z_n$ sont uniformément bornés par 1 . Nous avons donc seulement à montrer (cf. le théorème de convergence des moments [4] p. 185, que pour tout P $\lim_n E(Z_n^P)$ existe.

Puisque $0 \leq Z_n \leq 1$ $E(Z_n^{P+1}) \leq E\, Z_n^P$. On a donc la représentation suivante de la fonction caractéristique

$\phi_{Z_n}(t)$ de $Z_n$ : $\quad \phi_{Z_n}(t) = 1 + it + \dots + \frac{(it)^P}{P!} E(Z_n^P) + \dots$

Démontrons la convergence en n par récurrence sur P. Elle est vraie $P = 1 \left( E(Z_n) = P(A_n = a) \right)$

Supposons que $E(Z_n^i)$ converge en n $\forall i < P - 1$ et montrons que $E(Z_n^P)$ converge en n.

$$E(Z_{n+1}^P) = \sum_{i=0}^{P} \Pi_{oi}\ C_P^i\ \theta^i (1-\theta)^{P-i}\ E(Z_n^{P-i})$$

$= \alpha E(Z_n^P) + V_n$ , $V_n$ étant une suite convergente en n et $\alpha = (1-\theta)^P \leq 1$

Donc, à partir d'un certain rang, en appelant $\ell$ la limite de $V_n$

$$\alpha E(Z_n^P) + \ell - \varepsilon \leq E(Z_{n+1}^P) \leq \alpha E(Z_n^P) + \ell + \varepsilon$$

la première suite converge vers $\dfrac{\ell - \varepsilon}{1 - \alpha}$

la deuxième suite converge vers $\dfrac{\ell + \varepsilon}{1 - \alpha}$

Le choix de $\varepsilon$ étant arbitraire entraine donc que $E(Z_{n+1}^P)$ converge en $n$ vers $\dfrac{\ell}{1 - \alpha}$

## 3-2°) Modèle à un élément d'Estes et Suppes pour $A = E = \{a, a'\}$

On prend $Z = \{z, z'\}$.

Les règles s'expriment ici :

R o) $P(Z_o = z) = P_o \qquad 0 \leq P_o \leq 1 \quad P_o$ étant un paramètre.

R$_1$) $P(A_n = a / Z_n, X_{n-1}, \ldots X_o) = P_1(Z_n, a)$

avec

$$P_1(z, a) = \beta$$

$$P_1(z', a') = \beta'$$

R$_2$) $P(Z_{n+1} = z / Z_n, A_n, E_n, X_{n-1}, \ldots X_o) = (1 - C)\, 1_{\{z\}}(Z_n) + C\, 1_a(E_n)$

R$_3$) $P(E_n = a / Z_n, A_n, X_{n-1}, \ldots X_o) = \Pi$

En général on prend $\beta = 1$, $\beta' = 0$. Nous les garderons quelconques.

3-2-1 - <u>Loi de l'ajustement du conditionnement.</u>

$$P(Z_{n+1} = z) = \int_\Omega P(Z_{n+1} = z / Z_n, A_n, E_n) \, dP$$

$$= \int_\Omega \left[ (1-c) \; 1_{\{z\}} Z_n + C \; 1_{\{a\}} E_n \right. \; dP$$

$$P(Z_{n+1} = z) = \underline{(1-C) \; P(Z_n = z) = C \, \pi}$$

$$\text{et} \lim_{n \to \infty} P(Z_n = z) = \pi$$

3-2-2 - <u>Loi de l'ajustement de la réponse.</u>

<u>Etude de $P(A_{n+1} = a)$</u>

$$P(A_{n+1} = a) = \int P(A_{n+1} = a / Z_{n+1}) \, dP = \beta \left[ (1-C) \, P(Z_n = z) + C\pi \right]$$

$$+ \beta' \left[ 1 - (1-C) \; P(Z_n = z) - C \, \pi \right]$$

Or $\quad P(A_n = a) = \beta \; P(Z_n = z) + \beta' \left[ 1 - P(Z_n = z) \right]$

donc $\quad \underline{P(A_{n+1} = a) = (1-C) \; P(A_n = a) + C \, \pi \; (\beta - \beta') + \beta' C}$

et $\underline{\lim_{n \to \infty} P(A_n = a) = \pi(\beta - \beta') + \beta'}$ et si $\beta = 1$, $\beta' = 0$, $\lim_{n \to \infty} P(A_n = a) = \pi$

On retrouve la loi de l'ajustement. (On l'obtient exactement d'ailleurs sur $Z_n$ et non sur $A_n$.

