PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

CALVEZ

# Semi-groupes stochastiques

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1964-1965
« Seminaire d'initiation aux probabilités », , exp. nº 1, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A1_0>

# SEMI-GROUPES STOCHASTIQUES

-=-=-=-=-=-

## I - Introduction.

Un semi-groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, que nous appellerons multiplication :

$$(xy)\ z = x\ (yz)$$

Un semi-groupe topologique est un semi-groupe muni d'une topologie pour laquelle la multiplication est continue.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, est une transformation mesurable de $\Omega$ dans un espace mesurable, qui est un semi-groupe topologique . On a alors un élément aléatoire à valeurs dans un semi-groupe topologique.

Dans ce qui suit, nous ferons abstraction de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et considérerons des mesures de probabilités sur un semi-groupe localement compact séparable ou compact.

L'étude des mesures de probabilités sur des semi-groupes, qui sont alors appelés semi-groupes stochastiques, est une étude récente ; elle a dû commencer vers 1955. L'étude des mesures de probabilités sur les semi-groupes finis a débuté par un article d'Hewitt Zuckermann et a été poursuivie par Stefan Schwarz en particulier. En ce qui concerne les semi-groupes compacts et localement compacts, on peut citer Rosenblatt, Kloss, Schwarz, Pym.

Après le rappel de définitions et de résultats d'algèbre, de topologie, de probabilités, je parlerai de la convolution des mesures de probabilité, des mesures idempotentes et des théorèmes limites sur les semi-groupes localement compacts séparables et surtout sur les semi-groupes compacts.

## II - Quelques définitions en algèbre.

Soit S un semi-groupe.

S satisfait à la règle de simplification à droite si :

$$xa = ya \Longrightarrow x = y \qquad \forall\ x, y, a$$

On a de même la simplification à gauche et la simplification à droite et à gauche.

A est un sous semi-groupe de S si $A \subset S$ et $A^2 \subset A$

Un idéal à gauche L de S est un ensemble non vide tel que $L \subset S$ et $SL \subset L$ .
On définirait de même un idéal à droite et un idéal bilatère. Dans la suite, si l'on emploie le mot idéal seul, il s'agira d'un idéal bilatère.
Un élément e de S est un idempotent si $e^2 = e$. Un élément o de S est un zéro si $ox = xo = o$ . S a au plus un zéro. Un élément 1 de S est un élémen t unité si $x1 = x'1 = x$ . S a au plus un élément unité.

Un idempotent e est appelé primitif s'il n'existe pas d'idempotent f non-zéro tel que $ef = fe = f$.

Un idéal à gauche L de S est minimal s'il ne contient pas d'autre idéal à gauche de S que lui-même.
On a de même des idéaux à droite minimaux et des idéaux bilatères minimaux.

Si S ne contient pas d'autre idéal à gauche que lui-même, il est dit simple à gauche. On voit ce que signifient les mots simple à droite et simple.

S est complètement simple :
1° - s'il est simple ;
2° - si tout idempotent non zéro de S est primitif ;
3° - si pour chaque $a \in S$ il existe au moins une paire d'idempotents non zéro e et f tels que $ea = a = af$.

## III - Quelques propriétés des semi-groupes compacts.

Voir Numakura.

Soit S un semi-groupe compact.
Pour $a \in S$ , on pose $A = (a, a^2, ..)$ Alors la fermeture $\overline{A}$ de A contient comme sous-ensemble quelque groupe commutatif fermé D.
S contient donc au moins un idempotent.
On montre de plus que $\overline{A}$ contient un seul idempotent. Soit $e_\alpha$ cet idempotent. On dit alors que a appartient à l'idempotent $e_\alpha$ .

S a un unique idéal bilatère minimal K qui est complètement simple et compact. K est le noyau de S.

Si E est l'ensemble des idempotents de S, on a :

$$K = \bigcap_{e_\lambda \in E} S e_\lambda S$$

Soient $e_\lambda$ et $e_\mu$ éléments quelconques de E', ensemble des idempotents de K, alors $e_\lambda$ K $e_\mu$ est un groupe.
K est l'union des groupes $e_\lambda$ k $e_\mu$ . Deux tels groupes sont disjoints ou confondus et isomorphes l'un à l'autre.

