DEUX CARACTÉRISATIONS DE LA MESURE D'ÉQUILIBRE D'UN ENDOMORPHISME DE $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$

par Jean-Yves BRIEND *et* Julien DUVAL

Résumé. — Soit μ la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$. Nous montrons ici qu'elle est son unique mesure d'entropie maximale. Nous construisons directement μ comme distribution asymptotique des préimages de tout point hors d'un ensemble exceptionnel algébrique.

Abstract. — Let μ be the equilibrium measure of an endomorphism of $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$. We show that it is its unique measure of maximal entropy. We build μ directly as the distribution of premiages of any point outside an algebraic exceptional set.

Introduction

John Hubbard et Peter Papadopol (*voir* [8] ainsi que [5]) ont défini, pour un endomorphisme holomorphe de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$, une mesure de probabilité invariante naturelle, la *mesure d'équilibre,* comme masse de Monge-Ampère d'une fonction de Green dynamique. John-Erik Fornæss et Nessim Sibony [5] ont montré que μ était mélangeante et reflétait la distribution des préimages des points hors d'un ensemble pluripolaire. En dimension 1, depuis les travaux de Michael Ljubich [12] et Alexandre Freire, Artur Lopès et Ricardo Mañé [6], on peut obtenir μ directement comme distribution asymptotique des préimages hors d'un ensemble exceptionnel algébrique. Elle est, dans ce cas, l'unique mesure d'entropie maximale [12, 13]. Nous montrons ici que ces méthodes s'adaptent en toute dimension avec les mêmes résultats.

Plus précisément, soit $f : \mathrm{P}^k(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ un endomorphisme holomorphe de degré algébrique $d \geqslant 2$, donc de degré topologique d^k. On note, pour une mesure de probabilité μ sur $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$, $d^{-k}f^*\mu$ la mesure de probabilité correspondant par dualité à la moyenne dans les fibres de f pour les fonctions continues. Ainsi $\mu_{n,x} = d^{-kn}f^{n*}\delta_x$ est simplement la mesure de comptage normalisée sur $f^{-n}(x)$. L'ensemble exceptionnel E de f est le plus grand ensemble algébrique propre de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ complètement invariant par f (pour une application générique, E est vide, *voir* aussi [4] pour une description de sa strate de codimension 1 en général). La première caractérisation de μ est le :

Théorème **1.** — *La mesure d'équilibre* μ *est l'unique mesure de probabilité vérifiant* $d^{-k}f^*\mu = \mu$ *et ne chargeant pas* E. *De plus,* μ *reflète la distribution des préimages des points non exceptionnels :* $\mu_{n,x} \longrightarrow \mu$ *si et seulement si* x *est hors de* E.

La deuxième caractérisation de μ est entropique. Depuis Michael Gromov [7], on sait que l'entropie topologique de f est $k \log d$. Par ailleurs, comme μ est de jacobien constant d^k, la formule de Rohlin-Parry (*voir* [14]) nous dit que l'entropie métrique de μ vaut $k \log d$. D'après le Principe variationnel, μ est d'entropie maximale.

Théorème **2.** — *La mesure d'équilibre* μ *est l'unique mesure d'entropie maximale de* f.

Ce résultat a été obtenu aussi par Mattias Jonsson [9] dans le cas particulier, proche de la dimension 1, des produits semi-directs de $\mathrm{P}^2(\mathbf{C})$. Notons également que l'analogue pour les applications de Hénon complexes est dû à Éric Bedford, Michael Ljubich et John Smillie [1].

Nos méthodes n'empruntent pas à la théorie du pluripotentiel, mais relèvent, outre de la théorie ergodique, de la géométrie algébrique et analytique élémentaire. Le premier résultat s'appuie sur un lemme de construction itérative de branches inverses de f^n exponentiellement contractantes, définies sur des disques évitant les valeurs critiques d'un itéré f^l fixé, *à la* Ljubich (*voir* [12]). Quant au deuxième, il utilise la stratégie générale de Ljubich [12] en dimension 1, et une version relative de l'estimée de Gromov [7] de l'entropie topologique de f par la croissance du volume de son graphe itéré.

Le texte s'organise comme suit : le lemme *à la* Ljubich fait l'objet du premier paragraphe, tandis que le second s'intéresse à l'ensemble exceptionnel, le troisième achevant la preuve du théorème 1. Puis, après des rappels sur l'entropie topologique au quatrième paragraphe, le cinquième se consacre à l'unicité de la mesure d'entropie maximale. Enfin, un lemme de comparaison aire-diamètre pour les disques holomorphes, substitut au théorème de distorsion de Koebe en dimension supérieure, est détaillé dans l'appendice.

Nous tenons à remercier le rapporteur pour ses critiques constructives, ainsi que Serge Cantat, qui nous a communiqué le manuscrit de M. Gromov.

1. Un lemme *à la* Ljubich

On construit de manière itérative, comme en dimension 1 (*voir* [12], et aussi [6]), beaucoup de branches inverses de f^n exponentiellement contractantes sur des disques évitant les valeurs critiques d'un itéré f^l fixé.

Notons C le lieu critique de f, $\mathrm{V} = f(\mathrm{C})$ ses valeurs critiques, $\mathrm{V}_l = \bigcup_{q=1}^{l} f^q(\mathrm{C})$ les valeurs critiques de f^l, et $\mathrm{V}_\infty = \bigcup_{l \geqslant 1} \mathrm{V}_l$ le lieu postcritique; soit aussi τ le degré de V. Dans toute la suite, ω désignera la forme de Fubini-Study normalisée de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$. Remarquons que $f^*\omega$ est cohomologue à $d\omega$, où d est le degré algébrique de f. Enfin, un disque holomorphe est dit *plat générique* s'il est tracé sur une droite projective non contenue dans le lieu postcritique V_∞.

Lemme. — *Soit* $\varepsilon > 0$. *Il existe un entier* $l \geqslant 0$ *tel que, sur tout disque compact plat générique* Δ *évitant* V_l, *on peut construire* $(1-\varepsilon)d^{kn}$ *branches inverses de* f^n *pour* n *assez grand, d'images* Δ_i^{-n} *avec* $\mathrm{Diam}(\Delta_i^{-n}) \leqslant c d^{-n/2}$, *c ne dépendant pas de* n.

