PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

JEAN LANNES

Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un *p*-groupe abélien élémentaire

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 75 (1992), p. 135-244

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1992__75__135_0>

SUR LES ESPACES FONCTIONNELS DONT LA SOURCE EST LE CLASSIFIANT D'UN p-GROUPE ABÉLIEN ÉLÉMENTAIRE

par JEAN LANNES

0. Introduction

Soient p un nombre premier fixé, V un p-groupe abélien élémentaire (*i.e.* un groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}/p)^d$ pour un certain entier d), BV son classifiant, et Y un espace. Notre article traite de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y})$ (*i.e.* l'espace des applications de BV dans Y).

Une généralisation de cette notion est celle de l'espace des points fixes homotopiques de l'action de V sur un espace X, c'est-à-dire l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}_{\mathrm{V}}(\mathrm{EV}, \mathrm{X})$ des applications V-équivariantes de EV dans X, EV désignant, comme à l'ordinaire, le revêtement universel de BV ($\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y})$ est donc l'espace des points fixes homotopiques de l'action triviale de V sur Y). En fait, comme $\mathbf{hom}_{\mathrm{V}}(\mathrm{EV}, \mathrm{X})$ est la fibre en l'identité de l'application $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{EV} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{X}) \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{BV})$ l'analyse des points fixes homotopiques d'une action quelconque peut se ramener à celle d'une action triviale.

Pour montrer que le sujet est moins étroit qu'il n'y paraît, citons quelques travaux qui lui sont reliés :

1) A partir du cas $\mathrm{V} = \mathbf{Z}/p$ on peut obtenir par récurrence des informations sur l'espace des points fixes homotopiques d'une action d'un p-groupe fini π et étudier ainsi certains espaces $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \mathrm{Y})$ [DZ].

2) Soit G un groupe de Lie compact; en faisant apparaître le p-complété de BG comme limite directe homotopique d'un diagramme de classifiants de p-groupes finis, on peut étudier plus généralement certains espaces fonctionnels dont la source est BG [JMO].

3) La théorie des espaces $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y})$ est l'un des ingrédients qui interviennent pour montrer que le type d'homotopie du p-complété du classifiant de certains groupes de Lie compact est uniquement déterminé par sa cohomologie modulo p [DMW1] [DMW2].

Venons-en maintenant à la question essentielle :

Pourquoi peut-on dire des choses raisonnables sur les espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y})$, alors que l'on sait si peu, par exemple, sur les espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(\mathrm{S}^n, \mathrm{Y})$?

Cela tient aux propriétés de la cohomologie modulo p de l'espace BV, à la fois comme module et algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod modulo p, qui en font ce qu'on pourrait appeler un co-espace d'Eilenberg-Mac Lane.

Pour exprimer ces propriétés, il nous faut introduire les analogues du bifoncteur $\mathbf{hom}(\ ,\ )$ dans les catégories des modules et algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p. On note :

— A l'algèbre de Steenrod modulo p;
— $\mathscr{U}$ la catégorie des A-modules instables (pour $p = 2$, un A-module M est instable si $\mathrm{S}q^i x = 0$ quand i est strictement plus grand que le degré de x, x parcourant M);
— $\mathscr{K}$ la catégorie des A-algèbres instables (la cohomologie modulo p d'un espace Y, notée $\mathrm{H}^* \mathrm{Y}$, est l'exemple type d'une telle algèbre).

Soit X un espace, on définit le foncteur $\mathrm{Y} \mapsto \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ comme l'adjoint à droite du foncteur $\mathrm{Z} \mapsto \mathrm{X} \times \mathrm{Z}$. Il n'est pas difficile de calquer cette définition dans les catégories $\mathscr{U}$ et $\mathscr{K}$. Soient $\mathscr{C}$ l'une de ces deux catégories et K un objet de $\mathscr{C}$ que l'on suppose de dimension finie en chaque degré, on montre que le foncteur $\mathscr{C} \to \mathscr{C}$, $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{K} \otimes \mathrm{N}$ admet un adjoint à gauche que l'on note $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathscr{C}}$.

Supposons $\mathrm{H}^* \mathrm{X}$ de dimension finie en chaque degré, nous avons tout fait pour avoir un $\mathscr{K}$-morphisme naturel :

$$(\mathrm{H}^* \mathrm{Y} : \mathrm{H}^* \mathrm{X})_{\mathscr{K}} \to \mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

Un des résultats de cet article est que ce $\mathscr{K}$-morphisme est « très souvent » un isomorphisme pour $\mathrm{X} = \mathrm{BV}$.

Revenons à la cohomologie modulo p des p-groupes abéliens élémentaires. Considérons tout d'abord le cas $\mathrm{V} = \mathbf{Z}/p$; on pose $\mathrm{H} = \mathrm{H}^* \mathbf{Z}/p = \mathrm{H}^* \mathrm{B}\mathbf{Z}/p$ et l'on note T le foncteur $\mathscr{U} \to \mathscr{U}$, $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M} : \mathrm{H})_{\mathscr{U}}$. Les propriétés de H qui nous intéressent peuvent s'exprimer de la façon suivante :

Théorème **0.1.** — *a) Le foncteur* T *est exact.*

b) Le foncteur T *commute aux produits tensoriels.*

c) Si M *est une* A-*algèbre instable, alors* TM *possède une structure naturelle de* A-*algèbre instable et* TM *munie de cette structure coïncide avec* $(\mathrm{M} : \mathrm{H})_{\mathscr{K}}$.

Le point *a)* concerne la structure de A-module instable de H. C'est une généralisation des résultats de G. Carlsson et H. R. Miller [Ca1] [Mi1] [LZ1] qui montrent que H est un injectif de $\mathscr{U}$ ($\mathscr{U}$-injectif) et une reformulation du théorème suivant dû à S. Zarati et l'auteur [LZ1] :

Théorème **0.2.** — *Soit* I *un* $\mathscr{U}$-*injectif, alors le produit tensoriel* $\mathrm{H} \otimes \mathrm{I}$ *est encore* $\mathscr{U}$-*injectif.*

Les points *b)* et *c)* concernent la structure de A-algèbre instable de H, *c)* est essentiellement une conséquence de *b)*. Leurs formulations précises sont les suivantes :

b bis) Pour tous A-modules instables M_1 et M_2, l'application naturelle

$$\mu_{M_1,M_2} : T(M_1 \otimes M_2) \to TM_1 \otimes TM_2,$$

induite par le produit de H est un isomorphisme.

c bis) Soit M une A-algèbre instable dont on note $\varphi : M \otimes M \to M$ le produit. La composée $(T\varphi) \circ ((\mu_{M,M})^{-1}) : TM \otimes TM \to TM$ fait de TM une A-algèbre instable. Le foncteur $T : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ induit donc un foncteur $\mathscr{K} \to \mathscr{K}$ que l'on note encore T. Ce foncteur coïncide avec $(: H)_{\mathscr{K}}$.

Le passage du groupe $\mathbf{Z}/p$ à un p-groupe abélien élémentaire général V est immédiat. On pose $H^* V = H^* BV$ et l'on note T_V le foncteur $\mathscr{U} \to \mathscr{U}$, $M \mapsto (M : H^* V)_{\mathscr{U}}$. Comme $H^* V$ est isomorphe au produit tensoriel $H \otimes H \otimes \ldots \otimes H$, d fois, le foncteur T_V est équivalent au composé $T \circ T \circ \ldots \circ T$, d fois, et l'on peut dans le théorème 0.1 remplacer T par T_V.

Corollaire **0.3.** — *a) Le foncteur* T_V *est exact.*

b) Le foncteur T_V *commute aux produits tensoriels.*

c) Si M *est une* A-*algèbre instable, alors* T_V M *possède une structure naturelle de* A-*algèbre instable et* T_V M *munie de cette structure coïncide avec* $(M : H^* V)_{\mathscr{K}}$.

Les propriétés des A-algèbres instables $H^* V$ que l'on traduit ainsi sont tout à fait exceptionnelles, en fait elles les caractérisent à isomorphisme près.

Il reste à tirer parti de ces propriétés « magiques » de $H^* V$ pour obtenir des informations sur l'espace fonctionnel **hom**(BV, Y). On utilise pour cela les méthodes cosimpliciales élaborées par A. K. Bousfield et D. M. Kan [BK1] [BK2] [Bou2] [Bou3] dont l'efficacité a été mise en évidence par le travail fondamental de H. R. Miller concernant le cas où Y est un CW-complexe fini [Mil]. On considère en fait l'espace fonctionnel **hom**(BV, $\hat{Y}$), $\hat{Y}$ désignant le p-complété de Bousfield-Kan de l'espace Y. Ceci suffit à notre bonheur dans le cas où Y est nilpotent puisqu'on peut alors « reconstituer » l'espace fonctionnel **hom**(BV, Y) à partir du carré fibré homotopique :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{hom}(BV, Y) & \longrightarrow & \mathbf{hom}(BV, \hat{Y}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \hat{Y}. \end{array}$$

Par définition $\hat{Y}$ est l' « espace total » d'un espace cosimplicial, à savoir la $\mathbf{F}_p$-résolution cosimpliciale canonique de Y, que nous notons $\text{Rés}^\bullet Y$. Du coup **hom**(BV, $\hat{Y}$) apparaît comme l'espace total de l'espace cosimplicial **hom**(BV, $\text{Rés}^\bullet Y$) obtenu en appliquant le foncteur **hom**(BV, —) à cette résolution. La raison pour laquelle l'espace **hom**(BV, $\hat{Y}$) nous est intelligible peut être grossièrement présentée de la façon suivante :

Les propriétés *c)* et *a)* du foncteur T_V énoncées dans le corollaire 0.3 ci-dessus font que l'espace cosimplicial **hom**(BV, $\text{Rés}^\bullet Y$) se comporte, sous certaines hypothèses, comme une résolution cosimpliciale (non canonique, mais qu'importe) d'un espace dont la cohomologie modulo p serait $T_V H^* Y$. Aussi la théorie du foncteur $Y \mapsto \mathbf{hom}(BV, \hat{Y})$ est-elle à bien des égards une généralisation de celle du foncteur $Y \mapsto \hat{Y}$ (faire $V = 0$!).

Nous obtenons notamment :

Théorème **0.4.** — *Pour tout espace simplement connexe* Y *dont la cohomologie modulo* p *est de dimension finie en chaque degré, l'application naturelle*

$$[BV, Y] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^* Y, H^* BV),$$

$[BV, Y]$ *désignant l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de* BV *dans* Y *est une bijection.*

Le résultat ci-dessus avait été conjecturé par Miller [Mi3] qui l'avait démontré pour $H^* Y$ *very nice*. Zarati et l'auteur l'avaient ensuite établi pour Y un espace de lacets infinis.

Théorème **0.5.** — *Soient* Y *et* Z *deux espaces et* ω *une application* $BV \times Z \to Y$. *On suppose que* $H^* Y$ *et* $H^* Z$ *ou* $T_V H^* Y$ *sont de dimension finie en chaque degré. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'homomorphisme de* A*-algèbres instables* $T_V H^* Y \to H^* Z$, *adjoint de*

$$\omega^* : H^* Y \to H^* V \otimes H^* Z,$$

est un isomorphisme ;

(ii) *l'application* $\hat{Z} \to \mathbf{hom}(BV, \hat{Y})$ *induite par* ω *est une équivalence d'homotopie.*

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) du théorème 0.5 fournit en particulier une solution de la forme générale de la conjecture de Sullivan (H. R. Miller, G. Carlsson).

Théorème **0.6.** — *Soit* Y *un espace dont la cohomologie modulo* p *est de dimension finie en chaque degré. Si* $T_V H^* Y$ *est de dimension finie en chaque degré et nulle en degré un, alors l'application naturelle*

$$T_V H^* Y \to H^* \mathbf{hom}(BV, \hat{Y})$$

est un isomorphisme de A*-algèbres instables (l'existence de l'application naturelle ci-dessus résulte par exemple de celle d'une application naturelle* $H^* Y \to H^* \hat{Y}$).

Voici le plan de l'article :

Chapitre 1 : Considérations générales sur les espaces fonctionnels dont le but est un p-complété.

Le déroulement de ce chapitre est sans surprise. Les seules notions nouvelles que l'on y trouve sont peut-être celles d'objets fonctionnels dans les catégories $\mathscr{U}$, $\mathscr{K}$, et leurs analogues « homologiques » (voir aussi [Bou3]). On pourra en première lecture se limiter au dernier paragraphe.

Chapitre 2 : Propriétés de la cohomologie modulo p des p-groupes abéliens élémentaires.

Chapitre 3 : Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire et dont le but est un p-complété.

Ces chapitres 2 et 3 forment le cœur de l'article.

Chapitre 4 : Sur l'espace des points fixes homotopiques d'une action d'un p-groupe abélien élémentaire.

On traduit dans ce chapitre les énoncés du chapitre 3 en énoncés concernant les espaces de points fixes homotopiques. On traduit au passage les énoncés algébriques du chapitre 2 en énoncés « équivariants ».

On trouve ensuite quatre appendices qui traitent respectivement

— d'un analogue pour les A-algèbres instables des théorèmes de Hurewicz et de Whitehead;
— du cas particulier de la théorie d'obstructions de A. K. Bousfield dont on a besoin pour établir un énoncé du type 0.4;
— de la fibre homotopique d'une application obtenue en appliquant le foncteur espace total à une application cosimpliciale (l'appendice correspondant est dû à M. Zisman);
— d'une démonstration d'un résultat de Serre concernant les idéaux de $H^* V$ invariants par l'algèbre de Steenrod à l'aide de la caractérisation des A-modules instables « nilpotents » donnée dans [LSc1].

Signalons enfin qu'une partie des résultats de cet article est annoncée dans [La1] où leur démonstration est esquissée.

Remerciements. — Je tiens à remercier A. K. Bousfield à qui je dois entre autres une démonstration correcte du théorème 0.6, W. G. Dwyer dont les questions judicieuses m'ont permis d'améliorer l'énoncé 0.5, L. Schwartz et S. Zarati avec qui j'ai collaboré sur des sujets connexes, et M. Zisman qui a bien voulu jouer le rôle de « consultant simplicial » et fournir l'appendice C. J'ai bénéficié au cours de ce travail de l'hospitalité de diverses institutions, notamment l'Université de Chicago, l'Université Johns Hopkins, le SFB de Göttingen, le FSP Geometrie de Heidelberg, et tout particulièrement du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique dont les structures ont permis à cette recherche de s'épanouir.

Chapitre 1

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES ESPACES FONCTIONNELS DONT LE BUT EST UN p-COMPLÉTÉ

On présente dans ce chapitre des considérations générales sur les espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(X, \hat{Y})$ dont le but est le p-complété de Bousfield-Kan d'un espace Y. La spécialisation au cas où X est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire, que l'on a évidemment en vue, aura lieu au chapitre 3. Ces considérations sont l'occasion de fixer notations et conventions et de rappeler un certain nombre de définitions. Une bonne partie de ces définitions sont extraites de [BK1] et [BK2].

1.1. Objets simpliciaux et cosimpliciaux

On note $\mathscr{E}ns$ la catégorie des ensembles et Δ *la catégorie simpliciale.* Rappelons que Δ est la sous-catégorie de $\mathscr{E}ns$ dont les objets sont les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$, n parcourant $\mathbf{N}$, et les morphismes les applications croissantes (au sens large).

Un objet simplicial (resp. *cosimplicial*) *sur une catégorie* $\mathscr{C}$ est un foncteur de Δ^{op} (resp. Δ) dans la catégorie $\mathscr{C}$ ($(\text{-})^{\mathrm{op}}$ désigne *l'opposée* d'une catégorie). En d'autres termes, un tel foncteur est la donnée d'une suite $\{C_n\}_{n \in \mathbf{N}}$(resp. $\{C^n\}_{n \in \mathbf{N}}$) d'objets de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}$-morphismes $d_i, s_i : C_{n \pm 1} \to C_n$ appelés *faces* et *dégénérescences* (resp. $d^i, s^i : C^n \to C^{n \pm 1}$ appelés *cofaces* et *codégénérescences*) satisfaisant aux identités simpliciales (resp. cosimpliciales) usuelles. Cette donnée sera notée $C_\bullet$ (resp. $C^\bullet$) et la catégorie des $\mathscr{C}$-objets simpliciaux $\mathscr{C}_\bullet$ (resp. $\mathscr{C}^\bullet$). Nous noterons $c_\bullet : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_\bullet$ le foncteur « *objet simplicial constant* » qui associe à un objet C l'objet simplicial $C_\bullet$ défini par $C_n = C$ et $d_i = 1_C$, $s_i = 1_C$. On définit de même le foncteur « *objet cosimplicial constant* » que nous noterons $c^\bullet : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^\bullet$.

Nous ferons les exceptions suivantes aux conventions de terminologie et notation ci-dessus :

— on dira le plus souvent *espace* plutôt qu'*ensemble simplicial* (suivant en cela l'usage courant);

— *la catégorie des ensembles simpliciaux* sera notée $\mathscr{S}$ plutôt que $\mathscr{E}ns_\bullet$;

— un ensemble simplicial $\{X_n, d_i, s_i\}$ sera en général noté X plutôt que $X_\bullet$ (rappelons que X_n est appelé *l'ensemble des n-simplexes* de X).

On pose $\mathrm{Hom}_\Delta([m],[n]) = \Delta^n_m$. Le foncteur $[m] \mapsto \Delta^n_m$, n fixé, est un ensemble simplicial que l'on note Δ^n; le foncteur $[n] \mapsto \Delta^n$ est un ensemble simplicial cosimplicial, ou encore un espace cosimplicial, que l'on note $\Delta^\bullet$.

Rappelons que l'on appelle *q-squelette* d'un ensemble simplicial X le sous-ensemble simplicial engendré par les q-simplexes (voir par exemple [GZ]); nous le noterons $\mathrm{Sk}^q\,\mathrm{X}$. Le foncteur $[n] \mapsto \mathrm{Sk}^q\,\Delta^n$ est un espace cosimplicial que nous noterons $\mathrm{Sk}^q\,\Delta^\bullet$.

Homotopie (resp. cohomotopie) d'un objet simplicial (resp. cosimplicial) sur une catégorie abélienne.

Soient $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne et $\mathrm{C}_\bullet$ un objet simplicial sur $\mathscr{C}$. Soit n un entier, on définit simplement le n-ième objet d'homotopie de $\mathrm{C}_\bullet$ comme le n-ième objet d'homologie du $\mathscr{C}$-complexe de chaînes associé; on le note $\pi^n\,\mathrm{C}_\bullet$. On définit dualement le n-ième objet de cohomotopie $\pi^n\,\mathrm{C}^\bullet$ d'un objet cosimplicial sur $\mathscr{C}$.

1.2. L'espace total d'un espace cosimplicial [BK1]

On note $\mathrm{Tot} : \mathscr{S}^\bullet \to \mathscr{S}$ l'adjoint à droite du foncteur $\mathscr{S} \to \mathscr{S}^\bullet$, $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X} \times \Delta^\bullet$ ($\mathrm{X} \times \Delta^\bullet$ désigne l'espace cosimplicial $[n] \mapsto \mathrm{X} \times \Delta^n$). On a donc pour tout espace cosimplicial $\mathrm{Y}^\bullet$ une bijection fonctorielle en X :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}^\bullet}(\mathrm{X} \times \Delta^\bullet, \mathrm{Y}^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Tot}\,\mathrm{Y}^\bullet).$$

L'espace $\mathrm{Tot}\,\mathrm{Y}^\bullet$ s'appelle *l'espace total* de l'espace cosimplicial $\mathrm{Y}^\bullet$; $\mathrm{Tot}\,\mathrm{Y}^\bullet$ n'est rien d'autre que le foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathscr{E}ns$, $[n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}^\bullet}(\Delta^n \times \Delta^\bullet, \mathrm{Y}^\bullet)$. Bousfield et Kan montrent dans [BK1] qu'il faut voir $\mathrm{Tot}\,\mathrm{Y}^\bullet$ comme une limite inverse homotopique : $\mathrm{Tot}\,\mathrm{Y}^\bullet \simeq \mathrm{holim}_\Delta\,\mathrm{Y}^\bullet$ (ici $\mathrm{Y}^\bullet$ est supposé « fibrant »).

Soient s un entier et $\mathrm{Tot}_s : \mathscr{S}^\bullet \to \mathscr{S}$ l'adjoint à droite du foncteur $\mathscr{S} \to \mathscr{S}^\bullet$, $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X} \times \mathrm{Sk}^s\,\Delta^\bullet$. D'après sa définition même, l'espace $\mathrm{Tot}\,\mathrm{Y}^\bullet$ est la limite inverse des espaces $\mathrm{Tot}_s\,\mathrm{Y}^\bullet$.

1.3. Variations sur la notion de composante connexe (I)

1.3.1. Soit Y un espace; on note $\pi_0\,\mathrm{Y}$ l'ensemble coégalisateur des applications d_0 et $d_1 : \mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}_0$. On peut voir le foncteur $\pi_0 : \mathscr{S} \to \mathscr{E}ns$ comme l'adjoint à gauche du foncteur « ensemble simplicial constant » $\mathscr{E}ns \to \mathscr{S}$. Si Y est fibrant, $\pi_0\,\mathrm{Y}$ est bien l'ensemble des composantes connexes par arcs de Y; on dira dans tous les cas qu'un point de $\pi_0\,\mathrm{Y}$ est une *composante connexe* de Y. Plus généralement on définira *l'ensemble des classes d'homotopie d'applications d'un espace* X *dans* Y, que l'on notera [X, Y], comme le π_0 de l'espace fonctionnel **hom**(X, Y) (voir 1.6), que Y soit fibrant ou pas.

Soit S un sous-ensemble de $\pi_0\,\mathrm{Y}$, on désigne par Y_S le sous-espace de Y (que l'on peut de façon pédante appeler *le localisé de* Y *en* S) image inverse de S par l'application naturelle $\mathrm{Y} \to \pi_0\,\mathrm{Y}$.

1.3.2. Dualement, soit $E^\bullet$ un ensemble cosimplicial; on note $\pi^0 E^\bullet$ l'ensemble égalisateur des applications $d^0, d^1 : E^0 \to E^1$. Cette fois π^0 est l'adjoint à droite du foncteur ensemble cosimplicial constant. En d'autres termes, $\pi^0 E^\bullet = \lim_\Delta E^\bullet$.

Signalons au passage que nous adoptons dans cet article la notation de [McL] : lim pour limite inverse et colim pour limite directe.

Remarquons également que l'application naturelle $c^\bullet(\pi^0 E^\bullet) \to E^\bullet$ est injective en chaque codegré. En effet, il existe une application tout aussi naturelle $E^\bullet \to c^\bullet(E^0)$ telle que la composée $c^\bullet(\pi^0 E^\bullet) \to E^\bullet \to c^\bullet(E^0)$ est $c^\bullet(\pi^0 E^\bullet \hookrightarrow E^0)$.

1.3.3. *Information « primaire » sur le π_0 de l'espace total d'un espace cosimplicial.*

Soit maintenant $Y^\bullet$ un espace cosimplicial; $\pi_0 Y^\bullet$ est un ensemble cosimplicial, si bien que l'on peut considérer l'ensemble $\pi^0 \pi_0 Y^\bullet$. On a tout fait pour que l'application d'adjonction $(\mathrm{Tot}\, Y^\bullet) \times \Delta^\bullet \to Y^\bullet$ induise une application que nous noterons e :

$$\pi_0 \,\mathrm{Tot}\, Y^\bullet \to \pi^0 \pi_0 Y^\bullet$$

(ou encore : $\pi_0 \operatorname{holim}_\Delta Y^\bullet \to \lim_\Delta \pi_0 Y^\bullet$ si $Y^\bullet$ est supposé fibrant).

1.3.4. Soit S un sous-ensemble de $\pi^0 \pi_0 Y^\bullet$; le foncteur $\Delta \to \mathscr{S}$, $[n] \mapsto (Y^n)_S$ (d'après la remarque faite à la fin de 1.3.2 on peut identifier S à un sous-ensemble de $\pi_0 Y^n$) est un espace cosimplicial que l'on note $(Y^\bullet)_S$ et que nous appellerons *le localisé de* $Y^\bullet$ *en* S. Alors qu'il est évident que tout espace Y coïncide avec $(Y)_{\pi_0 Y}$, il est à remarquer qu'en général les espaces cosimpliciaux $Y^\bullet$ et $(Y^\bullet)_{\pi^0 \pi_0 Y^\bullet}$ ne coïncident pas. Nous verrons un exemple de cette situation en 1.5.2. Toutefois, l'application naturelle $\mathrm{Tot}((Y^\bullet)_{\pi^0 \pi_0 Y^\bullet}) \to \mathrm{Tot}\, Y^\bullet$ est un homéomorphisme. Plus généralement, l'espace $\mathrm{Tot}((Y^\bullet)_S)$ s'identifie à l'image inverse de S par la composée

$$\mathrm{Tot}\, Y^\bullet \to \pi_0 \,\mathrm{Tot}\, Y^\bullet \xrightarrow{e} \pi^0 \pi_0 Y^\bullet.$$

L'espace $\mathrm{Tot}\, Y^\bullet$ est donc homéomorphe à la réunion disjointe des $\mathrm{Tot}((Y^\bullet)_\varphi)$, φ décrivant $\pi^0 \pi_0 Y^\bullet$ (on abrège la notation $(Y^\bullet)_{\{\varphi\}}$ en $(Y^\bullet)_\varphi$).

1.4. Information « primaire » sur l'homologie de l'espace total d'un espace cosimplicial

Dans cet article l'homologie que l'on considère est, sauf mention expresse du contraire, *l'homologie modulo p*, $H_*(-; \mathbf{F}_p)$, que l'on note simplement H_*.

Cette fois l'application d'adjonction $(\mathrm{Tot}\, Y^\bullet) \times \Delta^\bullet \to Y^\bullet$ induit une application que nous noterons encore e :

$$H_* \,\mathrm{Tot}\, Y^\bullet \to \pi^0 H_* Y^\bullet$$

(ou encore : $H_* \operatorname{holim}_\Delta Y^\bullet \to \lim_\Delta H_* Y^\bullet$ si $Y^\bullet$ est supposé fibrant).

Bien sûr $\pi^0 H_* Y^\bullet$ possède une structure plus riche que celle d'ensemble ou de $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel gradué; c'est une A-coalgèbre instable (la définition de cette structure est rappelée en 1.7.4) et l'application ci-dessus est un morphisme dans la catégorie correspondante.

1.5. La p-complétion de Bousfield-Kan

1.5.1. *Définition de la p-complétion de Bousfield-Kan.*

On note $\mathbf{F}_p[S]$ le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de base un ensemble S. Soit à présent Y un ensemble simplicial. Le foncteur $[n] \mapsto \mathbf{F}_p[Y_n]$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial que l'on note encore $\mathbf{F}_p[Y]$. Le foncteur $Y \mapsto \mathbf{F}_p[Y]$ est l'adjoint à gauche du foncteur oubli défini sur la catégorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels simpliciaux et à valeurs dans la catégorie des ensembles simpliciaux. Ceci définit une *monade* (voir [McL]) sur la catégorie $\mathcal{S}$ et permet d'associer à tout espace Y un espace cosimplicial qu'on appelle *la résolution cosimpliciale canonique* de Y et que nous noterons $\mathrm{Rés}^\bullet Y$.

On fera les observations suivantes :

— $\mathrm{Rés}^n Y$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial (obtenu en appliquant $(n+1)$-fois le foncteur $\mathbf{F}_p[-]$ à l'espace Y);
— toutes les cofaces et dégénérescences sont des morphismes dans la catégorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels simpliciaux à l'exception des d^0 qui ne sont que des $\mathcal{S}$-morphismes;
— l'application $\eta : Y \to \mathbf{F}_p[Y] = \mathrm{Rés}^0 Y$ induit une *coaugmentation* de l'espace cosimplicial $\mathrm{Rés}^\bullet Y$, c'est-à-dire un $\mathcal{S}^\bullet$-morphisme $c^\bullet Y \to \mathrm{Rés}^\bullet Y$;
— la suite de $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels gradués
$$0 \to H_* Y \to H_* \mathrm{Rés}^0 Y \to \ldots \to H_* \mathrm{Rés}^{n-1} Y \xrightarrow{\Sigma(-1)^i d^i} H_* \mathrm{Rés}^n Y \to \ldots$$
est exacte, en particulier η induit un isomorphisme $H_* Y \to \pi^0 H_* \mathrm{Rés}^\bullet Y$; ce point sera repris et précisé en 1.9.2.

Dans [BK1] Bousfield et Kan définissent le *p-complété* de l'espace Y comme l'espace total de $\mathrm{Rés}^\bullet Y$ (nous trichons un petit peu; pour plus de précisions, voir la fin de 1.5.2). Nous la noterons $\hat{Y}$ dans cet article :
$$\hat{Y} = \mathrm{Tot}\, \mathrm{Rés}^\bullet Y.$$

Nous noterons encore $\eta : Y \to \hat{Y}$ l'application induite par la coaugmentation $c^\bullet Y \to \mathrm{Rés}^\bullet Y$ (l'espace $\mathrm{Tot}\, c^\bullet Y$ s'identifie à Y).

1.5.2. *Sur* $\pi_0 \hat{Y}$.

On vérifie que la composée de $\pi_0(\eta) : \pi_0 Y \to \pi_0 \hat{Y}$ et de l'application
$$e : \pi_0 \hat{Y} \to \pi^0 \pi_0 \mathrm{Rés}^\bullet Y$$
introduite en 1.3.3 est une bijection (ce calcul sera généralisé en 1.12) si bien que e s'identifie à une application $\pi_0 \hat{Y} \to \pi_0 Y$ dont $\pi_0(\eta) : \pi_0 Y \to \pi_0 \hat{Y}$ est une inverse à

droite. En fait e et $\pi_0(\eta)$ sont des bijections : pour toute composante connexe φ de Y, l'espace $\mathrm{Tot}((\mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y})_\varphi)$ (voir 1.3.4, on considère ici φ comme un point de $\pi^0 \pi_0 \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}$) est non vide (ce qui est évident) et connexe (ce qui résulte par exemple de [BK1] X, 7.3 et du corollaire A.1.2 de l'appendice A), c'est-à-dire que les $\mathrm{Tot}((\mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y})_\varphi)$ sont les composantes connexes de $\hat{\mathrm{Y}}$ (qui, lui, est toujours fibrant [BK1] X, 4.9 et 5.1).

La résolution cosimpliciale canonique $\mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}$ est, comme on va le voir, un exemple d'espace cosimplicial $\mathrm{X}^\bullet$ qui diffère de $(\mathrm{X}^\bullet)_{\pi^0 \pi_0 \mathrm{X}^\bullet}$. On pose, pour abréger la notation, $\widetilde{\mathrm{Rés}}^\bullet \mathrm{Y} = (\mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y})_{\pi^0 \pi_0 \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}}$. On a, par exemple,

$$\pi_0 \widetilde{\mathrm{Rés}}^0 \mathrm{Y} = \pi_0 \mathrm{Y} \quad \text{et} \quad \pi_0 \mathrm{Rés}^0 \mathrm{Y} = \mathbf{F}_p[\pi_0 \mathrm{Y}].$$

Pour Y connexe $\widetilde{\mathrm{Rés}}^\bullet \mathrm{Y}$ est la $\mathbf{F}_p$-résolution « affine » considérée dans [BK1] I, 4.1. Soit $\mathrm{Rés}_{\mathrm{aff}}{}^\bullet \mathrm{Y}$ cette dernière résolution, on vérifie plus généralement que les deux espaces cosimpliciaux $(\mathrm{Rés}_{\mathrm{aff}}{}^\bullet \mathrm{Y})_{\pi^0 \pi_0 \mathrm{Rés}_{\mathrm{aff}}{}^\bullet \mathrm{Y}}$ et $\widetilde{\mathrm{Rés}}^\bullet \mathrm{Y}$ coïncident, si bien que l'on peut aussi définir le p-complété $\hat{\mathrm{Y}}$ comme l'espace total $\mathrm{Tot}\,\mathrm{Rés}_{\mathrm{aff}}{}^\bullet \mathrm{Y}$: c'est précisément ce qui est fait dans [BK1].

1.5.3. *Sur* $\mathrm{H}_* \hat{\mathrm{Y}}$.

On observe cette fois que l'application $e : \mathrm{H}_* \hat{\mathrm{Y}} \to \pi^0 \mathrm{H}_* \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}$ introduite en 1.4 s'identifie à une application $\mathrm{H}_* \hat{\mathrm{Y}} \to \mathrm{H}_* \mathrm{Y}$ et que $\eta_* : \mathrm{H}_* \mathrm{Y} \to \mathrm{H}_* \hat{\mathrm{Y}}$ en est une inverse à droite. Bousfield et Kan montrent en particulier que e et η_* sont des isomorphismes dans les cas suivants (Y est supposé connexe) :

— Y nilpotent, [BK1] VI, 5.3;
— $\pi_1 \mathrm{Y}$ est fini, [BK1] VII, 5.1;
— $\mathrm{H}_1 \mathrm{Y} = 0$, [BK1] VII, 3.2.

1.5.4. *Approximations d'un p-complété.*

Comme tout espace total d'un espace cosimplicial, $\hat{\mathrm{Y}}$ est limite inverse d'espaces Tot_s :

$$\hat{\mathrm{Y}} = \lim \mathrm{Tot}_s \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}.$$

Bousfield et Kan montrent que, dans le cas de l'espace cosimplicial $\mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}$, les applications naturelles $\mathrm{Tot}_s \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y} \to \mathrm{Tot}_{s-1} \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}$ ($s \geqslant 0$, avec la convention $\mathrm{Tot}_{-1} = *$) sont des fibrations principales dont les fibres sont des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels simpliciaux. En particulier $\mathrm{Tot}_0 \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}$ s'identifie à $\mathbf{F}_p[\mathrm{Y}]$ et la composée

$$\mathrm{Y} \to \hat{\mathrm{Y}} \to \mathrm{Tot}_0 \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}$$

à l'application naturelle $\eta : \mathrm{Y} \to \mathbf{F}_p[\mathrm{Y}]$.

Structure profinie de l'ensemble $[\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}]$ *quand* $\mathrm{H}_* \mathrm{Y}$ *est de dimension finie en chaque degré.*

Supposons maintenant $\mathrm{H}_* \mathrm{Y}$ de dimension finie en chaque degré. On vérifie alors qu'il en est de même pour l'homotopie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels simpliciaux évoqués ci-dessus. Il en résulte par récurrence sur s que les ensembles $[\mathrm{Z}, \mathrm{Tot}_s \, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}]$, $s \geqslant 0$, sont finis pour tout espace Z ayant un nombre fini de simplexes non dégénérés. On peut donc munir l'ensemble $[\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}]$ d'une structure profinie, pour tout espace X, en le considérant comme la limite inverse des $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{Tot}_s \, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}]$, X_α décrivant l'ensemble des sous-espaces de X ayant un nombre fini de simplexes non dégénérés et s décrivant $\mathbf{N}$ (on se rapproche ici du point de vue originel de D. Sullivan sur la p-complétion [Su]).

1.6. Des espaces fonctionnels dont le but est un p-complété, vus comme espaces totaux

Soient X et Y deux espaces; *l'espace fonctionnel* $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est le foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathscr{E}ns$, $[n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathrm{X} \times \Delta^n, \mathrm{Y})$. Le foncteur $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, $\mathrm{Y} \mapsto \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, est l'adjoint à droite du foncteur $\mathrm{Z} \mapsto \mathrm{X} \times \mathrm{Z}$; l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est donc caractérisé par la bijection fonctorielle en Z :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathrm{X} \times \mathrm{Z}, \mathrm{Y}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathrm{Z}, \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})).$$

Soit $\mathrm{Y}^\bullet$ un espace cosimplicial; le foncteur $\Delta \to \mathscr{S}$, $[n] \mapsto \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}^n)$ est un espace cosimplicial que l'on note $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}^\bullet)$. Son espace total $\mathrm{Tot}\, \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}^\bullet)$ s'identifie à l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Tot}\, \mathrm{Y}^\bullet)$; ceci résulte des bijections fonctorielles

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}^\bullet}(\mathrm{Z} \times \Delta^\bullet, \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}^\bullet)) \\ &\qquad \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}^\bullet}(\mathrm{X} \times \mathrm{Z} \times \Delta^\bullet, \mathrm{Y}^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathrm{X} \times \mathrm{Z}, \mathrm{Tot}\, \mathrm{Y}^\bullet). \end{aligned}$$

On a en particulier l'identification suivante qui joue un rôle capital dans la stratégie de Bousfield et Kan :

$$\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}) = \mathrm{Tot}\, \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}).$$

On peut donc considérer les applications « primaires » introduites en 1.3.3 et 1.4 :

$$e : \pi_0\, \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}) \to \pi^0\, \pi_0\, \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}),$$
$$e : \mathrm{H}_*\, \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}) \to \pi^0\, \mathrm{H}_*\, \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}).$$

Pour pouvoir décrire les deux objets $\pi^0\, \pi_0\, \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y})$ et $\pi^0\, \mathrm{H}_*\, \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y})$, il nous faut introduire les diverses structures que possèdent l'homologie (et la cohomologie) modulo p d'un espace.

1.7. Les structures de l'homologie et de la cohomologie modulo p d'un espace

Dans cet article la cohomologie que l'on considère est la *cohomologie modulo* p, $\mathrm{H}^*(-; \mathbf{F}_p)$, que l'on note simplement H^*.

On note $\mathrm{A} = \{\mathrm{A}^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *l'algèbre de Steenrod modulo* p; Y désigne un espace.

1.7.1. *La catégorie des* A-*modules instables.*

Tout d'abord H^*Y est un A-module instable. Soit $M = \{M^n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ un A-module à gauche. On dit que M est *instable* si, pour tout x dans M, on a

$$Sq^i x = 0, \quad \text{quand } i > |x|, \text{ pour } p = 2,$$
$$\beta^e P^i x = 0, \quad \text{quand } 2i + e > |x|, e = 0, 1, \text{ pour } p > 2,$$

conditions où $|x|$ désigne le *degré* de x (ceci entraîne en particulier $M^n = 0$ pour $n < 0$).

On observera qu'un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel non gradué peut être considéré comme un A-module instable concentré en degré zéro.

On désigne par $\mathcal{U}$ la catégorie dont les objets sont les A-modules instables et dont les morphismes sont les applications A-linéaires de degré zéro.

Le produit tensoriel de deux A-*modules* M_1 *et* M_2, noté $M_1 \otimes M_2$, est le produit tensoriel sur $\mathbf{F}_p$ muni de l'action « diagonale » de A définie à l'aide du coproduit de A; si M_1 et M_2 sont instables, il en est de même pour $M_1 \otimes M_2$. Rappelons enfin que le foncteur *suspension* $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ est défini par

$$(\Sigma M)^n = M^{n-1}, \ \theta(\Sigma x) = (-1)^{|\theta|} \Sigma\theta x,$$

θ désignant un élément de A et Σx l'élément de ΣM correspondant à l'élément x de M; ΣM n'est donc rien d'autre que le produit tensoriel de A-modules instables $(\Sigma \mathbf{F}_p) \otimes M$ (on pourrait d'ailleurs supprimer le signe qui apparaît dans la définition ci-dessus en posant $\Sigma M = M \otimes \Sigma \mathbf{F}_p$).

1.7.2. *La catégorie des* A-*algèbres instables.*

En outre H^*Y est une A-algèbre instable. *Une* A-*algèbre instable* est la donnée d'un A-module instable M et d'applications $\varphi : M \otimes M \to M$, $\eta : \mathbf{F}_p \to M$, telles que

($\mathcal{K}$.1) φ et η font de M une $\mathbf{F}_p$-algèbre graduée associative commutative unitaire;

($\mathcal{K}$.2) φ est A-linéaire ;

($\mathcal{K}$.3) l'élévation à la puissance p-ième dans M est reliée à la structure de A-module par les formules

$$x^2 = Sq^{|x|} x \quad \text{quand } p = 2,$$
$$x^p = P^{|x|/2} x \quad \text{quand } p > 2 \text{ si } |x| \text{ est pair.}$$

Les A-algèbres instables sont les objets d'une catégorie, notée $\mathcal{K}$, dont les morphismes sont les applications de degré zéro, A-linéaires compatibles avec produit et unité.

Remarque. — La cohomologie modulo p du point et de l'ensemble vide sont deux A-algèbres instables notées respectivement $\mathbf{F}_p$ et 0; 0 est bien une A-algèbre instable parce que l'on n'exige pas dans la définition ci-desssus que l'unité η soit non nulle. Soit M une A-algèbre instable; les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\eta = 0$;

(ii) $M = 0$;

(iii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(M, \mathbf{F}_p) = \emptyset$.