E est l'ensemble des idempotents de S. Si $S^2 = S$, alors S E S = S

- Théorème de WALLACE.

Voir Wallace.

S est un semi-groupe compact complètement simple.
S est isomorphe à l'espace produit T x X x Y.
où T est un groupe topologique compact et X et Y sont des espaces compacts. La multiplication dans T x X x Y est définie par la relation :

$$(t, x, y)\ (t', x', y') = \left[t\ \varphi(x, y')\ t', x', y\right]$$

où $\varphi$ est une fonction continue de X x Y dans T; la réciproque est vraie.

IV - Définitions de calcul des probabilités.

On ne considère dans la suite que des semi-groupes S compacts ou localement compacts séparables. La $\sigma$- algèbre sur de tels semi-groupes sera la $\sigma$-algèbre $\mathcal{B}$ des boréliens, c'est-à-dire la $\sigma$-algèbre engen drée par les ensembles ouverts.
Les mesures de probabilités seront régulières c'est-à-dire si $E \in \mathcal{B}$, alors :

$$P(E) = \inf \quad (P(O) : O \text{ ouvert} \supset E)$$

$$P(E) = \sup. \quad (P(C) : C \text{ compact} \subset E)$$

Il existe plusieurs définitions possibles du support s (P) de la mesure de probabilité P.
En voici une : s (P) est défini comme l'ensemble des points dont tout voisinage a une mesure positive. Le support est un ensemble fermé.

L (S) est l'ensemble des fonctions réelles continues à support compact.
Pour une mesure de Borel régulière m et pour $f \in L(S)$, on pose :

$$I(f) = \int_S f(s)\ m\ (ds)$$

Alors I (f) est une fonctionnelle linéaire positive sur L (S). Réciproquement à une telle fonctionnelle I ( f ) sur L (S), il correspond une mesure de Borel régulière sur S telle que :

$$I(f) = \int_S f(s)\ m\ (ds)$$

On définit maintenant la convergence vague d'une suite $(P_n)$ de mesures de probabilité à une mesure m.

$P_n \xrightarrow{\text{vaguement}} m$ si et seulement si : $\forall f \in L\ (S) \quad \int_S f\, dP_n\,(s) \to \int_S f\, dm\,(s)$

La convergence faible est définie de façon analogue en utilisant les fonctions bornées et continues.

$P_n \to Q$ faiblement si et seulement si $P_n \to Q$ vaguement et si $Q\,(s) = 1$
Les deux concepts coïncident dans le cas compact.

On peut définir une topologie faible sur l'ensemble $\mathcal{P}(S)$ des mesures de probabilité sur S, qui sont régulières.
Appelons $C_B\ (S)$ l'ensemble des fonctions réelles continues et bornées sur S et $C_B^+\ (S)$ l'ensemble des fonctions réelles, bornées, continues et positives sur S.

On prend pour base de voisinage à P, les ensembles

$V\ (P, f, \varepsilon) = (P' \in \mathcal{P}(S) : \left| \int f\, dP' - \int f\, dP \right| < \varepsilon)$, où $f \in C_B^+\ (S')$
et $\varepsilon > 0$ quelconque et où l'on fait varier f et $\varepsilon$.

V - Définition de la convolution.