Démonstration. — On fixe l de sorte que $2\tau d^{-l}(1-d^{-1})^{-1} < \varepsilon$; soit L la droite projective contenant Δ (L n'est, pour aucun n, incluse dans les valeurs critiques de f^n). Agrandissons légèrement Δ en $\widetilde{\Delta}$ avec les mêmes propriétés : $\widetilde{\Delta} \subset \mathrm{L}$ et $\widetilde{\Delta}$ évite V_l.

a) *Construction des branches inverses sur* $\widetilde{\Delta}$. Par hypothèse, on dispose de d^{kl} branches inverses de f^l sur $\widetilde{\Delta}$, d'images $\widetilde{\Delta}_i^{-l}$. À l'étape suivante, une telle branche inverse de f^l en engendre d^k pour f^{l+1} dès que $\widetilde{\Delta}_i^{-l}$ évite les valeurs critiques V de f. Or les disques $\widetilde{\Delta}_i^{-l}$ sont disjoints, et tracés sur la courbe $f^{-l}(\mathrm{L})$, qui rencontre V en au plus $\tau d^{(k-1)l}$ points par le théorème de Bezout. Ainsi $d^{kl}(1-\tau d^{-l})$ disques $\widetilde{\Delta}_i^{-l}$ évitent V et créent $d^{k(l+1)}(1-\tau d^{-l})$ branches inverses de f^{l+1} sur $\widetilde{\Delta}$. Inductivement, on obtient donc $d^{kn}(1-\tau d^{-l}(1+d^{-1}+\cdots+d^{-n+l+1})) \geqslant d^{kn}(1-\varepsilon/2)$ branches inverses de f^n sur $\widetilde{\Delta}$, d'images $\widetilde{\Delta}_i^{-n}$.

b) *Estimation du diamètre de leurs images.* Commençons par estimer l'aire de la majeure partie d'entre elles. L'aire totale de $f^{-n}(\mathrm{L})$ est

$$\mathrm{Aire}(f^{-n}(\mathrm{L})) = \int_{f^{-n}(\mathrm{L})} \omega = d^{(k-1)n},$$

donc, comme les disques $\widetilde{\Delta}_i^{-n}$ sont disjoints sur $f^{-n}(\mathrm{L})$, au plus $(\varepsilon/2)d^{nk}$ d'entre eux auront une aire excédant $(2/\varepsilon)d^{-n}$. Autrement dit, pour $(1-\varepsilon)d^{nk}$ d'entre les disques $\widetilde{\Delta}_i^{-n}$, on aura :

$$\mathrm{Aire}(\widetilde{\Delta}_i^{-n}) \leqslant \frac{2}{\varepsilon} d^{-n}.$$

Soient maintenant Δ_i^{-n} les disques plus petits obtenus en restreignant à Δ les branches inverses correspondantes : $\Delta_i^{-n} = \widetilde{\Delta}_i^{-n} \cap f^{-n}(\Delta)$. L'estimée de diamètre des Δ_i^{-n} va résulter du fait suivant (*cf.* appendice), puisque l'anneau $\widetilde{\Delta}_i^{-n} - \Delta_i^{-n}$ a un module fixe, celui de $\widetilde{\Delta} - \Delta$:

Fait. — Il existe $a > 0$ tel que, pour toute paire de disques holomorphes $\mathrm{D} \subset \widetilde{\mathrm{D}}$ dans $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$, on ait

$$(\mathrm{Diam}(\mathrm{D}))^2 \leqslant a \frac{\mathrm{Aire}(\widetilde{\mathrm{D}})}{\min\{1, \mathrm{Mod}(\widetilde{\mathrm{D}} - \mathrm{D})\}},$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

En conséquence, beaucoup de points de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ ont la même distribution de préimages. Rappelons que C désigne le lieu critique de f, et que $\mu_{n,x}$ est la mesure de comptage (avec multiplicité) normalisée sur $f^{-n}(x)$.

Corollaire. — Soient $x, y \in \mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ *tels que* $\mu_{n,x}(\mathrm{C})$ *et* $\mu_{n,y}(\mathrm{C})$ *tendent vers* 0 *(si par exemple* x *et* y *sont hors du lieu postcritique de* f*). Alors* $\mu_{n,x} - \mu_{n,y}$ *converge faiblement vers* 0.

Démonstration. — L'hypothèse entraîne que $\mu_{n,x}(V_l) \to 0$ et $\mu_{n,y}(V_l) \to 0$ pour tout l. Fixons $\varepsilon > 0$, et soit l donné par le lemme précédent. Alors, pour φ continue sur $P^k(\mathbf{C})$ de norme 1, et z, t hors de V_l, on aura

$$\left| \int \varphi \, d\mu_{n,z} - \int \varphi \, d\mu_{n,t} \right| \leqslant 6\varepsilon,$$

si n est assez grand. Pour voir cela, supposons d'abord la droite joignant z à t non contenue dans V_∞. Soit alors Δ un disque tracé sur cette droite, contenant z et t, et évitant V_l. Pour n assez grand, $(1-\varepsilon)d^{kn}$ branches inverses Δ_i^{-n} auront un diamètre inférieur au module de continuité de φ pour ε, ce qui entraîne l'estimée

$$\left| \int \varphi \, d\mu_{n,z} - \int \varphi \, d\mu_{n,t} \right| \leqslant 3\varepsilon.$$

Dans le cas général, on transite par un troisième point s hors de V_∞. On applique alors le raisonnement qui précède aux couples (z, s) et (s, t).

Maintenant, si m est assez grand pour que $\mu_{m,x}(V_l) + \mu_{m,y}(V_l) \leqslant \varepsilon$, on aura :

$$\begin{aligned} &\left| \int \varphi \, d\mu_{n,x} - \int \varphi \, d\mu_{n,y} \right| \\ &\qquad \leqslant \iint \left| \int \varphi \, d\mu_{n-m,z} - \int \varphi \, d\mu_{n-m,t} \right| d\mu_{m,x}(z) \otimes d\mu_{m,y}(t), \end{aligned}$$

d'après l'identité $\mu_{n,x} = \int \mu_{n-m,z} \, d\mu_{m,x}(z)$. On a donc

$$\begin{aligned} &\left| \int \varphi \, d\mu_{n,x} - \int \varphi \, d\mu_{n,y} \right| \\ &\qquad \leqslant 2\varepsilon + \iint_{V_l^c \times V_l^c} \left| \int \varphi \, d\mu_{n-m,z} - \int \varphi \, d\mu_{n-m,t} \right| d\mu_{m,x}(z) \otimes d\mu_{m,y}(t), \end{aligned}$$

et donc $\limsup_n \left| \int \varphi \, d\mu_{n,x} - \int \varphi \, d\mu_{n,y} \right| \leqslant 8\varepsilon$ par le lemme de Fatou.