Cette remarque (apparemment bien anodine !) sera utilisée au chapitre 4.

1.7.3. *La catégorie des* A-*modules à droite instables.*

L'homologie $H_* Y$ est cette fois un A-module à droite instable. Par A-*module à droite* on entend un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel gradué, $M = \{ M_n \}_{n \in \mathbf{Z}}$, muni d'applications linéaires $M_n \otimes A^q \to M_{n-q}$ qui en font un module à droite sur l'algèbre graduée $\{ A^{-n} \}_{n \in \mathbf{N}}$. Le *dual* d'un A-module à droite M, noté M^*, est le A-module (à gauche) défini par

$$(M^*)^n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p}(M_n, \mathbf{F}_p).$$

On dit qu'un A-module à droite est *instable* si son dual M^* est instable; cela se traduit par des conditions « duales » de celles ci-dessus (pour une explicitation de ces conditions voir [BK2], 11.1).

La catégorie des A-modules à droite instables est notée $\mathcal{U}_*$.

1.7.4. *La catégorie des* A-*coalgèbres instables.*

L'homologie $H_* Y$ est aussi une A-coalgèbre instable. *Une* A-*coalgèbre instable* est la donnée d'un A-module à droite instable M et d'applications $\psi : M \to M \otimes M$, $\varepsilon : M \to \mathbf{F}_p$ telles que M^* muni des applications induites par ψ et ε soit une A-algèbre instable ; cela se traduit par trois axiomes ($\mathcal{K}_*.1$), ($\mathcal{K}_*.2$), ($\mathcal{K}_*.3$), « duaux » de ceux de 1.7.2 (pour une explicitation de ces axiomes voir [BK2], 11.2).

La catégorie des A-coalgèbres instables est notée $\mathcal{K}_*$.

1.7.5. *Variantes des catégories $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}_*$.*

On note $\mathcal{K}_-$ *la catégorie des* A-*algèbres instables non nécessairement unitaires* et $\mathcal{K}_\varepsilon$ *la catégorie des* A-*algèbres instables augmentées.* On désigne par $M \mapsto M_-$ le foncteur « *idéal d'augmentation* » $\mathcal{K}_\varepsilon \to \mathcal{K}_-$; ce foncteur est une équivalence de catégories dont l'inverse $\mathcal{K}_- \to \mathcal{K}_\varepsilon$ est notée $M \mapsto M_+$.

On dit qu'une A-algèbre instable (unitaire) est *connexe* si l'unité $\eta : \mathbf{F}_p \to M^0$ est surjective (les espaces connexes sont donc exactement ceux dont la cohomologie modulo p est connexe); on dit qu'une A-algèbre instable non nécessairement unitaire M est connexe si l'algèbre unitaire correspondante M_+ est connexe, autrement dit si M^0 est nul. On note $\mathcal{K}_{cx}$ la catégorie des A-algèbres instables connexes non nulles; $\mathcal{K}_{cx}$ peut être vue à la fois comme une sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}_\varepsilon$ ou de $\mathcal{K}_-$.

On introduit de la même façon *la catégorie $\mathcal{K}_{*cx}$ des* A-*coalgèbres instables connexes non nulles.*

1.7.6. *Objets abéliens (resp. coabéliens) dans la catégorie $\mathcal{K}_{cx}$ (resp. $\mathcal{K}_{*cx}$).*

On dit qu'un objet M de $\mathcal{K}_-$ est *abélien* si son produit $M \otimes M \to M$ est trivial (ceci est bien compatible avec la terminologie générale de Quillen [Qui1], § 5 : un objet M de $\mathcal{K}_-$ est abélien si et seulement si pour tout objet L de $\mathcal{K}_-$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_-}(L, M)$ admet une structure de groupe fonctorielle en L). Un tel M est forcément connexe.

La sous-catégorie pleine de $\mathscr{K}_-$ (ou de $\mathscr{K}_{cx}$) dont les objets sont abéliens est notée $\mathscr{V}$; on peut voir aussi $\mathscr{V}$ comme la sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}$ dont les objets sont les A-modules instables M tels que

— quand $p = 2$, tout élément x de M vérifie $Sq^{|x|}\,x = 0$;
— quand $p > 2$, tout élément x de M de degré pair vérifie $P^{|x|/2}\,x = 0$.

Le foncteur inclusion $\mathscr{V} \to \mathscr{K}_-$ admet un adjoint à gauche, à savoir le foncteur « *indécomposables* », noté $Q : \mathscr{K}_- \to \mathscr{V}$.

Soit M un A-module instable ; la suspension ΣM peut être considérée comme un objet de $\mathscr{V}$ et l'on définit ainsi un foncteur, toujours noté $\Sigma : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$. Il est à noter que ce foncteur est une équivalence pour $p = 2$ mais non pour $p > 2$ (voir [Mi1], *corrigendum*).

On introduit dualement les A-coalgèbres instables *coabéliennes* dont la catégorie est notée $\mathscr{V}_*$. Le foncteur « *primitifs* », noté $P : \mathscr{K}_{*cx} \to \mathscr{V}_*$ est cette fois l'adjoint à droite du foncteur inclusion $\mathscr{V}_* \to \mathscr{K}_{*cx}$.

Soit t un entier > 0; $\Sigma(\Sigma^{t-1}\mathbf{F}_p)$ est un objet abélien de $\mathscr{K}_-$ que l'on note simplement $\Sigma^t\mathbf{F}_p$($\Sigma^t\mathbf{F}_p$ est la cohomologie modulo p réduite de la sphère S^t). Soit M un objet de $\mathscr{K}_-$ (resp. $\mathscr{K}_\varepsilon$ ou $\mathscr{K}_{cx}$). Nous poserons

$$\pi_t\,M = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_-}(M, \Sigma^t\,\mathbf{F}_p)$$

(resp. $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_\varepsilon}(M, (\Sigma^t\,\mathbf{F}_p)_+)$ ou $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{cx}}(M, (\Sigma^t\,\mathbf{F}_p)_+)$) ; π_t M est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel (profini, voir 1.7.7).

Nous utiliserons également la notation π_t M pour désigner le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{*cx}}(H_*\,S^t, M)$. Voici une justification de cette notation. Soit Y un espace connexe ; alors l'application naturelle $[S^t, Y] \to \pi_t\,H_*\,Y$ est une bijection si Y est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial ou plus généralement un $\mathbf{F}_p$-*espace affine simplicial*, c'est-à-dire un ensemble affine simplicial dont le groupe abélien simplicial sous-jacent est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial (voir B.1). Dans ce cas l'application d'oubli $\pi_t(Y; y_0) \to [S^t, Y]$ est aussi une bijection pour tout 0-simplexe y_0 de Y et la composée $\pi_t(Y; y_0) \to [S^t, Y] \to \pi_t\,H_*\,Y$ est un isomorphisme de groupes.

1.7.7. *Topologie faible des ensembles d'applications* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}_*}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}$ ...

Soit $\mathbf{N}$-$\mathscr{E}ns$ la catégorie des ensembles $\mathbf{N}$-gradués $E = \{ E_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ (ou $E = \{ E^n \}_{n \in \mathbf{N}}$) ; on observera que l'on peut voir un objet de $\mathbf{N}$-$\mathscr{E}ns$ comme un ensemble muni d'une application à valeurs dans $\mathbf{N}$ qui sera notée $|\ |$. On munit l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{N}-\mathscr{E}ns}(E, F) = \Pi_{x \in E}\,F_{|x|}$$

de la *topologie faible*, c'est-à-dire la topologie de produit d'ensembles discrets ou, en d'autres termes, la topologie finale qui rend continues les applications d'évaluation $\mathrm{Hom}_{\mathbf{N}-\mathscr{E}ns}(E, F) \to F_{|x|}, f \mapsto f(x)$, x parcourant E et $F_{|x|}$ étant muni de la topologie discrète. Si F est fini en chaque degré, la topologie faible est alors profinie.

Soit maintenant $\mathscr{C}$ l'une des catégories $\mathscr{U}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{U}_*$, ou $\mathscr{K}_*$. On munit l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, N)$ de la topologie induite par la topologie faible de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{N}-\mathscr{E}ns}(M, N)$. Si $\mathscr{C}$ est $\mathscr{U}$ ou $\mathscr{U}_*$ alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, N)$ devient un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel topologique ($\mathbf{F}_p$ étant muni de la topologie discrète). Il est clair que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, N)$ est fermé dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{N}-\mathscr{E}ns}(M, N)$.

Quand N est de dimension finie en chaque degré, la topologie faible de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, N)$ est profinie. Si $\mathscr{C}$ est $\mathscr{U}$, $\mathscr{K}$ ou $\mathscr{U}_*$, on peut décrire cette structure profinie de la façon suivante. Si M est engendré, en tant que $\mathscr{C}$-objet, par un nombre fini d'éléments, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, N)$ est fini et plus généralement $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, N)$ est la limite inverse du système projectif d'ensembles finis $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M_\alpha, N)$, M_α décrivant l'ensemble des sous-objets de M engendrés par un nombre fini d'éléments.

Remarques. — Il est clair que tout objet de $\mathscr{U}_*$ ou de $\mathscr{K}_{*cx}$ est limite inductive de ses sous-objets finis. En fait, comme nous le verrons en 1.8.2, la même chose est encore vraie pour $\mathscr{K}_*$, si bien que l'on a une description analogue à la précédente de la topologie profinie de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(M, N)$ quand N est de dimension finie en chaque degré.

1.8. Variations sur la notion de composante connexe (II)

On se propose de décrire les équivalents algébriques des définitions données en 1.3.1 et 1.3.4. Au préalable il nous faut parler d'algèbres et coalgèbres p-booléennes.

1.8.1. *Algèbres et coalgèbres p-booléennes.*

L'axiome ($\mathscr{K}$.3) implique que les éléments de degré zéro d'une A-algèbre instable forment une *algèbre p-booléenne* c'est-à-dire une $\mathbf{F}_p$-algèbre (non graduée) associative commutative unitaire dans laquelle $x^p = x$. De même l'axiome ($\mathscr{K}_*$.3) implique que les éléments de degré zéro d'une A-coalgèbre instable forment une *coalgèbre p-booléenne*, c'est-à-dire une $\mathbf{F}_p$-coalgèbre (non graduée) coassociative, cocommutative, counitaire, dont la duale est p-booléenne. On observe que toute algèbre (resp. coalgèbre) p-booléenne est limite directe de ses sous-algèbres (resp. sous-coalgèbres) de dimension finie. La première affirmation est claire. La deuxième l'est un peu moins; elle résulte du lemme suivant que m'a enseigné M. Demazure (voir par exemple [De], p. 12) :

Lemme **1.8.1.** — *Soient* C *une coalgèbre (non graduée) coassociative, cocommutative, counitaire sur un corps k et* E *un sous-espace de dimension finie de* C; *alors il existe un sous-espace de dimension finie* F *de* C *avec* $E \subset F$ *et* $\psi F \subset F \otimes F$.

Les catégories des algèbres et coalgèbres p-booléennes sont respectivement équivalentes à la catégorie opposée de celle des ensembles profinis et à la catégorie des ensembles. Précisons un peu. Notons respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}_*$ les catégories des algèbres et coalgèbres p-booléennes; notons $\mathscr{E}ns^*$ *la catégorie des ensembles profinis* (rappelons que

$\mathscr{E}ns$ désigne la catégorie des ensembles). Le foncteur « spectre », noté Spec : $\mathscr{B} \to (\mathscr{E}ns^*)^{\mathrm{op}}$ défini par

$$\operatorname{Spec} \mathrm{B} = \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathrm{B}, \mathbf{F}_p)$$

est une équivalence de catégorie dont l'inverse est le foncteur

$$(\mathscr{E}ns^*)^{\mathrm{op}} \to \mathscr{B}, \qquad \mathrm{S} \mapsto \mathbf{F}_p^{\{\mathrm{S}\}},$$

$\mathbf{F}_p^{\{\mathrm{S}\}}$ désignant l'algèbre p-booléenne des applications continues de S (muni de la topologie profinie) dans $\mathbf{F}_p$ (muni de la topologie discrète). Le foncteur « cospectre » noté $\operatorname{Spec}_* : \mathscr{B}_* \to \mathscr{E}ns$ défini par

$$\operatorname{Spec}_* \mathrm{C} = \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}_*}(\mathbf{F}_p, \mathrm{C})$$

est à nouveau une équivalence de catégories dont l'inverse est le foncteur

$$\mathscr{E}ns \to \mathscr{B}_*, \qquad \mathrm{S} \mapsto \mathbf{F}_p[\mathrm{S}]$$

(le coproduit de $\mathbf{F}_p[\mathrm{S}]$ est induit par la diagonale de S).

1.8.2. *La notion de composante connexe dans la catégorie* $\mathscr{K}_*$.

On note encore $\pi_0 : \mathscr{K}_* \to \mathscr{E}ns$ l'adjoint à gauche du foncteur $i : \mathscr{E}ns \to \mathscr{K}_*$ qui associe à un ensemble S la coalgèbre $\mathbf{F}_p[\mathrm{S}]$ (concentrée en degré zéro). On a donc, pour toute A-coalgèbre instable M,

$$\pi_0 \mathrm{M} = \operatorname{Spec}_* \mathrm{M}_0 = \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}_*}(\mathbf{F}_p, \mathrm{M}_0) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathbf{F}_p, \mathrm{M}).$$

Une A-coalgèbre instable est connexe si son π_0 est réduit à un point. Soit S un sous-ensemble de $\pi_0 \mathrm{M}$, on note M_{S} le produit fibré de $i\mathrm{S}$ et M au-dessus de $i\pi_0 \mathrm{M}$:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{S}} = \mathbf{F}_p[\mathrm{S}] \,\square_{\mathrm{M}_0} \mathrm{M}$$

(produit cotensoriel de $\mathbf{F}_p[\mathrm{S}]$ et M au-dessus de M_0). Nous dirons que M_{S} est *la localisée de* M *en* S. Par construction $\pi_0(\mathrm{M}_{\mathrm{S}})$ est égal à S. En particulier la localisée M_φ de M en un point φ de $\pi_0 \mathrm{M}$ est une A-coalgèbre instable connexe non nulle.

On vérifie que M s'identifie à la somme dans la catégorie $\mathscr{K}_*$ des M_φ, φ décrivant l'ensemble $\pi_0 \mathrm{M}$. Il en résulte que M est limite inductive de ses sous-A-coalgèbres (instables) finies.

On a tout fait pour avoir :

$$\pi_0 \mathrm{H}_* \mathrm{Y} = \pi_0 \mathrm{Y}; \qquad (\mathrm{H}_* \mathrm{Y})_{\mathrm{S}} = \mathrm{H}_*(\mathrm{Y}_{\mathrm{S}}).$$

1.8.3. *La notion de composante connexe dans la catégorie* $\mathscr{K}$.

Soit maintenant M une A-algèbre instable. On pose

$$\pi_0 \mathrm{M} = \operatorname{Spec} \mathrm{M}^0 = \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathrm{M}^0, \mathbf{F}_p) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{M}, \mathbf{F}_p),$$

$\pi_0 \mathrm{M}$ est cette fois un ensemble profini.

Soit S un sous-ensemble fermé de π_0 M; on définit une A-algèbre instable M_S, que nous appellerons encore *la localisée de* M *en* S, de la façon suivante. On considère $\mathbf{F}_p^{\{S\}}$ comme un M^0-module *via* l'épimorphisme naturel $M^0 \to \mathbf{F}_p^{\{S\}}$ et l'on pose

$$M_S = \mathbf{F}_p^{\{S\}} \otimes_{M^0} M.$$

L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(M_S, N)$ s'identifie donc au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(M, N)$ formé des applications f telles que l'image de $\pi_0 f : \pi_0 N \to \pi_0 M$ est contenue dans S.

1.8.4. *La notion de composante connexe dans les catégories* $\mathcal{K}_*^\bullet$ *et* $\mathcal{K}_\bullet$.

Soit $M^\bullet$ une A-coalgèbre instable cosimpliciale et S un sous-ensemble de $\pi^0 \pi_0 M^\bullet$; on définit la A-coalgèbre instable cosimpliciale $(M^\bullet)_S$ en calquant 1.3.4. On définit de même $(M_\bullet)_S$ dans le cas d'une A-algèbre instable simpliciale; cette fois S est un sous-ensemble fermé de l'ensemble profini $\pi^0 \pi_0 M_\bullet$. Le même type de remarque que celle de la fin du point 1.3.4 vaut pour $(M^\bullet)_{\pi^0 \pi_0 M^\bullet}$ et $(M_\bullet)_{\pi^0 \pi_0 M_\bullet}$.

1.9. Résolutions dans les catégories des A-coalgèbres et A-algèbres instables

1.9.1. *Résolutions libres dans la catégorie* $\mathcal{K}$.

On note $\mathcal{E}$ *la catégorie des* $\mathbf{F}_p$*-espaces vectoriels* $\mathbf{N}$*-gradués* $E = \{E^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *dont le degré est noté en exposant.* Le foncteur oubli $\mathcal{K} \to \mathcal{E}$ admet un adjoint à gauche que l'on note $G : \mathcal{E} \to \mathcal{K}$. Rappelons que l'on dit qu'une A-algèbre est *libre* si elle est isomorphe à G(E) pour un certain E. La paire (G, oubli) définit une *comonade* (voir [McL]) sur la catégorie $\mathcal{K}$ qui permet d'associer à toute A-algèbre instable M une A-algèbre instable simpliciale qu'on appelle *la résolution libre canonique* de M et que nous noterons $\mathrm{Rés}_\bullet M$. La résolution libre canonique de M est un cas particulier de la notion suivante [Bou1] :

Définition **1.9.1.1.** — Soit M une A-algèbre instable. Une $\mathcal{K}$*-résolution libre* de M est la donnée d'une A-algèbre instable simpliciale $M_\bullet$ et d'une augmentation $M_\bullet \to M$ telle que :

a) M_n, $n \in \mathbf{N}$, est libre;

b) la suite de A-modules instables

$$0 \leftarrow M \leftarrow M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow \dots \leftarrow M_{n-1} \xleftarrow{\Sigma(-1)^i d_i} M_n \leftarrow \dots$$

est exacte.

Si les A-algèbres instables M et M_n, $n \in \mathbf{N}$, sont connexes non nulles nous dirons qu'il s'agit d'une $\mathcal{K}_{cx}$*-résolution libre* de M.

On observera que l'exactitude en M_0 et M de la suite ci-dessus fait que l'augmentation $M_0 \to M$ est la coégalisatrice dans la catégorie $\mathcal{K}$ des applications $d_0, d_1 : M_1 \to M_0$; en particulier l'ensemble profini $\pi^0 \pi_0 M_\bullet$ s'identifie à π_0 M.

Proposition **1.9.1.2.** — *Soient* M *une* A-*algèbre instable et* φ *un point de* π_0 M *(c'est-à-dire une augmentation de* M*). Soit* $M_\bullet \to M$ *une* $\mathcal{K}$-*résolution libre de* M, *alors* $(M_\bullet)_\varphi \to (M)_\varphi$ *est une* $\mathcal{K}_{cx}$-*résolution libre de* M_φ.

Démonstration. — Tout d'abord la « localisée en un point » d'une A-algèbre instable libre est encore libre : la condition *a)* est vérifiée. En effet, pour tout $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel gradué E et tout point φ de $\pi_0\,G(E)$, $(G(E))_\varphi$ est isomorphe à $G(E_{>0})$, $E_{>0}$ désignant le sous-espace de E formé des éléments de degré strictement positifs.

L'argument qui implique la condition *b)* est en fait très général.

Soient k un corps, R une k-algèbre (non graduée), et X, Y deux R-modules (non gradués), respectivement à droite et à gauche. On se donne des *résolutions* (on entend par là que la condition analogue à *b)* est satisfaite), $R_\bullet \to R$, $X_\bullet \to X$, $Y_\bullet \to Y$, $R_\bullet$, $X_\bullet$, $Y_\bullet$, désignant respectivement une k-algèbre simpliciale, un $R_\bullet$-module simplicial à droite, et un $R_\bullet$-module simplicial à gauche. On suppose $\mathrm{Tor}_s^{R_n}(X_n, Y_n) = 0$ pour $n \geqslant -1$ et $s \geqslant 1$. On montre alors par un « argument de bicomplexe » que $X_\bullet \otimes_{R_\bullet} Y_\bullet \to X \otimes_R Y$ est une résolution.

Précisons un peu. Soit $\mathrm{Rés}_\bullet Y$ la résolution simpliciale libre de Y définie à l'aide du foncteur oubli de la catégorie des R-modules à gauche vers la catégorie des k-espaces vectoriels et de son adjoint. On note $W_\bullet(X, R, Y)$ le k-espace vectoriel simplicial $X \otimes_R \mathrm{Rés}_\bullet Y$. On a donc par définition, en tout degré $s \geqslant 0$, des isomorphismes de k-espaces vectoriels :

— $W_s(X, R, Y) \cong X \otimes R^{\otimes s} \otimes Y$ (au second membre tous les produits tensoriels sont sur k);
— $\mathrm{Tor}_s^R(X, Y) \cong \pi_s\, W_\bullet(X, R, Y)$.

Le bicomplexe évoqué plus haut est associé au k-espace vectoriel bisimplicial $W_\bullet(X_\bullet, R_\bullet, Y_\bullet)$. Pour une discussion plus générale voir [Quil], II, § 6.

Ici $R_\bullet$ est la $\mathbf{F}_p$-algèbre simpliciale $M_\bullet^0$, X_n vaut $\mathbf{F}_p$ en tout degré n qui est un M_n^0-module *via* la composée $M_n^0 \to M^0 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{F}_p$, et l'on prend pour $Y_\bullet$ le $M_\bullet^0$-module simplicial $M_\bullet^q$, q fixé. On utilise ensuite que tout module sur une algèbre p-booléenne est plat. Pour s'en convaincre on peut invoquer les arguments suivants :

— tout module sur une algèbre p-booléenne de dimension finie est projectif (une telle algèbre est juste un produit fini de copies du corps $\mathbf{F}_p$);
— une algèbre p-booléenne B est limite directe de ses sous-algèbres de dimension finie B_α et les groupes $\mathrm{Tor}_s^B(-, -)$ sont limite directe des groupes $\mathrm{Tor}_s^{B_\alpha}(-, -)$.

Remarques. — 1) Posons, comme en 1.5.2, $\widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{és}_\bullet M = (\mathrm{Rés}_\bullet M)_{\pi^0\pi_0\,\mathrm{Rés}_\bullet M}$. La proposition ci-dessus montre que $\mathrm{Rés}_\bullet M$ est une $\mathcal{K}_{cx}$-résolution libre de M si M est connexe non nulle. Ce n'est pas le cas en général d'après la remarque suivante.

2) On ne peut dans 1.9.1.2 remplacer la localisation en un point par la localisation en un sous-ensemble fermé S arbitraire de π_0 M : avec la définition (peut-être

trop rigide) que nous avons choisie $(G(E))_S$ n'est pas libre en général puisque le π_0 d'une A-algèbre instable libre est toujours un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel profini.

3) Signalons que le foncteur $\text{Rés}_\bullet : \mathscr{K} \to \mathscr{K}_\bullet$ ne commute pas à la localisation en un point : les deux $\mathscr{K}$-résolutions libres de M_φ, $(\text{Rés}_\bullet M)_\varphi$ et $\text{Rés}_\bullet(M_\varphi)$, ne coïncident pas (l'application $(\text{Rés}_n M)_\varphi \to \text{Rés}_n(M_\varphi)$, induite par l'application $M \to M_\varphi$, est surjective pour tout $n \geqslant 0$ mais n'est pas un isomorphisme).

Résolutions dans la catégorie $\mathscr{K}_-$, $\mathscr{K}_{cx}$-résolution libre canonique.

On définit les notions d'objet libre, de résolution libre, de résolution libre canonique, dans la catégorie $\mathscr{K}_-$ des A-algèbres instables non nécessairement unitaires en remplaçant formellement ci-dessus $\mathscr{K}$ par $\mathscr{K}_-$; nous notons encore $\text{Rés}_\bullet M$ la résolution libre canonique d'un objet M de $\mathscr{K}_-$. On vérifie que le foncteur $\mathscr{K}_- \to \mathscr{K}$, $M \mapsto M_+$, préserve objets libres et résolutions libres.

On convient de définir la $\mathscr{K}_{cx}$-résolution libre canonique d'une A-algèbre instable connexe non nulle M comme la résolution $(\text{Rés}_\bullet(M_-))_+$ que l'on notera aussi $\text{Rés}_{cx\bullet} M$; cette convention est duale de celle de [BK2] [Mil]. La taille de cette résolution est plus petite que celle de la résolution $\widetilde{\text{R}}\text{és}_\bullet M$ considérée plus haut : il existe un $(\mathscr{K}_{cx})_\bullet$-morphisme $\widetilde{\text{R}}\text{és}_\bullet M \to \text{Rés}_{cx\bullet} M$, naturel en M, qui est un isomorphisme en degré simplicial zéro mais qui n'est que surjectif en degré simplicial > 0.

1.9.2. *Résolutions colibres dans la catégorie $\mathscr{K}_*$.*

Pour des raisons de symétrie, on note $\mathscr{E}_*$ *la catégorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels $\mathbf{N}$-gradués* $E = \{ E_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ *dont le degré est noté en indice.* Cette fois le foncteur oubli, noté $\mathscr{O} : \mathscr{K}_* \to \mathscr{E}_*$, admet un adjoint à droite, noté $C : \mathscr{E}_* \to \mathscr{K}_*$. La paire $(\mathscr{O}, C)$ définit une monade sur la catégorie $\mathscr{K}_*$ qui permet d'associer à toute A-coalgèbre instable M une A-coalgèbre instable cosimpliciale qu'on appelle *la résolution colibre canonique* de M et que nous noterons $\text{Rés}^\bullet M$ (on dit qu'une A-coalgèbre est *colibre* si elle est isomorphe à C(E) pour un certain E).

La monade sur $\mathscr{K}_*$ introduite ci-dessus est intimement reliée à celle considérée en 1.5.1. Précisons un peu. Soit Z un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial; l'application naturelle $\mathbf{F}_p[Z] \to Z$ induit en homotopie une application $\mathscr{O}H_* Z \to \pi_* Z$ dont l'adjointe $H_* Z \to C(\pi_* Z)$ est un isomorphisme. Ceci résulte essentiellement :

— du calcul de la cohomologie modulo p des espaces $K(\mathbf{Z}/p, n)$;
— de l'équivalence entre la catégorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels simpliciaux et celle des $\mathbf{F}_p$-complexes de chaînes.

On a donc en particulier, pour tout espace Y, un isomorphisme naturel

$$H_* \mathbf{F}_p[Y] \to C(\mathscr{O}H_* Y).$$

Cet isomorphisme est compatible avec les monades associées respectivement au foncteur $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, $Y \mapsto \mathbf{F}_p[Y]$ et au foncteur $\mathscr{K}_* \to \mathscr{K}_*$, $M \mapsto C(\mathscr{O}M)$, si bien que la A-coalgèbre instable cosimpliciale $H_* \text{Rés}^\bullet Y$ s'identifie à la résolution canonique de $H_* Y$:

$$H_* \text{Rés}^\bullet Y = \text{Rés}^\bullet H_* Y.$$

Puisque la suite de $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels gradués

$$0 \to M \to \text{Rés}^0 M \to \dots \to \text{Rés}^{n-1} M \xrightarrow{\Sigma(-1)^i d_i} H_* \text{Rés}^n M \to \dots$$

est exacte pour toute A-coalgèbre instable M, nous tenons l'explication promise en 1.5.1.

1.10. Objets fonctionnels dans les catégories $\mathscr{U}_*$, $\mathscr{K}_*$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{K}$

Il s'agit des analogues du bifoncteur $\mathbf{hom}(-, -)$ (espace fonctionnel) pour les catégories $\mathscr{U}_*$, $\mathscr{K}_*$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{K}$; le produit des espaces est remplacé par le produit tensoriel dans ces catégories.

Proposition-Définition **1.10.1.** — *Soient* $\mathscr{C}_*$ *l'une des catégories* $\mathscr{E}_*$, $\mathscr{U}_*$, *ou* $\mathscr{K}_*$, *et* K *un objet de* $\mathscr{C}_*$. *Le foncteur* $\mathscr{C}_* \to \mathscr{C}_*$, $N \mapsto K \otimes N$, *admet un adjoint à droite noté* $M \mapsto \mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(K, M)$; *le* $\mathscr{C}_*$-*objet* $\mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(K, M)$ *est donc caractérisé par la bijection fonctorielle en* N :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(K \otimes N, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(N, \mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(K, M)).$$

Démonstration. — Le cas $\mathscr{C}_* = \mathscr{E}_*$ est immédiat : $\mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(K, M)$ est le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel gradué $\{\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}_*}(\Sigma^n K, M)\}_{n \in \mathbf{N}}$, $\Sigma^n K$ désignant la n-ième suspension de K, c'est-à-dire le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel gradué $\{K_{q-n}\}_{q \in \mathbf{N}}$.

On se limite ensuite au cas $\mathscr{C}_* = \mathscr{K}_*$; on peut d'ailleurs faire exactement la même démonstration pour $\mathscr{C}_* = \mathscr{U}_*$, quitte à développer pour $\mathscr{U}_*$ le formalisme du début de 1.9.2.

On doit montrer que le foncteur $N \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(K \otimes N, M)$ est représentable. C'est clair si M est colibre :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(K \otimes N, C(E)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(N, C(\mathbf{hom}_{\mathscr{E}_*}(\mathscr{O}K, E));$$

$$\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, C(E)) = C(\mathbf{hom}_{\mathscr{E}_*}(\mathscr{O}K, E)).$$

Dans le cas général on utilise que la coaugmentation $M \to \text{Rés}^0 M$ est l'égalisatrice des applications $d^0, d^1 : \text{Rés}^0 M \to \text{Rés}^1 M$, $\text{Rés}^0 M$ et $\text{Rés}^1 M$ étant des A-coalgèbres instables colibres. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(K \otimes N, M)$ est l'égalisateur des applications $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(K \otimes N, \text{Rés}^0 M) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(K \otimes N, \text{Rés}^1 M)$ induites par d^0 et d^1, si bien que le foncteur $N \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(K \otimes N, M)$ est représenté par la A-coalgèbre instable égalisatrice des applications induites par d^0 et $d^1 : \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, \text{Rés}^0 M) \to \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, \text{Rés}^1 M)$. La A-coalgèbre instable $\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, M)$ est donc essentiellement définie par la formule :

$$\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, M) = \pi^0\, \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, \text{Rés}^\bullet M).$$

Le formalisme ci-dessus se « dualise » dans les catégories $\mathscr{E}$, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{K}$; on doit alors supposer que la « source » de l'objet fonctionnel est de dimension finie en chaque degré.

Proposition-Définition **1.10.2.** — *Soient* $\mathscr{C}$ *l'une des catégories* $\mathscr{E}$, $\mathscr{U}$, *ou* $\mathscr{K}$, *et* K *un objet de* $\mathscr{C}$ *que l'on suppose de dimension finie en chaque degré. Le foncteur* $\mathscr{C} \to \mathscr{C}$, $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{K} \otimes \mathrm{N}$, *admet un adjoint à gauche noté* $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathscr{C}}$; *le* $\mathscr{C}$*-objet* $(\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathscr{C}}$ *est donc caractérisé par la bijection fonctorielle en* N :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}((\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathscr{C}}, \mathrm{N}).$$

1.10.3. *Autres approches du foncteur* $(\ :\mathrm{K})_{\mathscr{U}}$.

Voici deux approches de l'objet fonctionnel $(\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathscr{U}}$ différentes de celle qui est suggérée ci-dessus. Le point de vue de 1.10.3.1 est celui qui est adopté dans [Ad]. Signalons que l'existence d'un adjoint à gauche pour le foncteur $\mathscr{U} \to \mathscr{U}$, $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{K} \otimes \mathrm{N}$, est par ailleurs garantie, comme me l'ont fait remarquer F. Morel et L. Schwartz, par le très général *special adjoint functor theorem* de [Fr] qui étend le théorème 6 de [Wa] (on prend pour cogénérateur de $\mathscr{U}$ le produit $\Pi_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{J}(n)$, voir 1.10.3.2).

1.10.3.1. Plaçons-nous tout d'abord dans la catégorie, notée $\mathscr{M}$, dont les objets sont les A-modules *stables* (c'est-à-dire non nécessairement instables !) et dont les morphismes sont les applications A-linéaires de degré zéro. Soient M, K, N trois A-modules stables. On suppose que K et N sont *bornés inférieurement* (on dit qu'un A-module stable K est borné inférieurement s'il existe un entier relatif n_0 tel que K^n est trivial pour $n < n_0$) et que K est de dimension finie en chaque degré; on a alors un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(\mathrm{M}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(\mathrm{M} \otimes \mathrm{DK}, \mathrm{N}),$$

DK désignant *le dual de Spanier-Whitehead* de K (ce que l'on pourrait écrire symboliquement $(\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathscr{M}} = \mathrm{M} \otimes \mathrm{DK}$). Rappelons que DK est le A-module stable défini par :

$$(\mathrm{DK})^n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p}(\mathrm{K}^{-n}, \mathbf{F}_p), \quad n \in \mathbf{Z};$$
$$\theta . u = u \circ (\chi\theta), \qquad u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p}(\mathrm{M}^{-n}, \mathbf{F}_p) \quad \text{et} \quad \theta \in \mathrm{A}$$

$\chi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ désignant la conjugaison canonique.

Revenons maintenant à la catégorie $\mathscr{U}$ et notons $\Omega^\infty : \mathscr{M} \to \mathscr{U}$ le foncteur *déstabilisation* adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathscr{U} \to \mathscr{M}$ (que nous devrions donc noter Σ^∞). La formule d'adjonction ci-dessus implique :

$$(\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathscr{U}} = \Omega^\infty(\mathrm{M} \otimes \mathrm{DK}).$$

1.10.3.2. Notons $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) la catégorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels (resp. $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels profinis). Rappelons que les catégories $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont opposées ; en effet, les foncteurs $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ et $\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ qui associent respectivement à un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel E son dual algébrique $\mathrm{E}^* = \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(\mathrm{E}, \mathbf{F}_p)$ (E^* peut être muni de la topologie faible qui est profinie, voir 1.7.7) et à un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel profini F son dual topologique $\mathrm{F}' = \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(\mathrm{F}, \mathbf{F}_p)$ sont « inverses » l'un de l'autre.

Rappelons ensuite que le foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{F}$, $M \mapsto (M^n)^*$ est représenté par un A-module instable fini noté $J(n)$:

$$(M^n)^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(n))$$

(voir par exemple [LZ1]); en fait l'isomorphisme ci-dessus est compatible avec les topologies profinies des deux membres (voir 1.7.7) et $J(n)$ représente le foncteur $M \mapsto (M^n)^*$ considéré comme à valeurs dans $\mathcal{G}$. Rappelons enfin que l'on note

$$.\theta : J(n + |\theta|) \to J(n)$$

le $\mathcal{U}$-morphisme correspondant à la transformation naturelle du foncteur $M \mapsto (M^{n+|\theta|})^*$ dans le foncteur $M \mapsto (M^n)^*$ induite par une opération de Steenrod θ. On a donc :

$$(((M : K)_{\mathcal{U}})^n)^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}((M : K)_{\mathcal{U}}, J(n)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, K \otimes J(n))$$

et l'application $(\theta)^* : (((M : K)_{\mathcal{U}})^{n+|\theta|})^* \to (((M : K)_{\mathcal{U}})^n)^*$ s'identifie à l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, 1_K \otimes (.\theta))$.

Maintenant, puisque $J(n)$ est fini, $K \otimes J(n)$ est de dimension finie en chaque degré et le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, K \otimes J(n))$ est profini (voir 1.7.7). De plus, il est clair que l'isomorphisme $(((M : K)_{\mathcal{U}})^n)^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, K \otimes J(n))$ et l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, 1_K \otimes (.\theta))$ sont continus. On a donc :

$$((M : K)_{\mathcal{U}})^n \cong (\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, K \otimes J(n)))'$$

et l'application $\theta : ((M : K)_{\mathcal{U}})^n \to ((M : K)_{\mathcal{U}})^{n+|\theta|}$ s'identifie à l'application

$$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, 1_K \otimes (.\theta)))'.$$

On peut définir *a priori* un A-module instable $(M : K)_{\mathcal{U}}$ à partir des formules ci-dessus et vérifier qu'il représente bien le foncteur $N \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, K \otimes N)$. On observera pour mémoire que l'on a en particulier, si $n = 0$,

$$((M : K)_{\mathcal{U}})^0 \cong (\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, K))'.$$

1.10.4. *Localisation des objets fonctionnels dans les catégories $\mathcal{K}_*$ et $\mathcal{K}$.*

Soient K et M deux A-coalgèbres instables. Le π_0 de la A-coalgèbre instable $\mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(K, M)$ s'identifie à l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(K, M)$ par l'adjonction

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(K, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(K \otimes \mathbf{F}_p, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(\mathbf{F}_p, \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(K, M)) \\ = \pi_0\, \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(K, M),\end{aligned}$$

que l'on note a. Soit S un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(K, M)$; on pose

$$\mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(K, M; S) = (\mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(K, M; S))_{a(S)}.$$

Intéressons-nous maintenant au cas où S est réduit à un point. On note $K\backslash\mathcal{K}_*$ *la catégorie des* A-*coalgèbres instables « au-dessous » de* K; rappelons que les objets de $K\backslash\mathcal{K}_*$ sont les $\mathcal{K}_*$-morphismes $\varphi : K \to M$ et qu'un $K\backslash\mathcal{K}_*$-morphisme de φ dans $\varphi' : K \to M'$ est un $\mathcal{K}_*$-morphisme $f: M \to M'$ tel que $\varphi' = f \circ \varphi$. On peut voir la correspondance

$(M, \varphi) \mapsto \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(K, M; \varphi)$ comme un foncteur $K\backslash\mathcal{K}_* \to \mathcal{K}_{*\,cx}$ adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{K}_{*\,cx} \to K\backslash\mathcal{K}_*$, $N \mapsto K \otimes N$.

Soient maintenant K et M deux A-algèbres instables avec K de dimension finie en chaque degré. On note encore $a : \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(M, K) \to \pi_0(M : K)_{\mathcal{K}}$ l'homéomorphisme d'adjonction et l'on pose $(M : K; S)_{\mathcal{K}} = ((M : K)_{\mathcal{K}})_{a(S)}$ pour tout sous-ensemble fermé S de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(M, K)$. On peut comme précédemment introduire la catégorie $\mathcal{K}/K$ *des* A-*algèbres instables « au-dessus » d'une* A-*algèbre instable* K, et voir la correspondance $(M, \varphi) \mapsto (M : K; \varphi)_{\mathcal{K}}$ comme un foncteur $\mathcal{K}/K \to \mathcal{K}_{cx}$ adjoint à droite du foncteur $\mathcal{K}_{cx} \to \mathcal{K}/K$, $N \mapsto K \otimes N$. On observera enfin que si N est un objet abélien de $\mathcal{K}_{cx}$ alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{cx}}((M : K; \varphi)_{\mathcal{K}}, N)$ peut être vu comme l'espace des K-dérivations A-linéaires de M, considéré comme un K-module *via* φ, dans $K \otimes (N\_)$ [Bou3]. En particulier $\pi_t(M : K; \varphi)_{\mathcal{K}}$ est l'espace que l'on a noté $\mathrm{Der}^t_{\mathcal{K}}(M, K; \varphi)$ dans [La1].

1.11. Relation entre l'homologie (resp. la cohomologie) des espaces fonctionnels et les objets fonctionnels dans la catégorie $\mathcal{K}_*$ (resp. $\mathcal{K}$)

Soient à nouveau X et Y deux espaces. On note

$$h : H_* \,\mathbf{hom}(X, Y) \to \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y)$$

l'adjoint du $\mathcal{K}_*$-morphisme $H_* X \otimes H_* \mathbf{hom}(X, Y) \to H_* Y$ induit par l'application d'évaluation $X \times \mathbf{hom}(X, Y) \to Y$. L'application

$$\pi_0(h) : \pi_0(H_* \,\mathbf{hom}(X, Y)) \to \pi_0(\mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y))$$

s'identifie à l'application naturelle $[X, Y] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y)$, que l'on note encore h. On vérifie que l'application $h : [X, Y] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y)$ (resp. le $\mathcal{K}_*$-morphisme $h : H_* \,\mathbf{hom}(X, Y) \to \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y)$) est une bijection (resp. un isomorphisme) quand Y est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial.