On donne deux définitions équivalentes de la convolution pour des semi-groupes S compacts ou localement compacts séparables. Voir Stromberg.

a) Soit $f \in L\ (S)$. On a :

$$R\ (f) = \int_S \int_S f\ (st)\ P\ (ds)\ Q\ (dt)$$

A R ( f ) fonctionnelle linéaire sur L(S), il correspond une mesure de probabilité régulière telle que :

$$R\ (f) = \int_S f\ (s)\ R\ (ds)$$

On appelle R la convolution $P * Q$ de P et de Q.

b) On définit :

$$\forall B \in \mathcal{B}\ (S) \quad P * Q\ (B) = R\ (B) = \int_S \int_S I_B\ (st)\ P\ (ds)\ Q\ (dt)$$

Le support de la convolution $P * Q$ est la fermeture du produit des supports P et Q respectivement, $s\ (P * Q) = \overline{s\ (P)\,.\,s\ (Q)}$

Soit S un semi-groupe localement compact séparable. $\mathcal{P}(S)$, muni de la convolution est alors un semi-groupe topologique, dans la topologie faible.
Voir Kallianpur.

Soit S, un semi-groupe compact. Alors $\mathcal{P}(S)$, muni de la convolution, est un semigroupe compact, dans la topologie faible.

On peut alors essayer de caractériser des é l éments algébriques particuliers dans $\mathcal{P}(S)$. Voir Kloss.

Si $S$ est commutatif, $\mathcal{P}(S)$ l'est aussi.

## VI - Mesures de probabilité idempotentes.

Une mesure de probabilité P est idempotente si $P * P = P$. C'est un idempotent dans le semi-groupe $\mathcal{P}(S)$

$S$ est maintenant un semi-groupe compact.

**Théorème.**

Soit $P \in \mathcal{P}(S)$ avec $P^2 = P$. Alors $s(P)$ est un sous semi-groupe complètement simple de $S$.

**Démonstration.**

Posons $s(P) = H$

On a $s(P) . s(P) = s(P)$. Donc H est un sous semi-groupe, il est compact, car le support est un ensemble fermé. Soit K son noyau, on démontre que $K = H$. Comme K est un sous semi-groupe complètement simple, H est alors complètement simple.

On va démontrer que $H = K$

a) Soit $f \in L(H)$
Soit $g(y) = \int f(xy)\, dP(x)$

Alors $g(y) \in L(H)$ et $g(y)$ atteint sa valeur maximum à un point $h \in H$.
Alors :
$g(h) = \int_H f(xh)\, dP(x) = \int_H\int_H f(xyh)\, dP(x)\, dP(y) = \int g(yh)\, dP(y)$

D' où $g(h) = g(yh) \quad \forall y \in H$
Comme $K h \subset K$, il y a des points pour lesquels $g(y)$ atteint son maximum qui sont contenus dans K.

b) Si $H \neq K$, $H - K$ est non vide. Dans $H - K$, il existe au moins un idempotent.
Si non, E étant l'ensemble des idempotents de H comme $H^2 = H$, on a :

$$H E H = H$$

Si $E \subset K$, alors $H E H = H \subset K$, ce qui est contraire à l'hypothèse, donc $H - K$ contient au moins un idempotent e.

c) Soit $f_o \in L^+ (H)$, telle que $f_o (e) = 1$ et que $f_o$ soit nulle sur K. Soit $g_o (y)$. Soit $k \in K$ tel que $g_o (y)$ atteint son maximum en h.

On a alors :

$$g_o (h) = \int f_o(x h) \, d P (x) = 0$$

car $f_o$ est nulle sur K, qui est un idéal de H.

D'autre part, $g_o (e) > 0$.

En effet, soit V (e) un voisinage de e, tel que $f_o (xe) > f_o (e) - \varepsilon$ pour $x \in V (e)$, il en existe car la multiplication et $f_o$ sont continues. V (e) a une mesure positive. On a alors ;

$$g_o (e) = \int f_o (xe) \, d P (x) \geqslant \int_{V (e)} f_o (xe) \, d P (x) \geqslant \left[ f_o (e) - \varepsilon \right] P \left[ V (e) \right]$$

Or, la valeur maximum de $g_o$ est 0. Donc on aboutit à une contradiction.

$$H = K$$

Une mesure P est invariante à droite sur un semi-groupe S compact si :

$\forall f \in L (S) \quad g (y) = \int f (xy) \, d P (x)$ est constante sur S.

Théorème : Soit S un semi-groupe compact et P un idempotent de (S). Nous supposons que s (P) est un sous semi-groupe simple à gauche. Alors P est une mesure invariante à droite sur s (P).