2. L'ensemble exceptionnel

Définition. — L'ensemble exceptionnel E *de f est le plus grand ensemble algébrique propre complètement invariant par f.*

L'objet de ce paragraphe est d'abord de montrer la pertinence de cette définition en s'assurant que les ensembles algébriques complètement invariants sont en nombre fini. Ceci passe par une analyse de la stratification de $P^k(\mathbf{C})$ par le degré local (ou multiplicité) de f. Puis nous identifions E au lieu postcritique asymptotique constitué des points x tels que $\mu_{n,x}(C)$ ne tend pas vers 0. Ainsi, d'après le paragraphe précédent, deux points hors de E auront une même distribution de préimages.

Le *degré topologique local* $\deg_x f$ de f en x est le nombre de points de $f^{-1}(y)$ proches de x pour y générique proche de $f(x)$. Il varie entre 1 et d^k et ses strates $\{\deg_x f \geqslant s\}$

sont algébriques. On peut donc définir le *degré topologique* $\deg_A f$ de f *le long d'un ensemble algébrique irréductible* A par $\deg_A f = \min_{x \in A} \deg_x f$. Ce sera aussi le degré local de f aux points génériques de A. Ce degré le long de A est contrôlé par la codimension de A :

Lemme. — Soit A *un ensemble algébrique irréductible,* $s = \deg_A f$ *et* $p = \mathrm{codim}(A)$. *Alors* $s \leqslant d^p$.

Démonstration. — Fixons un voisinage U d'un point générique x de A, au sens où x est un point lisse et non critique pour $f_{|A}$ et $\deg_x f = s$. Soit π une rétraction holomorphe de U sur $A \cap U$. Si P est un plan projectif de codimension p proche du plan tangent de $f(A)$ en $f(x)$, π induit un revêtement ramifié de degré s de $f^{-1}(P) \cap U$ sur $A \cap U$. Donc, si Q est un plan projectif de dimension p proche du plan tangent à $\pi^{-1}(x)$ en x, on aura $\mathrm{Card}(f^{-1}(P) \cap Q) \geqslant s$. Cependant, comme le degré de $f^{-1}(P)$ est d^p, on a $\mathrm{Card}(f^{-1}(P) \cap Q) \leqslant d^p$ par le théorème de Bezout, ce qui donne l'inégalité recherchée.

Remarque. — Si de plus A est invariant par f, alors $s = d^p$ équivaut à la complète invariance de A : en effet, celle-ci se traduit par des égalités dans les inclusions $f^{-1}(Q) \cap A \subset f^{-1}(Q \cap A)$ pour les plans génériques Q de dimension p, elles-mêmes équivalentes aux égalités des cardinaux avec multiplicité. Or, par le théorème de Bezout, $\mathrm{Card}(Q \cap A) = \delta$, où δ est le degré de A, et $\mathrm{Card}(f^{-1}(Q) \cap A) = \delta d^{k-p}$. D'où il ressort que

$$\sum_{z \in f^{-1}(Q \cap A)} \deg_z f = \delta d^k \quad \text{et} \quad \sum_{z \in f^{-1}(Q) \cap A} \deg_z f = \delta d^{k-p} s,$$

ce qui conclut l'argument.

On voit donc que les strates de degré topologique correspondant à une puissance de d vont jouer un rôle particulier. On pose $A_p = \{x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{C}),\ \deg_x f \geqslant d^p\}$.

Considérons maintenant un ensemble algébrique propre complètement invariant de codimension pure p et A une de ses composantes irréductibles. Montrons que A est contenue dans A_p : en effet, A est complètement invariante par un itéré f^l de f et donc, d'après la remarque, $\deg_A f^l = d^{pl}$. D'un autre côté, $\deg_A f^l = \prod_{k=0}^{l-1} \deg_{f^k(A)} f$ et, par le lemme, $\deg_{f^k(A)} f \leqslant d^p$. On a donc bien $\deg_A f = d^p$ et $A \subset A_p$ (de même que son orbite). C'est donc une des composantes de dimension maximale de A_p, qui sont en nombre fini puisque A_p est algébrique. Ceci entraîne la finitude des ensembles algébriques propres complètement invariants. Leur réunion est l'ensemble exceptionnel E, et ce qui précède en justifie également les propriétés suivantes :

1) la strate E_p de codimension pure p de E est la réunion des cycles de composantes de codimension p entièrement contenus dans A_p; en particulier, E est contenu dans le lieu critique C.

2) La strate de codimension pure p de $A_p(f^l)$ décroît avec l et se stabilise sur E_p pour l assez grand.

3) L'ensemble exceptionnel d'un itéré de f coïncide avec celui de f.

Le lemme suivant montre que E n'est autre que le lieu postcritique asymptotique :

Lemme. — *Soit x hors de* E. *Alors* $\mu_{n,x}(C)$ *tend vers* 0.

On en déduit, d'après le paragraphe 1, le :

Corollaire. — *Soient x et y deux points hors de* E. *Alors* $\mu_{n,x} - \mu_{n,y}$ *converge faiblement vers* 0.

Démonstration du lemme. — Pour simplifier l'exposition, nous faisons la convention que les inégalités intervenant dans cet argument sont à constante multiplicative indépendante de n près. Quitte à passer à un itéré de f, on peut supposer que E_p coïncide avec les composantes de codimension p de A_p.