On définit de même en cohomologie, sous l'hypothèse que $H^* X$ est de dimension finie en chaque degré, une application de A-algèbres instables :

$$h_c : (H^* Y : H^* X)_{\mathcal{K}} \to H^* \,\mathbf{hom}(X, Y)$$

qui est un isomorphisme quand Y est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial avec $\pi_* Y$ fini (l'indice c est là pour rappeler que l'on travaille en cohomologie). On peut aussi considérer (sans restriction sur $H^* X$) l'application d'ensembles $[X, Y] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^* Y, H^* X)$ que l'on note encore h_c et qui s'identifie à $h : [X, Y] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y)$ si $H^* Y$ est de dimension finie en chaque degré.

1.12. Identifications de $\pi^0 \pi_0 \,\mathbf{hom}(X, \mathrm{Rés}^{\bullet} Y)$ et $\pi^0 H_* \,\mathbf{hom}(X, \mathrm{Rés}^{\bullet} Y)$

Nous sommes à présent en mesure de décrire l'ensemble $\pi^0 \pi_0 \,\mathbf{hom}(X, \mathrm{Rés}^{\bullet} Y)$ et la A-coalgèbre instable $\pi^0 H_* \,\mathbf{hom}(X, \mathrm{Rés}^{\bullet} Y)$.

Puisque en chaque codegré n l'espace $\text{Rés}^n\, Y$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial, on a les identifications suivantes :

$$\begin{aligned}\pi_0\, \mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y) &= \text{Hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* \text{Rés}^\bullet Y)\\ &= \text{Hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, \text{Rés}^\bullet H_* Y)\\ \pi^0\, \pi_0\, \mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y) &= \pi^0\, \text{Hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, \text{Rés}^\bullet H_* Y)\end{aligned}$$

et puisque la coaugmentation $H_* X \to \text{Rés}^0 H_* X$ est l'égalisatrice, dans la catégorie $\mathscr{K}_*$, des applications $d^0, d^1 : \text{Rés}^0 H_* X \to \text{Rés}^1 H_* X$, on obtient finalement :

$$\pi^0\, \pi_0\, \mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y) = \text{Hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* Y).$$

En ce qui concerne $\pi^0\, H_*\, \mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y)$ on a de même :

$$\begin{aligned}H_*\, \mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y) &= \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* \text{Rés}^\bullet Y)\\ &= \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, \text{Rés}^\bullet H_* Y)\\ \pi^0\, H_*\, \mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y) &= \pi^0\, \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, \text{Rés}^\bullet H_* Y).\end{aligned}$$

La A-coalgèbre instable $\pi^0\, \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, \text{Rés}^\bullet H_* Y)$, comme on l'a vu au cours de la démonstration de la proposition 1.10.1, est l'objet fonctionnel $\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* Y)$; on obtient donc :

$$\pi^0\, H_*\, \mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y) = \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* Y).$$

On vérifie que l'application

$$e : \pi_0\, \mathbf{hom}(X, \hat{Y}) \to \pi^0\, \pi_0\, \mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y) \quad (\text{resp. } e : H_*\, \mathbf{hom}(X, \hat{Y}) \to \pi^0\, H_*\, \mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y))$$

introduite en 1.6 s'identifie à la composée

$$[X, \hat{Y}] \xrightarrow{h} \text{Hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* \hat{Y}) \to \text{Hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* Y)$$

(resp. $H_*\, \mathbf{hom}(X, \hat{Y}) \xrightarrow{h} \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* \hat{Y}) \to \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* Y)$) où la deuxième flèche est induite par l'application $e : H_* \hat{Y} \to H_* Y$ de 1.5.3 et que la composée

$$[X, Y] \to [X, \hat{Y}] \xrightarrow{e} \text{Hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* Y)$$

(resp. $H_*\, \mathbf{hom}(X, Y) \to H_*\, \mathbf{hom}(X, \hat{Y}) \xrightarrow{e} \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* Y)$) coïncide avec l'application $h : [X, Y] \to \text{Hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* Y)$ (resp. $h : H_*\, \mathbf{hom}(X, Y) \to \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* Y)$).

Localisations de l'espace cosimplicial $\mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y)$ *(et de son espace total* $\mathbf{hom}(X, \hat{Y})$*).*

L'ensemble $\pi^0\, \pi_0\, \mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y)$ une fois identifié, nous pouvons introduire les notations ci-dessous qu'il sera commode d'avoir à notre disposition par la suite. Soit S un sous-ensemble de $\text{Hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* Y)$; on pose

$$\mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y; S) = (\mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y))_{a(S)},$$

a désignant la bijection de $\text{Hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* X, H_* Y)$ sur $\pi^0\, \pi_0\, \mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y)$. L'espace total de $\mathbf{hom}(X, \text{Rés}^\bullet Y; S)$ est le localisé, en l'image réciproque de S par l'application

$e : \pi_0 \,\mathbf{hom}(X, \hat{Y}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y)$, de l'espace $\mathbf{hom}(X, \hat{Y})$; nous noterons ce localisé $\mathbf{hom}(X, \hat{Y}; S)$.

Continuité de l'application $e : [X, \hat{Y}] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y)$ *quand* $H_* Y$ *est de dimension finie en chaque degré.*

On a vu respectivement en 1.5.4 et 1.7.7 que lorsque $H_* Y$ est de dimension finie en chaque degré, les ensembles $[X, \hat{Y}]$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y)$ sont naturellement profinis. Il est facile de montrer alors que l'application $e : [X, \hat{Y}] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y)$ est continue. Il faut vérifier que la composée

$$[X, \hat{Y}] \xrightarrow{e} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{N}-\mathcal{E}ns}(H_* X, H_* Y)$$

(notation de 1.7.7) est continue. On s'en convainc en observant que la composée

$$[X, \hat{Y}] \xrightarrow{e} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* X, H_* Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_*}(H_* X, H_* Y)$$

s'identifie à l'application $[X, \hat{Y}] \to [X, \mathrm{Tot}_0\, \mathrm{Rés}^{\bullet} Y]$.

1.13. Dualités

La cohomologie modulo p d'un espace est juste le dual algébrique de son homologie modulo p, et le lecteur peut se demander à bon droit pourquoi nous avons traité, tout au long des paragraphes 1.7 à 1.11, à la fois d'homologie et de cohomologie, ce qui semble avoir doublé inutilement le nombre des définitions. Voici quelques justifications de ces répétitions apparentes.

Il existe tout d'abord des contextes mathématiques dans lesquels apparaissent naturellement des objets de $\mathcal{K}$ qui ne sont pas des duaux algébriques d'objets de $\mathcal{K}_*$. La catégorie $\mathcal{K}$ doit plutôt être considérée comme la catégorie dans laquelle vivent les limites inductives de A-algèbres instables de dimension finie en chaque degré (qui, elles, sont duales de A-coalgèbres instables). La cohomologie modulo p d'un groupe profini est un exemple d'un tel objet. Nous rencontrerons notamment des limites inductives de ce type en 1.13.4.3 ci-dessous et en 3.5. Ensuite les propriétés du foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $M \mapsto (M : H^*(BV; \mathbf{F}_p))_{\mathcal{U}}$ et surtout celles du foncteur $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $M \mapsto (M : H^*(BV; \mathbf{F}_p))_{\mathcal{K}}$, dont nous traiterons dans le prochain chapitre, sont plus riches que celles des foncteurs « homologiques » correspondants. Donnons deux exemples :

— le foncteur $M \mapsto (M : H^*(BV; \mathbf{F}_p))_{\mathcal{U}}$ est exact alors que le foncteur

$$M \mapsto \mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(H_*(BV; \mathbf{F}_p), M)$$

a un premier dérivé à gauche non trivial;

— pour toute A-algèbre instable M l'application naturelle du A-module instable $(M : H^*(BV; \mathbf{F}_p))_{\mathcal{U}}$ dans le A-module instable sous-jacent à $(M : H^*(BV; \mathbf{F}_p))_{\mathcal{K}}$ est un isomorphisme alors que dans le contexte homologique l'application

$$\mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_*(BV; \mathbf{F}_p), M) \to \mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(H_*(BV; \mathbf{F}_p), M)$$

n'est pas en général un isomorphisme.

L'objet de ce paragraphe est de dégager les phénomènes de dualité qui nous permettront au chapitre 2 d'obtenir dans certains cas, à partir des propriétés du foncteur $(- : \mathrm{H}^*(\mathrm{BV}; \mathbf{F}_p))_{\mathscr{U}}$, des énoncés concernant le foncteur $\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_*(\mathrm{BV}; \mathbf{F}_p), -)$.

1.13.1. Dans ce sous-paragraphe la notation $\mathscr{C}_*$ (resp. $\mathscr{C}$) désigne l'une des catégories $\mathscr{E}_*$, $\mathscr{U}_*$, $\mathscr{V}_*$ (notation introduite en 1.7.6), $\mathscr{K}_*$, ou $\mathscr{K}_{*\,cx}$ (resp. $\mathscr{E}$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{K}$, ou $\mathscr{K}_{cx}$). Si les cas $\mathscr{C}_* = \mathscr{K}_*$ et $\mathscr{C} = \mathscr{K}$, $\mathscr{C}_* = \mathscr{K}_{*\,cx}$ et $\mathscr{C} = \mathscr{K}_{cx}$, sont exclus nous dirons que nous sommes dans les *cas linéaires*. Rappelons que l'on a un foncteur « dual » $\mathscr{C}_* \to \mathscr{C}$, noté $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^*$. Dans les cas linéaires on a aussi un foncteur « dual » $\mathscr{C} \to \mathscr{C}_*$, noté $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}_*$. Si M est une A-algèbre instable, il faut la supposer de dimension finie en chaque degré pour pouvoir considérer sa coalgèbre duale que l'on notera encore M_*.

Soient N et C deux objets de $\mathscr{C}_*$ (resp. $\mathscr{C}$ dans les cas linéaires), on observera que l'application $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{N}, \mathrm{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{C}^*, \mathrm{N}^*), f \mapsto f^*$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{N}, \mathrm{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{C}_*, \mathrm{N}_*), f \mapsto f_*$) est une bijection si C est de dimension finie en chaque degré.

Nous aurons plus généralement à considérer ci-après des transformations naturelles en le $\mathscr{C}_*$-objet N, $d : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{N}, \mathrm{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{D}, \mathrm{N}^*)$, D désignant un objet de $\mathscr{C}$. La donnée d'une telle transformation naturelle est équivalente à celle du $\mathscr{C}$-morphisme $\delta = d(1_{\mathrm{C}})$ de D dans $\mathrm{C}^* : d(f) = f^* \circ \delta$. Dans les cas linéaires nous noterons $\delta_{*|} : \mathrm{C} \to \mathrm{D}_*$ le $\mathscr{C}_*$-morphisme restriction à C de $\delta_* : (\mathrm{C}^*)_* \to \mathrm{D}_*$.

Lemme **1.13.1.** — *Soient* C *un objet de* $\mathscr{C}_*$, D *un objet de* $\mathscr{C}$, *et* $\delta : \mathrm{D} \to \mathrm{C}^*$ *un* $\mathscr{C}$*-morphisme tel que la transformation naturelle en le* $\mathscr{C}_*$*-objet* N, $d : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{N}, \mathrm{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{D}, \mathrm{N}^*)$, *induite par* δ *est un isomorphisme.*

a) Si D *est de dimension finie en chaque degré alors* δ *est un isomorphisme, dual d'un* $\mathscr{C}_*$*-isomorphisme* $\mathrm{C} \to \mathrm{D}_*$ *dont l'inverse est* $(d_{\mathrm{D}_*})^{-1}(1_{\mathrm{D}})$.

b) Dans les cas linéaires le $\mathscr{C}_*$*-morphisme* $\delta_{*|} : \mathrm{C} \to \mathrm{D}_*$ *restriction de* δ_* *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Le point *a)* est formel. Passons au point *b)*. On vérifie que la transformation naturelle, notée $t_{\mathrm{N}} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{N}, \mathrm{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{N}, \mathrm{D}_*)$, induite par $\delta_{*|}$, est la composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{N}, \mathrm{C}) \xrightarrow{d_{\mathrm{N}}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{D}, \mathrm{N}^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}((\mathrm{N}^*)_*, \mathrm{D}_*) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{N}, \mathrm{D}_*),$$

dans laquelle la flèche du milieu correspond au foncteur dual de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}_*$ et la flèche de droite à la restriction de $(\mathrm{N}^*)_*$ à N. Il est donc clair que t_{N} est un isomorphisme si N est de dimension finie en chaque degré. Comme tout objet de $\mathscr{C}_*$ est limite inductive de ses sous-objets finis, t_{N} est un isomorphisme sans restrictions sur N.

1.13.2. *Dualité entre objets fonctionnels homologiques et cohomologiques.*

On exclut dans ce sous-paragraphe les cas $\mathscr{C}_* = \mathscr{V}_*$ et $\mathscr{C} = \mathscr{V}$, ainsi que $\mathscr{C}_* = \mathscr{K}_{*\,cx}$ et $\mathscr{C} = \mathscr{K}_{cx}$; on retrouve donc les conventions des énoncés 1.10.1 et 1.10.2.

Soient K et M deux objets de $\mathscr{C}_*$, avec K de dimension finie en chaque degré. On considère la transformation naturelle en le $\mathscr{C}_*$-objet N,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K} \otimes \mathrm{N}, \mathrm{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}^*, \mathrm{K}^* \otimes \mathrm{N}^*), f \mapsto f^*,$$

que l'on peut voir comme une transformation naturelle

$$d : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{N}, \mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M})) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}((\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{C}}, \mathrm{N}^*)$$

du type étudié ci-dessus. On considère également le $\mathscr{C}$-morphisme qui lui correspond :

$$\delta : (\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{C}} \to (\mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}))^*;$$

δ est donc l'adjoint de l'application : $\mathrm{M}^* \to \mathrm{K}^* \otimes (\mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}))^*$ duale de l' « évaluation » : $\mathrm{K} \otimes \mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ (*i.e.* l'adjointe de l'identité de $\mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M})$).

Attention : δ n'est pas en général un isomorphisme, même si l'on suppose M de dimension finie en chaque degré (voir les exemples ci-après), bien que dans ce cas la transformation naturelle d soit un isomorphisme. Cependant, on peut alors appliquer le lemme 1.13.1.

a) L'application δ est un isomorphisme si M et $(\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{C}}$ sont de dimension finie en chaque degré. En particulier :

— si M^* est engendré comme $\mathscr{C}$-objet par un nombre fini d'éléments;
— si M est de dimension finie en chaque degré et si K est fini.

b) Dans les cas linéaires l'application $\delta_{*|} : \mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}) \to ((\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{C}})_*$, restriction de $\delta_* : ((\mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}))^*)_* \to ((\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{C}})_*$, est un isomorphisme si M est de dimension finie en chaque degré.

On peut voir également *b)* comme une conséquence de *a)*. Pour cela on utilise le fait que $\mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M})$ et $((\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{C}})_*$ sont respectivement limites projectives des $\mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{S}k^n\,\mathrm{K}, \mathrm{M})$ et $(\mathrm{M}^* : (\mathrm{S}k^n\,\mathrm{K})^*)_{\mathscr{C}})_*$, $\mathrm{S}k^n\,\mathrm{K}$ désignant le « n-squelette » de K, c'est-à-dire le sous-objet de K formé des éléments de degré $\leqslant n$, lequel est fini. Ceci explique par ailleurs la structure profinie en chaque degré de $\mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M})$.

1.13.3. *Dualité entre* A-*coalgèbres instables colibres et* A-*algèbres instables libres.*

Soit E un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel gradué inférieurement; on considère cette fois la transformation naturelle en le $\mathscr{K}_*$-objet N, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}_*}(\mathrm{N}, \mathrm{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathrm{E}^*, \mathrm{N}^*)$, $f \mapsto f^*$, que l'on peut voir comme une transformation naturelle

$$d : \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{N}, \mathrm{C}(\mathrm{E})) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{G}(\mathrm{E}^*), \mathrm{N}^*)$$

(notations de 1.9). Le $\mathscr{K}_*$-morphisme

$$\delta : \mathrm{G}(\mathrm{E}^*) \to (\mathrm{C}(\mathrm{E}))^*$$

qui lui correspond est un isomorphisme si E est de dimension finie en chaque degré; en général δ est injectif mais le second membre est « beaucoup plus gros » que le premier.

Soit M une A-coalgèbre instable, il résulte de ce qui précède que le $\mathscr{K}_*$-morphisme naturel $\delta_* : \mathrm{Rés}_*(\mathrm{M}^*) \to (\mathrm{Rés}^*\,\mathrm{M})^*$ est un isomorphisme si M est de dimension finie en chaque degré.

1.13.4. *Exemples.*

1.13.4.1. Prenons $\mathscr{C}_* = \mathscr{E}_*$. On a, en degré n,

$$(\mathbf{hom}_{\mathscr{E}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}))^n = \Pi_{q \in \mathbf{N}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p}(\mathrm{K}_{q-n}, \mathrm{M}_q)$$

$$((\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{E}})^n = \bigoplus_{q \in \mathbf{N}}((\mathrm{M}_q)^* \otimes \mathrm{K}_{q-n})$$

$$= \bigoplus_{q \in \mathbf{N}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p}(\mathrm{K}_{q-n}, \mathrm{M}_q))^*$$

et l'application $\delta : ((\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{E}})^n \to ((\mathbf{hom}_{\mathscr{E}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}))^n)^*$ est l'application évidente.

1.13.4.2. Prenons $\mathscr{C}_* = \mathscr{K}_*$ et M colibre de dimension finie en chaque degré : $\mathrm{M} = \mathrm{C}(\mathrm{E})$, avec E de dimension finie en chaque degré. On a

$$\mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}) = \mathrm{C}(\mathbf{hom}_{\mathscr{E}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{E}))$$

$$(\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{C}} = \mathrm{G}((\mathrm{E}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{E}})$$

et l'application $\delta : (\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{C}} \to (\mathbf{hom}_{\mathscr{C}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}))^*$ est la composée de l'application $\mathrm{G}((\mathrm{E}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{E}}) \to \mathrm{G}((\mathbf{hom}_{\mathscr{E}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{E}))^*)$, image par le foncteur G de l'application

$$\delta : (\mathrm{E}^* : \mathrm{K}^*)_{\mathscr{E}} \to (\mathbf{hom}_{\mathscr{E}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{E}))^*$$

étudiée ci-dessus, et de l'application $\delta : \mathrm{G}((\mathbf{hom}_{\mathscr{E}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{E}))^*) \to (\mathrm{C}(\mathbf{hom}_{\mathscr{E}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{E})))^*$ de 1.13.3.

1.13.4.3. Soient X et Y deux espaces avec $\mathrm{H}_* \mathrm{X}$ de dimension finie en chaque degré, alors le diagramme suivant (notations de 1.11) :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{H}^* \mathrm{Y} : \mathrm{H}^* \mathrm{X})_{\mathscr{K}} \arrow[rr, "h_c"] \arrow[dr, "\delta"'] & & \mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \\
& (\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{X}, \mathrm{H}_* \mathrm{Y}))^* \arrow[ur, "h^*"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Supposons maintenant que Y est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial. L'application h (et h^*) est alors un isomorphisme mais l'exemple précédent montre que h_c n'en est pas un en général même si l'on suppose que $\mathrm{H}_* \mathrm{Y}$, ou ce qui revient au même $\pi_* \mathrm{Y}$, est de dimension finie en chaque degré. On peut cependant interpréter dans ce cas $(\mathrm{H}^* \mathrm{Y} : \mathrm{H}^* \mathrm{X})_{\mathscr{K}}$ de la façon ci-dessous. Rappelons tout d'abord la définition de la *q-troncature de Postnikov d'un espace* (voir par exemple [Ma], définition 8.1); comme on va le voir nous pourrions nous borner ici à introduire cette notion pour les $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels simpliciaux mais nous en aurons besoin dans un contexte plus général au chapitre 3. La q-troncature de Postnikov d'un espace Y, que nous noterons $\mathrm{P}^q \mathrm{Y}$, est l'espace image de l'application canonique $\mathrm{Y} \to \mathrm{Cosk}^q \mathrm{Y}$, $\mathrm{Cosk}^q : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ désignant l'adjoint à droite du foncteur $\mathrm{S}k^q$; le foncteur $\mathrm{P}^q : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ induit un foncteur de la catégorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels simpliciaux dans elle-même qui correspond *via* l'équivalence de cette catégorie avec celle des $\mathbf{F}_p$-complexes de chaînes au foncteur qui associe au complexe

$$C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \dots \leftarrow C_{q-1} \leftarrow C_q \leftarrow C_{q+1} \leftarrow C_{q+2} \leftarrow \dots$$

le complexe

$$C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \dots \leftarrow C_{q-1} \leftarrow C_q \leftarrow B_q \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots,$$

B_q désignant comme à l'ordinaire le sous-espace de C_q formé des bords. Revenons à notre $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial Y dont l'homotopie est de dimension finie en chaque degré :

— Y est la limite inverse des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels simpliciaux $P^q Y$, $q \in \mathbf{N}$;
— chaque $\pi_* P^q Y$ est fini et $h_c : (H^* P^q Y : H^* X)_{\mathscr{K}} \to H^* \mathbf{hom}(X, P^q Y)$ est un isomorphisme;
— $H^* Y$ est la limite directe, en tant que A-algèbre instable, des $H^* P^q Y$ et $(H^* Y : H^* X)_{\mathscr{K}}$ est la limite directe des $(H^* P^q Y : H^* X)_{\mathscr{K}}$.

En conclusion $(H^* Y : H^* X)_{\mathscr{K}}$ est naturellement isomorphe à la limite directe $\mathrm{colim}_{q \in \mathbf{N}} H^* \mathbf{hom}(X, P^q Y)$.

1.13.5. *Dualité entre localisés d'objets fonctionnels homologiques et cohomologiques.*

Soient K et M deux A-coalgèbres instables avec K de dimension finie en chaque degré; on note d_0 l'application $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(M, K) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(M^*, K^*)$, $\varphi \mapsto \varphi^*$. Soit S un sous-ensemble fermé de l'ensemble profini $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(M^*, K^*)$; l'application δ de 1.13.2 induit une application

$$\delta : (M^* : K^*; S)_{\mathscr{K}} \to (\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, M; d_0^{-1}(S)))^*.$$

On suppose maintenant que M est de dimension finie en chaque degré (d_0 est alors une bijection et même un homéomorphisme des topologies faibles) et que S est réduit à un point. On se donne donc un $\mathscr{K}_*$-morphisme $\varphi : K \to M$ et l'on considère l'application entre A-algèbres instables connexes :

$$\delta : (M^* : K^*; \varphi^*)_{\mathscr{K}} \to (\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, M; \varphi))^*$$

φ désignant un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(M, K)$. La transformation naturelle en le $\mathscr{K}_{*cx}$-objet N qui lui correspond

$$d : \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{*cx}}(N, \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, M; \varphi)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{cx}}((M^* : K^*; \varphi^*)_{\mathscr{K}}, N^*)$$

est un isomorphisme. Si $(M^* : K^*; \varphi^*)_{\mathscr{K}}$ est de dimension finie en chaque degré on peut appliquer le lemme 1.13.1 *a)*; en particulier l'application

$$((M^* : K^*; \varphi^*)_{\mathscr{K}})_* \to \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, M; \varphi)$$

adjointe de la duale de l' « évaluation » $M^* \to K^* \otimes (M^* : K^*; \varphi^*)_{\mathscr{K}}$ est un isomorphisme. On peut d'autre part restreindre la transformation naturelle ci-dessus à la sous-catégorie $\mathscr{V}_*$ des objets coabéliens; on obtient :

— un isomorphisme naturel en le $\mathscr{V}_*$-objet N

$$d : \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}_*}(\mathrm{N}, \mathrm{P}\,\mathbf{hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}; \varphi)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\mathrm{Q}(\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*; \varphi^*)_{\mathscr{X}}, \mathrm{N}^*);$$

— un $\mathscr{V}$-morphisme

$$\delta : \mathrm{Q}(\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*; \varphi^*)_{\mathscr{X}} \to (\mathrm{P}\,\mathbf{hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}; \varphi))^*;$$

— un $\mathscr{V}_*$-isomorphisme

$$\delta_{*|} : \mathrm{P}\,\mathbf{hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{M}; \varphi) \to (\mathrm{Q}(\mathrm{M}^* : \mathrm{K}^*; \varphi^*)_{\mathscr{X}})_*.$$

1.14. Objets fonctionnels et résolutions

1.14.1. *Dans la catégorie $\mathscr{S}$.*

1.14.1.1. Soient X et Y deux espaces. On définit une application cosimpliciale, notée $\rho^\bullet : \mathrm{Rés}^\bullet\,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet\mathrm{Y})$, de la façon suivante. L'application $\rho^0 : \mathbf{F}_p[\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})] \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathbf{F}_p[\mathrm{Y}])$ est la « linéarisation » de l'application

$$\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \eta) : \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathbf{F}_p[\mathrm{Y}]);$$

$\rho^n : \mathrm{Rés}^n\,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^n\,\mathrm{Y})$ est obtenue en itérant le procédé. L'application Tot $\rho^\bullet$ s'identifie à une application $(\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))^\wedge \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}})$.

Soient S un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{H}_*\,\mathrm{X}, \mathrm{H}_*\,\mathrm{Y})$ et $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ le localisé de $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ en $h^{-1}(\mathrm{S})$. Les définitions précédentes se localisent. On obtient une application cosimpliciale naturelle $\widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{és}^\bullet\,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \mathrm{S}) \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet\mathrm{Y}; \mathrm{S})$ et une application naturelle $(\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \mathrm{S}))^\wedge \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}; \mathrm{S})$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \mathrm{S}))^\wedge \arrow[rr] & & \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}; \mathrm{S}) \\ & \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \mathrm{S}). \arrow[ul, "\eta"] \arrow[ur, "\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \eta; \mathrm{S})"'] & \end{tikzcd}$$

Soit Z un troisième espace, il résulte de ce qui précède qu'une application $\omega : \mathrm{X} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$, ou $\tilde{\omega} : \mathrm{Z} \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, induit :

— une application d'espaces cosimpliciaux $\mathrm{Rés}^\bullet\mathrm{Z} \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet\mathrm{Y})$ (compatible avec les coaugmentations et $\tilde{\omega}$) et plus précisément $\widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{és}^\bullet\mathrm{Z} \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet\mathrm{Y}; \mathrm{S})$, S désignant l'image de l'application évidente $\pi_0\,\mathrm{Z} \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{H}_*\,\mathrm{X}, \mathrm{H}_*\,\mathrm{Y})$;

— une application $\hat{\mathrm{Z}} \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}})$ ou $\hat{\mathrm{Z}} \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}; \mathrm{S})$.

1.14.1.2. On observera incidemment qu'en prenant pour ω l'identité de $\mathrm{X} \times \mathrm{Z}$ on obtient une application $\nu : \mathrm{X} \times \hat{\mathrm{Z}} \to (\mathrm{X} \times \mathrm{Z})^\wedge$, naturelle en X et Z, qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{X} \times \hat{\mathrm{Z}} \arrow[rr, "\nu"] & & (\mathrm{X} \times \mathrm{Z})^\wedge \\ & \mathrm{X} \times \mathrm{Z}. \arrow[ul, "1_{\mathrm{X}} \times \eta_{\mathrm{Z}}"] \arrow[ur, "\eta_{\mathrm{X} \times \mathrm{Z}}"'] & \end{tikzcd}$$

1.14.1.3. Le diagramme de 1.14.1.1 conduit à l'énoncé suivant qui sera utilisé au chapitre 3 :

Lemme **1.14.1.3.** — *Si* Y *est fibrant et p-complet, les trois conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *l'application naturelle* $(\mathbf{hom}(X, Y; S))^{\wedge} \to \mathbf{hom}(X, \hat{Y}; S)$ *est une équivalence d'homotopie*;
(ii) *l'espace* $\mathbf{hom}(X, Y; S)$ *est p-complet*;
(iii) *l'espace* $\mathbf{hom}(X, Y; S)$ *est p-bon.*

Rappelons la terminologie de [BK1] : un espace Y est dit *p-complet* (resp. *p-bon*) si $\eta : Y \to \hat{Y}$ est une équivalence d'homotopie faible (resp. une équivalence d'homologie modulo p).

Démonstration. — Posons $Z = \mathbf{hom}(X, Y; S)$, $Z' = \mathbf{hom}(X, \hat{Y}; S)$, et notons ε l'application naturelle $\hat{Z} \to Z'$.

Observons que les espaces Z, Z', $\hat{Z}$, $\hat{Z}'$ sont fibrants et que la composée $\varepsilon \circ \eta_Z : Z \to Z'$ est une équivalence d'homotopie. La seule implication qui ne soit peut-être pas évidente est donc (iii) $\Rightarrow$ (i).

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \hat{Z} & \xrightarrow{\varepsilon} & Z' \\ {\scriptstyle \eta_{\hat{Z}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{Z'}} \\ (\hat{Z})^{\wedge} & \xrightarrow{\hat{\varepsilon}} & \hat{Z}'. \end{array}$$

Si Z est p-bon $\eta_{\hat{Z}}$ est une équivalence d'homotopie ([BK1], I, 5.2) et il en est de même pour $\hat{\varepsilon}$ puisque ε est une équivalence d'homologie modulo p ([BK1], I, 5.5), la composée $\eta_{Z'} \circ \varepsilon$ est donc une équivalence d'homotopie. Dans ce cas, puisque $\varepsilon \circ \eta_Z$ et $\eta_{Z'} \circ \varepsilon$ sont des équivalences d'homotopie, il en est de même pour ε.

1.14.2. *Dans les catégories* $\mathscr{K}_*$ *et* $\mathscr{K}$.

Soient K et M deux objets de $\mathscr{K}_*$ (resp. deux objets de $\mathscr{K}$ avec K de dimension finie en chaque degré). On définit *mutatis mutandis* un $\mathscr{K}_*$-morphisme cosimplicial (resp. $\mathscr{K}$-morphisme simplicial) $\rho^{\bullet} : \mathrm{Rés}^{\bullet}\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, M) \to \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, \mathrm{Rés}^{\bullet} M)$ (resp. $\rho_{\bullet} : (\mathrm{Rés}_{\bullet} M : K)_{\mathscr{K}} \to \mathrm{Rés}_{\bullet}(M : K)_{\mathscr{K}}$).

Soit N un troisième objet de $\mathscr{K}_*$ (resp. $\mathscr{K}$), une application $K \otimes N \to M$ (resp. $M \to K \otimes N$) induit une application cosimpliciale (resp. simpliciale)

$$\mathrm{Rés}^{\bullet} N \to \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, \mathrm{Rés}^{\bullet} M) \text{ (resp. } (\mathrm{Rés}_{\bullet} M : K)_{\mathscr{K}} \to \mathrm{Rés}_{\bullet} N).$$

Si l'on pose, comme en 1.5.2 et 1.9.1, $\widetilde{\mathrm{Rés}}^{\bullet} N = (\mathrm{Rés}^{\bullet} N)_{\pi^0 \pi_0 \mathrm{Rés}^{\bullet} N}$, on obtient encore une application $\widetilde{\mathrm{Rés}}^{\bullet} N \to \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(K, \mathrm{Rés}^{\bullet} M; S)$ (resp. $(\mathrm{Rés}_{\bullet} M : K; S)_{\mathscr{K}} \to \widetilde{\mathrm{Rés}}_{\bullet} N$), S désignant l'image de l'application évidente

$$\pi_0 N \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(K, M) \text{ (resp. } \pi_0 N \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(M, K)).$$

Ces constructions sont bien sûr compatibles avec les dualités détaillées en 1.13; on a en particulier un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Rés}_\bullet(\mathrm{M}^*) : \mathrm{K}^*; \varphi^*)_{\mathscr{K}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{és}_\bullet(\mathrm{N}^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{K}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{M}; \varphi))^* & \longrightarrow & (\widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{és}^\bullet \mathrm{N})^* \end{array}$$

(K étant de dimension finie en chaque degré et φ un $\mathscr{K}_*$-morphisme de K dans M).

On a tout fait également pour que les constructions de 1.14.1.1 et 1.14.2 soient compatibles : l'application $\mathrm{H}_* \widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{és}^\bullet \mathrm{Z} \to \mathrm{H}_* \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ image par le foncteur H_* de l'application induite par $\omega : \mathrm{X} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ s'identifie à l'application

$$\widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{és}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Z} \to \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \mathrm{S})$$

induite par $\mathrm{H}_* \omega$.

1.15. Conclusion du chapitre 1

Nous concluons ce premier chapitre en passant brièvement en revue les méthodes que nous fournissent Bousfield et Kan pour étudier l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}})$; cette revue est l'occasion de récapituler les points essentiels du chapitre.

On écrit tout d'abord $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}})$ comme la réunion disjointe des $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$, φ décrivant l'ensemble des homomorphismes de A-coalgèbres instables ($\mathscr{K}_*$-morphismes) de $\mathrm{H}_* \mathrm{X}$ dans $\mathrm{H}_* \mathrm{Y}$ et $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$ désignant la version simpliciale du sous-espace de $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}})$ formé des applications f telles que la composée de f_* et de l'application naturelle $\mathrm{H}_* \hat{\mathrm{Y}} \to \mathrm{H}_* \mathrm{Y}$ soit égale à φ. On écrit ensuite $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$ comme l'espace total d'un certain espace cosimplicial $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ et l'on fait les observations suivantes :

— Pour tout entier n l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^n \mathrm{Y}; \varphi)$ est un $\mathbf{F}_p$-espace affine simplicial connexe (la structure affine provient simplement de ce que l'image réciproque d'un point par une application linéaire entre espaces vectoriels est un espace affine).

— Les cofaces et codégénérescences de $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$, à l'exception de d^0, sont affines.

— Cet espace cosimplicial n'est pas *a priori* pointé (en fait la donnée d'un point base pour $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ est équivalente à celle d'une application $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ telle que $f_* = \varphi$); on peut cependant définir sans ambiguïté les groupes cosimpliciaux $\pi_t \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ $(t > 0)$.

— Le $\mathscr{K}_*$-objet cosimplicial $\mathrm{H}_* \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ et le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel cosimplicial $\pi_t \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ sont seulement fonction des $\mathscr{K}_*$-objets $\mathrm{H}_* \mathrm{X}$ et $\mathrm{H}_* \mathrm{Y}$ et du $\mathscr{K}_*$-morphisme φ :

$$\mathrm{H}_* \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi) = \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi)$$
$$\pi_t \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi) = \pi_t \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi).$$

On a alors les possibilités suivantes.

1) *a)* Supposons $\varphi = f_*$, f désignant une application de X dans Y; on peut considérer *la suite spectrale d'homotopie de l'espace cosimplicial pointé* $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ [BK1] [BK2] :

$$\pi^s \pi_t \,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi) \Rightarrow \pi_{t-s} \,\mathrm{Tot}\,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$$

(la notation $\pi^s \pi_t \,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ désigne le s-ième « groupe de cohomotopie » du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial $\pi_t \,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$, voir 1.1) ou encore :

$$\pi^s \pi_t \,\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi)$$
$$\Rightarrow \pi_{t-s} \,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi) = \pi_{t-s}(\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}); f)$$

(d'après la théorie des foncteurs dérivés des foncteurs non additifs il est raisonnable de noter $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{X}, \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi)$ le terme E_2 de cette suite spectrale qui doit être vue comme une suite spectrale d'Adams instable). On observera que l'on peut utiliser cette suite spectrale sans supposer que φ est induite par une application de X dans Y si l'on sait par ailleurs que l'espace $\mathrm{Tot}\,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ est non vide, puisque dans ce cas l'espace cosimplicial $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ est faiblement équivalent à un espace cosimplicial pointé.

b) Soient maintenant Z un espace, disons connexe pointé, et ω une application $\mathrm{X} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$; on prend pour $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ la restriction de ω à $\mathrm{X} \times *$. On peut étudier l'application $\hat{\mathrm{Z}} \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$, obtenue en appliquant le foncteur Tot à l'application cosimpliciale $\widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{és}^\bullet \mathrm{Z} \to \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ induite par ω, en considérant l'application, disons $\mathrm{E}_2(\omega)$, induite par ω entre les termes E_2 des suites spectrales d'homotopies. Là encore $\mathrm{E}_2(\omega)$ ne dépend que des $\mathscr{K}_*$-objets $\mathrm{H}_*\mathrm{X}$, $\mathrm{H}_* \mathrm{Y}$, $\mathrm{H}_* \mathrm{Z}$, et du $\mathscr{K}_*$-morphisme $\omega_* : \mathrm{H}_* \mathrm{X} \otimes \mathrm{H}_* \mathrm{Z} \to \mathrm{H}_* \mathrm{Y}$.

2) On peut utiliser la théorie d'obstructions de Bousfield ([Bou3], voir aussi l'appendice B) pour montrer que l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi) = \mathrm{Tot}\,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ est non vide (question qui manquerait de sel si l'on savait que l'espace cosimplicial dont on considère l'espace total est pointé !); les groupes d'obstructions sont les groupes

$$\pi^n \pi_{n-1} \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi) = \pi^n \pi_{n-1} \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi) \quad n \geqslant 2.$$

3) On peut enfin considérer *la suite spectrale d'homologie de l'espace cosimplicial* $\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ [Bou2] [An] [Re] :

$$\pi^s \mathrm{H}_* \,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi) \Rightarrow \mathrm{H}_* \,\mathrm{Tot}\,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$$

ou encore :

$$\pi^s \,\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{X}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi) \Rightarrow \mathrm{H}_* \,\mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi).$$

Tout le problème est dans la signification du symbole $\Rightarrow$ ci-dessus ! La référence [Bou2] contient notamment plusieurs théorèmes de convergence pour cette suite spectrale.

Chapitre 2

PROPRIÉTÉS DE LA COHOMOLOGIE MODULO p DES p-GROUPES ABÉLIENS ÉLÉMENTAIRES

Ce chapitre traite des propriétés de la cohomologie modulo p des p-groupes abéliens élémentaires qui font que les classifiants de ces groupes sont si particuliers comme source d'espaces fonctionnels.

Le cas essentiel est celui du groupe $\mathbf{Z}/p$.

On pose $\mathrm{H} = \mathrm{H}^* \mathrm{B}\mathbf{Z}/p = \mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathbf{Z}/p; \mathbf{F}_p)$ et on note T le foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M} : \mathrm{H})_{\mathcal{U}}$ adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{H} \otimes \mathrm{N}$ (voir 1.10.2). Les deux principales vertus de T sont de préserver les suites exactes et les produits tensoriels. Signalons que l'on pourra trouver dans [Ad] des démonstrations de ces deux résultats (pour $p = 2$) par des méthodes sensiblement différentes de celles présentées ici.

2.1. Exactitude du foncteur T

Par définition même tous les foncteurs $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathcal{U}}$ sont exacts à droite, le foncteur T, lui, préserve aussi les injections :

Théorème **2.1.1.** — *Le foncteur* $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *est exact.*

Ce théorème est une généralisation des résultats de G. Carlsson et H. R. Miller [Ca1] [Mi1] [LZ1] qui montrent que H est un objet injectif de la catégorie $\mathcal{U}$ (*$\mathcal{U}$-injectif*) et une reformulation du théorème suivant dû à S. Zarati et l'auteur [LZ1] :

Théorème **2.1.2.** — *Soit* I *un $\mathcal{U}$-injectif, alors le produit tensoriel* $\mathrm{H} \otimes \mathrm{I}$ *est encore $\mathcal{U}$-injectif.*

Donnons un point de vue un peu plus concret sur la preuve de 2.1.1. Soient M un A-module instable et n un entier. Notons $\mathrm{T}^n\,\mathrm{M}$ le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $(\mathrm{TM})^n$ formé des éléments de degré n de TM. Il faut montrer que le foncteur T^n est exact pour tout n. Soit i un entier; posons

$$\mathrm{L}_i^n\,\mathrm{M} = \operatorname{colim}\{\,\mathrm{M}^{2^q.i+n}, Sq^{2^q.i}; q \in \mathbf{N}\,\}, \quad \text{pour } p = 2$$

$$\mathrm{L}_i^n\,\mathrm{M} = \operatorname{colim}\{\,\mathrm{M}^{2p^q.i+n}, \mathrm{P}^{p^q.i}; q \in \mathbf{N}\,\}, \quad \text{pour } p > 2.$$

Les calculs de Carlsson et de Miller, et la proposition 5.4 de [LZ1], entraînent en fin de compte l'énoncé suivant :

Proposition **2.1.3.** — *Pour tout* A-*module instable* M *et tout entier n le* $\mathbf{F}_p$-*espace vectoriel* $\mathrm{T}^n\,\mathrm{M}$ *est un facteur direct naturel de la somme directe*

$$\bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathrm{L}_i^n\,\mathrm{M}.$$

Cette proposition implique bien que le foncteur T^n est exact.