3-2-3 - <u>Probabilités séquentielles.</u>

3-2-3-1 - Etude de <u>$P(A_{n+1} = a / E_n = a)$</u>

$$P(A_{n+1} = a, E_n = a) = \int_\Omega P(A_{n+1} = a, E_n = a / Z_{n+1}) \, dP$$

$$= \int_\Omega P(A_{n+1} = a / Z_{n+1}) \, . \; P(E_n = a / A_{n+1}, Z_{n+1}) \, dP$$

$$= \Pi \left\{ \beta \left[ (1 - C)\ P(Z_n = z) + C \right] + \beta' \left[ -(1 - C)\ P(Z_n = z) - C + 1 \right] \right.$$

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a) = (1 - C)\ P(A_n = a) + \beta\ C$$

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a') = (1 - C)\ P(A_n = a) + \beta'\ C$$

3-2-3-2 - Etude de $\underline{P(A_{n+1} = a / E_n = a,\ A_n = a)}$

$$P(A_{n+1} = a,\ E_n = a,\ A_n = a) = \int P(A_{n+1} = a,\ E_n = a,\ A_n = a / Z_n)\ dP$$

$$= \int P(A_n = a / Z_n)\ .\ P(E_n = a / A_n = a,\ Z_n)\ .\ P(A_{n+1} = a / E_n = a,\ A_n =$$

$$= a,\ Z_n)\ dP$$

Or $P(A_{n+1} = a / E_n = a,\ A_n = a,\ Z_n = z) = \beta$

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a,\ A_n = a,\ Z_n = z') = C\beta + (1 - C)\ \beta'$$

Donc

$$P(A_{n+1} = a,\ E_n = a,\ A_n = a) = \Pi \left\{ \beta^2\ P(Z_n = z) + \beta' \left[ C\beta + (1 - C)\beta' \right] \left[ 1 - P(Z_n = \right. \right.$$

$$= \Pi \left[ P(A_n = a)\ (\beta + \beta' - C\beta') + -\beta\ \beta' (1 - C) \right]$$

et $P(A_{n+1} = a / E_n = a,\ A_n = a) = \dfrac{P(A_{n+1} = a,\ E_n = a,\ A_n = a)}{P(E_n = a,\ A_n = a)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A_{n+1} = a / E_n = a,\ A_n = a) = \beta + \beta' - C\ \beta' - \beta \dfrac{\beta' (1 - C)}{P(A_n = a)}\ (= 1 \\ \text{si } \beta = 1,\ \beta' = 0) \\ P(A_{n+1} = a / E_n = a',\ A_n = a) = \beta + \beta' - C\ \beta - \beta \dfrac{\beta' (1 - C)}{P(A_n = a)}\ (= 1 - C \\ \text{si } \beta = 1,\ \beta' = 0) \end{array} \right.$$

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a,\ A_n = a') = \beta + \beta' - \beta' C + C - 1 + \frac{(1 - C)\beta' - (\beta + \beta')}{1 - P(A_n = a)}$$

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a',\ A_n = a') = \beta + \beta' + \beta C - (1 + C) + \frac{(1 - \beta)\left[1 + C - \beta'(1 - C)\right]}{1 - P(A_n = a)}$$

On peut remarquer que si dans ce modèle on fait $\beta = 1$, $\beta' = 0$ et $C = 0$, on obtient les mêmes résultats que dans le modèle linéaire pour les probabilités $P(A_n = a)$, $P(A_{n+1} = a / E_n = a)$, mais des résultats différents en ce qui concerne les probabilités du type.

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a,\ A_n = a).$$

Ce résultat peut se généraliser. On obtiendra les résultats identiques pour les probabilités ne faisant intervenir que les renforcements antérieurs, mais des résultats différents pour les probabilités faisant intervenir des réponses antérieures.

Il est également remarquable que, lors de réalisations expérimentales des ces deux modèles (Suppes 1963), en ce qui concerne les probabilités faisant intervenir les réponses antérieures, les résultats expérimentaux s'écartent considérablement des prédictions du modèle à un élèment, alors que le modèle linéaire constitue une approximation valable.

# - BIBLIOGRAPHIE -

°° °°

°

[1] BUSH, R.R. et ESTES, W.K et al. : Studies in Mathematical learning theory (Stanford, Calif. Stanford Univ. Press 1959).

[2] BUSH, LUCE, GALANTER : Handhook of mathematical psychology (New-York, Wiley, 1963, 5 volumes).

[3] ESTES. W.K. et SUPPES P.

a) Foundations of linear models (Chapitre 8 in Bush, Estes, etal. ( [1] )

b) Foundations of statistical learning theory :

II. Stimulus sampling Models for simple learning, Technical Report, N° 4, 1959, Institute for Math. Studies in Soc Sciences, Stanford. Calif.

[4] LOEVE Probability Theory (2$^{eme}$ ed. Van NOSTRAND 1960)

[5] LUCE D. Individual chance Behavior (ch. 4 ; New-York. Wiley 1959).

[6] ROUANET : Les modèle stochastiques de l'apprentissage (mathématiques et Sciences humaines (EPHE) Paris n° 5 et 6 1964).

[7] SUPPES ET ATKINSON. Markov learning Models for Multiperson Interaction (Stanford Calif. Stanford Univ. Press 1960)

- Nombreux articles dans la revue PSHYCHOMETRIKA.

°° °° °° °° °°