Montrons, par récurrence descendante sur p, que $\mu_{n,x}(A_p)$ décroît exponentiellement vite. Par hypothèse, $f^{-n}(x)$ évite E, donc $\mu_{n,x}(A_k) = 0$ puisque $A_k = E_k$. De plus $f^{-n}(x)$ ne rencontre A_{p-1} qu'en des composantes de codimension $\geqslant p$. Supposons que $\mu_{n,x}(A_p) \leqslant \lambda_p^n$ avec $\lambda_p < 1$. On va estimer $\mu_{n,x}(A_{p-1})$ en dénombrant $f^{-n}(x) \cap A_{p-1}$ et en majorant la plupart des multiplicités de f^n sur $f^{-n}(x)$. Tout d'abord, $\mathrm{Card}(f^{-n}(x) \cap A_{p-1}) \leqslant d^{n(k-p)}$, comme on le voit par le théorème de Bezout sur $f^{-n}(P) \cap A$ pour les composantes A de A_{p-1} de codimension $\geqslant p$ et les plans génériques P de dimension complémentaire passant par x. Ensuite, on a, pour $\rho < 1$ fixé,

$$\mu_{n,x}\left(\bigcup_{0 \leqslant q \leqslant n\rho} f^{-q}(A_p)\right) \leqslant \sum_{n(1-\rho) \leqslant m \leqslant n} \mu_{m,x}(A_p) \leqslant \lambda_p^{(1-\rho)n}.$$

Or, en dehors de cette réunion, on a $\deg_y(f^n) \leqslant ((d^p - 1)^\rho d^{k(1-\rho)})^n$. Donc

$$\mu_{n,x}(A_{p-1}) \leqslant \lambda_p^{(1-\rho)n} + \left(\frac{(d^p - 1)^\rho d^{k(1-\rho)}}{d^p}\right)^n \leqslant \lambda_{p-1}^n,$$

avec $\lambda_{p-1} < 1$ si ρ a été choisi de sorte que $(d^p - 1)^\rho d^{k(1-\rho)} < d^p$. À la fin de la récurrence, on obtient $\mu_{n,x}(A_1) \leqslant \lambda_1^n$ pour un $\lambda_1 < 1$, et l'on conclut en passant à une décroissance exponentielle de $\mu_{n,x}(C)$ comme ci-dessus.

3. Distribution des orbites négatives

Rappelons que pour une mesure de probabilité μ, $d^{-k} f^*\mu$ désigne la mesure de probabilité obtenue en dualisant l'opération de moyenne sur les fibres de f (comptées avec multiplicité) pour une fonction continue φ sur $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$:

$$\frac{f_*\varphi}{d^k}(x) = \frac{1}{d^k} \sum_{z\in f^{-1}(x)} \varphi(z).$$

C'est un opérateur continu pour la convergence faible. Montrons la première caractérisation de la mesure d'équilibre μ.

Théorème **1.** — *Il existe une unique mesure de probabilité* μ *sur* $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ *satisfaisant* $d^{-k} f^*\mu = \mu$ *et ne chargeant pas l'ensemble exceptionnel* E. *De plus, pour toute mesure de probabilité* ν *ne chargeant pas* E, *on a*

$$\frac{f^{n*}\nu}{d^{kn}} \longrightarrow \mu.$$

En particulier, $\mu_{n,x} = d^{-kn} f^{n*}\delta_x$ *converge vers* μ *si et seulement si* x *est hors de* E.

Démonstration. — La convergence résulte de l'existence de μ, grâce au corollaire du paragraphe 2, et entraîne son unicité. En effet, si μ vérifie les hypothèses du théorème et ν ne charge pas E, on peut écrire

$$\mu = \int \delta_x \, d\mu(x),$$

et donc

$$\mu = \frac{f^{n*}\mu}{d^{kn}} = \int \mu_{n,x} \, d\mu(x).$$

De même on a

$$\frac{f^{n*}\nu}{d^{kn}} = \int \mu_{n,y} \, d\nu(y),$$

d'où l'on déduit que

$$\mu - \frac{f^{n*}\nu}{d^{kn}} = \iint_{\mathrm{E}^c\times\mathrm{E}^c} (\mu_{n,x} - \mu_{n,y}) \, d\mu(x) \otimes \, d\nu(y) \to 0,$$

d'après le paragraphe 2.

Il nous reste maintenant à construire μ, et voici une manière de le faire. On note $\Omega = \omega^k$ la forme volume de la métrique de Fubini-Study, $\mu_n = d^{-kn} f^{n*}\Omega$ et

$\nu_n = n^{-1} \sum_{m=1}^{n} \mu_m$. Par continuité de l'opérateur $d^{-k} f^*$, les valeurs d'adhérence ν de la suite ν_n dans le compact des mesures de probabilité sur $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ satisfont $d^{-k} f^* \nu = \nu$. Si l'une d'entre elles ne se concentre pas sur E, on pose $\mu = (\nu(\mathrm{E}^c)^{-1} \mathbf{1}_{\mathrm{E}^c})\nu$, qui est encore un point fixe de $d^{-k} f^*$ par complète invariance de E.

Sinon, la suite ν_n converge vers E, *i.e.* $\nu_n(\mathrm{U})$ tend vers 1 pour tout voisinage U de E. Montrons que c'est impossible. Pour cela, désignons par $\mathrm{Jac}(f)$ le jacobien de f pour la forme Ω, *i.e.* $\mathrm{Jac}(f)\Omega = f^*\Omega$. On note $\mathrm{M} = \max_{\mathrm{P}^k(\mathbf{C})} \mathrm{Jac}(f)$ et on choisit un voisinage U de E assez petit pour que $\varepsilon = \max_{\mathrm{U}} \mathrm{Jac}(f)$ vérifie $\sqrt{\varepsilon \mathrm{M}} < d^k$. C'est possible car E est dans le lieu critique de f. Comme $\nu_n(\mathrm{U}) \to 1$, on aura, pour n assez grand :

$$\frac{3n}{4} \leqslant \sum_{m=1}^{n} \mu_m(\mathrm{U}) = \int \sum_{q=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\mathrm{U}} \circ f^q \, \mathrm{d}\mu_n,$$

car $\mu_m = f_*^{n-m} \mu_n$. Soient $r_n = \sum_{q=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\mathrm{U}} \circ f^q$ le nombre de visites de U dans une n-orbite, et X_n l'ensemble des points visitant souvent U : $\mathrm{X}_n = \{x \in \mathrm{P}^k(\mathbf{C}),\, r_n(x) \geqslant n/2\}$. On obtient alors $\int r_n \, \mathrm{d}\mu_n \geqslant 3n/4$ donc $\mu_n(\mathrm{X}_n) \geqslant 1/2$, ce qui, dit autrement, donne :

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_{\mathrm{X}_n} \frac{f^{n*}\Omega}{d^{kn}} = \int_{\mathrm{X}_n} \frac{\mathrm{Jac}(f^n)\Omega}{d^{kn}} = \int_{\mathrm{X}_n} \frac{\prod_{q=0}^{n-1} (\mathrm{Jac}(f) \circ f^q)\Omega}{d^{kn}} \leqslant \left(\frac{\sqrt{\varepsilon \mathrm{M}}}{d^k} \right)^n,$$

ce qui est contradictoire pour n assez grand et termine notre démonstration.