Démonstration. — On reprend les notations de 1.10.3.2. Le foncteur $\mathscr{U} \to \mathscr{F}$, $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{L}_i^n\,\mathrm{M})^*$, est représenté par la limite projective, que l'on note $\mathrm{L}(i, n)$, du système :

$$\{\mathrm{J}(2^q.i + n),\ .\mathrm{S}q^{2^{q-1}.i};\ q \in \mathbf{N}\}, \quad \text{pour } p = 2$$

$$\{\mathrm{J}(2p^q.i + n),\ .\mathrm{P}^{p^{q-1}.i};\ q \in \mathbf{N}\}, \quad \text{pour } p > 2.$$

On pose également $\mathrm{L}(i, 0) = \mathrm{K}(i)$; on vérifie que $\mathrm{K}(i)$ est de dimension finie en chaque degré (en un degré fixé le système projectif dont $\mathrm{K}(i)$ est la limite inverse devient « stationnaire » pour q grand). L'isomorphisme $\mathrm{L}(i, n) \cong \mathrm{K}(i) \otimes \mathrm{J}(n)$ de la proposition 5.4 de [LZ1] induit un isomorphisme

$$(\mathrm{L}_i^n\,\mathrm{M})^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\mathrm{M}, \mathrm{K}(i) \otimes \mathrm{J}(n)),$$

ou encore $\qquad (\mathrm{L}_i^n\,\mathrm{M})^* \cong (((\mathrm{M} : \mathrm{K}(i))_{\mathscr{U}})^n)^*.$

Comme cet isomorphisme est compatible avec les topologies profinies des deux membres (passer à la limite inductive sur les sous-modules de type fini) on obtient finalement un isomorphisme, naturel en M,

$$\mathrm{L}_i^n\,\mathrm{M} \cong ((\mathrm{M} : \mathrm{K}(i))_{\mathscr{U}})^n.$$

Or Carlsson (pour $p = 2$) et Miller (pour $p > 2$) montrent que H est facteur direct dans la somme directe $\bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant p-1} \mathrm{K}(i)$ (pour un « remake » des preuves de Carlsson et Miller voir aussi l'appendice A de [LZ1]).

2.2. Foncteur T et produits tensoriels de A-modules instables

Soient M un A-module instable et K un A-module instable de dimension finie en chaque degré. On note $\gamma_{\mathrm{M,K}} : \mathrm{M} \to \mathrm{K} \otimes (\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathscr{U}}$ l'adjointe de l'identité de $(\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathscr{U}}$; on abrège la notation $\gamma_{\mathrm{M,H}}$ en γ_{M}. Soient M_i, K_i, $i = 1, 2$, comme ci-dessus. Le produit tensoriel $\gamma_{\mathrm{M}_1,\mathrm{K}_1} \otimes \gamma_{\mathrm{M}_2,\mathrm{K}_2}$ s'identifie à une application

$$\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2 \to (\mathrm{K}_1 \otimes \mathrm{K}_2) \otimes ((\mathrm{M}_1 : \mathrm{K}_1)_{\mathscr{U}} \otimes (\mathrm{M}_2 : \mathrm{K}_2)_{\mathscr{U}})$$

dont l'adjointe est une application $(\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2 : \mathrm{K}_1 \otimes \mathrm{K}_2)_{\mathscr{U}} \to (\mathrm{M}_1 : \mathrm{K}_1)_{\mathscr{U}} \otimes (\mathrm{M}_2 : \mathrm{K}_2)_{\mathscr{U}}$.

Si K possède un produit A-linéaire $K \otimes K \to K$, on note

$$\mu_{M_1, M_2, K} : (M_1 \otimes M_2 : K)_{\mathcal{U}} \to (M_1 : K)_{\mathcal{U}} \otimes (M_2 : K)_{\mathcal{U}},$$

la composée de l'application $(M_1 \otimes M_2 : K)_{\mathcal{U}} \to (M_1 \otimes M_2 : K \otimes K)_{\mathcal{U}}$ induite par ce produit, et de l'application $(M_1 \otimes M_2 : K \otimes K)_{\mathcal{U}} \to (M_1 : K)_{\mathcal{U}} \otimes (M_2 : K)_{\mathcal{U}}$ décrite plus haut.

On dispose donc en particulier d'une application naturelle

$$T(M_1 \otimes M_2) \to TM_1 \otimes TM_2,$$

que l'on note simplement μ_{M_1, M_2}.

Théorème **2.2.1.** — *Pour tous* A-*modules instables* M_1 *et* M_2, *l'application naturelle*

$$\mu_{M_1, M_2} : T(M_1 \otimes M_2) \to TM_1 \otimes TM_2$$

est un isomorphisme.

Remarque. — L'application $\pi : T\mathbf{F}_p \to \mathbf{F}_p$ adjointe de l'unité de H, $\mathbf{F}_p \to H \cong H \otimes \mathbf{F}_p$, est un isomorphisme et l'isomorphisme fonctoriel $T(\mathbf{F}_p \otimes M) \cong TM$ est le composé de $\mu_{\mathbf{F}_p, M}$ et de $\pi \otimes 1_M$.

Soit F(n) le A-module instable caractérisé par l'isomorphisme fonctoriel

$$M^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M)$$

(F(n) est le A-module instable librement engendré par un générateur de degré n [SE]); la démonstration du théorème 2.2.1 se ramène facilement à celle de la proposition suivante :

Proposition **2.2.2.** — *Pour tous entiers* n_1 *et* n_2, *l'application* $\mu_{F(n_1), F(n_2)}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration de l'implication 2.2.2 ⇒ 2.2.1. — Soient M_1 et M_2 deux A-modules instables. Soit $L_{i,1} \to L_{i,0} \to M_i \to 0$, $i = 1, 2$, le début d'une résolution libre de M_i dans la catégorie $\mathcal{U}$ ($L_{i,1}$ et $L_{i,0}$ sont des sommes directes de F(n)). Si $\mu_{F(n_1), F(n_2)}$ est un isomorphisme pour tout n_2 il en est de même pour $\mu_{F(n_1), L_{2,j}}$, $j = 0, 1$, puisque T préserve les sommes directes, et pour $\mu_{F(n_1), M_2}$ puisque T est exact à droite. Pareillement si $\mu_{F(n_1), M_2}$ est un isomorphisme pour tout n_1, il en est de même pour $\mu_{L_{1,0}, M_2}$, $\mu_{L_{1,1}, M_2}$, et μ_{M_1, M_2}.

Avant de passer à la démonstration de la proposition 2.2.2, on va montrer que le foncteur T commute au foncteur suspension, ce qui, comme on le verra, peut être considéré comme un cas particulier de 2.2.1.

Foncteur T *et suspension.* — On reprend les notations du début de ce paragraphe et l'on note $\sigma_{M,K} : (\Sigma M : K)_{\mathcal{U}} \to \Sigma(M : K)_{\mathcal{U}}$ l'application naturelle adjointe de

$$\Sigma\gamma_{M,K} : \Sigma M \to \Sigma(K \otimes (M : K)_{\mathcal{U}}) \cong K \otimes \Sigma(M : K)_{\mathcal{U}};$$

on abrège la notation $\sigma_{M,H}$ en σ_M.

Rappelons que l'on dit qu'un A-module instable K est *réduit* si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma M, K)$ est trivial pour tout A-module instable M (voir par exemple [LSc1], 6.1); on vérifie aisément que H est réduit (voir par exemple [LZ1], démonstration du corollaire 7.2).

Proposition **2.2.3.** — *Soit* K *un* A-*module instable de dimension finie en chaque degré. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est réduit;*

(ii) *l'application naturelle* $\sigma_{M,K} : (\Sigma M : K)_{\mathcal{U}} \to \Sigma(M : K)_{\mathcal{U}}$ *est un isomorphisme pour tout* A-*module instable* M. *En particulier l'application naturelle*

$$\sigma_M : T\Sigma M \to \Sigma TM$$

est un isomorphisme pour tout A-*module instable* M.

Démonstration. — L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est une reformulation de la proposition 8.1.1 de [LZ1] (à la restriction de finitude près, nécessaire ici pour que le foncteur $(- : K)_{\mathcal{U}}$ soit défini). On peut aussi montrer la commutation des foncteurs T et Σ en vérifiant que l'application naturelle $T^n(\Sigma M) \to (\Sigma TM)^n = (TM)^{n-1}$ induite en degré n par σ_M est compatible avec la projection naturelle $\bigoplus_{0\leqslant i\leqslant p-1} L_i^n M \to T^n M$ de 2.1.3 et les isomorphismes évidents $L_i^n(\Sigma M) \cong L_i^{n-1} M$ (c'est d'ailleurs là essentiellement le même argument que celui de la démonstration de la proposition 8.1.1 de [LZ1] !). L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est évidente : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma M, K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}((\Sigma M : K)_{\mathcal{U}}, \mathbf{F}_p)$.

Remarque. — Soit $\pi_M : TM = (M : H)_{\mathcal{U}} \to M \cong (M : \mathbf{F}_p)_{\mathcal{U}}$ l'application naturelle induite par l'application unité de H, $\mathbf{F}_p \to H$ (observer que $\pi_{\mathbf{F}_p}$ coïncide avec l'isomorphisme $\pi : T\mathbf{F}_p \to \mathbf{F}_p$ qui apparaît dans la remarque qui suit l'énoncé 2.2.1). On montre facilement ([La1] proposition 4.1, [LSc1] implication (i) $\Rightarrow$ (ii) de la proposition 5.1) :

Proposition **2.2.4.** — *L'application naturelle* $\pi_M : TM \to M$ *est un isomorphisme si* M *est un* A-*module instable localement fini.*

(On dit qu'un A-module M est localement fini si pour tout élément x de M le sous-A-module Ax est fini.)

En particulier $\pi_{\Sigma\mathbf{F}_p}$ est un isomorphisme et l'on vérifie que l'application naturelle σ_M s'identifie à $\mu_{\Sigma\mathbf{F}_p, M}$ si bien que l'on peut voir la seconde partie de 2.2.3 comme un cas particulier de 2.2.1.

2.2.5. *Démonstration de la proposition* 2.2.2 *(et donc du théorème* 2.2.1*) dans le cas* $p = 2$ (pour une variante de cette démonstration, voir [La1]).

Rappelons tout d'abord la définition du foncteur $\Omega : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Ce foncteur est l'adjoint à droite du foncteur suspension $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Comme Σ n'est rien d'autre que le produit tensoriel par $\Sigma\mathbf{F}_p$, on a

$$\Omega M = (M : \Sigma\mathbf{F}_p)_{\mathcal{U}}.$$

Il est clair que les foncteurs T et Ω commutent; en effet tous les foncteurs $(- : \mathrm{K})_{\mathcal{U}}$ commutent entre eux :

$$\begin{aligned}(- : \mathrm{K}_2)_{\mathcal{U}} \circ (- : \mathrm{K}_1)_{\mathcal{U}} \cong (- : \mathrm{K}_1 \otimes \mathrm{K}_2)_{\mathcal{U}} &\cong (- : \mathrm{K}_2 \otimes \mathrm{K}_1)_{\mathcal{U}} \\ &\cong (- : \mathrm{K}_1)_{\mathcal{U}} \circ (- : \mathrm{K}_2)_{\mathcal{U}}.\end{aligned}$$

Pour $p = 2$ le A-module instable $\Sigma\Omega\mathrm{M}$ s'identifie au quotient de M par le sous-A-module constitué des éléments de la forme $Sq^{|x|}\, x$. Ceci peut se formaliser de la façon suivante. Soit $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ le foncteur « *double* » défini par :

$$(\Phi\mathrm{M})^n = \begin{cases} \mathrm{M}^{n/2} & \text{si } n \equiv 0\ (2) \\ 0 & \text{si } n \equiv 1\ (2) \end{cases} \quad \text{et} \quad Sq^i(\Phi x) = \begin{cases} \Phi(Sq^{i/2}\, x) & \text{si } i \equiv 0\ (2) \\ 0 & \text{si } i \equiv 1\ (2), \end{cases}$$

Φx désignant l'élément de $(\Phi\mathrm{M})^{2n}$ correspondant à un élément x de M^n. L'application : $\Phi\mathrm{M} \to \mathrm{M}$, $\Phi x \mapsto Sq^{|x|}\, x$, est A-linéaire de degré zéro ce qui donne une transformation naturelle, que l'on note λ, de Φ dans l'identité de $\mathcal{U}$. On a donc

$$\Sigma\Omega\mathrm{M} \cong \operatorname{coker} \lambda_{\mathrm{M}}.$$

On observera que M est réduit si et seulement si l'application $\lambda_{\mathrm{M}} : \Phi\mathrm{M} \to \mathrm{M}$ est injective.

Soient maintenant M_1 et M_2 deux A-modules instables. Le A-module instable $\Phi(\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2)$ est naturellement isomorphe au produit tensoriel $\Phi\mathrm{M}_1 \otimes \Phi\mathrm{M}_2$ et $\lambda_{\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2}$ s'identifie à $\lambda_{\mathrm{M}_1} \otimes \lambda_{\mathrm{M}_2}$. Il en résulte que l'on a un carré cartésien (et cocartésien) dans $\mathcal{U}$:

$$\begin{tikzcd} & \Omega(\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{M}_1 \otimes \Omega\mathrm{M}_2 \arrow[dr] & & (\Omega\mathrm{M}_1) \otimes \mathrm{M}_2 \arrow[dl] \\ & \Sigma(\Omega\mathrm{M}_1 \otimes \Omega\mathrm{M}_2) & \end{tikzcd}$$

fonctoriel en M_1 et M_2, que l'on note $\Delta(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)$.

Considérons la transformation naturelle du diagramme $\mathrm{T}\,\Delta(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)$ dans le diagramme $\Delta(\mathrm{TM}_1, \mathrm{TM}_2)$ induite par :

— l'isomorphisme naturel $\mathrm{T}\Omega(\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2) \cong \Omega\mathrm{T}(\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2)$ et la transformation naturelle $\Omega\mu_{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2}$;

— la transformation naturelle $\mu_{\mathrm{M}_1, \Omega\mathrm{M}_2}$ et l'isomorphisme naturel $\mathrm{T}\Omega\mathrm{M}_2 \cong \Omega\mathrm{TM}_2$;

— la transformation naturelle $\mu_{\Omega\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2}$ et l'isomorphisme naturel $\mathrm{T}\Omega\mathrm{M}_1 \cong \Omega\mathrm{TM}_1$;

— l'isomorphisme naturel $\mathrm{T}\Sigma(\Omega\mathrm{M}_1 \otimes \Omega\mathrm{M}_2) \cong \Sigma\mathrm{T}(\Omega\mathrm{M}_1 \otimes \Omega\mathrm{M}_2)$, la transformation naturelle $\Sigma\mu_{\Omega\mathrm{M}_1, \Omega\mathrm{M}_2}$, et les isomorphismes naturels $\mathrm{T}\Omega\mathrm{M}_1 \cong \Omega\mathrm{TM}_1$ et $\mathrm{T}\Omega\mathrm{M}_2 \cong \Omega\mathrm{TM}_2$.

Puisque T est exact le diagramme $\mathrm{T}\,\Delta(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)$ est encore cartésien; on en déduit que si les applications $\mu_{\Omega\mathrm{M}_1, \Omega\mathrm{M}_2}$, $\mu_{\mathrm{M}_1, \Omega\mathrm{M}_2}$, $\mu_{\Omega\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2}$ sont des isomorphismes alors il en est de même pour l'application $\Omega\mu_{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2}$. En particulier si les applications $\mu_{\mathrm{F}(n_1-1), \mathrm{F}(n_2-1)}$,

$\mu_{F(n_1), F(n_2-1)}$, $\mu_{F(n_1-1), F(n_2)}$, sont des isomorphismes, alors il en est de même pour l'application $\Omega\mu_{F(n_1), F(n_2)}$.

Ce qui précède fournit une méthode de démonstration de la proposition 2.2.2, pour $p = 2$; on procède par récurrence sur n_1 et n_2 en utilisant le lemme suivant :

Lemme **2.2.5.1.** — *Soit* $f: M \to N$ *un homomorphisme de* A-*modules instables*; *on suppose que* N *est réduit. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) f *est un isomorphisme*;

(ii) Ωf *est un isomorphisme ainsi que* $f: M^0 \to N^0$.

Démonstration. — On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \Phi M & \xrightarrow{\lambda_M} & M & \longrightarrow & \Sigma\Omega M & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \Phi f} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle \Sigma\Omega f} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Phi N & \xrightarrow{\lambda_N} & N & \longrightarrow & \Sigma\Omega N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes. Si Ωf est un isomorphisme on a la chaîne d'implications suivante :

$f: M^k \to N^k$ isomorphisme pour $k \leqslant n \Rightarrow \Phi f: (\Phi M)^k \to (\Phi N)^k$ isomorphisme pour $k \leqslant 2n + 1 \Rightarrow f: M^k \to N^k$ isomorphisme pour $k \leqslant 2n + 1$.

Pour que la démonstration de la proposition 2.2.2, pour $p = 2$, soit complète il faut donc vérifier que $TF(n_1) \otimes TF(n_2)$ est réduit et que

$$\mu_{F(n_1), F(n_2)}: T^0(F(n_1) \otimes F(n_2)) \to T^0\, F(n_1) \otimes T^0\, F(n_2)$$

est un isomorphisme. Le premier point est clair : $TF(n)$ est libre (par définition les foncteurs $(- : K)_{\mathscr{U}}$ transforment A-modules instables libres en A-modules instables libres, on trouve ici $TF(n) \cong \bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant n} F(k))$, donc réduit ($F(n)$ est réduit), et le produit tensoriel de deux A-modules instables réduits est réduit. Le second est équivalent à l'énoncé suivant (observer que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H \otimes \mathbf{F}_p)$ est isomorphe à $(T^0\, M)^*$) :

Lemme **2.2.5.2.** — *L'application naturelle induite par le produit de* H :

$$\mathbf{F}_2 \cong H^{n_1} \otimes H^{n_2} \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(F(n_1), H) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(F(n_2), H) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(F(n_1) \otimes F(n_2), H)$$

est un isomorphisme pour tous entiers n_1 *et* n_2.

Démonstration. — Comme cette application est manifestement injective il suffit de démontrer l'inégalité $\dim_{\mathbf{F}_2} \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(F(n_1) \otimes F(n_2), H) \leqslant 1$. Or on a, pour tous A-modules instables M_1 et M_2, l'inégalité

$$\dim_{\mathbf{F}_2} \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1 \otimes M_2, H) \leqslant \dim_{\mathbf{F}_2} \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1 \otimes \Phi M_2, H).$$

Pour s'en convaincre, considérer la suite exacte

$$M_1 \otimes \Phi M_2 \xrightarrow{1 \otimes \lambda_{M_2}} M_1 \otimes M_2 \to \Sigma(M_1 \otimes \Omega M_2) \to 0$$

et appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(-, H)$. En itérant on obtient

$$\dim_{F_2} \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1 \otimes M_2, H) \leqslant \dim_{F_2} \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1 \otimes \Phi^q M_2, H),$$

Φ^q désignant le q-ième itéré du foncteur Φ. On achève alors grâce au lemme suivant :

Lemme **2.2.5.3.** — *Soit q un entier tel que $2^q > n_1$, alors le* A-*module instable* $F(n_1) \otimes \Phi^q F(n_2)$ *est monogène.*

Démonstration. — Elle résulte des deux points suivants :

— pour tout entier n et tout A-module instable M, le produit tensoriel $F(n) \otimes M$ est engendré comme A-module par les éléments de la forme $\iota_n \otimes x$, ι_n désignant le générateur de $F(n)$;

— si $2^q > n$ on a

$$Sq^{2^q i}(\iota_n \otimes \Phi^q x) = \iota_n \otimes \Phi^q Sq^i x.$$

2.2.6. — *Démonstration du théorème* 2.2.1 *dans le cas $p > 2$.*

On utilise la méthode du « passage par $\mathscr{U}'$ » employée à plusieurs reprises dans [Za1] [Za2] [LZ1] [LSc1].

On note $\mathscr{U}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}$ dont les objets sont les A-modules instables *pairs*, *i.e.* nuls en degré impair. On note $\mathcal{O} : \mathscr{U}' \to \mathscr{U}$ le foncteur oubli et $\widetilde{\mathcal{O}} : \mathscr{U} \to \mathscr{U}'$ son adjoint à droite ($\mathcal{O}\widetilde{\mathcal{O}}M$ est le plus grand sous-A-module pair de M).

La proposition 2.1.3 montre que si un A-module instable M est pair, alors il en est de même pour TM; le foncteur T induit donc un foncteur de $\mathscr{U}'$ dans $\mathscr{U}'$ que l'on note T'. Par définition, T' est l'adjoint à gauche du foncteur $\mathscr{U}' \to \mathscr{U}'$, $N \mapsto \widetilde{\mathcal{O}}(H \otimes \mathcal{O}N)$, qui n'est rien d'autre que le foncteur $N \mapsto P \otimes N$, P désignant le sous-A-module (instable) pair de H formé des éléments de degré pair.

On montre que le foncteur T' préserve les produits tensoriels en remplaçant formellement 2 par p dans la démonstration précédente (on vérifie en particulier que le $\mathscr{U}$-isomorphisme $\Phi(M_1 \otimes M_2) \cong \Phi M_1 \otimes \Phi M_2$ utilisé pour $p = 2$ a son « $\mathscr{U}'$-analogue » pour $p > 2$).

On en déduit que l'application naturelle $\mu_{M_1, M_2} : T(M_1 \otimes M_2) \to TM_1 \otimes TM_2$ est un isomorphisme pour M_1 et M_2 pairs. On étend ce résultat par la méthode suivante inspirée de [Za1].

Soit M un A-module instable quelconque; S. Zarati observe dans l'article cité que le quotient $M/\mathcal{O}\widetilde{\mathcal{O}}M$ est une suspension, aussi peut-on définir un foncteur $Z : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ en posant $M/\mathcal{O}\widetilde{\mathcal{O}}M = \Sigma ZM$. Soit Z^k le k-ième itéré de Z; on note $F_k M$ le noyau de la surjection naturelle $M \to \Sigma^{k+1} Z^{k+1} M$ ($k \geqslant -1$). On obtient ainsi une filtration fonctorielle de M :

$$0 = F_{-1} M \subset \mathcal{O}\widetilde{\mathcal{O}} M = F_0 M \subset F_1 M \subset \ldots \subset F_k M \subset \ldots \subset M.$$

Par construction le quotient $F_k M/F_{k-1} M$ est la suspension k-ième d'un A-module instable pair :

$$F_k M/F_{k-1} M \cong \Sigma^k(\mathcal{O}\widetilde{\mathcal{O}} Z^k M)$$

et M est la réunion croissante des $F_k M$; plus précisément tout élément de M de degré $\leqslant k$ appartient à $F_k M$. Comme T est exact, commute à la suspension, et préserve les limites inductives, on voit que μ_{M_1, M_2} est un isomorphisme, tout d'abord si M_1 est pair et M_2 quelconque (filtrer M_2 comme indiqué ci-dessus), et puis si M_1 et M_2 sont quelconques (cette fois filtrer M_1).

2.3. Foncteur T et A-algèbres instables

Proposition **2.3.1** — *Soit* M *une* A-*algèbre instable*; *soient respectivement* $\varphi : M \otimes M \to M$ *et* $\eta : \mathbf{F}_p \to M$ *le produit et l'unité de* M. *Alors les applications*

$$(T\varphi) \circ ((\mu_{M,M})^{-1}) : TM \otimes TM \to TM \qquad et \qquad T\eta : \mathbf{F}_p = T\mathbf{F}_p \to TM$$

font du A-*module instable* TM *une* A-*algèbre instable.*

Démonstration. — Le seul point dont il faille se convaincre est que la donnée $(TM, (T\varphi) \circ ((\mu_{M,M})^{-1}), T\eta)$ vérifie bien l'axiome ($\mathscr{K}$.3) de la définition des A-algèbres instables reliant l'élévation à la puissance p-ième à la structure de A-module (voir 1.7.2).

Dans ce but commençons par décrire une version « fonctorielle » de cet axiome. Introduisons le foncteur $\Theta : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ défini par :

$$\Theta M = \hat{H}^0(\mathfrak{S}_p; M^{\otimes p}).$$

Dans cette formule $\mathfrak{S}_p$ désigne le groupe symétrique d'ordre p, que l'on fait opérer sur $M^{\otimes p}$ par permutation des facteurs (attention aux signes : M est **N**-gradué !) et $\hat{H}^0(\; ; \;)$ est le 0-ième groupe de cohomologie de Tate (« les invariants divisés par les normes »). On peut expliciter le foncteur Θ comme suit.

Pour $p > 2$ l'application $M^{2m} \to (\Theta M)^{2pm}$, $x \mapsto$ classe de $x^{\otimes p}$, est un isomorphisme, $(\Theta M)^n$ est trivial si n est non divisible par $2p$, et Θ peut être défini directement par les formules :

$$(\Theta M)^n = \begin{cases} M^{n/p} & \text{si } n \equiv 0 \ (2p) \\ 0 & \text{si } n \not\equiv 0 \ (2p) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad P^i(\Theta x) = \begin{cases} \Theta(P^{i/p} x) & \text{si } i \equiv 0 \ (p) \\ 0 & \text{si } i \not\equiv 0 \ (p) \end{cases}$$

où Θx désigne l'élément de $(\Theta M)^{2pm}$ correspondant à un élément x de M^{2n}. De la même façon, pour $p = 2$, l'application $M^m \to (\Theta M)^{2m}$, $x \mapsto$ classe de $x \otimes x$, est un isomorphisme, $(\Theta M)^n$ est trivial si n est impair, et le foncteur Θ coïncide avec le foncteur Φ introduit en 2.2.5.

Cette explicitation permet d'analyser le comportement du foncteur Θ vis-à-vis des produits tensoriels. Là encore il faut distinguer entre les cas $p > 2$ et $p = 2$. Soient M_1 et M_2 deux A-modules instables; les formules ci-dessus montrent que l'on a une inclusion A-linéaire naturelle $\iota_{M_1, M_2} : \Theta M_1 \otimes \Theta M_2 \to \Theta(M_1 \otimes M_2)$. Si $p = 2$, ι_{M_1, M_2} est un isomorphisme comme nous l'avons déjà dit et utilisé. Il n'en est plus ainsi pour $p > 2$; cependant dans ce cas ι_{M_1, M_2} admet une rétraction tout aussi A-linéaire et naturelle $\rho_{M_1, M_2} : \Theta(M_1 \otimes M_2) \to \Theta M_1 \otimes \Theta M_2$ définie par :

$$\Theta(x \otimes y) \mapsto \begin{cases} \Theta x \otimes \Theta y & \text{si } |x| \equiv |y| \equiv 0 \ (2) \\ 0 & \text{si } |x| \equiv |y| \equiv 1 \ (2); \end{cases}$$

pour $p = 2$, on pose $\rho_{M_1, M_2} = (\iota_{M_1, M_2})^{-1}$.

Pour $p > 2$, on vérifie (utiliser l'instabilité de M) que l'application

$$\Theta M \to M, \ \Theta x \mapsto P^{|x|/2} x,$$

est A-linéaire de degré zéro; cette application est notée ξ^1_M. Pour $p = 2$ on pose $\xi^1_M = \lambda_M$ (λ_M désignant l'application introduite en 2.2.5, définie par $\lambda_M(\Phi x) = Sq^{|x|} x$). On vérifie également que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Theta(M_1 \otimes M_2) \arrow[rr, "\xi^1_{M_1 \otimes M_2}"] \arrow[dr, "\rho_{M_1, M_2}"'] & & M_1 \otimes M_2 \\ & \Theta M_1 \otimes \Theta M_2 \arrow[ur, "\xi^1_{M_1} \otimes \xi^1_{M_2}"'] & \end{tikzcd}$$

(utiliser à nouveau l'instabilité de M_1 et M_2).

Introduisons maintenant la catégorie, notée $\widehat{\mathscr{K}}$, obtenue en supprimant l'axiome ($\mathscr{K}$.3) dans la définition de la catégorie $\mathscr{K}$ des A-algèbres instables; $\widehat{\mathscr{K}}$ est donc une sous-catégorie de $\mathscr{U}$ qui contient $\mathscr{K}$ comme sous-catégorie pleine. Soit M un objet de $\widehat{\mathscr{K}}$; on note $\xi^2_M : \Theta M \to M$ l'application (A-linéaire de degré zéro) induite par le produit de M; on a donc $\xi^2_M(\Theta x) = x^p$, x désignant un élément de degré pair si $p > 2$ et de degré quelconque si $p = 2$ (on pose dans ce dernier cas $\Theta x = \Phi x$). Il est clair que l'on a une notion de produit tensoriel dans $\widehat{\mathscr{K}}$ et que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \Theta(M_1 \otimes M_2) \arrow[rr, "\xi^2_{M_1 \otimes M_2}"] \arrow[dr, "\rho_{M_1, M_2}"'] & & M_1 \otimes M_2 \\ & \Theta M_1 \otimes \Theta M_2 \arrow[ur, "\xi^2_{M_1} \otimes \xi^2_{M_2}"'] & \end{tikzcd}$$

est encore commutatif.

Nous pouvons à présent reformuler l'axiome ($\mathscr{K}$.3) : un objet M de $\widehat{\mathscr{K}}$ est un objet de $\mathscr{K}$ si et seulement si les deux applications ξ^1_M et ξ^2_M coïncident.

Il nous faut donc vérifier que pour toute A-algèbre instable M, les deux applications ξ^1_{TM} et ξ^2_{TM} coïncident. Pour cela, considérons le $\mathscr{U}$-diagramme suivant ($i = 1, 2$) :

$$\begin{tikzcd}
\Theta M \arrow[r, "\Theta\gamma_M"] \arrow[d, "\xi^i_M"'] & \Theta(H \otimes TM) \arrow[r, "\rho_{H,TM}"] & \Theta H \otimes \Theta TM \arrow[r, "\xi^i_H \otimes 1_{\Theta TM}"] & H \otimes \Theta TM \arrow[d, "1_H \otimes \xi^i_{TM}"] \\
M \arrow[rrr, "\gamma_M"] & & & H \otimes TM
\end{tikzcd}$$

et notons $\theta^i_M : T\Theta M \to \Theta TM$ l'adjointe de la composition correspondant à la première ligne. La commutativité du $\mathscr{U}$-diagramme ci-dessus entraîne celle du $\mathscr{U}$-diagramme ci-dessous ($i = 1, 2$) :

$$\begin{tikzcd}
T\Theta M \arrow[rr, "\theta^i_M"] \arrow[dr, "T\xi^i_M"'] & & \Theta TM \arrow[dl, "\xi^i_{TM}"] \\
& TM &
\end{tikzcd}$$

Maintenant, puisque H est une A-algèbre instable, ξ^1_H et ξ^2_H coïncident et il en est de même pour les transformations naturelles de $\mathscr{U}$-foncteurs θ^1 et $\theta^2 : \theta^1_M = \theta^2_M = \theta_M$. Pour prouver que les applications ξ^i_{TM}, $i = 1, 2$, coïncident il suffit par conséquent de savoir que θ_M est un isomorphisme. Or θ^2_M est un isomorphisme car T commute aux produits tensoriels et est exact. Précisons un peu. On vérifie que θ^2_M est la composition :

$$T(\hat{H}^0(\mathfrak{S}_p; M^{\otimes p})) \to \hat{H}^0(\mathfrak{S}_p; T(M^{\otimes p})) \to \hat{H}^0(\mathfrak{S}_p; (TM)^{\otimes p})$$

la flèche de droite étant associée à l'application $\mathfrak{S}_p$-équivariante

$$T(M^{\otimes p}) \to (TM)^{\otimes p}$$

induite par le produit de H. Or les deux applications intervenant dans la composition ci-dessus sont des isomorphismes. La première parce que T est exact et la seconde parce que l'application $T(M^{\otimes p}) \to (TM)^{\otimes p}$ est elle-même un isomorphisme puisque T commute aux produits tensoriels (théorème 2.2). On pourrait aussi montrer que θ^1_M est un isomorphisme en utilisant la proposition 2.1.3, ou encore, pour $p = 2$, en remarquant que la commutation des foncteurs T et Σ implique celle des foncteurs T et $\Theta = \Phi$ (observer que si un A-module instable M est réduit, et en particulier libre, alors ΦM est le noyau de l'application naturelle $M \to \Sigma\Omega M$).

Proposition **2.3.2.** — *Soient* M *et* N *deux* A-*algèbres instables*; *alors l'isomorphisme d'adjonction* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(TM, N)$ *induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(M, H \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(TM, N).$$

Démonstration. — Commençons par introduire la définition suivante. Soient M_i, N_i, $i = 1, 2$, et K des A-modules instables; on suppose K muni d'un produit

A-linéaire $K \otimes K \to K$. On note $f_1 \otimes f_2 \mapsto f_1 . f_2$ le produit (que nous appellerons *produit tensoriel contracté*)

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1, K \otimes N_1) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_2, K \otimes N_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1 \otimes M_2, K \otimes (N_1 \otimes N_2)),$$

induit par le produit tensoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1, K \otimes N_1) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_2, K \otimes N_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1 \otimes M_2, (K \otimes N_1) \otimes (K \otimes N_2))$$

et le produit de K. Le produit tensoriel contracté correspond par adjonction à la composée du produit tensoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}((M_1 : K)_{\mathscr{U}}, N_1) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}((M_2 : K)_{\mathscr{U}}, N_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}((M_1 : K)_{\mathscr{U}} \otimes (M_2 : K)_{\mathscr{U}}, N_1 \otimes N_2)$$

et de l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}((M_1 : K)_{\mathscr{U}} \otimes (M_2 : K)_{\mathscr{U}}, N_1 \otimes N_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}((M_1 \otimes M_2 : K)_{\mathscr{U}}, N_1 \otimes N_2)$$

induite par $\mu_{M_1, M_2, K}$.

En particulier le produit tensoriel contracté

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1, H \otimes N_1) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_2, H \otimes N_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1 \otimes M_2, H \otimes (N_1 \otimes N_2))$$

correspond, par adjonction et identification de $T(M_1 \otimes M_2)$ avec $TM_1 \otimes TM_2$, au produit tensoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(TM_1, N_1) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(TM_2, N_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(TM_1 \otimes TM_2, N_1 \otimes N_2).$$

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 2.3.2 dans laquelle nous conviendrons, pour préciser la notation, de désigner le produit $M \otimes M \to M$ d'une A-algèbre instable M par φ_M.

Le sous-ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(M, H \otimes N)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H \otimes N)$ est l'égalisateur des deux applications suivantes de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H \otimes N)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M \otimes M, H \otimes N)$: $f \mapsto f \circ \varphi_M$ et $f \mapsto \varphi_{H \otimes N} \circ (f \otimes f)$. On observera que la seconde s'écrit encore $f \mapsto (1_H \otimes \varphi_N) \circ (f.f)$ (le point désignant le produit tensoriel contracté introduit ci-dessus). Après adjonction et identification de $T(M \otimes M)$ avec $TM \otimes TM$ ces deux applications correspondent respectivement aux deux applications de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(TM, N)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(TM \otimes TM, N)$, $g \mapsto g \circ \varphi_{TM}$ et $f \mapsto \varphi_N \circ (g \otimes g)$, dont l'égalisateur est bien $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(TM, N)$.

Soient M et K deux A-algèbres instables, avec K de dimension finie en chaque degré; on dispose d'une application naturelle de $(M : K)_{\mathscr{U}}$ dans le A-module instable sous-jacent à $(M : K)_{\mathscr{K}}$ (notation de 1.10.2) : l'adjointe dans $\mathscr{U}$ de l'adjointe dans $\mathscr{K}$ de l'identité de M. Les propositions 2.3.1 et 2.3.2 impliquent :

Corollaire **2.3.3.** — *Pour toute* A-*algèbre instable* M *l'application naturelle du* A-*module instable* TM *dans le* A-*module instable sous-jacent à* $(M : H)_{\mathscr{K}}$ *est un isomorphisme.*

Les propositions 2.3.1 et 2.3.2 peuvent aussi être rassemblées dans la scholie ci-dessous :

Scholie **2.3.4.** — *Le foncteur* $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *induit un foncteur* $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$, *que l'on note encore* T, *adjoint à gauche du foncteur* $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{H} \otimes \mathrm{N}$ *(autrement dit le foncteur* $\mathrm{T} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ *s'identifie au foncteur* $(\ : \mathrm{H})_{\mathcal{K}}$ *dont l'existence est affirmée en* 1.10.2*).*

2.4. Passage du groupe $\mathbf{Z}/p$ à un p-groupe abélien élémentaire général

Soient V un p-groupe abélien élémentaire, c'est-à-dire un groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}/p)^d$ pour un certain entier d, et BV son classifiant. On pose

$$\mathrm{H}^* \mathrm{V} = \mathrm{H}^* \mathrm{BV} = \mathrm{H}^*(\mathrm{BV}; \mathbf{F}_p)$$

et l'on note $\mathrm{T_V}$ le foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M} : \mathrm{H}^* \mathrm{V})_{\mathcal{U}}$. On a donc $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{\mathbf{Z}/p}$.

Comme $\mathrm{H}^*\mathrm{V}$ est isomorphe, en tant que A-module instable, au produit tensoriel $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \otimes \ldots \otimes \mathrm{H}$, d fois, le foncteur $\mathrm{T_V} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ est équivalent au composé $\mathrm{T} \circ \mathrm{T} \circ \ldots \circ \mathrm{T}$, d fois. On peut donc, dans le théorème 2.1.1, remplacer T par $\mathrm{T_V}$:

Théorème **2.4.1.** — *Le foncteur* $\mathrm{T_V} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *est exact.*

Signalons que ce résultat donne essentiellement tous les A-modules instables de dimension finie en chaque degré K tel que le foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathcal{U}}$ est exact. Plus précisément :

Théorème **2.4.2.** — *Soit* K *un* A-*module instable de dimension finie en chaque degré. Soit* $\mathcal{L}$ *un système de représentants des classes d'isomorphisme des facteurs directs indécomposable des* A-*modules instables* $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathbf{Z}/p)^d; \mathbf{F}_p)$, d *décrivant* $\mathbf{N}$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *le foncteur* $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M} : \mathrm{K})_{\mathcal{U}}$ *est exact*;

(ii) *il existe une famille d'entiers* $(a_{\mathrm{L}})_{\mathrm{L} \in \mathcal{L}}$ *(uniquement déterminée en fonction de* K*) telle que*

$$\mathrm{K} \cong \bigoplus\nolimits_{\mathrm{L} \in \mathcal{L}} \mathrm{L}^{\oplus a_{\mathrm{L}}} \cong \prod\nolimits_{\mathrm{L} \in \mathcal{L}} \mathrm{L}^{\oplus a_{\mathrm{L}}}.$$

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est une conséquence de 2.4.1. La réciproque est démontrée dans [LScl], 6.2.

Comme l'isomorphisme $\mathrm{H}^*\mathrm{V} \cong \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \otimes \ldots \otimes \mathrm{H}$ est un isomorphisme de A-algèbre instable, la transformation naturelle $\mu_{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{H}^*\mathrm{V}} : \mathrm{T_V}(\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2) \to \mathrm{T_V}\,\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{T_V}\,\mathrm{M}_2$ s'identifie à la transformation naturelle

$$(\mathrm{T} \circ \mathrm{T} \circ \ldots \circ \mathrm{T})(\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2) \to (\mathrm{T} \circ \mathrm{T} \circ \ldots \circ \mathrm{T})(\mathrm{M}_1) \otimes (\mathrm{T} \circ \mathrm{T} \circ \ldots \circ \mathrm{T})(\mathrm{M}_2)$$

obtenue en « itérant » d fois la transformation naturelle $\mu_{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{H}}$. On peut donc encore remplacer T par $\mathrm{T_V}$ et H par $\mathrm{H}^*\mathrm{V}$ dans les énoncés 2.2.1, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, et 2.3.4 (on convient à nouveau d'abréger la notation $\mu_{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{H}^*\mathrm{V}}$ en $\mu_{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2}$) :

Théorème **2.4.3.** — *Pour tous* A-*modules instables* M_1 *et* M_2, *l'application naturelle*

$$\mu_{M_1, M_2} : T_V(M_1 \otimes M_2) \to T_V M_1 \otimes T_V M_2$$

est un isomorphisme.