Théorème : Soit S un semi-groupe compact, et T un sous semi-groupe de S simple à gauche avec un nombre fini d'idempotents. Soit $P \in \mathcal{P}(S)$ tel que
a) s (P) C T,
b) La mesure P est invariante sur quel que groupe composant de s (P). Alors P est un idempotent de $\mathcal{P}(S)$.

Théorème : Soit S un semi-groupe compact avec un idempotent unique. Pour que $P \in \mathcal{P}(S)$ soit un idempotent, il est nécessaire et suffisant que s (P) soit un groupe, et que P soit la mesure invariante de Haar sur lui.

Théorème : Soit S un semi-groupe compact commutatif. Pour que $P \in \mathcal{P}(S)$ soit idempotent il est nécessaire et suffisant que s (P) soit un groupe, et que P soit la mesure de Haar unvariante sur lui.

1. Existence d'un zéro de (S) dans le cas commutatif.

Théorème :

Soit S un semi-groupe compact commutatif.

Alors il existe $\pi$ unique $\in \mathcal{P}(S)$ tel que $\pi * P = \pi \; \forall P \in \mathcal{P}(S)$. $\pi$ est la mesure invariante sur l'idéal minimal $S_0 \subset S$.

## 2. Existence d'une unité.

- Théorème.

Soit S un semi-groupe compact. $\mathcal{P}(S)$ a une unité si et seulement si S a une unité e. Dans ce cas l'unité de $\mathcal{P}(S)$ est la masse 1 au point e.

Les théorèmes concernant les mesures idempotentes, l'existence de zéro et d'unité sont dus à Kloss.

Kloss classe aussi les mesures de probabilité dans le cas où S est un semi-groupe compact commutatif.

- Théorème.

S est un semi-groupe compact. s (P), $P \in \mathcal{P}(S)$, P idempotente, est un semi-groupe complètement simple compact. Alors on a d'après le théorème de décomposition de Wallace :

$$s(P) = T \times X \times Y$$

On démontre que :

$$P = \tau \times \xi \times \eta$$

où $\tau$ est la mesure de Haar sur T, $\xi$ et $\eta$ sont des mesures de probabilités régulières sur X et Y.

Réciproquement toute mesure de probabilité de cette forme est une mesure idempotente sur le semi-groupe complètement simple T x X x Y et l'admettant comme support. Voir Heble - Rosenblatt et Pym.

# VII - Théorèmes limites.

Soit S un semi-groupe localement compact séparable au compact.

- Théorème.

Pour $P \in \mathcal{P}(S)$, il existe $P' \in \mathcal{P}(S)$ tel que $P = \lim P'^n$ comme $n \to \infty$ si et seulement si P est un idempotent.

On a, en effet :

$$P = \lim_{n\to\infty} P'^{2n} = \lim_{n\to\infty} P'^n * P'^n = P * P$$

L'inverse est évident.

<u>S est maintenant un semi-groupe compact</u> :

- <u>Théorème.</u>

Pour qu'il existe une distribution limite de $P^n$, $n \to \infty$, où $P \in \mathcal{P}(S)$ appartient à l'idempotent $E_p$, il est nécessaire et suffisant que $P * E_p = E_p$.

Soit $P \in \mathcal{P}(S)$

$\bigcup [s(P)]^n$ est un semi-groupe fermé donc compact, on l'appelle le semi-groupe engendré par le support de P. Voir Rosenblatt.

- <u>Théorème.</u>

Soit $P \in \mathcal{P}(S)$. Si P' est limite d'une suite partielle de $(P^n)$, alors s (P ) est le noyau du semi-groupe engendré par le support de s (P')

- <u>Théorème.</u>

Soit $P \in \mathcal{P}(S)$ ; S semi-groupe compact.

Alors :

$$\pi_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} P^j\right]$$

converge vers une limite $\pi$.

On a $\pi^2 = \pi$ et $P * \pi = \pi * P = \pi$.