Remarque. — On retrouve sans mal des propriétés connues de μ.

1) La mesure μ est mélangeante, et donc ergodique. En effet, la convergence de $\mu_{n,x}$ vers μ se traduit dualement de la manière suivante : si φ est une fonction continue sur $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$, alors $d^{-kn} f_*^n \varphi$ tend vers $\int \varphi \, \mathrm{d}\mu$ sur E^c. On aura donc, si ψ est une autre fonction continue :

$$\begin{aligned} \int \varphi \, \psi \circ f^n \, \mathrm{d}\mu &= \int \varphi \, \psi \circ f^n \, \frac{f^{n*}\,\mathrm{d}\mu}{d^{kn}} = \int \varphi \, \frac{f^{n*}(\psi \, \mathrm{d}\mu)}{d^{kn}} \\ &= \int \frac{f_*^n \varphi}{d^{kn}} \psi \, \mathrm{d}\mu \to \left(\int \varphi \, \mathrm{d}\mu \right) \left(\int \psi \, \mathrm{d}\mu \right), \end{aligned}$$

par convergence dominée. C'est le mélange (argument communiqué par Vincent Guedj, *voir* aussi [15]).

2) La contraction en $d^{-n/2}$ des branches inverses de f^n dans le lemme *à la* Ljubich redonne la minoration des exposants de Liapounoff de f relativement à μ par $(\log d)/2$ (*voir* [2]).

3) La mesure μ ne charge pas les ensembles algébriques. Sinon, μ chargerait E. En effet, soit A un ensemble algébrique irréductible de dimension minimale chargé par μ. Il existe un entier $n > 0$ avec $f^{-n}(\mathrm{A}) \supset \mathrm{A}$, sinon les préimages $f^{-n}(\mathrm{A})$ seraient

toutes disjointes modulo des ensembles algébriques de dimension plus petite, donc de masse nulle, et on aurait

$$\mu\left(\bigcup_n f^{-n}(\mathrm{A})\right) = \sum_n \mu(f^{-n}(\mathrm{A})) = \sum_n \mu(\mathrm{A}) = \infty.$$

De plus, du fait de l'équation fonctionnelle $d^{-k}f^*\mu = \mu$, toutes les composantes de $f^{-n}(\mathrm{A})$ sont chargées par μ. Donc, si B était une composante de $f^{-n}(\mathrm{A})$ différente de A, on aurait

$$\mu(f^{-n}(\mathrm{A})) \geqslant \mu(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{B}) > \mu(\mathrm{A}),$$

contredisant l'invariance de μ. Ainsi A est complètement invariant par f^n et donc $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$.

4. Entropie topologique et entropie métrique

Dans ce paragraphe nous effectuons quelques rappels. Notre référence générale est ici le livre d'Anatole Katok et Boris Hasselblatt [10].

4.1. *Entropie topologique*

C'est le taux de croissance du nombre de n-orbites discernables à ε près :

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{\varepsilon>0}\limsup_n \frac{1}{n}\log\left(\max\{\mathrm{Card(F)},\ \mathrm{F}\ (n,\varepsilon)\text{-séparé}\}\right),$$

où un ensemble est (n,ε)-séparé si deux de ses points ont des n-orbites ε-séparées : si x et y sont deux points distincts de F, on a $d_n(x,y)\geqslant\varepsilon$ pour la distance dynamique

$$d_n(x,y) = \max_{0\leqslant q\leqslant n-1}\{d(f^q(x), f^q(y))\}.$$

On note $\mathrm{B}_n(x,r)$ les boules dynamiques associées.

Pour un endomorphisme holomorphe f de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$, on a $h_{\mathrm{top}}(f) = k\log d$. En effet, d'un côté une application de classe $\mathscr{C}^1$ d'une variété compacte a toujours une entropie topologique minorée par le logarithme de son degré topologique (d'après Michal Misiurewicz et Feliks Przytycki, *voir* [10], p. 316). De l'autre, Gromov [7] obtient la majoration dans notre cadre par l'estimée $h_{\mathrm{top}}(f)\leqslant \mathrm{lov}(f)$, où $\mathrm{lov}(f)$ est le taux de croissance du volume du graphe itéré de f. En voici l'idée : si $\Gamma_n = \{(x,\dots,f^{n-1}(x)),\ x\in\mathrm{P}^k(\mathbf{C})\}$ est ce graphe, on définit

$$\mathrm{lov}(f) = \limsup_n \frac{1}{n}\log(\mathrm{Vol}(\Gamma_n)) = \limsup_n \frac{1}{n}\log\left(\int_{\Gamma_n}\omega_n^k\right),$$

où ω_n est la forme de Kähler sur $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})^n$ induite par la forme de Fubini-Study sur chaque facteur.

Un calcul cohomologique montre que $\mathrm{lov}(f) = k \log d$. La majoration $h_{\mathrm{top}}(f) \leqslant \mathrm{lov}(f)$, quant à elle, repose sur le théorème de Pierre Lelong (*voir* [11]). En effet, un ensemble (n, ε)-séparé F donne, via ses n-orbites, un ensemble ε-séparé G dans Γ_n pour la distance produit, qui n'est autre que d_n. On a donc

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_n) \geqslant \sum_{y \in \mathrm{G}} \mathrm{Vol}(\mathrm{B}_n(y, \varepsilon/2) \cap \Gamma_n),$$

puisque les boules $\mathrm{B}_n(y, \varepsilon/2)$ sont disjointes. Le théorème de Lelong fournit une minoration indépendante de n et y du volume de Γ_n dans ces boules :

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{B}_n(y, \varepsilon/2) \cap \Gamma_n) \geqslant c.$$

D'où l'on déduit que

$$\frac{1}{n} \log(\mathrm{Vol}(\Gamma_n)) \geqslant \frac{\log c}{n} + \frac{1}{n} \log(\max\{\mathrm{Card(F)}, \mathrm{F}\ (n, \varepsilon)\text{-séparé}\}),$$

ce qui donne la majoration souhaitée.