Proposition **2.4.4.** — *Soit* M *une* A-*algèbre instable*; *soient respectivement* $\varphi : M \otimes M \to M$ *et* $\eta : \mathbf{F}_p \to M$ *le produit et l'unité de* M. *Alors les applications*

$$(T_V \varphi) \circ ((\mu_{M,M})^{-1}) : T_V M \otimes T_V M \to T_V M$$

et

$$T_V \eta : \mathbf{F}_p = T_V \mathbf{F}_p \to T_V M$$

font du A-*module instable* $T_V M$ *une* A-*algèbre instable.*

Proposition **2.4.5.** — *Soient* M *et* N *deux* A-*algèbres instables*; *alors l'isomorphisme d'adjonction* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^* V \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(T_V M, N)$ *induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(M, H^* V \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(T_V M, N).$$

Corollaire **2.4.6.** — *Pour toute* A-*algèbre instable* M *l'application naturelle du* A-*module instable* $T_V M$ *dans le* A-*module instable sous-jacent à* $(M : H^* V)_{\mathcal{K}}$ *est un isomorphisme.*

Scholie **2.4.7.** — *Le foncteur* $T_V : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *induit un foncteur* $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$, *que l'on note encore* T_V, *adjoint à gauche du foncteur* $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $N \mapsto H^* V \otimes N$ *(autrement dit le foncteur* $T_V : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ *s'identifie au foncteur* $(\ : H^* V)_{\mathcal{K}}$ *dont l'existence est affirmée en* 1.10.2*).*

2.4.8. *Caractérisation des* A-*algèbres instables* $H^* V$.

Les propriétés des A-algèbres instables $H^* V$ que traduisent les théorèmes 2.4.1 et 2.4.3 sont tout à fait exceptionnelles; en fait ces algèbres sont « caractérisées » à isomorphisme près par les « restrictions en degré zéro » de ces théorèmes. Précisons un peu. Considérons une A-algèbre instable non nulle de dimension finie en chaque degré K et posons $V = (K^1)^*$, $(K^1)^*$ désignant le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel dual de K^1; alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Le $\mathcal{K}$-morphisme canonique $H^* V \to K$ est un isomorphisme (rappelons que l'on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^* V, K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p}(V^*, K^1)$ pour tout $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie V et toute A-algèbre instable K).

(ii) Le foncteur $M \mapsto ((M : K)_{\mathcal{U}})^0 = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, K))'$ (voir 1.10.3.2), défini sur la catégorie des A-modules instables et à valeurs dans la catégorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels, est exact (en d'autres termes le A-module instable sous-jacent à K est injectif) et commute aux produits tensoriels (*i.e.* la transformation naturelle induite par le produit de K, $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(- \otimes -, K))' \to (\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, K))' \otimes (\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, K))'$, est une équivalence).

Démonstration de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). — On note $\chi : H^* V \to K$ l'application canonique de (i), t_K le foncteur $M \mapsto (\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, K))'$, et $\hat{\chi} : t_K \to t_{H^* V}$ la transformation naturelle induite par χ. Nous allons montrer que, si (ii) est vérifiée, $\hat{\chi}_{F(n)}$ est un isomorphisme pour tout entier n, ou encore que $\hat{\chi}_M$ est un isomorphisme pour tout A-module instable M.

Observons tout d'abord que si t_K commute aux produits tensoriels, alors χ est un isomorphisme en degré zéro. En effet dans ce cas le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $t_K(F(0)) = (K^0)^*$, qui par hypothèse est non nul et de dimension finie, est forcément de dimension un. Observons ensuite que par définition χ est un isomorphisme en degré un ou encore que $\hat{\chi}_{F(1)}$ est un isomorphisme. A partir de là, nous devons distinguer à nouveau les cas $p = 2$ et $p > 2$.

Le cas $p = 2$. Soit $n \geqslant 1$ un entier; l'application $F(n) \to (F(1))^{\otimes n}$ qui envoie ι_n sur $\iota_1 \otimes \iota_1 \otimes \ldots \otimes \iota_1$ induit un isomorphisme $F(n) \cong ((F(1))^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$, $((F(1))^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ désignant le sous-module de $(F(1))^{\otimes n}$ des invariants de l'action par permutation des facteurs du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (voir par exemple [LZ2], p. 55). Il en résulte que $\hat{\chi}_{F(n)}$ est un isomorphisme pour tout n.

Le cas $p > 2$. Soit $\theta_{K,M} : t_K(\Theta M) \to t_K(M)$ la transformation naturelle définie comme la composée

$$\begin{aligned} t_K(\Theta M) = t_K(\hat{H}^0(\mathfrak{S}_p; M^{\otimes p})) &\to \hat{H}^0(\mathfrak{S}_p; t_K(M^{\otimes p})) \\ &\to \hat{H}^0(\mathfrak{S}_p; (t_K M)^{\otimes p}) \cong t_K(M), \end{aligned}$$

la flèche de droite étant associée à l'application $\mathfrak{S}_p$-équivariante $t_K(M^{\otimes p}) \to (t_K M)^{\otimes p}$ induite par le produit de K. Comme dans la démonstration de la proprosition 2.3.1, le fait que le foncteur t_K soit exact et commute aux produits tensoriels implique que $\theta_{K,M}$ est un isomorphisme pour tout A-module instable M. En prenant $M = \Sigma F(0)$, on obtient $t_K(\Sigma F(0)) = 0$ puisque $\Theta(\Sigma F(0))$ est trivial. En invoquant à nouveau la commutation de t_K aux produits tensoriels on obtient plus généralement $t_K(\Sigma M) = 0$ pour tout M. Ceci permet, comme en 2.2.6, de se ramener à la catégorie $\mathcal{U}'$. En effet, puisque t_K est exact et que le quotient $M/\mathcal{O}\tilde{\mathcal{O}}M$ est une suspension, l'image par t_K de l'inclusion $\mathcal{O}\tilde{\mathcal{O}}M \hookrightarrow M$ est un isomorphisme et il est équivalent de montrer que $\hat{\chi}_M$ est un isomorphisme pour tout A-module instable M ou que $\hat{\chi}_{M'}$ est un isomorphisme pour tout A-module instable pair M'.

Soit $F'(2n)$ le A-module instable pair librement engendré par un générateur de degré $2n$. On a en particulier $F'(2) = \mathcal{O}\tilde{\mathcal{O}}F(1)$ et $\hat{\chi}_{F'(2)}$ est un isomorphisme si $\hat{\chi}_{F(1)}$ en est un. L'isomorphisme $F'(2n) \cong ((F'(2))^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ (dont la démonstration est analogue à celle de l'isomorphisme $F(n) \cong ((F(1))^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ du cas $p = 2$) implique alors que $\hat{\chi}_{F'(2n)}$ est un isomorphisme pour tout entier n. Il en résulte bien que $\hat{\chi}_{M'}$ est un isomorphisme pour tout A-module instable pair M'.

2.5. Foncteurs T_V et résolutions

Ce paragraphe (un peu technique) traite des « termes E_2 cosimpliciaux » que nous rencontrerons au chapitre suivant.

Proposition **2.5.1.** — *Si* $M_\bullet \to M$ *est une* $\mathcal{K}$*-résolution libre d'une* A*-algèbre instable* M, *alors* $T_V(M_\bullet) \to T_V M$ *est une* $\mathcal{K}$*-résolution libre de la* A*-algèbre instable* $T_V M$.

Démonstration. — L'exactitude du foncteur $T_V : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ et la scholie 2.4.7 (ou le corollaire 2.4.6) montrent que $T_V(M_\bullet) \to T_V M$ vérifie la condition *b)* de la définition 1.9.1.1. La condition *a)*, elle, est immédiate : d'après leur définition même, les foncteurs $(\ :K)_{\mathscr{K}}$ transforment objets libres en objets libres.

2.5.2. On reprend les notations de 1.10.4 avec $K = H^* V$. On note donc $a(\varphi) : T_V M \to \mathbf{F}_p$ l'augmentation de $T_V M$ correspondant par adjonction à un homomorphisme de A-algèbres instables $\varphi : M \to H^* V \cong H^* V \otimes \mathbf{F}_p$ et l'on pose

$$T_V(M; \varphi) = (T_V M)_{a(\varphi)};$$

rappelons que l'on peut considérer $T_V(\ ;\ )$ comme un foncteur défini sur la catégorie $\mathscr{K}/H^* V$ des A-algèbres instables au-dessus de $H^* V$ et à valeurs dans la catégorie $\mathscr{K}_{cx}$ des A-algèbres instables connexes non nulles. En spécialisant la construction de 1.14.2 à l' « évaluation » $M \to H^* V \otimes T_V(M; \varphi)$, on obtient une application naturelle de A-algèbres instables simpliciales

$$T_V(\text{Rés}_\bullet M; \varphi) \to \widetilde{\text{R}}\text{és}_\bullet T_V(M; \varphi)$$

que l'on note encore $\rho_\bullet$.

Proposition **2.5.2.** — *Soient* $\varphi : M \to H^* V$ *un homomorphisme de* A-*algèbres instables et* $F : \mathscr{K}_{cx} \to \mathscr{A}$ *un foncteur défini sur la catégorie* $\mathscr{K}_{cx}$ *des* A-*algèbres instables connexes non nulles et à valeurs dans une catégorie abélienne* $\mathscr{A}$. *Alors l'application naturelle de* A-*algèbres instables simpliciales* $\rho_\bullet : T_V(\text{Rés}_\bullet M; \varphi) \to \widetilde{\text{R}}\text{és}_\bullet T_V(M; \varphi)$ *induit des isomorphismes*

$$\pi_s F T_V(\text{Rés}_\bullet M; \varphi) \xrightarrow{\sim} \pi_s F\, \text{Rés}_\bullet T_V(M; \varphi)$$

pour tout entier s.

Démonstration. — Il s'agit d'une application de la théorie des foncteurs dérivés des foncteurs non additifs. On pourra trouver une présentation particulièrement efficace de cette théorie dans l'appendice de [Bou1].

La situation que nous avons ici est duale (au sens des catégories) de celle décrite par Bousfield dans cet appendice. La classe de modèles projectifs que l'on prend pour $\mathscr{K}_{cx}$ est celle des A-algèbres instables libres; on la notera $\mathscr{L}$. Selon la terminologie de Bousfield une $\mathscr{L}$-résolution d'un objet M de $\mathscr{K}_{cx}$ est la donnée d'un complexe de chaînes dans la catégorie $\mathscr{K}_{cx}^+$ ($\mathscr{K}_{cx}^+$ désigne la catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathscr{K}_{cx}$ et dont les morphismes sont les combinaisons linéaires formelles à coefficients dans $\mathbf{Z}$ de $\mathscr{K}_{cx}$-morphismes)

$$M \leftarrow M_0 \xleftarrow{d} M_1 \xleftarrow{d} \dots$$

tel que :

a) M_n appartient à $\mathscr{L}$ pour tout $n \geqslant 0$;

b) pour tout objet L de $\mathscr{L}$ le foncteur $\text{Hom}_{\mathscr{K}_c^+}(L, -)$ transforme le complexe ci-dessus en un complexe acyclique de groupes abéliens.

De telles résolutions existent pour tout M. En effet une $\mathcal{K}_{cx}$-résolution libre $M_\bullet \to M$ au sens de 1.9.1.1 induit une $\mathcal{L}$-résolution de M (le $\mathcal{K}_{cx}^+$-morphisme $d: M_n \to M_{n-1}$ est la somme formelle $\Sigma(-1)^i d_i$). Voici pourquoi (nous suivons toujours Bousfield). Soit $\varepsilon_L : \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_c}(L, M_\bullet) \to c_\bullet \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_c}(L, M)$ l'application d'ensembles simpliciaux induite par l'augmentation de $M_\bullet$; la condition *b)* ci-dessus équivaut ici à la suivante :

b.) pour tout objet L de $\mathcal{L}$ l'application ε_L induit un isomorphisme en homologie entière.

Or d'après la définition même d'une A-algèbre instable libre les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_c}(L, -)$ sont des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels et ε_L est un homomorphisme de $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels simpliciaux. Comme la condition *b)* de 1.9.1.1 entraîne que ε_L induit un isomorphisme en homotopie, *b.)* est bien satisfaite.

On peut faire alors une théorie à la Cartan-Eilenberg [CE] des foncteurs dérivés à gauche de F. Soit M un objet de $\mathcal{K}_{cx}$; $L_s\,FM$ est isomorphe au s-ième groupe d'homologie du $\mathcal{A}$-complexe de chaînes

$$F^+(M_0) \xleftarrow{F^+(d)} F^+(M_1) \xleftarrow{F^+(d)} \dots,$$

$M \leftarrow M_0 \xleftarrow{d} M_1 \xleftarrow{d} \dots$ désignant une $\mathcal{L}$-résolution de M et $F^+ : \mathcal{K}_{cx}^+ \to \mathcal{A}$ l'extension additive du foncteur F. Le théorème classique de comparaison vaut pour les $\mathcal{L}$-résolutions et l'on obtient des foncteurs $L_s\,F : \mathcal{K}_{cx} \to \mathcal{A}$, $s \geqslant 0$, uniques à équivalence naturelle près; si l'on préfère, comme Bourbaki, une définition plus rigide, on peut poser $L_s\,FM = \pi_s\,F\,\mathrm{Rés}_{cx\bullet} M$, $\mathrm{Rés}_{cx\bullet} M$ désignant la $\mathcal{K}_{cx}$-résolution libre canonique de M (voir le dernier point de 1.9.1).

La théorie précédente montre en particulier que si $K_{\bullet(0)} \to K$ et $K_{\bullet(1)} \to K$ sont deux $\mathcal{K}_{cx}$-résolutions libres d'un même objet K de $\mathcal{K}_{cx}$ et si $f_\bullet : K_{\bullet(0)} \to K_{\bullet(1)}$ est une application $\mathcal{K}_{cx}$-simpliciale compatible avec les augmentations, alors

$$\pi_s\,Ff_\bullet : \pi_s\,FK_{\bullet(0)} \to \pi_s\,FK_{\bullet(1)}$$

est un isomorphisme pour tout $s \geqslant 0$. Cet énoncé implique la proposition avec $K = T_V(M; \varphi)$, $K_{\bullet(0)} = \widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{és}_\bullet T_V(M; \varphi)$, $K_{\bullet(1)} = T_V(\mathrm{Rés}_\bullet M; \varphi)$ qui est une $\mathcal{K}_{cx}$-résolution libre de $T_V(M; \varphi)$ d'après les propositions 2.5.1 et 1.9.1.2, et $f_\bullet = \rho_\bullet$.

2.5.3. Soit maintenant $\varphi : H_* V \to M$ un homomorphisme de A-coalgèbres instables. On note $\varphi^* : M^* \to H^* V$ l'homomorphisme de A-algèbres instables dual.

Proposition **2.5.3.1.** — *On suppose que la* A*-coalgèbre instable* M *est de dimension finie en chaque degré. On a alors*

$$\pi^s \pi_t\, \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* V, \mathrm{Rés}^\bullet M; \varphi) = 0 \quad \textit{pour } t - s \leqslant 0.$$

Proposition **2.5.3.2.** — *On suppose que la* A*-coalgèbre instable* M *et la* A*-algèbre instable* $T_V(M^*; \varphi^*)$ *sont de dimension finie en chaque degré; on peut considérer alors la* A*-coalgèbre instable duale* $(T_V(M^*; \varphi^*))_*$, *que l'on note* N, *l'application de* A*-coalgèbres instables*

$H_* V \otimes N \to M$, *que l'on note* ω, *duale de l'application canonique* $M^* \to H^* V \otimes T_V(M^*; \varphi^*)$, *et enfin l'application de* A-*coalgèbres instables cosimpliciales* $\widetilde{\text{Rés}}^\bullet N \to \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* V, \text{Rés}^\bullet M; \varphi)$, *que l'on note* $\omega^\bullet$, *induite par* ω *(voir* 1.14.2*). Sous ces hypothèses :*

a) l'application $N \to \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* V, M; \varphi)$ *adjointe de* ω *est un isomorphisme de* A-*coalgèbres instables;*

b) l'application $\pi^s \pi_t \omega^\bullet$ *est un isomorphisme pour tous* s *et* t;

c) la A-*coalgèbre instable cosimpliciale* $\mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* V, \text{Rés}^\bullet M; \varphi)$ *est une résolution cosimpliciale colibre de* $\mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* V, M; \varphi)$ *(au sens dual de celui de la définition* 1.9.1.1*).*

Démonstration de la proposition 2.5.3.1. — Si M est de dimension finie en chaque degré, il en est de même pour $\text{Rés}^n M$ pour tout n et l'on a, d'après 1.13.3 et 1.13.5,

$$\pi_t \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* V, \text{Rés}^\bullet M; \varphi) \cong \pi_t T_V(\text{Rés}_\bullet M^*; \varphi^*),$$

si bien que la proposition 2.5.3.1 est un corollaire de la proposition légèrement plus générale que voici.

Proposition **2.5.3.3.** — *Soit* $\varphi : M \to H^* V$ *un homomorphisme de* A-*algèbres instables. On a*

$$\pi^s \pi_t T_V(\text{Rés}_\bullet M; \varphi) = 0 \quad \textit{pour } t - s \leqslant 0.$$

Démonstration. — On applique la proposition 2.5.2 en prenant pour F le foncteur π_t (considéré comme un foncteur covariant !). On obtient que $\pi^s \pi_t T_V(\text{Rés}_\bullet M; \varphi)$ est isomorphe à $\pi^s \pi_t \widetilde{\text{Rés}}_\bullet T_V(M; \varphi)$, qui est lui-même isomorphe à $\pi^s \pi_t \text{Rés}_{cx\bullet} T_V(M; \varphi)$, $\text{Rés}_{cx\bullet} T_V(M; \varphi)$ désignant la $\mathcal{K}_{cx}$-résolution libre canonique de $T_V(M; \varphi)$. Or, pour toute A-algèbre instable connexe non nulle N, les groupes $\pi^s \pi_t \text{Rés}_{cx\bullet} N$ sont triviaux pour $t - s \leqslant 0$ (corollaire A.1.2 de l'appendice A).

Démonstration de la proposition 2.5.3.2. — Le point *a)* est un cas particulier de 1.13.5. Le point *b)* est à nouveau une conséquence directe de la proposition 2.5.2 puisque $\pi^s \pi_t \omega^\bullet$ s'identifie par dualité à l'application $\pi^s \pi_t T_V(\text{Rés}_\bullet M; \varphi) \to \pi^s \pi_t \widetilde{\text{Rés}}_\bullet T_V(M; \varphi)$.

Le point *c)*, plus subtil, est dû à Bousfield. Il faut montrer que les groupes $\pi^s \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* V, \text{Rés}^\bullet M; \varphi)$ (disons qu'il s'agit là de cohomotopie de $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels cosimpliciaux, voir 1.1) sont nuls pour tout $s > 0$. On montre en fait que l'application

$$\pi^s \omega^\bullet : \pi^s \widetilde{\text{Rés}}^\bullet N \to \pi^s \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* V, \text{Rés}^\bullet M; \varphi)$$

est un isomorphisme pour tout $s \geqslant 0$ ce qui donne bien le résultat cherché (et redonne en outre le point *a)*) puisque $\widetilde{\text{Rés}}^\bullet N$ est une résolution cosimpliciale colibre de N au sens dual de celui de la définition 1.9.1.1 (remarquer que $(\widetilde{\text{Rés}}^\bullet N)^*$ est isomorphe à $\widetilde{\text{Rés}}_\bullet(N^*)$ ou, plus naturellement, se convaincre de ce que la propisition 1.9.1.2 admet une version duale). Pour montrer que $\pi^s \omega^\bullet$ est un isomorphisme pour tout $s \geqslant 0$ on applique le lemme 3.5 de [Boul] : comme $\widetilde{\text{Rés}}^\bullet N$ et $\mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* V, \text{Rés}^\bullet M; \varphi)$ sont, au sens de [Boul], des $\mathbf{F}_p$-coalgèbres homologiques cosimpliciales connexes et colibres en chaque codegré, il est équivalent de montrer que l'application

$$\pi^s \mathrm{P}\omega^\bullet : \pi^s \mathrm{P}\, \widetilde{\mathrm{R}}\text{és}^\bullet \mathrm{N} \to \pi^s \mathrm{P}\, \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{M}; \varphi)$$

est un isomorphisme pour tout $s \geqslant 0$. Or celle-ci s'identifie par dualité (voir notamment la fin de 1.13.5) à l'application

$$(\pi_s \mathrm{Q}\rho_\bullet)_* : (\pi_s \mathrm{Q}\, \widetilde{\mathrm{R}}\text{és}_\bullet \mathrm{T}_\mathrm{V}(\mathrm{M}^*; \varphi^*))_* \to (\pi_s \mathrm{Q}\mathrm{T}_\mathrm{V}(\mathrm{Rés}_\bullet \mathrm{M}^*; \varphi^*))_*$$

qui est un isomorphisme d'après 2.5.2.

2.6. Sur les foncteurs $\mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, —)$ et $\mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, —)$

Nous terminons ce chapitre en mentionnant quelques-unes des différences qui distinguent le comportement des foncteurs $\mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, —)$ et $\mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, —)$ de celui des foncteurs $(— : \mathrm{H}^* \mathrm{V})_{\mathcal{U}}$ et $(— : \mathrm{H}^* \mathrm{V})_{\mathcal{K}}$ (on suppose dans ce paragraphe que V est non trivial !).

Contrairement au foncteur $(— : \mathrm{H}^* \mathrm{V})_{\mathcal{U}}$, le foncteur $\mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, —)$ n'est pas exact à droite. Il revient au même de se convaincre que le foncteur $\mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\widetilde{\mathrm{H}}^* \mathrm{V}, —)$ ($\widetilde{\mathrm{H}}_* \mathrm{V}$ désignant l'homologie modulo p réduite de V) n'est pas exact à droite, ce que l'on peut faire de la façon suivante. On considère pour tout A-module à droite instable M la surjection évidente $\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{S}k^n \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ (la notation $\mathrm{S}k^n$ est introduite à la fin de 1.13.2); comme $\mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\widetilde{\mathrm{H}}_* \mathrm{V}, \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{S}k^n \mathrm{M})$ est nul (c'est une conséquence de la version « homologique » de 2.2.4) l'image de cette surjection par le foncteur $\mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\widetilde{\mathrm{H}}_* \mathrm{V}, —)$ ne peut être surjective que si $\mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\widetilde{\mathrm{H}}_* \mathrm{V}, \mathrm{M})$ est également nul, ce qui n'est bien sûr pas le cas en général.

Cependant la restriction du foncteur $\mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, —)$ à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}_*$, notée $\mathcal{U}_*^{qf}$, dont les objets sont les A-modules à droite instables M de dimension finie en chaque degré (attention : cette restriction est à valeurs dans $\mathcal{U}_*$ et non dans $\mathcal{U}_*^{qf}$) est exacte d'après l'isomorphisme $\mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{M}) \cong (\mathrm{T}_\mathrm{V}(\mathrm{M}^*))_*$ de 1.13.2 *b)*.

Signalons au passage que les dérivés à droite $\mathrm{R}^s\, \mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, —)$ sont triviaux pour $s \geqslant 2$. En voici une preuve. On reprend les notations de la démonstration de 2.1.3. La version « homologique » de la proposition 5.4 de [LZ1] permet tout d'abord de généraliser le lemme 6.5 de [Mil] (voir [LSc2], 1.7.2) et d'expliciter les foncteurs $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{R}^s\, \mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\mathrm{K}(i)_*, \mathrm{M}))_n$; on obtient :

$$(\mathrm{R}^s\, \mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\mathrm{K}(i)_*, \mathrm{M}))_n \cong \lim{}^s\{\, \mathrm{M}_{2^q.i+n}, .\mathrm{S}q^{2^{q-1}.i};\ q \in \mathbf{N}\,\}, \quad \text{pour } p = 2$$

$$(\mathrm{R}^s\, \mathbf{hom}_{\mathcal{U}_*}(\mathrm{K}(i)_*, \mathrm{M}))_n \cong \lim{}^s\{\, \mathrm{M}_{2p^q.i+n}, .\mathrm{P}^{p^{q-1}.i};\ q \in \mathbf{N}\,\}, \quad \text{pour } p > 2,$$

$\lim^s$ désignant dans ces formules le s-ième dérivé à droite du foncteur limite inverse (qui est trivial pour $s \geqslant 2$). On montre ensuite à l'aide des résultats de [LSc1] que le A-module à droite instable $\mathrm{H}_* \mathrm{V}$ est une somme directe (finie) dont chacun des facteurs est aussi facteur direct dans un $\mathrm{K}(i)_*$.

Soit maintenant M une A-coalgèbre instable; notre dernière observation concerne l'application naturelle, disons ι_{M}, du A-module à droite instable sous-jacent à $\mathbf{hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{M})$ dans le A-module à droite instable $\mathbf{hom}_{\mathscr{U}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{M})$. Contrairement à ce qui se passe dans le contexte « cohomologique » (voir corollaire 2.4.6), ι_{M} n'est pas en général un isomorphisme, même si l'on suppose, ce que nous faisons ci-dessous, que M est de dimension finie en chaque degré.

Commençons par étudier ι_{M} en degré zéro. Soit S l'ensemble profini

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(\mathrm{M}^*, \mathrm{H}^* \mathrm{V}).$$

En degré zéro

— $\mathbf{hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{M})$ est isomorphe à $\mathbf{F}_p[\mathrm{S}]$;

— $\mathbf{hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{M})$ est isomorphe à $(\mathbf{F}_p^{\{\mathrm{S}\}})^*$ (notations de 1.8.1), d'après 1.13.2 *b)* et 2.4.6;

— ι_{M} s'identifie à l'inclusion évidente.

Cette inclusion n'est un isomorphisme que si S est fini.

Soit enfin φ un point de S, on peut se persuader de ce que l'application

$$\mathbf{hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{M}; \varphi) \to (\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}^*; \varphi^*))_*$$

induite par ι_{M} n'est pas non plus un isomorphisme en général. Prenons par exemple M colibre : $\mathrm{M} = \mathrm{C}(\mathrm{E})$ (notations de 1.9.2) avec E de dimension finie en chaque degré, et notons F le $\mathbf{F}_p$-vectoriel gradué (supérieurement) sous-jacent à $\mathrm{QT}_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}^*; \varphi^*)$; F n'est de dimension finie en chaque degré que si E est fini (voir 1.13.4). On a les isomorphismes suivants de $\mathbf{F}_p$-vectoriels gradués :

— $\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}^*; \varphi^*) \cong \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} (\mathrm{F}^{\otimes m})_{\mathfrak{S}_m}$,

— $(\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}^*; \varphi^*))_* \cong \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} ((\mathrm{F}^{\otimes m})_*)^{\mathfrak{S}_m}$ (somme et produit coïncident parce que F est nul en degré zéro),

— $\mathbf{hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{M}; \varphi) \cong \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} ((\mathrm{F}_*)^{\otimes m})^{\mathfrak{S}_m}$, et l'application

$$\mathbf{hom}_{\mathscr{X}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{M}; \varphi) \to (\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}^*; \varphi^*))_*$$

s'identifie à l'inclusion évidente, qui n'est un isomorphisme que si F est de dimension finie en chaque degré, c'est-à-dire si E est fini. Ceci souligne le côté diabolique de la démonstration du point *c)* de la proposition 2.5.3.2.

Chapitre 3

SUR LES ESPACES FONCTIONNELS DONT LA SOURCE EST LE CLASSIFIANT D'UN p-GROUPE ABÉLIEN ÉLÉMENTAIRE ET DONT LE BUT EST UN p-COMPLÉTÉ

On spécialise dans ce chapitre les méthodes du chapitre 1 en exploitant les propriétés de la cohomologie modulo p des p-groupes abéliens élémentaires mises en évidence au chapitre 2.

Comme au chapitre précédent V désigne ci-après un p-groupe abélien élémentaire et BV son classifiant.

3.1. Sur le π_0 de l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}})$

Théorème **3.1.1.** — *Pour tout espace* Y *dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré, l'application naturelle (voir* 1.12*)*

$$e : [\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{BV}, \mathrm{H}_* \mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}, \mathrm{H}^* \mathrm{BV})$$

est une bijection (homéomorphisme, voir 1.13*).*

Démonstration. — Compte tenu du formalisme décrit au premier chapitre, l'injectivité et la surjectivité de l'application e équivalent respectivement aux énoncés suivants :

Théorème **3.1.2.** — *Pour tout espace* Y *dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré et tout homomorphisme de* A*-coalgèbres instables* $\varphi : \mathrm{H}_* \mathrm{BV} \to \mathrm{H}_* \mathrm{Y}$, *l'espace* $\mathrm{Tot}\,\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ *est non vide.*

Théorème **3.1.3.** — *Pour tout espace* Y *dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré et tout homomorphisme de* A*-coalgèbres instables* $\varphi : \mathrm{H}_* \mathrm{BV} \to \mathrm{H}_* \mathrm{Y}$, *l'espace* $\mathrm{Tot}\,\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ *est connexe.*

Démonstration du théorème 3.1.2. — D'après la théorie d'obstructions de Bousfield (voir l'appendice B, lemme B.3), il suffit de montrer que les groupes $\pi^n \pi_{n-1} \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ sont triviaux pour $n \geqslant 2$. Ceux-ci s'identifient aux groupes

$$\pi^n \pi_{n-1} \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi)$$

qui sont triviaux d'après la proposition 2.5.3.1.

Démonstration du théorème 3.1.3. — La proposition 2.5.3.1 implique également la nullité des groupes $\pi^n \pi_n \, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ pour $n \geqslant 1$ et on invoque cette fois le lemme 7.3 du chap. X de [BK1] qui dit en particulier que l'espace total d'un espace cosimplicial pointé $\mathrm{Z}^\bullet$, connexe et fibrant, est connexe si les groupes $\pi^n \pi_n \mathrm{Z}^\bullet$, $n \geqslant 2$, et l'ensemble $\pi^1 \pi_1 \mathrm{Z}^\bullet$ sont triviaux. Notons que ce lemme ne s'applique pas ici directement. En effet, si l'espace cosimplicial $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ est bien connexe et fibrant, il n'est pas *a priori* pointé. Cependant, comme son espace total est non vide, on peut trouver, grâce à la structure de « closed model category » de $\mathscr{S}^\bullet$, une équivalence faible $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi) \to \mathrm{Z}^\bullet$ telle que l'espace cosimplicial $\mathrm{Z}^\bullet$ soit en outre pointé.

3.1.4. *Sur l'ensemble* [BV, Y].

Le théorème 3.1.1 admet le corollaire suivant (la version *b)* de ce corollaire est due à W. G. Dwyer et A. Zabrodsky [DZ]) :

Corollaire **3.1.4.** — *L'application naturelle*

$$h : [\mathrm{BV}, \mathrm{Y}] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{BV}, \mathrm{H}_* \mathrm{Y})$$

est une bijection si chaque composante connexe X *de l'espace* Y *vérifie* :

— $\mathrm{H}^* \mathrm{X}$ *est de dimension finie en chaque degré (dans ce cas* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{BV}, \mathrm{H}_* \mathrm{X})$ *et* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{H}^* \mathrm{X}, \mathrm{H}^* \mathrm{BV})$ *coïncident)*;

— X *est fibrant*;

et l'une des deux hypothèses suivantes :

a) X *est nilpotent et l'homomorphisme* $\pi_1 \mathrm{X} \to \pi_1 \hat{\mathrm{X}}$ *est surjectif (ce qui est le cas en particulier si* $\pi_1 \mathrm{X}$ *est fini)*;

b) $\pi_1 \mathrm{X}$ *est un p-groupe fini.*

Démonstration de la version a). — On peut bien sûr supposer Y connexe pointé. On pointe également l'espace BV et l'on note $[\mathrm{BV}, \mathrm{Z}]_{pt}$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications pointées de BV dans un espace pointé Z (tandis que la notation [BV, Z] désigne l'ensemble des classes d'homotopie d'applications « non pointées » de BV dans Z); rappelons que si Z est fibrant, alors le groupe $\pi_1 \mathrm{Z}$ opère sur l'ensemble $[\mathrm{BV}, \mathrm{Z}]_{pt}$, et que l'ensemble [BV, Z] est le quotient de cette action.

Considérons maintenant les applications $[\mathrm{BV}, \eta]_{pt} : [\mathrm{BV}, \mathrm{Y}]_{pt} \to [\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}]_{pt}$ et $[\mathrm{BV}, \eta] : [\mathrm{BV}, \mathrm{Y}] \to [\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}]$ induites par $\eta : \mathrm{Y} \to \hat{\mathrm{Y}}$.

Lorsque Y est fibrant, connexe, et nilpotent, le « carré arithmétique » de [DDK] montre que $[\mathrm{BV}, \eta]_{pt}$ est une bijection (voir [Mil] théorème 1.5). Si de plus $\pi_1(\eta)$ est surjectif, $[\mathrm{BV}, \eta]$ est également une bijection puisque $[\mathrm{BV}, \eta]_{pt}$ est $\pi_1(\eta)$-équivariante.

La version *a)* du corollaire résulte alors du théorème 3.1.1 et de ce que la composée $e \circ [\mathrm{BV}, \eta]$ coïncide avec h.

On trouvera une preuve de la version *b)* dans la démonstration de la proposition 3.1 de [DZ].

3.1.5. — *Exemple : détermination de l'ensemble* [BV, BG], *pour* G *un groupe de* Lie *compact connexe.*

Théorème **3.1.5.1.** — *Soient* G *un groupe de Lie compact connexe et* BG *son classifiant. Alors l'application naturelle*

$$\mathrm{Rep}(V, G) \to [BV, BG],$$

Rep(V, G) *désignant le quotient de l'action par conjugaison de* G *sur* Hom(V, G), *est une bijection (d'ensemble fini).*

(Signalons que l'application naturelle $\mathrm{Rep}(\pi, G) \to [B\pi, BG]$ est en fait une bijection pour tout p-groupe fini π et tout groupe de Lie compact G [DZ].)

Démonstration. — Si G est connexe, BG est simplement connexe, et ce théorème est conséquence de 3.1.4 (utiliser l'équivalence entre théories homotopiques simpliciale et topologique) et de la proposition suivante :

Proposition **3.1.5.2.** — *Pour tout groupe de Lie compact* G *la composée*

$$\mathrm{Rep}(V, G) \to [BV, BG] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^* BG, H^* BV)$$

est une bijection (d'ensemble fini).

Pour une preuve de ce résultat, voir par exemple le point 4.3 de [La1], où l'on montre qu'il est équivalent à la détermination de $H^* BG$ à F-isomorphisme près (D. G. Quillen [Qui2]). Pour diverses généralisations voir [La2].

Rappelons la méthode de [La1]. Soit S_V le foncteur $\mathscr{K} \to (\mathscr{E}ns^*)^{op}$,

$$M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(M, H^* V)$$

(notations de 1.8.1). Compte tenu de ce que $S_V M$ s'identifie à $\pi_0 T_V M$ (notations de 1.8.3), les propriétés de T_V impliquent les assertions suivantes (la démonstration de la propriété (P.2) utilise en outre la caractérisation des A-modules instables nilpotents qui est donnée dans [LSc1]) :

(P.1) Le foncteur S_V transforme limites inverses finies en limites directes.

(P.2) Un homomorphisme de A-algèbres instables $\lambda : M \to L$ est un F-isomorphisme (au sens de [Qui2]) si et seulement si $S_V(\lambda)$ est une bijection (homéomorphisme) pour tout p-groupe abélien élémentaire V (pour une exploitation systématique de cette propriété voir [HLS1] [HLS2]).

Soit maintenant $\mathscr{Q}(G)$ la catégorie introduite par Quillen dans [Qui2] dont les objets sont les p-sous-groupes abéliens élémentaires E de G et les morphismes les applications linéaires $E \to E'$ qui sont restrictions d'automorphismes intérieurs de G. Puisque la catégorie $\mathscr{Q}(G)$ est équivalente à une catégorie finie on a, d'après (P.1),

$$S_V(\lim_{\mathscr{Q}(G)} H^* BE) = \mathrm{colim}_{\mathscr{Q}(G)} S_V(H^* BE) ;$$

or

$$\mathrm{colim}_{\mathscr{Q}(G)} S_V(H^* BE) = \mathrm{colim}_{\mathscr{Q}(G)} \mathrm{Hom}(V, E) = \mathrm{Rep}(V, G),$$

si bien que (P.2) montre que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(Q.1) l'application naturelle $H^* BG \to \lim_{\mathscr{Q}(G)} H^* BE$ est un F-isomorphisme;

(Q.2) l'application naturelle $\mathrm{Rep}(V, G) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^* BG, H^* BV)$ est une bijection pour tout p-groupe abélien élémentaire V.

Remarques. — Si G est un p-groupe fini on peut encore appliquer le corollaire 3.1.4 ou directement le théorème 3.1.1 puisque dans ce cas BG est p-complet (cette terminologie est rappelée en 1.14.1.3) et fibrant : l'application $[BV, BG] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^* BG, H^* BV)$ est une bijection. Mais cette fois il est élémentaire de vérifier que l'application naturelle $\mathrm{Rep}(V, G) \to [BV, BG]$ est une bijection de sorte que 3.1.4 ou 3.1.1 impliquent (Q.2) (et par conséquent (Q.1)) quand G est un p-groupe fini.

Remarquons également que lorsque l'on a (Q.2) pour tout p-groupe fini, on peut obtenir (Q.2) pour tout groupe fini G en utilisant (P.1). En effet, soit $\mathscr{P}(G)$ la catégorie dont les objets sont les p-sous-groupes P de G et les morphismes les homomorphismes de groupes $P \to P'$ qui sont restrictions d'automorphismes intérieurs de G; alors :

— l'application naturelle $H^* BG \to \lim_{\mathscr{P}(G)} H^* BP$ est un isomorphisme ([CE], XII,10.1);

— l'application naturelle $\mathrm{colim}_{\mathscr{P}(G)} \mathrm{Rep}(V, P) \to \mathrm{Rep}(V, G)$ est une bijection.

3.2. Sur l'homologie de l'espace $\mathbf{hom}(BV, \hat{Y})$

On note $e_c : T_V H^* Y \to H^* \mathbf{hom}(BV, \hat{Y})$ (à nouveau l'indice c est là pour rappeler que l'on travaille en cohomologie) la composée suivante :

$$T_V H^* Y \xrightarrow{\delta} (\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* BV, H_* Y))^* \xrightarrow{e^*} H^* \mathbf{hom}(BV, \hat{Y}),$$

δ désignant le $\mathscr{K}$-morphisme introduit en 1.13.2 et e^* le $\mathscr{K}$-morphisme dual du $\mathscr{K}_*$-morphisme e introduit en 1.6 et réexaminé en 1.12.

Rappelons que l'on note $h_c : T_V H^* Y \to H^* \mathbf{hom}(BV, Y)$ l'adjoint du $\mathscr{K}$-morphisme $H^* V \otimes H^* \mathbf{hom}(BV, Y) \to H^* Y$ induit par l'application d'évaluation $BV \times \mathbf{hom}(BV, Y) \to Y$. Compte tenu de ce que nous avons dit en 1.12, les applications e_c et h_c ci-dessus coïncident respectivement avec les compositions suivantes :

$$T_V H^* Y \to T_V H^* \hat{Y} \xrightarrow{h_c} H^* \mathbf{hom}(BV, \hat{Y})$$

$$T_V H^* Y \xrightarrow{e_c} H^* \mathbf{hom}(BV, \hat{Y}) \to H^* \mathbf{hom}(BV, Y)$$

(dans la première la flèche de gauche est induite par le $\mathscr{K}$-morphisme dual du $\mathscr{K}_*$-morphisme $e : H_* \hat{Y} \to H_* Y$ considéré en 1.5.3 et dans la seconde la flèche de droite est induite par l'application $\eta : Y \to \hat{Y}$).

Soit enfin S un sous-ensemble fermé de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^* Y, H^* V)$. On note toujours $e_c : T_V(H^* Y; S) \to H^* \mathbf{hom}(BV, \hat{Y}; S)$ et $h_c : T_V(H^* Y; S) \to H^* \mathbf{hom}(BV, Y; S)$ les localisées des applications précédentes; $\mathbf{hom}(BV, \hat{Y}; S)$ (resp. $\mathbf{hom}(BV, Y; S)$) désigne le localisé de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}})$ (resp. $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y})$) en l'image réciproque de S par l'application

$$e_c : \pi_0\, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}, \mathrm{H}^* \mathrm{V})$$
$$(\text{resp. } h_c : \pi_0\, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}, \mathrm{H}^* \mathrm{V})).$$

Théorème **3.2.1.** — *Soient* Y *un espace dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré et* $\varphi : \mathrm{H}^* \mathrm{Y} \to \mathrm{H}^* \mathrm{V}$ *un homomorphisme de* A-*algèbres instables. Si* $\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi)$ *est de dimension finie en chaque degré et nulle en degré un, alors l'application*

$$e_c : \mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi) \to \mathrm{H}^*\, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$$

est un isomorphisme de A-*algèbres instables (et l'espace* $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$ *est simplement connexe).*

Démonstration. — Le théorème 3.2.1 est conséquence de la proposition 2.5.3.2 et du théorème 3.4 de [Bou2].