Voir Rosenblatt.

- <u>Démonstration.</u>

a) $f \in L(S)$, espace des fonctions continues sur S.

Soit $[Tf](x) = \int f(xy)\, dP(y)$

Alors comme la famille de fonctions $f_y(x) = f(xy)$ est équicontinue en x, $[T f](x)$ est une fonction continue.

On a $[T^n f](x) = \int f(xy)\, dP^n(y)$

La suite $([T^n f](x))$ est une famille équicontinue de fonctions, puisque la famille $f_y(x)$ l'est.

b) D'où si l'on pose $\bar{T}^n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T^j$, $(\bar{T}^n f)(x)$ est une famille

équicontinue de fonctions et $(T^n f)$ est fortement compact séquentiellement.

Comme $\|T\| = 1$ et $T^n f \to 0$, d'après un théorème ergodique $\bar{T}^n \to \bar{T}$ fortement avec $\bar{T}\, T = T\, \bar{T} = \bar{T}^2 = \bar{T}$ et $\bar{T}$ possède la positivité.

c) D'où :

$\int \bar{T} f(x)\, dP(x) = \int f(x)\, d\pi(x)$, la première intégrale est en effet une fonctionnelle linéaire positive sur L (S).

$$\int \bar{T}^n f(x)\, dP(x) \rightarrow \int \bar{T} f(x)\, dP(x) = \int f(x)\, d\pi(x)$$

$$\frac{1}{n}\int f(x)\, d\left[\sum_{j=I}^{n} P^{j}(x)\right] \rightarrow \int f(x)\, d\pi(x)$$

D'où :

$$\frac{I}{n}\left[\sum_{j=I}^{n} P^{j}\right] \rightarrow \pi \text{ faiblement.}$$

- Théorème.

Soit $S$ un semi-groupe compact avec $kS = k$ ou $[Sk = k]$ pour tout $k \in K$, noyau de S. Si le semi-groupe engendré par le support de $P \in \mathcal{P}(S)$, alors

$$\lim_{n \to \infty} P^n = P'$$

où $P' = \lim \frac{I}{n} \sum_{j=1}^{n} P^j$ et $P'$ a K comme support.

Les mesures de probabilités idempotentes sur les semi-groupes compacts ont donc comme support des semi-groupes complètement simples et d'autre part, si $P \in \mathcal{P}(S)$, semi-groupe des mesures de $S$ semi-groupe compact, alors

$$\frac{I}{n} \sum_{j=I}^{n} P^j \rightarrow \pi, \text{ mesure idempotente.}$$

## VIII - Autres problèmes concernant les semi-groupes stochastiques.

Il pourrait être intéressant d'introduire une analyse harmonique sur les semi-groupes compacts, ce qui permettrait de préciser les théorèmes limites. On pourrait aussi essayer de classer les mesures de probabilités sur un semi-groupe compact non commutatif, d'étudier les semi-groupes à idempotent unique ou les semi-groupes avec zéro.

Stéfan SCHWARZ a démontré l'existence de mesures invariantes sur certains semi-groupes compacts, il a étudié d'autre part, pour des semi-groupes compacts non commutatifs, les mesures idempotentes, les mesures idempotentes primitives et les groupes maximaux dans l'espace des mesures (un groupe maximal étant l'émément maximal dans l'ensemble des groupes contenant un idempotent).

Stefan SCHWARZ a aussi étudié les mesures de probabilité sur les semi-groupes finis.

Soit S un semi-groupe compact à élément unité. $P \in \mathcal{P}(S)$ sera dite indéfiniment divisible si ;

$\forall n, \exists P_n \in \mathcal{P}(S)$ telle que :

1°) $P_n^n = P$

2°) $P_n \to \delta_e$ faiblement où $\delta_e$ est la mesure de probabilité consistant de la masse unité au point e.