L'entropie topologique se localise naturellement : *l'entropie topologique de f relative à* $\mathrm{X} \subset \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ est

$$h_{\mathrm{top}}(f|\mathrm{X}) = \sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{n} \frac{1}{n} \log(\max\{\mathrm{Card(F)}, \mathrm{F}\ (n, \varepsilon)\text{-séparé},\ \mathrm{F} \subset \mathrm{X}\}).$$

L'argument de Gromov s'adapte à $h_{\mathrm{top}}(f|\mathrm{X})$: notons $\Gamma_n|\mathrm{X}$ la restriction de Γ_n à X. Si X est algébrique, alors $h_{\mathrm{top}}(f|\mathrm{X}) \leqslant \mathrm{lov}(f|\mathrm{X}) = \limsup_n n^{-1} \log(\mathrm{Vol}(\Gamma_n|\mathrm{X}))$. Dans le cas général, on a seulement

$$h_{\mathrm{top}}(f|\mathrm{X}) \leqslant \limsup_{n} \frac{1}{n} \log(\mathrm{Vol}((\Gamma_n|\mathrm{X})_\varepsilon)),$$

pour $\varepsilon > 0$ fixé, où $(\Gamma_n|\mathrm{X})_\varepsilon$ est le ε-voisinage de $\Gamma_n|\mathrm{X}$ dans Γ_n.

4.2. *Le Principe variationnel*

Ce principe relie entropie topologique et entropie métrique. Soit ν une mesure ergodique pour f. Nous définissons *l'entropie métrique* $h_\nu(f)$ à partir du théorème de Michael Brin et Anatole Katok (*voir* [3]) évaluant la décroissance des masses des boules dynamiques : pour ν presque tout x,

$$h_\nu(f) = \sup_{\varepsilon > 0} \liminf_{n} -\frac{1}{n} \log(\nu(\mathrm{B}_n(x, \varepsilon))).$$

Le Principe variationnel affirme alors (*voir* [10], p. 179) que

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \sup\{h_\nu(f),\ \nu \text{ ergodique}\}$$

et le supremum peut être pris sur toutes les mesures de probabilité invariantes, puisque l'entropie métrique dépend de manière affine de la mesure. En voici une version relative (*voir* [12], lemme 7.1), conséquence du théorème de Brin et Katok :

Principe variationnel relatif : soit X *un borélien tel que* $\nu(\mathrm{X}) > 0$. *Alors* $h_\nu(f) \leqslant h_{\mathrm{top}}(f|\mathrm{X})$.

Le Principe variationnel pose la question, centrale en théorie ergodique, de l'existence et l'unicité d'une mesure d'entropie maximale, *i.e.* vérifiant $h_\nu(f) = h_{\mathrm{top}}(f)$. Dans notre cas, la mesure d'équilibre μ en est une car elle est de jacobien constant d^k, *i.e.* pour tout borélien B sur lequel f est injective, on a

$$\mu(\mathrm{B}) = d^{-k}\mu(f(\mathrm{B})).$$

Il suffit en effet, par le théorème de Brin et Katok, d'expliciter, pour $\alpha > 0$, un borélien X_α de mesure non nulle, avec $\mu(\mathrm{B}_n(x,\varepsilon)) \leqslant d^{-kn(1-\alpha)}$ pour x dans X_α et n assez grand. Considérons pour cela un voisinage U de l'ensemble des valeurs critiques V assez petit pour que l'on ait $\mu(\mathrm{U}) \leqslant \alpha/2$. Soit X_α l'ensemble des points dont la n-orbite visite au plus $n\alpha$ fois U pour n assez grand. D'après le théorème de Birkhoff, X_α est de mesure non nulle. La masse des boules dynamiques centrées sur X_α s'estime inductivement grâce à la propriété de jacobien constant de μ : soient $x \in \mathrm{X}_\alpha$ et ε assez petit. Si $f^{q+1}(x)$ est hors de U, f réalise une injection de $\mathrm{B}_{n-q}(f^q(x),\varepsilon)$ dans $\mathrm{B}_{n-q-1}(f^{q+1}(x),\varepsilon)$, donc $\mu(\mathrm{B}_{n-q}(f^q(x),\varepsilon)) \leqslant d^{-k}\mu(\mathrm{B}_{n-q-1}(f^{q+1}(x),\varepsilon))$, et sinon, on a toujours $\mu(\mathrm{B}_{n-q}(f^q(x),\varepsilon)) \leqslant \mu(\mathrm{B}_{n-q-1}(f^{q+1}(x),\varepsilon))$ par invariance de μ, ce qui permet de conclure.

5. Unicité de la mesure d'entropie maximale

Dans ce paragraphe, nous prouvons le

Théorème **2.** — *La mesure* μ *est l'unique mesure d'entropie maximale de* f.

Démonstration. — Il suffit de le montrer pour les mesures ergodiques. Supposons donc qu'il existe une mesure ergodique $\nu \neq \mu$ d'entropie maximale $k\log d$. Tout d'abord, remarquons que ν ne charge pas l'ensemble des valeurs critiques V. Sinon, d'après le paragraphe 4, on aurait $k\log d \leqslant h_{\mathrm{top}}(f|\mathrm{V}) \leqslant \mathrm{lov}(f|\mathrm{V})$. Or

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_n|\mathrm{V}) = \int_{\Gamma_n|\mathrm{V}} \omega_n^{k-1} = \sum_{\underline{i}\in\{0,\,\dots,\,n-1\}^{k-1}} \int_{\mathrm{V}} f^{i_1*}\omega \wedge \cdots \wedge f^{i_{k-1}*}\omega,$$