On considère la suite spectrale d'homologie de l'espace cosimplicial $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^{\bullet} \mathrm{Y}; \varphi)$:

$$\pi^s\, \mathrm{H}_t\, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^{\bullet} \mathrm{Y}; \varphi) \Rightarrow \mathrm{H}_{t-s}\, \mathrm{Tot}\, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^{\bullet} \mathrm{Y}; \varphi)$$

ou encore :

$$\pi^s(\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^{\bullet} \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi))_t \Rightarrow \mathrm{H}_{t-s}\, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi).$$

Si les A-algèbres instables $\mathrm{H}^* \mathrm{Y}$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi)$ sont de dimension finie en chaque degré on peut appliquer la proposition 2.5.3.2 *c)* et *a)* :

— les groupes $\pi^s\, \mathrm{H}_*\, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^{\bullet} \mathrm{Y}; \varphi)$ sont nuls pour $s > 0$;
— la A-coalgèbre instable $\pi^0\, \mathrm{H}_*\, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^{\bullet} \mathrm{Y}; \varphi)$ s'identifie à la duale de la A-algèbre instable $\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi)$.

Le premier point entraîne que la suite spectrale ci-dessus dégénère au terme E_2. Si de plus $(\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi))^1$ est nul, alors le théorème 3.4 de [Bou2] montre que cette suite spectrale est fortement convergente; nous devons faire ici une remarque (voir [Bou2], p. 370) analogue à celle faite dans la démonstration de 3.1.3 : on peut appliquer le théorème 3.4 de [Bou2] bien que l'espace cosimplicial $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^{\bullet} \mathrm{Y}; \varphi)$ soit *a priori* non pointé puisque 3.1.2 nous garantit que son espace total est non vide. Il résulte de ce qui précède que le « edge homomorphism »

$$e : \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{BV}, \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi) = \pi^0\, \mathrm{H}_*\, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^{\bullet} \mathrm{Y}; \varphi)$$
$$\to \mathrm{H}_*\, \mathbf{hom}(\mathrm{X}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$$

est un isomorphisme dont le dual s'identifie à e_c.

La simple connexité de l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$ est elle aussi donnée par le théorème 3.4 de [Bou2].

Corollaire **3.2.2.** — *Soit* Y *un espace dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré et* S *un sous-ensemble fermé de* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}, \mathrm{H}^* \mathrm{V})$. *Si* $\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ *est de dimension finie en chaque degré et nulle en degré un, alors l'application*

$$e_c : \mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \mathrm{S}) \to \mathrm{H}^* \,\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \mathrm{S})$$

est un isomorphisme de A-*algèbres instables.*

Démonstration. — Puisque l'algèbre p-booléenne $(\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \mathrm{S}))^0$ est de dimension finie, S est en fait fini (voir 1.8) et l'application ci-dessus s'identifie au produit des applications $e_c : \mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi) \to \mathrm{H}^* \,\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$, φ décrivant S.

Affaiblissement de l'hypothèse $(\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi))^1 = 0$ *du théorème* 3.2.1.

Une hypothèse du type $(\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi))^1 = 0$ est inévitable dans l'énoncé 3.2.1 car il ne faut pas perdre de vue que l'on peut y faire $\mathrm{V} = 0$ et que l'on est alors en train de considérer l'application $e : \mathrm{H}_* \hat{\mathrm{Y}} \to \mathrm{H}_* \mathrm{Y}$ de 1.5.3 qui n'est pas un isomorphisme en général. Il est possible cependant, comme me l'a signalé Bousfield, d'affaiblir quelque peu cette hypothèse (tout en continuant à supposer que $\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi)$ est de dimension finie en chaque degré).

En effet, le théorème 3.4 de [Bou2] invoqué ci-dessus se compose de deux parties. La seconde, celle qui concerne la convergence forte de la suite spectrale d'homologie d'un espace cosimplicial, se démontre à l'aide de la première et du lemme 9.3 de ce même article. Or on vérifie que le lemme en question admet la variante *ad hoc* que voici :

Lemme **3.2.3.** — *Soient* $\{ \mathrm{Z}_s ; s \in \mathbf{N} \}$ *une tour de fibrations d'espaces pointés fibrants et* Z_∞ *la limite inverse de cette tour. On fait les hypothèses suivantes :*

— *la tour d'ensembles pointés* $\{ \pi_0 \mathrm{Z}_s ; s \in \mathbf{N} \}$ *est pro-triviale (ou, ce qui revient au même, la tour de* $\mathbf{F}_p$*-espaces vectoriels* $\{ \tilde{\mathrm{H}}_0 \mathrm{Z}_s ; s \in \mathbf{N} \}$ *est pro-triviale)*;
— *la tour de groupes* $\{ \pi_1 \mathrm{Z}_s ; s \in \mathbf{N} \}$ *est pro-isomorphe à un p-groupe fini* π;
— *la tour de* $\mathbf{F}_p$*-espaces vectoriels* $\{ \mathrm{H}_n \mathrm{Z}_s ; s \in \mathbf{N} \}$ *est pro-constante pour* $n \geqslant 2$.

Alors l'application $\tilde{\mathrm{H}}_n \mathrm{Z}_\infty \to \{ \tilde{\mathrm{H}}_n \mathrm{Z}_s ; s \in \mathbf{N} \}$ *est un pro-isomorphisme pour tout n (et l'application* $\pi_1 \mathrm{Z}_\infty \to \{ \pi_1 \mathrm{Z}_s ; s \in \mathbf{N} \}$ *induit un isomorphisme* $\pi_1 \mathrm{Z}_\infty \cong \pi$*).*

Il en résulte que la suite spectrale d'homologie de l'espace cosimplicial $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ est encore fortement convergente si l'on suppose que la tour de groupes $\{ \pi_1 \mathrm{Tot}_s \,\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi) ; s \in \mathbf{N} \}$ est pro-isomorphe à un p-groupe fini. Ceci conduit au raffinement ci-dessous du théorème 3.2.1 dont la formulation est due à W. G. Dwyer. Nous dirons qu'une A-algèbre instable non nulle connexe M est *libre en degré* $\leqslant 2$ si la condition suivante est remplie :

— pour $p = 2$, l'application $(\mathrm{M}^1 \otimes \mathrm{M}^1)_{\mathfrak{S}_2} \to \mathrm{M}^2$ induite par le produit de M est injective;
— pour $p > 2$, l'application $\Lambda^2(\mathrm{M}^1) \oplus \mathrm{M}^1 \to \mathrm{M}^2$, somme de l'application induite par le produit de M et du Bockstein, est injective.

Théorème **3.2.4.** — *Soient* Y *un espace dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré et* $\varphi : \mathrm{H}^* \mathrm{Y} \to \mathrm{H}^* \mathrm{V}$ *un homomorphisme de* A-*algèbres instables. Si* $\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi)$ *est de dimension finie en chaque degré et libre en degré* $\leqslant 2$, *alors l'application*

$$e_c : \mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi) \to \mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$$

est un isomorphisme de A-*algèbres instables (et* $\pi_1 \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$ *est isomorphe au dual du* $\mathbf{F}_p$-*espace vectoriel* $(\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi))^1$*).*

Démonstration. — On considère la colonne « $t - s = 1$ » du terme E_2 de la suite spectrale d'homotopie de l'espace cosimplicial $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$. On pose

$$\mathrm{K} = \mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi)$$

et l'on note W le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel dual de K^1. D'après 2.5.3.2 *b)* les groupes $\pi^s \pi_{s+1} \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ s'identifient aux groupes $\pi^s \pi_{s+1} \widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{es}_\bullet \mathrm{K}$. Or la condition « K libre en degré $\leqslant 2$ » implique $\pi^0 \pi_1 \widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{es}_\bullet \mathrm{K} \cong \mathrm{W}$ et $\pi^s \pi_{s+1} \widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{es}_\bullet \mathrm{K} \cong 0$ pour $s > 0$. En effet cette condition équivaut à la 2-connexité (terminologie précisée en 3.4) du $\mathscr{K}$-morphisme canonique $\chi : \mathrm{G}(\Sigma \mathrm{K}^1) \to \mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi)$ (notation de 1.9.1, la A-algèbre instable libre $\mathrm{G}(\Sigma \mathrm{K}^1)$ est un avatar de $\mathrm{H}^* \mathrm{W}$) qui induit donc un isomorphisme $\pi^s \pi_{s+1} \widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{es}_\bullet \mathrm{K} \cong \pi^s \pi_{s+1} \widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{es}_\bullet \mathrm{G}(\Sigma \mathrm{K}^1)$ pour tout s (appliquer par exemple la proposition A.1.1 de l'appendice A). Il résulte alors de la définition même de la suite spectrale d'homotopie que la tour de groupes $\{ \pi_1 \mathrm{Tot}_s \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi) ; s \in \mathbf{N} \}$ est pro-isomorphe au p-groupe abélien élémentaire W (en fait la première dérivée de cette tour, au sens de [BK1], p. 252, s'identifie à la tour constante $\{ \mathrm{W}; s \in \mathbf{N} \}$).

3.2.5. *Sur l'homologie de l'espace* $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y})$.

De la même manière qu'en 3.1.4 on peut imposer des conditions sur Y qui assurent que l'application naturelle $\mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}) \to \mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y})$ est un isomorphisme. C'est le cas par exemple quand Y est fibrant connexe non vide et que $\pi_1 \mathrm{Y}$ est un p-groupe fini (voir la démonstration de la proposition 3.1 de [DZ]). On peut ainsi obtenir des variantes des énoncés 3.2.1, 3.2.2, 3.2.4, dans lesquelles $\mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}};\ )$ est remplacé par $\mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y};\ )$ et e_c par h_c.

3.3. Sur le type d'homotopie de l'espace hom(BV, Ŷ) quand on a un bon candidat pour celui-ci

Théorème **3.3.1.** — *Soit* Y *un espace dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré. On suppose qu'il existe un espace* Z *dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré et une application* $\omega : \mathrm{BV} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ *tels que l'application* $\mathrm{T}_{\mathrm{V}} \mathrm{H}^* \mathrm{Y} \to \mathrm{H}^* \mathrm{Z}$ *adjointe de l'application* $\omega^* : \mathrm{H}^* \mathrm{Y} \to \mathrm{H}^* \mathrm{BV} \otimes \mathrm{H}^* \mathrm{Z}$ *(considérée comme un homomorphisme de* A-*algèbres instables ou de* A-*modules instables, voir chapitre* 2*) est un isomorphisme. Alors l'application* $\hat{\mathrm{Z}} \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}})$ *induite par* ω *(voir* 1.14.1.1*) est une équivalence d'homotopie.*

Cet énoncé est un cas particulier du suivant :

Théorème **3.3.2.** — *Soient* Y et Z *deux espaces dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré,* S *un sous-ensemble fermé de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}, \mathrm{H}^* \mathrm{V})$, *et* ω *une application* $\mathrm{BV} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ *telle que l'image (finie) de l'application* $\pi_0 \mathrm{Z} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}, \mathrm{H}^* \mathrm{V})$ *induite par* ω *est contenue dans* S. *On suppose que l'homomorphisme de* A-*algèbres instables* $\mathrm{T_V}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \mathrm{S}) \to \mathrm{H}^* \mathrm{Z}$ *induit par* ω *est un isomorphisme. Alors l'application* $\hat{\mathrm{Z}} \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \mathrm{S})$ *induite par* ω *est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. — On commence par montrer que l'on peut supposer Z connexe non vide.

On observe que si $(\mathrm{T_V}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \mathrm{S}))^0 \to \mathrm{H}^0 \mathrm{Z}$ est un isomorphisme, l'application $\pi_0 \mathrm{Z} \to \mathrm{S}$ est en fait une bijection (et que le sous-ensemble S est fini).

Soient ψ une composante connexe de Z et φ son image dans S; l'application ω nduit par restriction une application $\omega_\psi : \mathrm{BV} \times (\mathrm{Z}_\psi) \to \mathrm{Y}$ qui à son tour induit une application $(\mathrm{Z}_\psi)\hat{} \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$ faisant commuter le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Z}_\psi)\hat{} & \longrightarrow & \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\mathrm{Z}} & \longrightarrow & \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \mathrm{S}). \end{array}$$

Or :

— le coproduit des applications $(\mathrm{Z}_\psi)\hat{} \to \hat{\mathrm{Z}}$, ψ décrivant $\pi_0 \mathrm{Z}$, est une équivalence d'homotopie;

— le coproduit des applications $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi) \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \mathrm{S})$, φ décrivant S, est un homéomorphisme;

— l'application $\mathrm{T_V}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \mathrm{S}) \to \mathrm{H}^* \mathrm{Z}$ induite par ω s'identifie au produit, ψ décrivant $\pi_0 \mathrm{Z}$, des applications $\mathrm{T_V}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \varphi) \to \mathrm{H}^* \mathrm{Z}_\psi$ induites par ω_ψ.

On est donc bien ramené au cas où Z est connexe non vide et S réduit à un point, $\mathrm{S} = \{\varphi\}$.

Soit $\omega^\bullet : \widetilde{\mathrm{R\acute{e}s}}^\bullet \mathrm{Z} \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{R\acute{e}s}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$ l'application cosimpliciale induite par ω (voir 1.14.1.1 et le point 1) *b)* de 1.15; le choix d'un point base dans Z fait de $\omega^\bullet$ une application cosimpliciale pointée). Il s'agit de montrer que l'application $\mathrm{Tot}\, \omega^\bullet$ est une équivalence d'homotopie. Le « mapping lemma » de [BK1] (X, 7.4) est fait pour ça. Ici les applications $\pi^s \pi_t(\omega^\bullet)$, $t - s \geqslant 0$, sont des isomorphismes parce qu'elles s'identifient aux applications $\pi^s \pi_t \widetilde{\mathrm{R\acute{e}s}}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Z} \to \pi^s \pi_t \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{R\acute{e}s}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi_*)$ qui, d'après 2.5.3.2 *b)*, sont des isomorphismes pour tous s et t.

3.3.3. Si l'on impose certaines conditions sur Y et Z, le théorème 3.3.2 permet en fait de déterminer le type d'homotopie de $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$.

On reprend les notations du théorème 3.3.2. On pointe l'espace BV et si Y est lui aussi pointé, on désigne par $\mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ le sous-espace de $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ image réciproque du point base de Y par l'application d'évaluation au point base de BV, $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S}) \to \mathrm{Y}$.

Corollaire **3.3.3.** — *On reprend les hypothèses du théorème* 3.3.2. *On suppose en outre que* Y *est un espace pointé* 1-*connexe et fibrant et que l'espace* Z *est p-bon (cette terminologie est rappelée en* 1.14.1.3*). On note* $\varepsilon : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ *la restriction de* ω *à* $\mathrm{Z} = * \times \mathrm{Z}$, F *la fibre homotopique de* ε, *et* $\tilde{\omega} : \mathrm{Z} \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ *l'adjointe de* ω. *Alors* :

a) $\tilde{\omega}$ *induit une équivalence d'homotopie* $\hat{\mathrm{F}} \to \mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$;

b) l'espace $\mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ *est p-complet*;

c) $\tilde{\omega}$ *est une équivalence d'homotopie après p-complétion (en fait, compte tenu de a) et b),* $\tilde{\omega}$ *doit être considérée comme une p-complétion fibre à fibre de* ε*).*

Démonstration. — Puisque Y est fibrant, l'application d'évaluation au point base $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}) \to \mathrm{Y}$ est une fibration. Puisque Y est 1-connexe, les applications

$$\pi_0 \, \mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}) \to \pi_0 \, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y})$$

et

$$\pi_0 \, \mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S}) \to \pi_0 \, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$$

sont des bijections. Or d'après 3.1.3 et l'argument de la démonstration de 3.1.4, l'application évidente $\pi_0 \, \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S}) \to \mathrm{S}$ est aussi une bijection. On peut donc supposer S réduit à un point : $\mathrm{S} = \{\varphi\}$; dans ce cas les espaces Z, F, $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \varphi)$, $\mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \varphi)$ sont connexes et non vides. On peut supposer également que ε est une fibration dont F est la fibre. La démonstration est alors essentiellement une chasse aux références dans [BK1] :

— D'après le « mod-R fibre lemma » ([BK1], II, 5.1) l'équivalence d'homotopie $\hat{\mathrm{Z}} \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$ de 3.3.2 induit une équivalence d'homotopie $\hat{\mathrm{F}} \to \mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$.

— Par l'argument de carré arithmétique déjà utilisé en 3.1.4, l'application naturelle $\mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \varphi) \to \mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$ est une équivalence d'homotopie.

— Toujours d'après le « mod-R fibre lemma » l'espace F est p-bon.

— D'après [BK1], I, 5.2, l'espace $\hat{\mathrm{F}}$ est p-complet.

— Enfin il résulte encore du « mod-R fibre lemma » que la p-complétée de $\tilde{\omega}$ est une équivalence d'homotopie.

3.3.4. *Exemple : une forme de la conjecture de Sullivan.*

Comme ci-dessus on note $\mathbf{hom}_{pt}(\ ,\ )$ la version pointé des espaces fonctionnels. On rappelle que l'on dit qu'un A-module M est *localement fini* si pour tout élément x de M le sous-A-module Ax est fini.

Théorème **3.3.4.1.** — *Soit* Y *un espace pointé dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré et localement finie comme* A-*module. Alors l'espace fonctionnel* $\mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{B}\mathbf{Z}/p, \hat{\mathrm{Y}})$ *est contractile.*

Démonstration. — On applique le théorème 3.3.1. On prend pour Z l'espace Y lui-même et pour ω la projection $(\mathrm{B}\mathbf{Z}/p) \times \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$. La proposition 2.2.4 implique bien que l'application $\mathrm{TH}^* \mathrm{Y} \to \mathrm{H}^* \mathrm{Y}$, adjointe de ω^*, est un isomorphisme.

Commentaires. — 1) Le théorème 3.3.4.1 ne suffit pas pour obtenir le fameux théorème de H. R. Miller [Mi1] (conjecture de Sullivan dans le cas d'une action triviale) :

Théorème **3.3.4.2.** — *Pour tout* CW-*complexe* Y *connexe de dimension finie l'espace fonctionnel* $\mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{B}\mathbf{Z}/p, \mathrm{Y})$ *est faiblement contractile.*

Et ceci, même si l'on suppose ci-dessus que Y est un CW-complexe fini. En effet, pour se débarrasser de la p-complétion qui apparaît dans l'énoncé 3.3.4.1, on est amené à remplacer Y par son revêtement universel dont la cohomologie modulo p n'est pas en général de dimension finie en chaque degré. On montre cependant dans [LSc2] que 3.3.4.1 admet une version « homologique » (on dit qu'un A-module à droite M est *quasi borné* si, pour tout entier n, il existe un entier $\alpha(n)$ tel que l'application de structure $\mathrm{M}_{n+q} \otimes \mathrm{A}^q \to \mathrm{M}_n$ est nulle pour $q > \alpha(n)$; en particulier un A-module à droite de dimension finie en chaque degré est quasi borné si et seulement si son dual est localement fini) :

Théorème **3.3.4.3.** — *Soit* Y *un espace pointé dont l'homologie modulo p est quasi bornée comme* A-*module à droite. Alors l'espace* $\mathbf{hom}_{pt}(\mathrm{B}\mathbf{Z}/p, \hat{\mathrm{Y}})$ *est contractile.*

La méthode de démonstration de ce théorème est celle utilisée par Miller dans [Mi1]. Elle revient en fin de compte à montrer que si M est une A-coalgèbre instable quasi bornée comme A-module à droite, alors $\mathbf{hom}_{\mathscr{K}^*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{M})$ est une résolution colibre de M. On utilise notamment les points suivants :

— Les foncteurs dérivés à droite du foncteur primitif $\mathrm{P} : \mathscr{K}_{*\,cx} \to \mathscr{V}_*$ (notation de 1.7.6) sont à valeurs quasi bornées quand l'argument est quasi borné.

— Le foncteur $\mathrm{R}^1\, \mathbf{hom}_{\mathscr{U}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, -)$ s'annule sur les quasi-bornés (voir 2.6).

2) Les théorèmes 3.3.1 ou 3.3.2 fournissent aussi une démonstration de la forme générale de la conjecture de Sullivan (voir [La1], 7.2.5). Pour une analyse détaillée du problème des points fixes homotopiques de l'action d'un p-groupe abélien élémentaire voir le chapitre suivant.

3) On montre dans [LSc1] que le théorème 3.3.4.1 admet une réciproque. Voici maintenant une généralisation de ce type de réciproque.

3.4. Réciproques des théorèmes 3.3.1 et 3.3.2

Dans le cas $\mathrm{V} = 0$, le théorème 3.3.1 dit simplement (avec des restrictions de finitude inutiles !) qu'une application $\mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ qui induit un isomorphisme en homologie modulo p induit une équivalence d'homotopie $\hat{\mathrm{Z}} \to \hat{\mathrm{Y}}$. Cet énoncé admet une réciproque

([BK1], I, 5.1) et l'objet de ce paragraphe est de montrer qu'il en est de même pour les théorèmes 3.3.1 et 3.3.2.

Fixons pour commencer un peu de terminologie. Soit n un entier; rappelons que l'on dit qu'une application entre deux espaces X et Y est *n-connexe* si pour tout choix d'un point base dans X l'application induite $\pi_t\, X \to \pi_t\, Y$ est un isomorphisme pour $t < n$ et un épimorphisme pour $t = n$. On dira de même qu'un homomorphisme de A-algèbres instables $f: M \to N$ est *n-connexe* si $f: M^t \to N^t$ est un isomorphisme pour $t < n$ et un monomorphisme pour $t = n$.

Théorème **3.4.1.** — *Soient* Y *un espace dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré et* S *un sous-ensemble fermé de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^* Y, H^* V)$; *soient* Z *un espace et* ω *une application* $BV \times Z \to Y$ *telle que l'image de l'application* $\pi_0 Z \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^* Y, H^* V)$ *induite par* ω *est contenue dans* S. *On suppose en outre que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

a) $H^* Z$ *est de dimension finie en chaque degré;*

b) $T_V(H^* Y; S)$ *est de dimension finie en chaque degré.*

Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *L'homomorphisme de* A-*algèbres instables* $T_V(H^* Y; S) \to H^* Z$ *induit par* ω *est un isomorphisme*;

(ii) *L'application* $\hat{Z} \to \mathbf{hom}(BV, \hat{Y}; S)$ *induite par* ω *est une équivalence d'homotopie.*

Plus précisément, soit n un entier, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i-n) *L'homomorphisme de* A-*algèbres instables* $T_V(H^* Y; S) \to H^* Z$ *induit par* ω *est n-connexe*;

(ii-n) *L'application* $\hat{Z} \to \mathbf{hom}(BV, \hat{Y}; S)$ *induite par* ω *est n-connexe.*

La version *b)* de ce théorème répond à une commande de W. G. Dwyer (à savoir l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) de la version *b)* de la proposition 3.4.4).

Démonstration de la version a) du théorème 3.4.1.

On pose $M = T_V(H^* Y; S)$, $N = H^* Z$, et l'on note $f: M \to N$ l'homomorphisme de A-algèbres instables induit par ω.

Démonstration de l'équivalence (i-0) $\Leftrightarrow$ (ii-0).

Cette équivalence est conséquence du théorème 3.1.1. La condition (i-0) équivaut à la surjectivité de l'application $\mathrm{Spec}(f^0) : \mathrm{Spec}(N^0) \to \mathrm{Spec}(M^0)$ (voir 1.8.1) qui s'identifie à l'application $\pi_0 Z \to S$ induite par ω. Cette application $\pi_0 Z \to S$ s'identifie à son tour, d'après 3.1.1 (et 1.5.2), à l'application $\pi_0 \hat{Z} \to \pi_0\, \mathbf{hom}(BV, \hat{Y}; S)$ induite par ω.

On observera que si (i-0) (ou (ii-0)) est vérifiée S est forcément fini.

Démonstration de l'équivalence (i-n) $\Leftrightarrow$ (ii-n) *pour* $n \geqslant 1$.

L'argument précédent montre également que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i-1/2) f^0 est un isomorphisme;

(ii-1/2) l'application $\pi_0 \hat{Z} \to \pi_0\, \mathbf{hom}(BV, \hat{Y}; S)$ est bijective.

Aussi peut-on supposer, comme dans la démonstration de 3.2.2, que Z est connexe non vide et S réduit à un élément que l'on note φ.

On reprend l'application cosimpliciale considérée dans cette démonstration, $\omega^{\bullet} : \widetilde{\text{Rés}}^{\bullet} Z \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \text{Rés}^{\bullet} Y; \varphi)$, pointée par le choix d'un point base dans Z. Rappelons que l'application $\hat{Z} \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{Y}; \varphi)$ dont il est question dans la condition (ii-n) est obtenue en appliquant le foncteur Tot à $\omega^{\bullet}$. On considère donc la fibre homotopique de Tot $\omega^{\bullet}$. Celle-ci a le type d'homotopie de l'espace total, Tot $\Gamma^{\bullet}(\omega^{\bullet})$, de l'espace cosimplicial $\Gamma^{\bullet}(\omega^{\bullet})$ dont la description est détaillée dans l'appendice C (dû à M. Zisman) de telle sorte que la condition (ii-n) peut se reformuler ainsi :

(ii-n-*bis*) l'espace Tot $\Gamma^{\bullet}(\omega^{\bullet})$ est (n-1)-connexe.

Ici nous avons un diagramme

$$\Gamma^{\bullet}(\omega^{\bullet}) \to \widetilde{\text{Rés}}^{\bullet} Z \xrightarrow{\omega^{\bullet}} \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \text{Rés}^{\bullet} Y; \varphi)$$

dans la catégorie, disons $\mathscr{C}$, suivante. Les objets de $\mathscr{C}$ sont les espaces cosimpliciaux pointés $X^{\bullet}$ tels que :

— X^n est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial connexe (un $\mathbf{F}_p$-espace affine pointé n'est rien d'autre qu'un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel !) ;
— les applications $d^i, s^i : X^n \to X^{n\pm 1}$, à l'exception de d^0, sont linéaires.

Rappelons qu'un tel $X^{\bullet}$ est fibrant ([BK1], X, 4.9). Les morphismes de $\mathscr{C}$ sont les applications cosimpliciales linéaires en chaque codegré. Sur $\mathscr{C}$ le foncteur $X^{\bullet} \mapsto \pi^s \pi_t X^{\bullet}$, $s \geqslant 0$, $t > 0$, est à valeurs dans la catégorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels si bien que les suites exactes de C.4 sont en fait dans tous les cas des suites exactes de $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels que nous allons expliciter.

Comme nous l'avons déjà dit, $\pi^s \pi_t(\omega^{\bullet})$ s'identifie à l'application

$$\pi^s \pi_t \widetilde{\text{Rés}}^{\bullet} H_* Z \to \pi^s \pi_t \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(H_* V, \text{Rés}^{\bullet} H_* Y; \varphi_*),$$

puis, par dualité (voir 1.13.3 et 1.13.5), à l'application

$$\pi^s \pi_t \widetilde{\text{Rés}}_{\bullet} H^* Z \to \pi^s \pi_t \mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\text{Rés}_{\bullet} H^* Y; \varphi)$$

qui, composée avec l'isomorphisme

$$\pi^s \pi_t \mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\text{Rés}_{\bullet} H^* Y; \varphi) \to \pi^s \pi_t \widetilde{\text{Rés}}_{\bullet} \mathrm{T}_{\mathrm{V}}(H^* Y; \varphi)$$

donné par 2.5.2 (voir le début de la démonstration de 2.5.3.3), devient l'application $\pi^s \pi_t \widetilde{\text{Rés}}_{\bullet}(f) : \pi^s \pi_t \widetilde{\text{Rés}}_{\bullet} \mathrm{N} \to \pi^s \pi_t \widetilde{\text{Rés}}_{\bullet} \mathrm{M}$.

En fin de compte, nous pouvons identifier $\pi^s \pi_t(\omega^{\bullet})$ à $\pi^s \pi_t \widetilde{\text{Rés}}_{\bullet}(f)$, ou encore à l'application $\pi^s \pi_t \text{Rés}_{cx.}(f) : \pi^s \pi_t \text{Rés}_{cx.} \mathrm{N} \to \pi^s \pi_t \text{Rés}_{cx.} \mathrm{M}$, que nous noterons comme dans l'appendice A, $\mathrm{E}^{s,t}(f) : \mathrm{E}^{s,t}(\mathrm{N}) \to \mathrm{E}^{s,t}(\mathrm{M})$.

La proposition C.4 donne donc, pour tout $s \geqslant 0$ et $t > 0$, la suite exacte de $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels suivante :

(E) $$0 \to \operatorname{coker} E^{s-1,t}(f) \to \pi^s \pi_t \Gamma^\bullet(\omega^\bullet) \to \ker E^{s,t}(f) \to 0$$

(en convenant que coker $E^{-1,t}(f)$ est nul).

Démonstration de l'implication (i-n) $\Rightarrow$ (ii-n) *pour* $n \geqslant 1$.

On utilise l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) de la proposition A.1.1 de l'appendice A, les suites exactes (E), et le « connectivity lemma » de [BK1] (X, 7.3) : si f est n-connexe, $\pi^s \pi_t \Gamma^\bullet(\omega^\bullet)$ est trivial pour $0 \leqslant t - s \leqslant n - 1$, et Tot $\Gamma^\bullet(\omega^\bullet)$ est (n-1)-connexe.

Démonstration de l'implication (ii-n) $\Rightarrow$ (i-n) *pour* $n \geqslant 1$.

On procède par récurrence sur n. On utilise l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) de la proposition A.1.1, les suites exactes (E), et le lemme 3.4.2 ci-dessous que l'on peut extraire facilement de [BK1].

Le cas $n = 1$. On applique 3.4.2 à l'espace cosimplicial $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{Y}; \varphi)$. Si l'application $\pi_1 \hat{\mathrm{Z}} \to \pi_1 \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \varphi)$ est surjective, il en est de même pour l'application $E^{0,1}(\mathrm{N}) \to E^{0,1}(\mathrm{M})$.

L'induction de n *à* $n + 1$. Si (i-n) est vérifiée et non (i-$n+1$), alors $\pi^s \pi_t \Gamma^\bullet(\omega^\bullet) = 0$ pour $t - s \leqslant n - 1$ et l'un des deux groupes $\pi^0 \pi_n \Gamma^\bullet(\omega^\bullet)$ ou $\pi^1 \pi_{n+1} \Gamma^\bullet(\omega^\bullet)$ est non trivial. Dans ce cas π_n Tot $\Gamma^\bullet(\omega^\bullet)$ est non trivial d'après 3.4.2.

Lemme **3.4.2.** — *Soit* $\mathrm{X}^\bullet$ *un espace cosimplicial pointé fibrant. Soit* $n \geqslant 1$ *un entier. On suppose* $\pi^s \pi_t \mathrm{X}^\bullet$ *trivial pour* $t - s \leqslant n - 1$. *Alors l'homomorphisme naturel de* π_n Tot $\mathrm{X}^\bullet$ *dans* $\pi^0 \pi_n \mathrm{X}^\bullet$ *est surjectif ainsi que celui défini sur son noyau et à valeurs dans* $\pi^1 \pi_{n+1} \mathrm{X}^\bullet$.

Démonstration. — Puisque la suite spectrale d'homotopie de $\mathrm{X}^\bullet$ vérifie $E_r^{s,s+n} = E_\infty^{s,s+n}$ pour $r > s$, on a, d'après le lemme 5.4 du chap. IX de [BK1], $e_\infty^{0,n} \cong E_\infty^{0,n} = E_2^{0,n}$ et $e_\infty^{1,n+1} \cong E_\infty^{1,n+1} = E_2^{1,n+1}$ (notations de [BK1], IX, 5.3).

Démonstration de la version b) du théorème 3.4.1.

Cette démonstration n'est qu'une variante de celle de la version *a)*.

On pose $\mathrm{M} = (\mathrm{T_V}(\mathrm{H}^*\mathrm{Y}; \mathrm{S}))_*$, $\mathrm{N} = \mathrm{H}_* \mathrm{Z}$, et l'on note $f : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ l'homomorphisme de A-coalgèbres instables induit par ω. Cette fois on dira que f est *n-connexe* si $f : \mathrm{N}_t \to \mathrm{M}_t$ est un isomorphisme pour $t < n$ et un épimorphisme pour $t = n$. L'hypothèse *b)* fait que la condition (i-n) est équivalente à la suivante :

(i-n)$_*$ l'homomorphisme de A-coalgèbres instables f est n-connexe.

On procède ensuite comme précédemment :

— On se ramène au cas où Z est connexe non vide et S réduit à un point, que l'on note encore φ (observer que l'hypothèse *b)* implique S fini).

— L'application $\pi^s \pi_t(\omega^\bullet)$ s'identifie alors à $\pi^s \pi_t \widetilde{\mathrm{Rés}}^\bullet(f)$. En effet l'application $\pi^s \pi_t \widetilde{\mathrm{Rés}}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Z} \to \pi^s \pi_t \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{Rés}^\bullet \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi)$ est la composée de $\pi^s \pi_t \widetilde{\mathrm{Rés}}^\bullet(f)$

et de l'application naturelle $\pi^s \pi_t \widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{és}^{\bullet} \mathrm{M} \to \pi^s \pi_t \, \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_*}(\mathrm{H}_* \mathrm{V}, \mathrm{Rés}^{\bullet} \mathrm{H}_* \mathrm{Y}; \varphi)$ qui est un isomorphisme d'après 2.5.3.2 *b)*.

— On achève en remplaçant la proposition A.1.1 qui intervient dans la démonstration de la version *a)* par son analogue « homologique ».

Observons maintenant que l'on peut, dans l'énoncé 3.4.1, prendre pour Z l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ lui-même et pour ω l'application d'évaluation pourvu que $\mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ ou $\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ soit de dimension finie en chaque degré :

Corollaire **3.4.3.** — *Soient* Y *un espace dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré et* S *un sous-ensemble fermé de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}, \mathrm{H}^* \mathrm{V})$. *Si l'une des deux hypothèses :*

a) $\mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ *de dimension finie en chaque degré,*

b) $\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ *de dimension finie en chaque degré,*

est vérifiée, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *l'application* $h_c : \mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \mathrm{S}) \to \mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ *est un isomorphisme de* A-*algèbres instables;*

(ii) *l'application naturelle* $(\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S}))\hat{} \to \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}}; \mathrm{S})$ *est une équivalence d'homotopie.*

(On observera que, si *b)* est vérifiée, le sous-ensemble S est en fait fini, et qu'il en est de même si *a)* et (i) ou (ii) sont vérifiées.)

Si l'on suppose Y fibrant et p-complet on peut encore reformuler l'énoncé ci-dessus en tenant compte du lemme 1.14.1.3 :

Proposition **3.4.4.** — *Soient* Y *un espace fibrant p-complet dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré et* S *un sous-ensemble fermé de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}, \mathrm{H}^* \mathrm{V})$. *Si l'une des deux hypothèses :*

a) $\mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ *de dimension finie en chaque degré,*

b) $\mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ *de dimension finie en chaque degré,*

est vérifiée, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *l'application* $h_c : \mathrm{T}_{\mathrm{V}}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y}; \mathrm{S}) \to \mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ *est un isomorphisme de* A-*algèbres instables;*

(ii) *l'espace* $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ *est p-complet;*

(iii) *l'espace* $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{Y}; \mathrm{S})$ *est p-bon.*

Voici une application de la version *a)* de cette proposition.

On dira qu'un espace Y est *p-π_*-fini* s'il possède les propriétés suivantes :

— $\pi_0 \mathrm{Y}$ est fini;

et pour tout choix du point base,

— $\pi_n \mathrm{Y}$, $n \geqslant 1$, est un p-groupe fini;

— il existe un entier q tel que $\pi_n \mathrm{Y}$ soit trivial pour $n > q$.

Quelques observations sur les espaces p-π_*-finis :

(O.1) L'homologie modulo p d'un espace p-π_*-fini est de dimension finie en chaque degré.

(O.2) Un espace connexe Y qui est p-π_*-fini est forcément nilpotent (un p-groupe fini agit toujours de façon nilpotente sur un autre p-groupe fini). Il existe donc une suite finie de fibrations principales, $Y_s \to Y_{s-1}$, $0 \leqslant s \leqslant r$, de fibre $K(\mathbf{Z}/p, m_s)$ $(m_s \geqslant 1)$, Y_{-1} étant un point et Y_r ayant le type d'homotopie faible de Y. Il est manifeste que cette propriété caractérise les espaces connexes p-π_*-finis. Elle implique :

(O.3) Soient X est un espace avec $H_* X$ de dimension finie en chaque degré et Y un espace fibrant p-π_*-fini; alors l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(X, Y)$ est aussi p-π_*-fini (et fibrant).

(O.4) Un espace p-π_*-fini est p-complet (voir [BK1], III, 5.4 (i)).

Proposition **3.4.5.** — *Pour tout espace fibrant p-π_*-fini* Y, *l'application*

$$h_c : T_V H^* Y \to H^* \mathbf{hom}(BV, Y)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — On applique la version *a)* de 3.4.4. Les hypothèses de finitude sont satisfaites d'après (O.1) et (O.3). La condition (ii) est vérifiée à cause de (O.3) et (O.4).

Exemples.

Soit G un p-groupe fini. Alors l'espace BG est p-π_*-fini et l'on peut appliquer la proposition 3.4.5 : l'application $h_c : T_V H^* BG \to H^* \mathbf{hom}(BV, BG)$ est un isomorphisme. Or il est facile d'expliciter dans ce cas l'espace $\mathbf{hom}(BV, BG)$. Soit $\rho : V \to G$ un homomorphisme. Soit G_ρ le centralisateur dans G de $\rho(V)$; l'homomorphisme $V \times G_\rho \to G$, $(v, g) \mapsto \rho(v)\, g$, induit une application $BV \times BG_\rho \to BG$ ou encore $BG_\rho \to \mathbf{hom}(BV, BG)$. L'espace $\mathbf{hom}(BV, BG)$ s'identifie à la réunion disjointe des BG_ρ, ρ décrivant un système de représentants de Rep(V, G) dans Hom(V, G) (ce que nous écrirons abusivement $\rho \in \operatorname{Rep}(V, G)$, la notation Rep est introduite en 3.1.5). Plus conceptuellement : $\mathbf{hom}(BV, BG)$ est le classifiant du groupoïde des foncteurs de $\mathscr{B}V$ dans $\mathscr{B}G$, $\mathscr{B}\pi$ désignant, pour tout groupe discret π, la catégorie avec un seul objet dont le monoïde des endomorphismes est π. Nous avons donc obtenu :

Proposition **3.4.6.** — *Pour tout p-groupe fini* G *l'application naturelle*

$$T_V H^* BG \to \prod_{\rho \in \operatorname{Rep}(V, G)} H^* BG_\rho$$

est un isomorphisme.

Comme T_V préserve les limites inverses finies, on peut étendre ce résultat à tout groupe fini par la méthode décrite dans les remarques de la fin de 3.1.5.

En fait, on montre dans [La2], par les méthodes de [Qui2], que la proposition 3.4.6 s'étend à deux classes de groupes qui généralisent celle des groupes finis :

1) La classe des groupes de Lie compacts;
2) La classe des groupes discrets G qui possèdent un sous-groupe G' d'indice fini dont la dimension cohomologique mod. p est finie (*i.e.* il existe un entier n tel que $H^q(G'; M) = 0$ si $q > n$ pour tout $\mathbf{F}_p[G']$-module M; en d'autres termes la dimension cohomologique mod. p de G est virtuellement finie).

Si l'on suppose en outre que $H^*(G'; \mathbf{F}_p)$ est fini, alors $H^* \,\mathbf{hom}(BV, BG)$ est de dimension finie en chaque degré et l'on obtient cette fois une illustration de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) de 3.4.3 (version *a)*) : l'application naturelle

$$(\mathbf{hom}(BV, BG))\hat{} \to \mathbf{hom}(BV, (BG)\hat{})$$

est une équivalence d'homotopie. Cet exemple est relié au problème de descente en K-théorie algébrique [Ca2] (pour plus de détails voir [La2]).

3.5. Interprétation de $T_V H^* Y$ sous la seule hypothèse que $H^* Y$ est de dimension finie en chaque degré (d'après E. Dror et J. H. Smith)

On reprend le point 1.5.4. Il est clair que $\hat{Y}$ est aussi la limite inverse des espaces $P^q \operatorname{Tot}_s \operatorname{Rés}^\bullet Y$, ou encore des espaces $P^s \operatorname{Tot}_s \operatorname{Rés}^\bullet Y$, P^q désignant comme en 1.13.4.3 la q-troncature de Postnikov (il s'agit toujours de limites inverses de tours de fibrations, indexée par $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ pour la première, par $\mathbf{N}$ pour la seconde).