On a défini des processus stochastiques homogènes sur les semi-groupes compacts. Un processus stochastique homogène sur un semi-groupe compact S est une famille de mesures de probabilité $(P_t, 0 \leq t < \infty)$ sur S telle que :

$$P_t * P_{t'} = P_{t+t'} \quad , \quad 0 < t, t' < \infty$$

Si S a un élément unité, on dit que le processus homogène est continu en probabilité si

$P_t \to \delta_e$ faiblement, quand $t \downarrow 0$, avec $\delta_e$ comme plus haut.

Si S a un élément unité, on dit que le processus homogène est du type discontinu si :

$$P_t(e) \to 1 \quad \text{comme } t \to 0$$

GRENANDER donne des résultats concernant les processus stochastiques homogènes;pour prouver ces résultats, il utilise l'opérateur de probabilité

$$T_t f(s) = \int_S f(s u) \; P_t(du) \text{ où } f \in L(S)$$

Il peut ainsi introduire la théorie des semi-groupes d'opérateurs.

HEWITT et ZUCKERMANN définissent une analyse de FOURIER sur des semi-groupes finis S possédant la propriété suivante :

$$\exists m \text{ entier, tel que : } \forall x \in S \qquad x^{m+1} = x$$

Soit S un semi-groupe fini du type précédent, n est le nombre de ses éléments. P est une distribution de probabilité sur S, $p_\gamma$ est la probabilité de $s_\gamma$

Un semi-caractère de S est une fonction $\sigma$ à valeurs complexes sur S telle que, si s et t sont des éléments de S, $\sigma(ts) = \sigma(t)\, \sigma(s)$.
Soit $\Sigma$ l'ensemble de tous les semi-caractères $\sigma$.

La transformée de Fourier $\hat{P}(\sigma)$ de P est la fonction sur $\Sigma$ définie par la relation :

$$\hat{P}(\sigma) = E\, \sigma(s) = \sum_{\gamma=1}^{n} p_\gamma\, \sigma(s_\gamma)$$

HEWITT et ZUCKERMANN donnent des résultats concernant cette analyse harmonique. GRENANDER donne des exemples de semi-groupes stochastiques.

# - BIBLIOGRAPHIE -

GRENANDER. U.

- Probabilities on algebraic structures.
- Stockholm, Almqvist et Wiksell, 1963, 218 p.

HEBLE. M. ROSENBLATT. M.

- Idempotent measures on a compact topological semi-group.
- Proceedings of the American Mathematical Society (1963). 14, n° 1, p. 177-84

HEWITT. E. et ZUCKERMANH. S.

- Arithmetic and limit theorems for a class of rand m variables.
- Duke mathematical journal, 22, 1955, p. 595 - 615.

KALLIANPUR. G.

- The topology of weak convergence of probability measures.
- Journal of mathematics and mechanics. 10 (2), 1961, p. 947 - 969.

KLOSS B. M.

- Probability distributions on bicompact topological groups.
- Theory of probab ility and its applications. Vol. IV. n° 3, 1959, p. 237 - 270.

NUMAKURA. K.

- On bicompact semigroups.
- Mathematical journal of Okayama University.
- Vol. 1, n° 1 - 2, 1952, p. 99 - 108.

PYM. J. S.

- Idempotent measures on semigroups.
- Pacific journal of mathematics, vol. 12, n° 2. 1962, p. 685 - 698.

ROSENBLATT. M.

Limits of convolution sequences of measures on a compact topological semi-grou
Journal of mathematics and mechanics. Vol. 9 (1),1960, p; 293 - 305.

SCHWARZ. S.

- Probabilities on non-commutative semigroups
- Czechoslovak Mathematical journal (1963) 13, n° 3, p. 372 - 426.

STROMBERG. K.

- A note on the convolution of regular measures.
- Mathematica Scandinavica, Vol. 7 (2), 1959, p; 347-352.

WALLAGE. A. D.

- The Rees - Suschkewitsch structure theorem for compact simple semigroups.
- Proceedings of National Academy of Sciences. 42, 1956, p. 430 - 432.

Pour une bibliographie plus complète, on peut se référer au livre de Grenander ou à l'article de Schwarz qui donne une bibliographie de 34 références.

=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=