par définition de ω_n, et il s'ensuit, si τ est le degré de V, que

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\Gamma_n|\mathrm{V}) &= \tau \sum_{\underline{i}\in\{0,\dots,n-1\}^{k-1}} d^{i_1+\dots+i_{k-1}}\\ &\leqslant \tau n^{k-1} d^{(k-1)n},\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{lov}(f|\mathrm{V}) \leqslant (k-1)\log d$, ce qui est contradictoire. En particulier ν ne charge pas l'ensemble exceptionnel E et donc, d'après le théorème 1, n'est pas point fixe de l'opérateur $d^{-k}f^*$, *i.e.* n'est pas de jacobien constant d^k. On peut alors construire un ouvert U simplement connexe (mais non connexe) évitant V avec $\nu(\mathrm{U}) = \mathrm{Vol}(\mathrm{U}) = 1$ sur lequel les branches inverses de f ne distribuent pas équitablement ν. Plus précisément, choisissons W_m une suite décroissante de voisinages de V, à bords lisses et non chargés par ν, avec $\mathrm{W}_0 = \mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ et $\bigcap_m \mathrm{W}_m = \mathrm{V}$. On triangule ensuite chaque variété à bord $\overline{\mathrm{W}_m} - \mathrm{W}_{m+1}$ en un nombre fini de simplexes à bords de mesure nulle pour ν. L'ouvert U est simplement la réunion de ces simplexes. La préimage de chaque simplexe S est une union disjointe de d^k composantes $\mathrm{S}_1, \dots, \mathrm{S}_{d^k}$, que l'on indexe par $\nu(\mathrm{S}_1) \geqslant \cdots \geqslant \nu(\mathrm{S}_{d^k})$. On a ainsi $f^{-1}(\mathrm{U}) = \mathrm{U}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{U}_{d^k}$ avec $\mathrm{U}_j = \bigcup_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_j$, et f bijective entre U_j et U. Comme ν est invariante mais pas de jacobien constant d^k, on peut supposer, quitte à prendre des triangulations assez fines, que $\nu(\mathrm{U}_1) > d^{-k}$.

Soient alors σ tel que $\nu(\mathrm{U}_1) > \sigma > d^{-k}$ et O un ouvert légèrement plus petit que U_1 avec encore $\nu(\mathrm{O}) > \sigma$. On se fixe également $\varepsilon > 0$ assez petit pour que le ε-voisinage de O soit encore inclus dans U_1. Suivant Ljubich, la contradiction va venir du borélien X des points visitant assez souvent O :

$$\mathrm{X} = \{x \in \mathrm{P}^k(\mathbf{C}),\ r_n(x) \geqslant n\sigma \text{ pour } n \geqslant m\},$$

où $r_n(x) = \mathrm{Card}(\{q,\ 0 \leqslant q \leqslant n-1, f^q(x) \in \mathrm{O}\})$. Par le théorème de Birkhoff, on peut prendre m assez grand pour que $\nu(\mathrm{X}) > 0$. On a alors d'après le paragraphe 4 :

$$k \log d \leqslant h_{\mathrm{top}}(f|\mathrm{X}) \leqslant \limsup_n \frac{1}{n} \log(\mathrm{Vol}((\Gamma_n|\mathrm{X})_\varepsilon)).$$

On estime le volume de $(\Gamma_n|\mathrm{X})_\varepsilon$ par un codage. À un ensemble de volume nul près, $\{\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_{d^k}\}$ est une partition de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$, et elle en induit naturellement une sur Γ_n : pour $\alpha \in \{1, \dots, d^k\}^n$, on note

$$\Gamma_n(\alpha) = \Gamma_n \cap (\mathrm{U}_{\alpha_0} \times \cdots \times \mathrm{U}_{\alpha_{n-1}}).$$

Par définition de X, on a, à un ensemble de volume nul près, l'inclusion

$$(\Gamma_n|\mathrm{X})_\varepsilon \subset \bigcup_{\alpha\in\Sigma_n} \Gamma_n(\alpha),$$

où Σ_n consiste en les n-uplets de $\{1, ..., d^k\}$ contenant beaucoup de 1 :

$$\Sigma_n = \{ (\alpha \in \{1, ..., d^k\}^n, \mathrm{Card}(\{q, \alpha_q = 1\}) \geqslant n\sigma\}.$$

Remarquons que, par un lemme de dénombrement de Ljubich (lemme 7.2 de [12]), le cardinal de Σ_n croît moins vite que d^{kn} : pour n assez grand, $\mathrm{Card}(\Sigma_n) \leqslant (d^{k\rho})^n$ pour un certain $\rho < 1$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}((\Gamma_n|X)_\varepsilon) &\leqslant \sum_{\alpha \in \Sigma_n} \int_{\Gamma_n(\alpha)} \omega_n^k \\ &\leqslant \sum_{\underline{i} \in \{0, ..., n-1\}^k} \sum_{\alpha \in \Sigma_n} \int_{\pi(\Gamma_n(\alpha))} f^{i_1 *}\omega \wedge \cdots \wedge f^{i_k *}\omega,\end{aligned}$$

où π est la projection de $(\mathrm{P}^k(\mathbf{C}))^n$ sur le premier facteur. Cela suffit pour conclure en dimension $k = 1$. En effet,

$$\int_{\pi(\Gamma_n(\alpha))} f^{i*}\omega \leqslant \int_{\mathrm{P}^1(\mathbf{C})} \omega = 1,$$

puisque f^i est injective sur $\pi(\Gamma_n(\alpha))$, f l'étant sur chaque U_j. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Vol}((\Gamma_n|X)_\varepsilon) \leqslant n\mathrm{Card}(\Sigma_n) \leqslant n(d^\rho)^n,$$

d'où $\log d \leqslant h_{\mathrm{top}}(f|X) \leqslant \rho \log d$, ce qui est une contradiction.

En dimension supérieure, on doit raffiner cet argument. Soit λ tel que $\rho < \lambda < 1$. On scinde la somme sur les $\underline{i} \in \{0, ..., n-1\}^k$ en deux parties, l'une sur $\{[\lambda n], ..., n-1\}^k$ et l'autre sur le complémentaire. Posons $q = [\lambda n]$; pour $\underline{i} \in \{q, ..., n-1\}^k$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\pi(\Gamma_n(\alpha))} f^{i_1 *}\omega \wedge \cdots \wedge f^{i_k *}\omega &= \int_{\pi(\Gamma_n(\alpha))} f^{q*}\left(f^{i_1 - q *}\omega \wedge \cdots \wedge f^{i_k - q *}\omega\right) \\ &\leqslant \int_{\mathrm{P}^k(\mathbf{C})} f^{i_1 - q *}\omega \wedge \cdots \wedge f^{i_k - q *}\omega, \\ &\qquad \text{car } f^q \text{ injective sur } \pi(\Gamma_n(\alpha)) \\ &\leqslant d^{k(1-\lambda)n}.\end{aligned}$$

Donc la première somme est majorée par $n^k\mathrm{Card}(\Sigma_n)d^{k(1-\lambda)n}$, soit $n^k(d^{k(1+\rho-\lambda)})^n$. Quant à la deuxième, on l'estime globalement, car les $\pi(\Gamma_n(\alpha))$ forment une partition de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$, par :

$$\sum_{\underline{i} \in \{0, ..., n-1\}^k - \{q, ..., n-1\}^k} \int_{\mathrm{P}^k(\mathbf{C})} f^{i_1 *}\omega \wedge \cdots \wedge f^{i_k *}\omega \leqslant n^k(d^{k-1+\lambda})^n,$$

puisque $i_1 + \cdots + i_k \leqslant (k - 1 + \lambda)n$ dans ce cas. Au total, on obtient

$$k \log d \leqslant h_{\mathrm{top}}(f|X) \leqslant \max(k(1 + \rho - \lambda), k - 1 + \lambda) \log d < k \log d,$$

si l'on prend $\rho < \lambda < 1$, ce qui est la contradiction recherchée et termine la preuve du théorème 2.