Supposons maintenant $H^* Y$ de dimension finie en chaque degré. Dans ce cas on peut appliquer la proposition 3.4.5 aux espaces $P^q \operatorname{Tot}_s \operatorname{Rés}^\bullet Y$ qui sont p-π_*-finis : les applications h_c : $T_V H^* P^q \operatorname{Tot}_s \operatorname{Rés}^\bullet Y \to H^* \,\mathbf{hom}(BV, P^q \operatorname{Tot}_s \operatorname{Rés}^\bullet Y)$ sont des isomorphismes. Or :

— pour tout espace Y l'application naturelle

$$\operatorname{colim}_{s \in \mathbf{N}} H^* P^s \operatorname{Tot}_s \operatorname{Rés}^\bullet Y = \operatorname{colim}_{s \in \mathbf{N}} H^* \operatorname{Tot}_s \operatorname{Rés}^\bullet Y \to H^* Y$$

est un isomorphisme [Dr];

— le foncteur T_V préserve les limites inductives.

On obtient donc, en passant à la limite inductive, le résultat suivant, dû à E. Dror et J. H. Smith [DS], qui fait apparaître $T_V H^* Y$ comme une sorte de cohomologie modulo p continue de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(BV, \hat{Y})$:

Théorème **3.5.** — *Pour tout espace* Y *dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré, l'application h_c :* $T_V H^* Y \to H^* \,\mathbf{hom}(BV, \hat{Y})$ *se factorise par un isomorphisme naturel :*

$$T_V H^* Y \cong \operatorname{colim}_{s \in \mathbf{N}} H^* \,\mathbf{hom}(BV, P^s \operatorname{Tot}_s \operatorname{Rés}^\bullet Y).$$

Commentaires. — 1) Le théorème 3.5 peut être vu comme une généralisation du théorème 3.1.1. En effet les π_0 des deux A-algèbres instables $T_V H^* Y$ et $\mathrm{colim}_{s \in \mathbf{N}} H^* \mathbf{hom}(BV, P^s \mathrm{Tot}_s \mathrm{Rés}^\bullet Y)$ (voir 1.8.3) sont respectivement les ensembles profinis $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^* Y, H^* BV)$ et $\lim_{s \in \mathbf{N}}[BV, P^s \mathrm{Tot}_s \mathrm{Rés}^\bullet Y]$ et ce dernier s'identifie à $[BV, \hat{Y}]$ (voir 1.5.4).

2) Dror et Smith montrent dans [DS] que le théorème 3.5 et le lemme 9.3 de [Bou2] impliquent le théorème 3.2.1.

3) La démonstration que nous avons donnée de 3.5 utilise 3.1.1. Par contre celle de Dror et Smith en est indépendante; leur méthode est d'appliquer le foncteur T_V à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'une fibration (cette suite spectrale peut en fait fournir des informations sur le π_0 de la fibre en fonction de la cohomologie modulo p de la base et de l'espace total !). Il est à noter d'ailleurs que les démonstrations des théorèmes de convergence de [Bou2] se font par récurrence en utilisant également les résultats de Dwyer sur la convergence forte de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore [Dw].

4) Comme me l'a fait remarquer F. Morel, on peut, dans la version cohomologique du théorème 3.1.1, supprimer l'hypothèse de finitude sur $H^* Y$ si l'on remplace la p-complétion de Bousfield-Kan par celle de Sullivan, en passant à la limite sur les espaces p-π_*-finis (tout au moins si Y est 1-connexe). Ce point de vue est systématisé dans [Mo].

Chapitre 4

SUR L'ESPACE DES POINTS FIXES HOMOTOPIQUES D'UNE ACTION D'UN p-GROUPE ABÉLIEN ÉLÉMENTAIRE

L'objet de ce chapitre est de traduire les énoncés du chapitre précédent concernant les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire en énoncés concernant les espaces de points fixes homotopiques d'une action d'un tel groupe. Le lecteur pourra trouver un historique de cette question dans [Mi2].

4.1. Définition de l'espace des points fixes homotopiques

Soit S un ensemble, le foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}ns$, $[n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}ns}([n], \mathrm{S})$, est un ensemble simplicial que l'on note ES. Rappelons que l'ensemble simplicial ES est contractile. Si π est un groupe (discret), $\mathrm{E}\pi$ est muni d'une action libre de π dont le quotient, noté $\mathrm{B}\pi$, est un classifiant de π.

Soit X un espace muni d'une action de π. On peut voir X comme un foncteur de $\mathcal{B}\pi$ dans $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}\pi$ désignant la catégorie avec un seul objet dont le monoïde des endomorphismes est π, et considérer les diverses limites de ce foncteur (pour la définition des limites et colimites homotopiques voir [BK1]) :

— le quotient de X par l'action de π, noté X/π :

$$\mathrm{X}/\pi = \mathrm{colim}_{\mathcal{B}\pi}\, \mathrm{X};$$

— le quotient homotopique, noté $\mathrm{X}_{h\pi}$:

$$\mathrm{X}_{h\pi} = \mathrm{hocolim}_{\mathcal{B}\pi}\, \mathrm{X} = (\mathrm{E}\pi \times \mathrm{X})/\pi;$$

— l'espace des points fixes, noté X^{π} :

$$\mathrm{X}^{\pi} = \lim_{\mathcal{B}\pi} \mathrm{X};$$

et enfin

— *l'espace des points fixes homotopiques*, noté $\mathrm{X}^{h\pi}$:

$$\mathrm{X}^{h\pi} = \mathrm{holim}_{\mathcal{B}\pi}\, \mathrm{X} = \mathbf{hom}_{\pi}(\mathrm{E}\pi, \mathrm{X}),$$

$\mathbf{hom}_{\pi}(\mathrm{E}\pi, \mathrm{X})$ désignant l'espace fonctionnel des applications π-équivariantes de $\mathrm{E}\pi$ dans X (en particulier, si l'action de π sur X est triviale, $\mathrm{X}^{h\pi}$ n'est rien d'autre que l'espace fonctionnel ordinaire $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \mathrm{X})$. On notera que la projection de $\mathrm{E}\pi$ sur le point (qui est π-équivariante !) induit une inclusion de X^{π} dans $\mathrm{X}^{h\pi}$.

La théorie élémentaire des revêtements montre que l'espace $X^{h\pi}$ est la fibre en l'identité (vue comme un 0-simplexe de $\mathbf{hom}(B\pi, B\pi)$) de l'application

$$q : \mathbf{hom}(B\pi, X_{h\pi}) \to \mathbf{hom}(B\pi, B\pi)$$

induite par l'application naturelle $X_{h\pi} \to B\pi$; en d'autres termes $X^{h\pi}$ est l'espace des sections de $X_{h\pi} \to B\pi$. Cette relation entre les espaces $X^{h\pi}$ et $\mathbf{hom}(B\pi, X_{h\pi})$, qui sera précisée en 4.2, montre que l'étude des points fixes homotopiques d'une action quelconque peut se ramener à celle des points fixes homotopiques d'une action triviale.

Si nous notons π-$\mathcal{S}$ *la catégorie des espaces munis d'une action de* π et $\mathcal{S}/B\pi$ *la catégorie des espaces au-dessus de* $B\pi$, la définition et l'observation ci-dessus se traduisent par les bijections fonctorielles suivantes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(Z, X^{h\pi}) \cong \mathrm{Hom}_{\pi\text{-}\mathcal{S}}(E\pi \times Z, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}/B\pi}(B\pi \times Z, X_{h\pi})$$

(Z désignant un objet de $\mathcal{S}$ et X un objet de π-$\mathcal{S}$).

Nous nous intéressons par la suite au cas où π est un p-groupe abélien élémentaire. Le cas essentiel est en fait celui d'un groupe cyclique d'ordre p. Signalons que ce cas particulier peut permettre la détermination par récurrence du type d'homotopie de l'espace des points fixes homotopiques de l'action d'un p-groupe fini [Mi2] [DZ].

4.2. Relation entre l'espace des points fixes homotopiques $X^{h\pi}$ et l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(B\pi, X_{h\pi})$

Soit V un p-groupe abélien élémentaire. A présent, puisque V est abélien, BV est un groupe abélien simplicial et le produit $BV \times BV \to BV$ induit une action de BV sur l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(BV, Y)$ pour tout espace Y. Voici une interprétation de cette action :

— Pour tout espace B, $\mathbf{hom}(B, B)$ est un monoïde simplicial qui opère par composition à la source sur l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(B, Y)$.

— Dans le cas $B = BV$, $\mathbf{hom}(BV, BV)$ s'identifie comme monoïde simplicial au produit $BV \times c_\bullet \mathrm{Hom}(V, V)$ ($c_\bullet \mathrm{Hom}(V, V)$ désigne le monoïde simplicial constant $\mathrm{Hom}(V, V)$).

— En particulier la composante connexe de l'identité dans $\mathbf{hom}(BV, BV)$, que nous notons $\mathbf{hom}_{(1)}(BV, BV)$, s'identifie comme monoïde simplicial à BV (remarquons au passage que ceci montre que $\mathbf{hom}_{(1)}(BV, BV)$ est en fait un groupe abélien simplicial, pour une généralisation voir [Ma] proposition 25.3); cette dernière identification est induite par l'application $BV \to \mathbf{hom}(BV, BV)$, adjointe du produit $BV \times BV \to BV$.

— L'action de BV sur $\mathbf{hom}(BV, Y)$ s'identifie à celle de $\mathbf{hom}_{(1)}(BV, BV)$.

Soit maintenant X un espace muni d'une action de V. Nous notons $\mathbf{hom}_{(1)}(BV, X_{hV})$ le sous-espace de $\mathbf{hom}(BV, X_{hV})$ image réciproque de $\mathbf{hom}_{(1)}(BV, BV)$ par l'application $q : \mathbf{hom}(BV, X_{hV}) \to \mathbf{hom}(BV, BV)$; $\mathbf{hom}_{(1)}(BV, X_{hV})$ est stable sous l'action de BV. D'après ce qui précède la restriction de $q : \mathbf{hom}_{(1)}(BV, X_{hV}) \to \mathbf{hom}_{(1)}(BV, BV)$

s'identifie à une application BV-équivariante, toujours notée $q : \mathbf{hom}_{(1)}(\mathrm{BV}, \mathrm{X}_{h\mathrm{V}}) \to \mathrm{BV}$, et l'espace des points fixes homotopiques $\mathrm{X}^{h\mathrm{V}}$ à la fibre $q^{-1}(0)$. On en déduit :

Proposition **4.2.** — *L'application* BV-*équivariante*

$$\mathrm{BV} \times \mathrm{X}^{h\mathrm{V}} \to \mathbf{hom}_{(1)}(\mathrm{BV}, \mathrm{X}_{h\mathrm{V}})$$

induite par l'inclusion $\mathrm{X}^{h\mathrm{V}} \hookrightarrow \mathbf{hom}_{(1)}(\mathrm{BV}, \mathrm{X}_{h\mathrm{V}})$ *et l'action de* BV *sur* $\mathbf{hom}_{(1)}(\mathrm{BV}, \mathrm{X}_{h\mathrm{V}})$ *est un homéomorphisme.*

Afin de justifier le titre du paragraphe, indiquons pour terminer ce qui se passe pour un groupe discret arbitraire π. Le monoïde simplicial $\mathbf{hom}_{(1)}(\mathrm{B}\pi, \mathrm{B}\pi)$ est encore un groupe simplicial et $\mathbf{hom}_{(1)}(\mathrm{B}\pi, \mathrm{X}_{h\pi})$ est homéomorphe de la même manière au produit $\mathbf{hom}_{(1)}(\mathrm{B}\pi, \mathrm{B}\pi) \times \mathrm{X}^{h\pi}$; $\mathbf{hom}_{(1)}(\mathrm{B}\pi, \mathrm{B}\pi)$ s'identifie en tant que groupe simplicial à l'opposé du groupe simplicial quotient $(\mathrm{E}\pi)/c_{\bullet}\,\zeta$, ζ désignant le centre de π et $c_{\bullet}\,\zeta$ le groupe simplicial constant correspondant.

4.3. Comment, étant donné une action d'un p-groupe abélien élémentaire sur un espace X, appliquer les résultats du chapitre 3 à l'étude de l'espace des points fixes homotopiques de l'action induite sur le p-complété $\hat{\mathrm{X}}$?

Soit à nouveau X un espace muni d'une action d'un p-groupe abélien élémentaire V.

4.3.1. La proposition 4.2 montre que la connaissance de l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{X}_{h\mathrm{V}})$ implique celle de l'espace $\mathrm{X}^{h\mathrm{V}}$, or les résultats du chapitre 3 fournissent des méthodes pour étudier le type d'homotopie de l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, (\mathrm{X}_{h\mathrm{V}})\hat{})$, aussi est-on amené à étudier au préalable celui de l'espace $(\mathrm{X}_{h\mathrm{V}})\hat{}$. Là encore, la réponse se trouve dans [BK1].

L'application naturelle $\nu : \mathrm{EV} \times \hat{\mathrm{X}} \to (\mathrm{EV} \times \mathrm{X})\hat{}$ de 1.14.2 induit une application naturelle $(\hat{\mathrm{X}})_{h\mathrm{V}} \to (\mathrm{X}_{h\mathrm{V}})\hat{}$ que nous notons toujours ν.

Proposition **4.3.1.** — *Soit* X *un espace muni d'une action d'un p-groupe abélien élémentaire* V; *alors l'application naturelle* ν

$$(\hat{\mathrm{X}}_{h\mathrm{V}}) \to (\mathrm{X}_{h\mathrm{V}})\hat{}$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. — Cette proposition est une conséquence du « mod-R fibre lemma » de [BK1] (II, 5.1).

Précisons un peu. On se convainc tout d'abord que l'on peut supposer X connexe et fibrant (utiliser une « fibrantisation » fonctorielle). Cette dernière hypothèse implique que la projection $\mathrm{X}_{h\mathrm{V}} \to \mathrm{BV}$ est une fibration. On observe ensuite que la proposition est vérifiée quand X est un point. En effet l'application ν coïncide dans ce cas avec l'application $\eta : \mathrm{BV} \to (\mathrm{BV})\hat{}$ introduite en 1.5.1 qui est une équivalence d'homotopie (plus généralement l'application $\eta : Y \to \hat{Y}$ est une équivalence d'homotopie pour tout $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel simplicial Y [BK1], II, 2.7). On conclut enfin à l'aide du « mod-R fibre lemma » qui montre que ν induit une équivalence d'homotopie entre les fibres des flèches verticales du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\hat{X})_{hV} & \xrightarrow{\nu} & (X_{hV})^{\wedge} \\ \downarrow & & \downarrow \\ BV & \xrightarrow{\eta} & (BV)^{\wedge} \end{array}$$

(la condition de nilpotence qui apparaît dans les hypothèses du « mod-R fibre lemma » est ici automatiquement satisfaite puisque toute action de V sur un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel est nilpotente).

Remarque. — La proposition 4.3.1 est encore vérifiée si le groupe qui opère est un p-groupe fini, mais elle ne l'est pas pour un groupe discret quelconque comme le montre le cas particulier où X est un point.

4.3.2. Soient Z un espace (sans action de V) et $\omega : EV \times Z \to X$ une application V-équivariante; ω induit des applications :

— $\omega_1 : Z \to X^{hV}$ (la donnée de ω_1 est équivalente à celle de ω);

— $\omega_2 : BV \times Z \to X_{hV}$ (ω_2 est une application d'espaces au-dessus de BV dont la donnée est aussi équivalente à celle de ω);

— $\omega_3 : BV \times (BV \times Z) \to X_{hV}$ (ω_3 est la composée de l'application

$$BV \times (BV \times Z) = (BV \times BV) \times Z \to BV \times Z$$

induite par le produit de BV et de ω_2);

— $\omega_4 : \hat{Z} \to (\hat{X})^{hV}$ (ω_4 est l'adjointe de la composée de $\nu : EV \times \hat{Z} \to (EV \times Z)^{\wedge}$ et de $\hat{\omega} : (EV \times Z)^{\wedge} \to \hat{X}$);

— $\omega_5 : (BV \times Z)^{\wedge} \to \mathbf{hom}(BV, (X_{hV})^{\wedge}; S_1)$, S_1 désignant le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^* X_{hV}, H^* BV)$ image réciproque, par l'application évidente

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^* X_{hV}, H^* BV) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^* BV, H^* BV),$$

de l'identité de $H^* BV$ (ω_5 est déduite de ω_3, par le procédé décrit en 1.14.1.1).

On a tout fait pour que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\textbf{(4.3.2)} \qquad \begin{array}{ccccc} BV \times \hat{Z} & \xrightarrow{1 \times \omega_4} & BV \times (\hat{X})^{hV} & \xrightarrow{\iota_{4.2}} & \mathbf{hom}_{(1)}(BV, (\hat{X})_{hV}) \\ \downarrow{\scriptstyle \nu} & & & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{4.3.1}} \\ (BV \times Z)^{\wedge} & & \xrightarrow{\qquad \omega_5 \qquad} & & \mathbf{hom}(BV, (X_{hV})^{\wedge}; S_1), \end{array}$$

$\iota_{4.2}$ désignant l'application étudiée en 4.2 ($\hat{X}$ remplaçant X) et $\iota_{4.3.1}$ l'application induite par l'application $(\hat{X})_{hV} \to (X_{hV})^{\wedge}$ considérée en 4.3.1.

Comme $\iota_{4.2}$ est un homéomorphisme (proposition 4.2) et que ν et $\iota_{4.3.1}$ sont des équivalences d'homotopie (proposition 4.3.1), ce diagramme permet de traduire les énoncés du chapitre 3 concernant les espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \hat{\mathrm{Y}})$ en énoncés concernant les espaces de points fixes homotopiques $(\hat{\mathrm{X}})^{h\mathrm{V}}$. Cette traduction sera, pour l'essentiel, faite en 4.9. En attendant, pour faire patienter le lecteur, nous en proposons comme exemple le théorème 4.3.3 ci-dessous.

L'application ω (ou plutôt ω_3) induit encore un homomorphisme de A-algèbres instables :

$$\omega_6 : \mathrm{T_V}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{h\mathrm{V}}); \mathrm{S}_1) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{BV} \times \mathrm{Z})$$

(ω_6 est induite par l'adjointe de $(\omega_3)^* : \mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{h\mathrm{V}}) \to \mathrm{H}^*\,\mathrm{V} \otimes \mathrm{H}^*(\mathrm{BV} \times \mathrm{Z})$).

Théorème **4.3.3.** — *Soient* X *un* V-*espace*, Z *un espace (que l'on munit de l'action triviale de* V*) et* $\omega : \mathrm{EV} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ *une application* V-*équivariante; on suppose que* $\mathrm{H}^*\,\mathrm{X}$ *et* $\mathrm{H}^*\,\mathrm{Z}$ *sont de dimension finie en chaque degré. Si l'application* $\mathrm{T_V}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{h\mathrm{V}}); \mathrm{S}_1) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{BV} \times \mathrm{Z})$ *induite par* ω *est un isomorphisme, alors l'application* $\hat{\mathrm{Z}} \to (\hat{\mathrm{X}})^{h\mathrm{V}}$ *induite par* ω *est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. — On applique le théorème 3.3.2 à ω_3 : si ω_6 est un isomorphisme, ω_5 est une équivalence d'homotopie et le diagramme (4.3.2) montre qu'il en est de même pour ω_4.

L'un des objectifs de la suite de ce chapitre est de dégrossir quelque peu l'expression de ω_6 afin de peaufiner les énoncés du type 4.3.3.

4.4. Analogues « équivariants » des foncteurs $\mathrm{T_V}$

On introduit dans ce paragraphe le formalisme algébrique qui est aux espaces de points fixes homotopiques $(-)^{h\mathrm{V}}$ ce qu'est le foncteur $\mathrm{T_V}$ aux espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, -)$.

4.4.1. *Analogues « équivariants » des catégories* $\mathscr{K}$ *et* $\mathscr{U}$.

Le foncteur $\mathrm{H}^* : \mathscr{S} \to \mathscr{K}$ est remplacé par le foncteur $\mathrm{H}^*_\mathrm{V} : \mathrm{V}\text{-}\mathscr{S} \to \mathrm{H}^*\,\mathrm{V}\backslash\mathscr{K}$, H^*_V désignant *la cohomologie de Borel modulo p* et $\mathrm{H}^*\,\mathrm{V}\backslash\mathscr{K}$ la catégorie des A-algèbres instables au-dessous de $\mathrm{H}^*\,\mathrm{V} = \mathrm{H}^*_\mathrm{V}$ (point) $= \mathrm{H}^*(\mathrm{BV}; \mathbf{F}_p)$. Rappelons que la cohomologie de Borel modulo p d'un espace X muni d'une action de V est la cohomologie modulo p du quotient homotopique $\mathrm{X}_{h\mathrm{V}}$ (qui est un espace au-dessus de BV) :

$$\mathrm{H}^*_\mathrm{V}\,\mathrm{X} = \mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{h\mathrm{V}}) = \mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{h\mathrm{V}}; \mathbf{F}_p).$$

Rappelons également la définition de la catégorie $\mathrm{K}\backslash\mathscr{K}$ *des* A-*algèbres instables au-dessous d'une* A-*algèbre instable donnée* K : un objet de $\mathrm{K}\backslash\mathscr{K}$ est un $\mathscr{K}$-morphisme $\varphi : \mathrm{K} \to \mathrm{M}$ et un $(\mathrm{K}\backslash\mathscr{K})$-morphisme de φ dans $\varphi' : \mathrm{K} \to \mathrm{M}'$ est un $\mathscr{K}$-morphisme $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ tel que $\varphi' = f \circ \varphi$.

La catégorie $K\backslash\mathscr{K}$ possède des sommes (coproduits) : soient M_1 et M_2 deux A-algèbres instables au-dessous de K, leur somme est le produit tensoriel $M_1 \otimes_K M_2$. Il pourra être profitable par la suite de voir ce produit tensoriel comme la colimite dans $\mathscr{K}$ du diagramme

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M_1 & & M_2. \end{tikzcd}$$

On note K-$\mathscr{U}$ la catégorie dont les objets sont les A-modules instables M munis d'une structure de K-module définie par une application $K \otimes M \to M$ qui est A-linéaire (on dira qu'un tel M est un K-A-*module instable*). On observera qu'un tel M est forcément nul si K est la A-algèbre instable nulle. Le foncteur oubli $K\backslash\mathscr{K} \to$ K-$\mathscr{U}$ généralise le foncteur oubli $\mathscr{K} \to \mathscr{U}$. La catégorie K-$\mathscr{U}$ possède elle aussi un produit tensoriel : soient M_1 et M_2 deux K-A-modules instables, alors $M_1 \otimes_K M_2$ est encore un K-A-module instable.

4.4.2. *Formalisme algébrique correspondant au passage de l'espace* $\mathbf{hom}(BV, X_{hV})$ *à l'espace* $\mathbf{hom}_{(1)}(BV, X_{hV})$ *et des espaces* $\mathbf{hom}(BV, X_{hV})$ *et* $\mathbf{hom}_{(1)}(BV, X_{hV})$ *à l'espace* X^{hV}.

Fixons pour commencer quelques notations :

— ε est l'augmentation de $H^* V$;

— $\psi : H^* V \to H^* V \otimes H^* V$ est le coproduit induit par le produit de BV;

— $\varepsilon_1 : T_V H^* V \to \mathbf{F}_p$ est l'adjointe de l'identité, $H^* V \to H^* V = H^* V \otimes \mathbf{F}_p$;

— $\delta_1 : T_V H^* V \to H^* V$ est l'adjointe de ψ; on a $\varepsilon_1 = \varepsilon \circ \delta_1$.

On note encore $\varepsilon_1 : (T_V H^* V)^0 \to \mathbf{F}_p$ la restriction de l'application ε_1 ci-dessus aux éléments de degré zéro; elle correspond, lorsque l'on identifie $(T_V H^* V)^0$ et $(\mathbf{F}_p)^{\mathrm{Hom}(V,V)}$, à l'évaluation en 1_V, $(\mathbf{F}_p)^{\mathrm{Hom}(V,V)} \to \mathbf{F}_p$. Continuons notre liste de notations :

— e_1 désigne l'idempotent de $(T_V H^* V)^0$ correspondant par l'identification précédente à la fonction caractéristique du singleton $\{1_V\}$;

— $\mathbf{F}_p(1)$ (resp. $\mathbf{F}_p((1))$) désigne $\mathbf{F}_p$ vu comme un $(T_V H^* V)^0$-module (resp. $T_V H^* V$-module) *via* ε_1;

— $H^* V(1)$ désigne $H^* V$ vu comme un $T_V H^* V$-module *via* δ_1.

Le foncteur $L_{(1)} : (T_V H^* V)\backslash\mathscr{K} \to H^* V\backslash\mathscr{K}$.

Le foncteur $X \mapsto T_V(H^*(X_{hV}) ; S_1)$ qui apparaît dans l'énoncé 4.3.3 est le composé :

— du foncteur $H^*_V : V\text{-}\mathscr{S} \to H^* V\backslash\mathscr{K}$;

— du foncteur $H^* V\backslash\mathscr{K} \to (T_V H^* V)\backslash\mathscr{K}$ induit par le foncteur $T_V : \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ (que l'on notera encore T_V);

— et du foncteur qui associe à une A-algèbre instable M au-dessous de $T_V H^* V$ le produit tensoriel

$$\mathbf{F}_p(1) \otimes_{(T_V H^* V)^0} M.$$

On note $L_{(1)}\,M$ ce produit tensoriel; $L_{(1)}\,M$ est une A-algèbre instable au-dessous de $L_{(1)}\,T_V\,H^*\,V$ qui s'identifie à $H^*\,V$ *via* δ_1, si bien que $L_{(1)}$ apparaît comme un foncteur de $(T_V\,H^*\,V)\backslash\mathscr{K}$ vers $H^*\,V\backslash\mathscr{K}$. On peut, alternativement, définir $L_{(1)}\,M$ par l'une des formules suivantes :

$$L_{(1)}\,M = H^*\,V(1) \otimes_{T_V H^* V} M; \qquad L_{(1)}\,M = e_1\,M; \qquad L_{(1)}\,M = M[e_1^{-1}]$$

(la troisième n'est là que pour montrer, comme veut le suggérer la notation, que $L_{(1)}$ est bien une localisation !).

On a de même un isomorphisme

$$H^*\,\mathbf{hom}_{(1)}(BV, X_{hV}) \cong L_{(1)}\,H^*\,\mathbf{hom}(BV, X_{hV})$$

compatible avec l'isomorphisme décrit ci-dessus :

$$T_V(H^*(X_{hV})\,;\,S_1) \cong L_{(1)}\,T_V\,H_V^*\,X.$$

Précisons un peu. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
T_V\,H^*\,V \arrow[r, "h_c"] \arrow[d] & H^*\,\mathbf{hom}(BV, BV) \arrow[d] \\
T_V\,H_V^*\,X \arrow[r, "h_c"] & H^*\,\mathbf{hom}(BV, X_{hV}).
\end{tikzcd}$$

Puisque la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme (voir par exemple 1.11), on peut voir la flèche horizontale inférieure comme un morphisme de la catégorie $(T_V\,H^*\,V)\backslash\mathscr{K}$. Le $(H^*\,V\backslash\mathscr{K})$-morphisme $T_V(H^*(X_{hV})\,;\,S_1) \to H^*\,\mathbf{hom}_{(1)}(BV, X_{hV})$ s'identifie alors avec $L_{(1)}\,h_c : L_{(1)}\,T_V\,H^*\,V \to L_{(1)}\,H^*\,\mathbf{hom}(BV, BV)$.

Les foncteurs Fib : $(T_V\,H^*\,V)\backslash\mathscr{K} \to \mathscr{K}$ *et* fib : $H^*\,V\backslash\mathscr{K} \to \mathscr{K}$.

Puisque X^{hV} est la fibre en l'identité de l'application

$$q : \mathbf{hom}(BV, X_{hV}) \to \mathbf{hom}(BV, BV),$$

l'inclusion de X^{hV} dans $\mathbf{hom}(BV, X_{hV})$ induit un $\mathscr{K}$-morphisme

$$\lambda : \mathbf{F}_p((1)) \otimes_{T_V H^* V} H^*\,\mathbf{hom}(BV, X_{hV}) \to H^*\,X^{hV}.$$

On est donc amené à introduire le foncteur Fib : $(T_V\,H^*\,V)\backslash\mathscr{K} \to \mathscr{K}$ qui associe à toute A-algèbre instable M au-dessus de $T_V\,H^*\,V$ le produit tensoriel $\mathbf{F}_p((1)) \otimes_{T_V H^* V} M$. Ce foncteur se factorise en fib $\circ\, L_{(1)}$, fib : $H^*\,V\backslash\mathscr{K} \to \mathscr{K}$ désignant le foncteur $M \mapsto \mathbf{F}_p \otimes_{H^* V} M$. Cette factorisation et la proposition 4.2 entraînent que λ est un isomorphisme.

Version « linéaire » des foncteurs L, $\mathrm{Fib}_{(1)}$, *et* fib.

On définit par les mêmes formules que précédemment les foncteurs

$$L_{(1)} : (T_V\,H^*\,V)\text{-}\mathscr{U} \to H^*\,V\text{-}\mathscr{U}, \qquad \mathrm{Fib} : (T_V\,H^*\,V)\text{-}\mathscr{U} \to \mathscr{U},$$
$$\mathrm{fib} : H^*\,V\text{-}\mathscr{U} \to \mathscr{U}.$$

On a toujours la factorisation Fib = fib $\circ\, L_{(1)}$.

4.4.3. *Définition et caractérisation du foncteur* Fix.

Soit K une A-algèbre instable; de même que le foncteur $T_V : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ induit un foncteur $K\backslash\mathcal{K} \to (T_V K)\backslash\mathcal{K}$, de même le foncteur $T_V : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ induit, compte tenu de 2.4.3 et 2.4.4, un foncteur $K\text{-}\mathcal{U} \to (T_V K)\text{-}\mathcal{U}$. Ces foncteurs induits seront encore notés T_V.

On note $\mathrm{Fix} : H^* V\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ le foncteur composé $\mathrm{Fib} \circ T_V$. On a donc, pour tout $H^* V$-A-module instable M,

$$\mathrm{Fix}\, M = \mathbf{F}_p((1)) \otimes_{T_V H^* V} T_V M,$$

ou encore,
$$\mathrm{Fix}\, M = \mathbf{F}_p \otimes_{H^* V} L_{(1)} T_V M.$$

Soit N un A-module instable; alors le produit tensoriel sur $\mathbf{F}_p$, $H^* V \otimes N$, est naturellement un $H^* V$-A-module instable : l'application de structure

$$H^* V \otimes (H^* V \otimes N) = (H^* V \otimes H^* V) \otimes N \to H^* V \otimes N$$

est le produit tensoriel $\varphi \otimes 1$ du produit de $H^* V$ et de l'identité de N.

Proposition **4.4.3.1.** — *Le foncteur* $\mathrm{Fix} : H^* V\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *est l'adjoint à gauche du foncteur* $\mathcal{U} \to H^* V\text{-}\mathcal{U}$, $N \mapsto H^* V \otimes N$. *On a donc pour tout* $H^* V$-A-*module instable* M *et tout* A-*module instable* N :

$$\mathrm{Hom}_{H^* V\text{-}\mathcal{U}}(M, H^* V \otimes N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Fix}\, M, N).$$

Démonstration. — Soit $\sigma : H^* V \otimes M \to M$ le $\mathcal{U}$-morphisme définissant la structure de $H^* V$-module de M, $\mathrm{Hom}_{H^* V\text{-}\mathcal{U}}(M, H^* V \otimes N)$ est le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^* V \otimes N)$ formé des applications f qui font commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^* V \otimes M \arrow[r, "1.f"] \arrow[d, "\sigma"'] & H^* V \otimes (\mathbf{F}_p \otimes N) \arrow[d, "1 \otimes \tau"] \\ M \arrow[r, "f"] & H^* V \otimes N, \end{tikzcd}$$

τ désignant l'isomorphisme $\mathbf{F}_p \otimes N \cong N$ (que l'on doit considérer comme l'application de structure du $\mathbf{F}_p$-module N !) et $1.f$ désignant le produit tensoriel contracté de l'identité de $H^* V$, vue comme une application de $H^* V$ dans $H^* V \otimes \mathbf{F}_p$, et de f, tel qu'il est défini au début de la démonstration de 2.3.2. Ce sous-ensemble s'identifie par adjonction au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(T_V M, N)$ formé des applications g qui font commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} T_V H^* V \otimes T_V M \arrow[r, "\varepsilon_1 \otimes g"] \arrow[d, "T_V \sigma"'] & \mathbf{F}_p \otimes N \arrow[d, "\tau"] \\ T_V M \arrow[r, "g"] & N, \end{tikzcd}$$

d'où le résultat.

De même que X^{hV} est l'espace fonctionnel **hom**(BV, X), si X est un V-espace trivial, de même :

Proposition **4.4.3.2.** — *Soit* M *un* A-*module instable, alors les* A-*modules instables* $\mathrm{Fix}(H^* V \otimes M)$ et $T_V M$ *sont naturellement isomorphes.*

Démonstration. — Les ensembles

$$\mathrm{Hom}_{H^* V\text{-}\mathscr{U}}(H^* V \otimes M, H^* V \otimes N) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H^* V \otimes N)$$

sont naturellement en bijection.

4.5. Analogue algébrique de la proposition 4.2

Commençons par décrire l'analogue de l'action de BV sur les espaces **hom**(BV, Y).

Soit M un A-module instable, on note $\kappa_M : T_V M \to H^* V \otimes T_V M$ l'adjointe de la composition suivante :

$$M \xrightarrow{\varphi_M} H^* V \otimes T_V M \xrightarrow{\psi \otimes 1} (H^* V \otimes H^* V) \otimes T_V M = H^* V \otimes (H^* V \otimes T_V M);$$

κ_M fait de $T_V M$ un $H^* V$-comodule (ψ fait de $H^* V$ une coalgèbre coassociative cocommutative et counitaire). Cette structure est compatible en un sens évident avec l'action de BV sur les espaces **hom**(BV, Y). La coaction κ est compatible avec les produits tensoriels de A-modules instables dans le sens suivant. Soient M_1 et M_2 deux A-modules instables; on vérifie que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_V(M_1 \otimes M_2) & \xrightarrow{\kappa_{M_1} . \kappa_{M_2}} & H^* V \otimes T_V(M_1 \otimes M_2) \\ {\scriptstyle \mu_{M_1, M_2}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle 1 \otimes \mu_{M_1, M_2}} \\ T_V M_1 \otimes T_V M_2 & \xrightarrow{\kappa_{M_1} \otimes \kappa_{M_2}} & H^* V \otimes (T_V M_1 \otimes T_V M_2) \end{array}$$

($\kappa_{M_1} . \kappa_{M_2}$ est le « produit tensoriel contracté » de κ_{M_1} et κ_{M_2}, voir la démonstration de 2.3.2).

Si M est une A-algèbre instable, κ_M est un homomorphisme de A-algèbres instables.

Soit maintenant M un $H^* V$-A-module instable. Dans ce cas, $T_V M$ est un $T_V H^* V$-module, $H^* V \otimes T_V M$ est un $(H^* V \otimes T_V H^* V)$-module, $\kappa_{H^* V} : T_V H^* V \to H^* V \otimes T_V H^* V$ est un homomorphisme d'anneaux, et il résulte de ce qui précède que l'application $\kappa_M : T_V M \to H^* V \otimes T_V M$ est $\kappa_{H^* V}$-linéaire. On considère alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} T_V H^* V & \xrightarrow{\kappa_{H^* V}} & H^* V \otimes T_V H^* V \\ \downarrow {\scriptstyle \delta_1} & & \downarrow {\scriptstyle 1 \otimes \delta_1} \\ H^* V & \xrightarrow{\psi} & H^* V \otimes H^* V. \end{array}$$

Ce diagramme montre que κ_M induit une application $L_{(1)} T_V M \to H^* V \otimes L_{(1)} T_V M$, que l'on note encore κ_M, et qui est ψ-linéaire ($L_{(1)} T_V M$ est un $H^* V$-module,

$H^* V \otimes L_{(1)} T_V M$ est un $(H^* V \otimes H^* V)$-module, et $\psi : H^* V \to H^* V \otimes H^* V$ est un homomorphisme d'anneaux).

On considère enfin l'application, que l'on note $\bar{\kappa}_M : L_{(1)} T_V M \to H^* V \otimes \operatorname{Fix} M$, composée de l'application $\kappa_M : L_{(1)} T_V M \to H^* V \otimes L_{(1)} T_V M$ et de l'application $H^* V \otimes L_{(1)} T_V M \to H^* V \otimes \operatorname{Fix} M$, produit tensoriel de l'identité de $H^* V$ et du passage au quotient $L_{(1)} T_V M \to \operatorname{Fix} M$; comme la composée $(1 \otimes \varepsilon) \circ \psi$ est l'identité de $H^* V$, l'application $\bar{\kappa}_M$ est $H^* V$-linéaire ($H^* V \otimes \operatorname{Fix} M$ est muni de sa structure naturelle de $H^* V$-A-module instable).

En utilisant la structure d'algèbre de Hopf de $H^* V$ biassociative bicommutative biunitaire avec conjugaison (l'analogue algébrique de la structure de groupe abélien simplicial de BV), on obtient la proposition suivante qui est l'analogue algébrique de la proposition 4.2 (et que l'on trouve aussi dans [DW]) :

Proposition **4.5.** — *L'application naturelle*

$$\bar{\kappa}_M : L_{(1)} T_V M \to H^* V \otimes \operatorname{Fix} M$$

est un isomorphisme de $H^* V$-A-*modules instables.*

Précisons un peu. L'inverse de $\bar{\kappa}_M$ est induite par la composée des applications suivantes :

— $1 \otimes \kappa_M : H^* V \otimes L_{(1)} T_V M \to H^* V \otimes (H^* V \otimes L_{(1)} T_V M)$;

— $1 \otimes \chi \otimes 1 : H^* V \otimes H^* V \otimes L_{(1)} T_V M \to H^* V \otimes H^* V \otimes L_{(1)} T_V M$, χ désignant la conjugaison de l'algèbre de Hopf $H^* V$ *i.e.* l'application induite par l'opposée de l'identité de V;

— $\varphi \otimes 1 : (H^* V \otimes H^* V) \otimes L_{(1)} T_V M \to H^* V \otimes L_{(1)} T_V M$, φ désignant le produit de $H^* V$;

— l'application $H^* V \otimes L_{(1)} T_V M \to L_{(1)} T_V M$ définissant la structure de $H^* V$-module de $L_{(1)} T_V M$.

4.6. Propriétés du foncteur Fix

Elles sont essentiellement conséquence de celles du foncteur T_V.

4.6.1. *Exactitude du foncteur* Fix.

Théorème **4.6.1.1.** — *Le foncteur* $\operatorname{Fix} : H^* V\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *est exact.*

Démonstration. — Puisque le foncteur $L_{(1)} \circ T_V : H^* V\text{-}\mathcal{U} \to H^* V\text{-}\mathcal{U}$ est exact comme composé de deux foncteurs exacts, il s'agit là d'un corollaire de la proposition 4.5.

Etant donné que la catégorie $\mathcal{U}$ a assez d'injectifs (voir par exemple [LZ1]), le théorème 4.6.1.1 peut être reformulé ainsi :

Théorème **4.6.1.2.** — *Si* I *est un objet injectif de la catégorie* $\mathcal{U}$, *alors le produit tensoriel* $H^* V \otimes I$ *est un objet injectif de la catégorie* $H^* V\text{-}\mathcal{U}$.

En particulier $H^* V = H^* V \otimes \mathbf{F}_p$ est un objet injectif de la catégorie $H^* V$-$\mathcal{U}$, résultat dû originalement à H. R. Miller.

4.6.2. *Foncteur* Fix *et produits tensoriels de* $H^* V$-A-*modules instables.*

Soient M_1 et M_2 deux $H^* V$-A-modules instables; on définit comme en 2.2 une application naturelle

$$\mu_{M_1, M_2} : \mathrm{Fix}(M_1 \otimes_{H^* V} M_2) \to \mathrm{Fix}\, M_1 \otimes \mathrm{Fix}\, M_2.$$

Le théorème 2.4.3 implique le suivant (qui, au vu de 4.4.3.2, en est une généralisation) :

Théorème **4.6.2.1.** — *Pour tous* $H^* V$-A-*modules instables* M_1 *et* M_2, *l'application naturelle*

$$\mu_{M_1, M_2} : \mathrm{Fix}(M_1 \otimes_{H^* V} M_2) \to \mathrm{Fix}\, M_1 \otimes \mathrm{Fix}\, M_2$$

est un isomorphisme.