Appendice : un lemme de comparaison aire-diamètre

Nous présentons ce lemme dans $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$, bien qu'il soit valable dans un cadre plus général :

Lemme. — Il existe $c > 0$ *tel que, pour toute paire de disques holomorphes* $\mathrm{D} \subset \widetilde{\mathrm{D}}$ *dans* $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$*, on ait*

$$(\mathrm{Diam}(\mathrm{D}))^2 \leqslant c\frac{\mathrm{Aire}(\widetilde{\mathrm{D}})}{\min\{1, \mathrm{Mod}(\mathrm{A})\}},$$

où A *désigne l'anneau* $\widetilde{\mathrm{D}} - \mathrm{D}$.

Démonstration. — Posons $\mathrm{Aire}(\widetilde{\mathrm{D}})/\min\{1, \mathrm{Mod}(\mathrm{A})\} = r^2$. En jouant sur c, on peut supposer r petit. Exprimons le module de A comme longueur extrémale :

$$\frac{1}{\mathrm{Mod}(\mathrm{A})} = \sup\{\frac{1}{\mathrm{Aire}_h(\mathrm{A})}\inf\{(\mathrm{Long}_h(\gamma))^2, \gamma \text{ essentielle dans A}\}, \\ \text{pour } h \text{ métrique conforme sur A}\}.$$

On trouve donc dans $\widetilde{\mathrm{D}}$ une courbe γ entourant D et courte pour la métrique de Fubini-Study :

$$(\mathrm{Long}(\gamma))^2 \leqslant \frac{\mathrm{Aire}(\widetilde{\mathrm{D}})}{\mathrm{Mod}(\mathrm{A})} \leqslant r^2.$$

Estimons maintenant le diamètre du disque D_γ bordé par γ dans $\widetilde{\mathrm{D}}$, et *a fortiori* donc celui de D. L'ingrédient pour cela est encore le théorème de Lelong [11] minorant par π l'aire d'une courbe holomorphe passant par 0 dans la boule unité de $\mathbf{C}^n$. En le localisant, on a le

Fait. — Il existe $\rho > 0$ tel que, pour toute boule $\mathrm{B}(x, r)$ de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ de rayon $r \leqslant \rho$, et toute courbe holomorphe C sans bord dans $\mathrm{B}(x, r)$ passant par x, on ait $\mathrm{Aire}(\mathrm{C}) \geqslant 2r^2$.

Ceci entraîne $\mathrm{Diam}(\mathrm{D}_\gamma) \leqslant 3r$ pour $r \leqslant \rho$, ce qui suffit pour conclure. En effet, sinon, on trouverait x dans D_γ à distance au moins r de $\partial\mathrm{D}_\gamma = \gamma$, puisque $\mathrm{Long}(\gamma) \leqslant r$. Donc $\mathrm{C} = \mathrm{D}_\gamma \cap \mathrm{B}(x, r)$ serait une courbe holomorphe (sans bord) dans $\mathrm{B}(x, r)$ passant par x. Ainsi on aurait

$$r^2 \geqslant \mathrm{Aire}(\widetilde{\mathrm{D}}) \geqslant \mathrm{Aire}(\mathrm{C}) \geqslant 2r^2,$$

ce qui est une contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Bedford, M. Ljubich, J. Smillie, Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$, IV : The measure of maximal entropy and laminar currents, *Invent. Math.* **112** (1993), 77-125.

[2] J.-Y. Briend, J. Duval, Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbf{CP}^k$, *Acta Math.* **182** (1999), 143-157.

[3] M. Brin, A. Katok, On local entropy, in *Geometric dynamics, Lect. Notes in Math.* **1007**, Springer Verlag (1983), 30-38.

[4] D. Cerveau, A. Lins Neto, Hypersurfaces exceptionnelles des endomorphismes de $\mathbf{C}\mathrm{P}^n$, *Bol. Soc. Brasil. Mat.,* **31** (2000), 155-161.

[5] J. E. Fornæss, N. Sibony, Complex dynamics in higher dimension, in *Complex potential theory,* P. M. Gauthier and G. Sabidussi ed., Kluwer Acad. Press (1994), 131-186.

[6] A. Freire, A. Lopes, R. Mañé, An invariant measure for rational maps, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **14** (1983), 45-62.

[7] M. Gromov, On the entropy of holomorphic maps, *manuscrit,* 1977.

[8] J. H. Hubbard, P. Papadopol, Superattractive fixed points in $\mathbf{C}^n$, *Indiana Univ. Math. J.* **43** (1994), 321-365.

[9] M. Jonsson, Ergodic properties of fibered rational maps, *Ark. Mat.* **38** (2000), 281-317.

[10] A. Katok, B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, *Encycl. of Math. and its Appl.* **54** (1995), Cambridge Univ. Press.

[11] P. Lelong, Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **67** (1950), 393-419.

[12] M. Ju. Ljubich, Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere, *Ergodic Theory Dynamical Systems* **3** (1983), 351-385.

[13] R. Mañé, On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **14** (1983), 27-43.

[14] W. Parry, *Entropy and generators in ergodic theory,* Benjamin Press, 1969.

[15] N. Sibony, Dynamique des applications rationnelles de $\mathbf{P}^k$, in *Dynamique et géométrie complexe (Lyon 1997), Panor. Synthèses* **8,** Soc. Math. France (1999), 97-185.

J.-Y. B.
Université de Provence
Laboratoire Analyse, Topologie et Probabilités
CNRS UMR 6632, CMI
39, rue F.-Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13, France.
E-mail : briend@gyptis.univ-mrs.fr

J. D.
Université Paul-Sabatier
Laboratoire Émile Picard/CNRS UMR 5580
118, route de Narbonne
31062 Toulouse cedex 4, France.
E-mail : duval@picard.ups-tlse.fr

Manuscrit reçu le 30 novembre 2000.