Compte tenu de 4.4.3.2 et 2.2.4, ce théorème admet le corollaire suivant :

Corollaire **4.6.2.2.** — *Pour tout* H^* V-A-*module instable* M_1 *et tout* A-*module instable* M_2, *l'application naturelle*

$$\mathrm{Fix}(M_1 \otimes M_2) \to \mathrm{Fix}\, M_1 \otimes T_V\, M_2$$

est un isomorphisme. En particulier, si M_2 *est localement fini, l'application naturelle*

$$\mathrm{Fix}(M_1 \otimes M_2) \to (\mathrm{Fix}\, M_1) \otimes M_2$$

est un isomorphisme.

4.6.3. *Foncteur* Fix *et* A-*algèbres instables au-dessous de* $H^* V$.

Soit M une A-algèbre instable au-dessous de $H^* V$; alors Fix M possède une structure naturelle de A-algèbre instable compatible avec sa structure de A-module instable. Au risque d'être un peu lourd, précisons cela. Si l'on note encore $\mathrm{Fix} : H^* V \backslash \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ le composé des foncteurs $T_V : H^* V \backslash \mathcal{K} \to (T_V\, H^* V) \backslash \mathcal{K}$ et $\mathrm{Fib} : (T_V\, H^* V) \backslash \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^* V \backslash \mathcal{K} \arrow[r, "\mathrm{Fix}"] \arrow[d, "\text{oubli}"'] & \mathcal{K} \arrow[d, "\text{oubli}"] \\ H^* V\text{-}\mathcal{U} \arrow[r, "\mathrm{Fix}"] & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Soit N est une A-algèbre instable, alors le produit tensoriel sur $\mathbf{F}_p$, $H^* V \otimes N$, est naturellement une A-algèbre instable au-dessous de $H^* V$: le $\mathcal{K}$-morphisme de $H^* V$ dans $H^* V \otimes N$ est le produit tensoriel $1 \otimes \eta : H^* V \otimes \mathbf{F}_p \to H^* V \otimes N$ de l'identité de $H^* V$ et de l'unité de N. Cette structure est bien sûr compatible avec la structure de $H^* V$-A-module instable considérée en 4.4.3. Voici la généralisation de 2.4.7 :

Théorème **4.6.3.1.** — *Le foncteur* $\mathrm{Fix} : H^* V\backslash\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ *est l'adjoint à gauche du foncteur* $\mathcal{K} \to H^* V\backslash\mathcal{K}$, $N \mapsto H^* V \otimes N$. *On a donc, pour toute* A-*algèbre instable* M *au-dessous de* $H^* V$ *et toute* A-*algèbre instable* N,

$$\mathrm{Hom}_{H^* V\backslash\mathcal{K}}(M, H^* V \otimes N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{Fix}\, M, N).$$

Démonstration. — Soit σ le $\mathcal{K}$-morphisme structurel de $H^* V$ dans M, par définition $\mathrm{Hom}_{H^* V\backslash\mathcal{K}}(M, H^* V \otimes N)$ est le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(M, H^* V \otimes N)$ formé des applications f qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^* V & \xrightarrow{1} & H^* V \otimes \mathbf{F}_p \\ \sigma\downarrow & & \downarrow 1\otimes\eta \\ M & \xrightarrow{f} & H^* V \otimes N. \end{array}$$

Ce sous-ensemble s'identifie par adjonction au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(T_V M, N)$ formé des applications g qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_V H^* V & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \mathbf{F}_p \\ T_V\sigma\downarrow & & \downarrow \eta \\ T_V M & \xrightarrow{g} & N, \end{array}$$

d'où le résultat.

Remarque **4.6.3.2.** — Soient M_1 et M_2 deux objets de $H^* V\backslash\mathcal{K}$; puisque $M_1 \otimes_{H^* V} M_2$ est la somme de M_1 et M_2 dans la catégorie $H^* V\backslash\mathcal{K}$, on a, compte tenu du théorème précédent, un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Fix}(M_1 \otimes_{H^* V} M_2) \to \mathrm{Fix}\, M_1 \otimes \mathrm{Fix}\, M_2.$$

Cet isomorphisme est bien compatible avec le théorème 4.6.2.1.

Enonçons pour terminer ce sous-paragraphe les variantes « non linéaires » des énoncés 4.4.3.2 et 4.5 :

Proposition **4.6.3.3.** — *Soit* M *une* A-*algèbre instable*; *alors les* A-*algèbres instables* $\mathrm{Fix}(H^* V \otimes M)$ *et* $T_V M$ *sont naturellement isomorphes.*

Proposition **4.6.3.4.** — *Soit* M *une* A-*algèbre instable au-dessous de* $H^* V$; *alors l'application naturelle*

$$\bar{\kappa}_M : L_{(1)} T_V M \to H^* V \otimes \mathrm{Fix}\, M$$

est un isomorphisme de A-*algèbres instables au-dessous de* $H^* V$.

4.6.4. *Propriétés d'annulation du foncteur* Fix.

On note c_V l'élément de $H^* V$ défini de la façon suivante :

— Pour $p = 2$,

$$c_V = \prod_{u \in H^1 V - \{0\}} u.$$

— Pour $p > 2$,

$$c_V = \prod_{u \in H^1 V - \{0\}} \beta u,$$

$\beta : H^1 V \to H^2 V$ désignant l'opération de Bockstein.

Proposition **4.6.4.1.** — *Soit* M *un* $H^* V$-A-*module instable. Si le localisé* $M[c_V^{-1}]$ *(c'est-à-dire le localisé du* $H^* V$-*module sous-jacent à* M *par rapport à la partie multiplicativement stable de* $H^* V$ *engendré par* c_V*) est nul, alors il en est de même pour* Fix M.

Démonstration. — Soit N un A-module instable. Si $M[c_V^{-1}]$ est nul, alors il en est de même pour $\mathrm{Hom}_{H^* V\text{-}\mathscr{U}}(M, H^* V \otimes N)$ et donc pour $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\mathrm{Fix}\, M, N)$. En effet, dans ce cas toute application $H^* V$-linéaire de M dans $H^* V \otimes N$ est nulle puisque $H^* V \otimes N$ s'injecte dans $(H^* V \otimes N)\, [c_V^{-1}] \cong (H^* V)\, [c_V^{-1}] \otimes N$ (les structures de A-module n'interviennent pas dans l'argument !).

Remarque **4.6.4.2.** — On peut montrer que la proposition ci-dessus admet une réciproque (plus subtile !). Nous comptons revenir sur ce point ultérieurement.

En attendant voici un énoncé qui contient l'analogue d'une telle réciproque pour les A-algèbres instables au-dessous de $H^* V$.

Proposition **4.6.4.3.** — *Soit* $\varphi : H^* V \to K$ *un homomorphisme de* A-*algèbres instables (*K *apparaît donc comme une* A-*algèbre instable au-dessous de* $H^* V$*). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la* A-*algèbre instable* Fix K *est non nulle* ;

(ii) *il existe un homomorphisme de* A-*algèbres instables* $\rho : K \to H^* V$ *tel que le composé* $\rho \circ \varphi$ *est l'identité de* $H^* V$;

(iii) φ *est injectif* ;

(iv) $\varphi((c_V)^n) \neq 0$ *pour tout entier* n.

Démonstration de l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii). — Rappelons qu'une A-algèbre instable L est non nulle si et seulement si l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(L, \mathbf{F}_p)$ est non vide. Or $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{Fix}(K), \mathbf{F}_p)$ s'identifie d'après 4.6.3.1 à $\mathrm{Hom}_{H^* V \backslash \mathscr{K}}(K, H^* V)$ (l'identité de $H^* V$ en fait une A-algèbre instable au-dessous de $H^* V$), c'est-à-dire à l'ensemble des $\mathscr{K}$-sections de φ.

Démonstration de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i). — On considère φ comme un $(H^* V \backslash \mathscr{K})$-morphisme. Le $\mathscr{K}$-morphisme $\mathrm{Fix}(\varphi) : \mathrm{Fix}(H^* V) \to \mathrm{Fix}(K)$ s'identifie à l'unité de Fix(K) puisque le $\mathcal{K}$-morphisme $\mathrm{Fix}(\mathrm{H}^* \mathrm{V}) \to \mathbf{F}_p$, adjoint de l'identité $\mathrm{H}^* \mathrm{V} \to \mathrm{H}^* \mathrm{V} \otimes \mathbf{F}_p$, est un isomorphisme (voir 4.6.3.3). La condition (i) est donc équivalente à la suivante :

(v) le $\mathcal{K}$-morphisme $\mathrm{Fix}(\varphi)$ est injectif.

Or on obtient le $\mathcal{U}$-morphisme sous-jacent au $\mathcal{K}$-morphisme $\mathrm{Fix}(\varphi)$ en appliquant le foncteur $\mathrm{Fix} : \mathrm{H}^* \mathrm{V}\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ au $(\mathrm{H}^* \mathrm{V}\text{-}\mathcal{U})$-morphisme sous-jacent au $(\mathrm{H}^* \mathrm{V}\backslash\mathcal{K})$-morphisme φ, si bien que la condition (i) équivaut encore à :

(vi) le $\mathcal{U}$-morphisme $\mathrm{Fix}(\varphi)$, φ étant considéré comme un $(\mathrm{H}^* \mathrm{V}\text{-}\mathcal{U})$-morphisme, est injectif.

Puisque le foncteur $\mathrm{Fix} : \mathrm{H}^* \mathrm{V}\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ est exact, cette condition est vérifiée si φ est injectif.

Remarque. — On pourrait également démontrer l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) en utilisant la « $\mathcal{K}$-injectivité » de $\mathrm{H}^* \mathrm{V}$ [LZ2] [La1].

Démonstration de l'équivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). — Cette équivalence est essentiellement due à J.-P. Serre : le corollaire du § 2 de [Se] en est la « version paire » (au sens de 2.2.6). Voir l'appendice D pour une démonstration utilisant la caractérisation des A-modules instables « nilpotents » donnée dans [LSc1].

Remarque. — Soient M un $\mathrm{H}^* \mathrm{V}$-A-module instable et PV la sous-A-algèbre instable de $\mathrm{H}^* \mathrm{V}$ librement engendrée comme $\mathbf{F}_p$-algèbre graduée commutative par $\beta\mathrm{H}^1 \mathrm{V}$. Il est bien connu que le résultat de Serre implique qu'un élément de M est de PV-torsion si et seulement s'il est annulé par une puissance de c_{V} (le radical de l'annulateur dans PV d'un élément de M est stable par A, voir par exemple [LSt], § 4, proposition 3). Les deux conditions suivantes sont donc équivalentes :

(i) $\mathrm{M}[c_{\mathrm{V}}^{-1}]$ est nul;
(ii) M est de PV-torsion.

4.6.4.4. Le second résultat d'annulation que nous voulons énoncer n'est pas *a priori* de même nature que le précédent. Etant donné l'application que nous comptons en faire, il est logique de supposer $\mathrm{V} = \mathbf{Z}/p$.

Proposition **4.6.4.4.** — *Soit* M *un* H-A-*module instable. Si, en tant que* A-*module,* M *est localement fini, alors* Fix M *est nul.*

Démonstration. — Elle se fait en trois points :

— Si M est localement fini en tant que A-module, alors l'application naturelle de A-modules instables $\pi_{\mathrm{M}} : \mathrm{TM} \to \mathrm{M}$, induite par l'unité de H, est un isomorphisme (2.2.4).

— Quand M est un H-A-module instable π_{M} est π_{H}-linéaire.

— Le produit tensoriel $\mathbf{F}_p((1)) \otimes_{\mathrm{TH}} \mathrm{M}$, M étant vu comme un TH-module *via* π_{H}, est nul.

4.7. La théorie cohomologique équivariante H^{V*}

Soient X un espace topologique muni d'une action de V et Y un sous-espace de X stable par V; on pose

$$H^{V*}X = \mathrm{Fix}\, H^*_V X; \qquad H^{V*}(X, Y) = \mathrm{Fix}\, H^*_V(X, Y).$$

Parce que le foncteur Fix est exact et commute au foncteur suspension

$$\Sigma : H^* V\text{-}\mathcal{U} \to H^* V\text{-}\mathcal{U}$$

(on peut voir cette commutation comme une conséquence de 4.6.2.2), le foncteur H^{V*} est une théorie cohomologique équivariante à la Eilenberg-Steenrod. On observera que $H^{V*}X$ coïncide avec $T_V H^* X$ si l'action de V sur X est triviale (c'est une traduction de 4.4.3.2). La théorie H^{V*} possède la propriété ci-dessous, que l'on peut considérer comme la version algébrique de la conjecture de Sullivan « généralisée ». On note i l'inclusion de X^V dans X et $k : H^{V*}X \to H^*(X^V)$ la composée de

$$H^{V*}(i) : H^{V*}X \to H^{V*}(X^V) = T_V H^*(X^V)$$

et de $\pi_{H^*(X^V)} : T_V H^*(X^V) \to H^*(X^V)$.

Proposition **4.7.** — *L'application naturelle* $k : H^{V*}X \to H^* X^V$ *est un isomorphisme si* X *est un* V-CW-*complexe de dimension finie.*

Première démonstration. — On pose $h^*(X, Y) = H^*(X^V, Y^V)$ pour toute paire (X, Y) de V-CW-complexes; le foncteur h^* est lui aussi une théorie cohomologique équivariante à la Eilenberg-Steenrod et k s'étend en une transformation naturelle de H^{V*} dans h^*. On note $\mathrm{Sk}^n X$ le n-squelette de X, n désignant un entier positif ou nul; on convient que $\mathrm{Sk}^{-1} X$ est vide. On va montrer que $k : H^{V*}(\mathrm{Sk}^n X, \mathrm{Sk}^{n-1} X) \to h^*(\mathrm{Sk}^n X, \mathrm{Sk}^{n-1} X)$ est un isomorphisme pour tout V-complexe X, il en résultera que k est un isomorphisme si X est de dimension finie.

D'après la définition même d'un V-CW-complexe, il existe des ensembles $C_{n,W}$, W décrivant l'ensemble des sous-groupes de V, tels qu'on ait des isomorphismes de $H^* V$-A-modules instables :

$$\begin{aligned} H^*_V(\mathrm{Sk}^n X, \mathrm{Sk}^{n-1} X) &\cong \oplus_W (H^*_V(D^n \times V/W, S^n \times V/W))^{C_{n,W}} \\ &\cong \oplus_W (\Sigma^n H^*_V(V/W))^{C_{n,W}} \\ &\cong \oplus_W (\Sigma^n H^* W)^{C_{n,W}} \end{aligned}$$

soit, en fin de compte,

$$H^*_V(\mathrm{Sk}^n X, \mathrm{Sk}^{n-1} X) \cong \oplus_W \Gamma_{n,W} \otimes H^* W,$$

$\Gamma_{n,W}$ désignant le A-module instable $\Sigma^n(\mathbf{F}_p)^{C_{n,W}}$.

De plus, l'application $H^*_V(\mathrm{Sk}^n X, \mathrm{Sk}^{n-1} X) \to H^*_V(\mathrm{Sk}^n X^V, \mathrm{Sk}^{n-1} X^V)$ induite par l'inclusion i s'identifie à la projection sur le facteur d'indice V,

$$\Gamma_{n,V} \otimes H^* V \cong H^*(\mathrm{Sk}^n X^V, \mathrm{Sk}^{n-1} X^V) \otimes H^* V.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} H^{V*}(Sk^n X, Sk^{n-1} X) &\cong \mathrm{Fix}(\oplus_W \Gamma_{n,W} \otimes H^* W) \\ &\cong \oplus_W \mathrm{Fix}(\Gamma_{n,W} \otimes H^* W) \\ &\cong \oplus_W \Gamma_{n,W} \otimes \mathrm{Fix}\, H^* W, \end{aligned}$$

d'après 4.6.2.2. Or,

$$\mathrm{Fix}\, H^* W = \begin{cases} 0 & \text{si } W \neq V \\ \mathbf{F}_p & \text{si } W = V \end{cases}$$

d'après 4.6.4.1 et 4.4.3.2. D'où le résultat.

Deuxième démonstration. — Considérons l'application de $H^* V$-A-modules instables $i^* : H_V^* X \to H_V^*(X^V)$. Compte tenu de 4.4.3.2 et 2.2.4, il s'agit de vérifier que $\mathrm{Fix}(i^*)$ est un isomorphisme. D'après le théorème de localisation de [AS] [Bor] [Qui2], les localisés $(\ker i^*)\,[c_V^{-1}]$ et $(\mathrm{coker}\, i^*)\,[c_V^{-1}]$ sont nuls si X est de dimension finie. Le théorème 4.6.1.1 et la proposition 4.6.4.1 montrent alors que $\mathrm{Fix}(i^*)$ est un isomorphisme.

Troisième démonstration. — Cette démonstration n'est valable que lorsque V est cyclique; elle est implicite dans [La1]. Dans ce cas l'application naturelle $H_V^*(X, X^V) \to H^*(X/V, X^V)$ est un isomorphisme ce qui entraîne que $\ker i^*$ et $\mathrm{coker}\, i^*$ sont nuls en degré strictement supérieur à la dimension de X. On peut conclure alors que $\mathrm{Fix}(i^*)$ est un isomorphisme grâce à la proposition 4.6.4.4.

Remarque. — Ce qui empêche la transformation naturelle k d'être un isomorphisme pour tout X est que la théorie H^{V*}, contrairement à la théorie h^* (voir la première démonstration), n'est pas additive au sens de [Mil]. En effet, comme le foncteur T_V ne commute pas en général aux produits infinis, il n'y a aucune raison pour que l'application naturelle :

$$H^{V*}(\amalg_\lambda X_\lambda) \to \Pi_\lambda(H^{V*} X_\lambda)$$

soit un isomorphisme pour une famille arbitraire de V-CW-complexes X_λ.

4.8. Analogues équivariants des applications $h_c : T_V H^* Y \to H^* \mathbf{hom}(BV, Y)$ et $e_c : T_V H^* Y \to H^* \mathbf{hom}(BY, \hat{Y})$

On revient maintenant à la situation de 4.3.2. On considère donc un V-espace X, un espace Z (que l'on munit de l'action triviale de V) et une application V-équivariante $\omega : EV \times Z \to X$; la donnée de ω est équivalente à celle d'une application d'espaces au-dessus de BV, $\omega_2 : BV \times Z \to X_{hV}$, ou encore à celle d'une application (ordinaire) $\omega_1 : Z \to X^{hV}$.

On note $\omega_7 : H_V^* X \to H^* V \otimes H^* Z$ l'homomorphisme de A-algèbres instables au-dessous de $H^* V$ induit en cohomologie par ω_2 (on peut voir également ω_7 comme l'application $H_V^*(\omega)$). On note enfin $\omega_8 : H^{V*} X = \mathrm{Fix}\, H_V^* X \to H^* Z$ l'homomorphisme de A-algèbres instables adjoint de ω_7 (voir 4.6.3.1). Nous avons fait ce qu'il fallait dans les paragraphes précédents pour pouvoir identifier à présent l'application $\omega_6 : T_V(H^*(X_{hV}); S_1) \to H^*(BV \times Z)$ considérée en 4.3.2 au produit tensoriel

$$1 \otimes \omega_8 : H^* V \otimes H^{V*} X \to H^* V \otimes H^* Z.$$

Si l'on prend pour Z l'espace X^{hV} et pour ω_1 l'identité de X^{hV} on obtient comme application ω_8 une application naturelle

$$h_c : H^{V*} X \to H^*(X^{hV})$$

qui généralise l'application naturelle $h_c : T_V H^* Y \to H^* \mathbf{hom}(BV, Y)$. Ici encore $h_c : H^{V*} X \to H^*(X^{hV})$ se factorise à travers $H^*((\hat{X})^{hV})$. Précisons un peu. La composée de l'application $e_c : T_V(H^*(X_{hV}); S_1) \to H^* \mathbf{hom}(BV, (X_{hV})^\wedge; S_1)$ (voir 3.2) et de l'isomorphisme $H^* \mathbf{hom}(BV, (X_{hV})^\wedge; S_1) \cong H^* \mathbf{hom}_{(1)}(BV, (\hat{X})_{hV})$ (voir 4.3.1) s'identifie au produit tensoriel de l'identité de $H^* V$ et d'une application que nous notons encore

$$e_c : H^{V*} X \to H^*((\hat{X})^{hV}).$$

Comme en 1.12, $h_c : H^{V*} X \to H^*(X^{hV})$ est la composée de $e_c : H^{V*} X \to H^*((\hat{X})^{hV})$ et de l'application $H^*((\hat{X})^{hV}) \to H^*(X^{hV})$ induite par l'application naturelle (V-équivariante) $\eta : X \to \hat{X}$.

Observons pour terminer que si l'on prend pour Z l'espace X^V et pour ω_1 l'inclusion de X^V dans X^{hV}, on obtient comme application ω_8 l'application naturelle $k : H^{V*} X \to H^*(X^V)$ considérée en 4.7.

4.9. Sur le type d'homotopie et la cohomologie modulo p de l'espace $(\hat{X})^{hV}$

Nous sommes maintenant en mesure d'effectuer les traductions « équivariantes » des énoncés du chapitre 3. Voici par exemple les versions équivariantes (non « localisées ») des énoncés 3.4.1, 3.4.3, et 3.2.2.

Soit X un espace muni d'une action du groupe V; on suppose $H^* X$ de dimension finie en chaque degré.

Théorème **4.9.1.** — *On se donne un espace* Z *et une application* $\omega : EV \times Z \to X$, V-*équivariante*, V *opérant trivialement sur* Z; *on suppose* $H^* Z$ *ou* $H^{V*} X$ *de dimension finie en chaque degré. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *l'homomorphisme de* A-*algèbres instables* $H^{V*} X \to H^* Z$ *induit par* ω *est un isomorphisme*;
(ii) *l'application* $\hat{Z} \to (\hat{X})^{hV}$ *induite par* ω *est une équivalence d'homotopie.*

Plus précisément, soit n un entier, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *l'homomorphisme de* A-*algèbres instables* $H^{V*} X \to H^* Z$ *induit par* ω *est n-connexe*;
(ii) *l'application* $\hat{Z} \to (\hat{X})^{hV}$ *induite par* ω *est n-connexe.*

Corollaire **4.9.2.** — *Si* $H^*(X^{hV})$ *ou* $H^{V*}X$ *est de dimension finie en chaque degré les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'application* $h_c : H^{V*}X \to H^*(X^{hV})$ *est un isomorphisme de* A*-algèbres instables;*
(ii) *l'application naturelle* $(X^{hV})^\wedge \to (\hat{X})^{hV}$ *est une équivalence d'homotopie.*

Théorème **4.9.3.** — *Si* $H^{V*}X$ *est de dimension finie en chaque degré et nulle en degré un, alors l'application*

$$e_c : H^{V*}X \to H^*((\hat{X})^{hV})$$

est un isomorphisme de A*-algèbres instables.*

Signalons que la démonstration du théorème 4.9.3 utilise en fait le théorème 3.2.4. En effet l'hypothèse « $H^{V*}X$ nulle en degré un » implique seulement que les composantes connexes de $T_V(H^*(X_{hV}); S_1) = H^*V \otimes H^{V*}X$ sont libres en degré $\leqslant 2$.

4.10. La méthode de W. G. Dwyer, H. R. Miller et J. Neisendorfer [DMN]

L'objet de ce paragraphe est de décrire brièvement la méthode qu'emploient W. G. Dwyer, H. R. Miller et J. Neisendorfer pour étudier l'espace des points fixes homotopiques d'une action d'un p-groupe abélien élémentaire.

Ces auteurs (en abrégé DMN) mettent en place une version relative du formalisme de Bousfield-Kan dont nous avons traité au chapitre 1. La catégorie $\mathcal{S}$ est remplacée par la catégorie $\mathcal{S}/B$ des espaces au-dessus de B. Soient X et Y deux espaces au-dessus de B; *l'espace fonctionnel* $\mathbf{hom}_{\mathcal{S}/B}(X, Y)$ est le foncteur (l'ensemble simplicial) $\Delta^{op} \to \mathcal{E}ns$, $[n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}/B}(X \times \Delta^n, Y)$; $\mathbf{hom}_{\mathcal{S}/B}(X, Y)$ est caractérisé par la bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}/B}(X \times Z, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(Z, \mathbf{hom}_{\mathcal{S}/B}(X, Y)),$$

fonctorielle en l'espace Z (insistons sur le fait que $\mathbf{hom}_{\mathcal{S}/B}(X, Y)$ est un objet de $\mathcal{S}$ et non pas de $\mathcal{S}/B$.) L'espace des points fixes homotopiques $X^{h\pi}$ de l'action d'un groupe π sur un espace X n'est donc rien d'autre que l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}_{\mathcal{S}/B\pi}(B\pi, X_{h\pi})$. En remplaçant le foncteur $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $Y \mapsto \mathbf{F}_p[Y]$, par le foncteur $\mathcal{S}/B \to \mathcal{S}/B$, $Y \mapsto B \times \mathbf{F}_p[Y]$, on définit comme au chapitre 1, pour tout objet Y de $\mathcal{S}/B$, une résolution cosimpliciale canonique $\mathrm{Rés}_{\mathcal{S}/B}{}^{\bullet}Y$ (il s'agit là d'un $\mathcal{S}/B$-objet cosimplicial). On pose

$$Y^{\wedge}_{\mathcal{S}/B} = \mathrm{Tot}\,\mathrm{Rés}_{\mathcal{S}/B}{}^{\bullet}Y;$$

$Y^{\wedge}_{\mathcal{S}/B}$ est un espace au-dessus de B que DMN appellent le *p-complété relatif* de Y. Ils montrent que cet espace (si B est fibrant et si $Y \to B$ est une fibration) est le produit fibré homotopique de B et $\hat{Y}$ au-dessus de $\hat{B}$. Ils en déduisent en particulier, toujours à l'aide du « mod-R fibre lemma », que $\mathbf{hom}_{\mathcal{S}/BV}(BV, (X_{hV})^{\wedge}_{\mathcal{S}/BV})$ a fonctoriellement le type d'homotopie de $(\hat{X})^{hV}$, pour tout V-espace X. L'espace

$$\mathbf{hom}_{\mathcal{S}/B}(X, Y^{\wedge}_{\mathcal{S}/B}) = \mathrm{Tot}\,\mathbf{hom}_{\mathcal{S}/B}(X, \mathrm{Rés}_{\mathcal{S}/B}{}^{\bullet}Y)$$

peut être étudié par les méthodes du chapitre 1. Soient C une A-coalgèbre instable et K, M deux A-coalgèbres instables au-dessus de C; on peut définir comme en 1.10.1 un objet fonctionnel $\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*/C}(K, N)$ caractérisé par la bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*/C}(K \otimes N, M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_*}(N, \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*/C}(K, M)),$$

fonctorielle en la A-coalgèbre instable N (insistons à nouveau sur le fait que $\mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*/C}(K, M)$ est un objet de $\mathscr{K}_*$ et non pas de $\mathscr{K}_*/C$). On peut définir de même des objets fonctionnels $(\text{-:-})_{D\text{-}\mathscr{U}}$ et $(\text{-:-})_{D\backslash\mathscr{K}}$. En particulier,

$$(M : H^* V)_{H^* V\text{-}\mathscr{U}} = \mathrm{Fix}\, M \quad (\text{resp. } (M : H^* V)_{H^* V\backslash\mathscr{K}} = \mathrm{Fix}\, M)$$

pour tout H^* V-A-module instable M (resp. pour toute A-algèbre instable M au-dessus de $H^* V$). On a, comme en 1.11 et 1.12, des applications naturelles :

$$h : H_* \,\mathbf{hom}_{\mathscr{S}/B}(X, Y) \to \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*/H_* B}(H_* X, H_* Y)$$
$$h_c : (H^* Y : H^* X)_{\mathscr{K}/H^* B} \to H^* \,\mathbf{hom}_{\mathscr{S}/B}(X, Y)$$
$$e : H_* \,\mathbf{hom}_{\mathscr{S}/B}(X, Y\hat{}_{\mathscr{S}/B}) \to \mathbf{hom}_{\mathscr{K}_*/H_* B}(H_* X, H_* Y)$$
$$e_c : (H^* Y : H^* X)_{\mathscr{K}/H^* B} \to H^* \,\mathbf{hom}_{\mathscr{S}/B}(X, Y\hat{}_{\mathscr{S}/B}).$$

On vérifie que les applications naturelles $h_c : H^{V*} X \to H^*(X^{hV})$ et $e_c : H^{V*} X \to H^*((\hat{X})^{hV})$ définies au § 4.8 s'identifient aux applications naturelles

$$h_c : (H^*(X_{hV}) : H^* BV)_{\mathscr{K}/H^* BV} \to H^* \,\mathbf{hom}_{\mathscr{S}/BV}(BV, X_{hV})$$

et $$e_c : (H^*(X_{hV}) : H^* BV)_{\mathscr{K}/H^* BV} \to H^* \,\mathbf{hom}_{\mathscr{S}/BV}(BV, (X_{hV})\hat{}_{\mathscr{S}/B})$$

évoquées ci-dessus. Si bien que l'on peut obtenir les résultats du type de ceux de 4.9 en appliquant à l'espace cosimplicial $\mathbf{hom}_{\mathscr{S}/BV}(BV, \mathrm{Rés}_{\mathscr{S}/BV}{}^{\bullet}(X_{hV}))$ les raisonnements faits au chapitre 3 pour l'espace cosimplicial $\mathbf{hom}(BV, \mathrm{Rés}^{\bullet} Y)$, le foncteur Fix remplaçant le foncteur T_V.

4.11. La conjecture de Sullivan « généralisée »

Nous concluons ce chapitre et cet article en traitant de la conjecture de Sullivan « généralisée ». Signalons que si l'on est exclusivement intéressé par la démonstration de cette conjecture, alors la plupart des considérations développées depuis 4.3.3 ou même 3.3.1 sont superflues. En effet la démonstration donnée ci-dessous n'est qu'une variante de celle de [La1], où l'on montre plus directement comment le théorème 3.3.1 implique la forme générale de la conjecture de Sullivan. Signalons également les démonstrations concurrentes dues respectivement à H. R. Miller, à G. Carlsson, et à W. Dwyer, H. R. Miller et J. Neisendorfer. Nous avons déjà parlé de la méthode des trois derniers auteurs cités dans le paragraphe précédent. La démonstration originale de Miller peut être vue quant à elle comme une généralisation de sa démonstration de la conjecture de Sullivan dans le cas d'une action triviale [Mi1], la suite spectrale évoquée en 4.10 prenant la place de celle de Bousfield-Kan. Enfin la démonstration de G. Carlsson utilise l'affirmation de la conjecture de Segal [Ca3].

Soit X un espace topologique; on définit son p-complété, que l'on note encore $\hat{X}$, comme le p-complété de son ensemble simplicial singulier Sin X :

$$\hat{X} = (\mathrm{Sin}\, X)\hat{}.$$

Théorème **4.11** (Forme générale de la conjecture de Sullivan). — *Soit* X *un* $\mathbf{Z}/p$-CW-*complexe fini. Alors l'application naturelle*

$$(X^{\mathbf{Z}/p})\hat{} \to (\hat{X})^{h\mathbf{Z}/p}$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. — On pose, pour alléger la notation, $V = \mathbf{Z}/p$.

L'application $(X^V)\hat{} \to (\hat{X})^{hV}$ qui apparaît dans l'énoncé ci-dessus est induite par l'inclusion de $\mathrm{Sin}(X^V) = (\mathrm{Sin}\, X)^V$ dans $(\mathrm{Sin}\, X)^{hV}$. On applique le théorème 4.9.1 en prenant pour ω l'application $EV \times (\mathrm{Sin}\, X)^V \to \mathrm{Sin}\, X$ adjointe de cette inclusion. Comme il a déjà été observé à la fin de 4.8, l'application $H^{V*}\, \mathrm{Sin}\, X \to H^*(\mathrm{Sin}\, X)^V$ induite par un tel ω est l'application naturelle $k : H^{V*}\, \mathrm{Sin}\, X \to H^*(\mathrm{Sin}\, X)^V$ introduite en 4.7. Celle-ci, par définition même de la cohomologie singulière, s'identifie à l'application $k : H^{V*}\, X \to H^*(X^V)$ qui, d'après la proposition 4.7, est bien un isomorphisme.

Remarque. — Compte tenu de la troisième démonstration que nous avons donnée, dans le cas $V = \mathbf{Z}/p$, de la proposition 4.7, les seules propriétés du V-espace topologique X que nous avons utilisées ci-dessus sont les suivantes :

— la cohomologie singulière modulo p des espaces topologiques X et X^V est de dimension finie en chaque degré;

— les A-modules $H^*(X^V)$ et $H^*_V(X, X^V)$ sont localement finis.

La conclusion du théorème 4.11 reste donc valable sous ces seules hypothèses.

Appendice A

Un analogue pour les A-algèbres instables des théorèmes de Hurewicz et Whitehead

Soient M une A-algèbre instable connexe non nulle, et $s \geqslant 0$, $t > 0$, deux entiers. On pose

$$\mathrm{E}^{s,t}(\mathrm{M}) = \pi^s \pi_t \, \mathrm{Rés}_{cx\bullet} \mathrm{M} = \pi^s \pi_t \, \mathrm{Rés}_\bullet (\mathrm{M}_-)$$

(voir la fin de 1.9.1); $\mathrm{E}^{s,t}$ est un foncteur contravariant à valeurs dans la catégorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels. On a encore

$$\mathrm{E}^{s,t}(\mathrm{M}) = \mathrm{Ext}^s_{\mathscr{K}_-}(\mathrm{M}_-, \Sigma^t \mathbf{F}_p)$$

(notation « duale » de celle de [BK2] [Mi1]), $\mathrm{Ext}^s_{\mathscr{K}_-}(-, \mathrm{I})$ désignant, pour tout objet abélien I de $\mathscr{K}_-$ (voir 1.7.6), le s-ième dérivé à gauche du foncteur (non additif) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_-}(-, \mathrm{I})$. Pour tout espace connexe pointé Y dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré, $\{\mathrm{E}^{s,t}(\mathrm{H}^* \mathrm{Y})\}$ est le terme E_2 de la suite spectrale de Bousfield-Kan convergeant vers $\pi_{t-s} \hat{\mathrm{Y}}$ [BK2].

L'objet de cet appendice est de démontrer la proposition ci-dessous que l'on peut voir comme un analogue pour les A-algèbres instables des théorèmes de Hurewicz et Whitehead :

Proposition **A.1.1.** — *Soient* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un homomorphisme de* A-*algèbres instables connexes non nulles et n un entier. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est n-connexe (rappelons que ceci signifie que* $f : \mathrm{M}^t \to \mathrm{N}^t$ *est un isomorphisme pour* $t < n$ *et un monomorphisme pour* $t = n$*)*;

(ii) $\mathrm{E}^{s,t}(f) : \mathrm{E}^{s,t}(\mathrm{N}) \to \mathrm{E}^{s,t}(\mathrm{M})$ *est un isomorphisme pour* $t - s < n$ *et un épimorphisme pour* $t - s = n$;

(iii) $\mathrm{E}^{0,t}(f) : \mathrm{E}^{0,t}(\mathrm{N}) \to \mathrm{E}^{0,t}(\mathrm{M})$ *est un isomorphisme pour* $t < n$ *et un épimorphisme pour* $t = n$; $\mathrm{E}^{1,t}(f) : \mathrm{E}^{1,t}(\mathrm{N}) \to \mathrm{E}^{1,t}(\mathrm{M})$ *est un monomorphisme pour* $t \leqslant n$.

Cette proposition est également à rapprocher du « relative connectivity lemma » de [BK1], I, 6.2.

Si l'on applique A.1.1 à l'augmentation $\mathrm{M} \to \mathbf{F}_p$ qui est 0-connexe on obtient en particulier :

Corollaire **A.1.2.** — *Soit* M *une* A-*algèbre instable connexe non nulle*; *alors*

$$\mathrm{E}^{s,t}(\mathrm{M}) = 0 \quad pour\ t - s \leqslant 0.$$

Au cours de la démonstration de A.1.1 il sera commode d'avoir à notre disposition la notation suivante.

Notation. — Soit $E = \{E^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel gradué, on pose

$$|E| = \inf\{n \in \mathbf{N}; E^n \neq 0\}, \qquad \|E\| = \sup\{n \in \mathbf{N}; E^n \neq 0\}$$

($|E|$ et $\|E\|$ sont des éléments de $\mathbf{N} \cup \{-\infty, +\infty\}$).

A.2. Démonstration de l'implication (i) ⇒ (ii) de la proposition A.1.1

La structure de A-algèbre instable est une combinaison des structures de $\mathbf{F}_p$-algèbre graduée commutative et de A-module instable et nous allons adopter la stratégie employée par Miller dans [Mi1], § 2 : analyser $E^{s,t}(f)$ en « séparant les effets respectifs de ces structures ».

A.2.1. *Démonstration de l'implication* (i) ⇒ (ii) *de* A.1.1 *sous l'hypothèse que f est surjective.*

On commence par supposer f surjective.

On doit considérer l'application de $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels cosimpliciaux :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}\_}(\mathrm{Rés}_\bullet f, \Sigma^t \mathbf{F}_p) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}\_}(\mathrm{Rés}_\bullet(\mathrm{N}\_), \Sigma^t \mathbf{F}_p) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}\_}(\mathrm{Rés}_\bullet(\mathrm{M}\_), \Sigma^t \mathbf{F}_p)$$

(on confond f et $f\_$), ou encore :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_\bullet f, \Sigma^t \mathbf{F}_p) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_\bullet(\mathrm{N}\_), \Sigma^t \mathbf{F}_p) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_\bullet(\mathrm{M}\_), \Sigma^t \mathbf{F}_p)$$

(notations de 1.7.6). Le $\mathscr{V}$-morphisme simplicial $\mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_\bullet f : \mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_\bullet(\mathrm{M}\_) \to \mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_\bullet(\mathrm{N}\_)$ est un épimorphisme dont on note $\mathrm{L}_\bullet$ le noyau. Puisque le foncteur Q transforme les objets libres de $\mathscr{K}\_$ en objets libres de $\mathscr{V}$, on observe que la $\mathscr{V}$-suite exacte

$$0 \to \mathrm{L}_s \to \mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_s(\mathrm{M}\_) \to \mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_s(\mathrm{N}\_) \to 0$$

est scindée pour tout s, que L_s est $\mathscr{V}$-libre, et que la suite de $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels cosimpliciaux

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_\bullet(\mathrm{N}\_), \Sigma^t \mathbf{F}_p) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_\bullet(\mathrm{M}\_), \Sigma^t \mathbf{F}_p) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\mathrm{L}_\bullet, \Sigma^t \mathbf{F}_p) \to 0$$

est exacte.

Lemme **A.2.1.1.** — *Soient f :* $\mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un homomorphisme de* A-*algèbres instables connexes non nulles et n un entier. On fait les hypothèses suivantes :*

— *f est surjective;*

— *f est bijective en degré $\leqslant n$.*

Alors le $\mathscr{V}$-objet simplicial $\mathrm{L}_\bullet = \ker(\mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_\bullet f : \mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_\bullet(\mathrm{M}\_) \to \mathrm{Q}\,\mathrm{Rés}_\bullet(\mathrm{N}\_))$ *possède la propriété suivante :*

$$|\pi_s \mathrm{L}_\bullet| \geqslant s + n + 1.$$

Démonstration. — Puisque $\mathrm{Q\,Rés}_{\bullet} f$ est un épimorphisme, il nous faut montrer que $\pi_s\, \mathrm{Q\,Rés}_{\bullet} f$ est un isomorphisme pour $t - s < n$ et un monomorphisme pour $t - s = n$. Compte tenu de la version duale du théorème 2.5 (ii) de [Mil], il s'agit là d'une propriété de l'homomorphisme de $\mathbf{F}_p$-algèbres graduées commutatives sous-jacent à f qui, elle, est conséquence du lemme A.2.1.2 ci-dessous.

Notons $\mathscr{A}$ la catégorie des $\mathbf{F}_p$-algèbres $\mathbf{N}$-graduées commutatives (non nécessairement unitaires). Le foncteur oubli, noté $\mathcal{O} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}$, admet un adjoint à gauche, noté S; l'algèbre SE correspondant à un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $\mathbf{N}$-gradué E est donnée par la formule

$$\mathrm{SE} = \bigoplus_{m \in \mathbf{N}\text{-}\{0\}} (\mathrm{E}^{\otimes m})_{\mathfrak{S}_m}.$$

L'injection naturelle $\mathrm{E} \to \mathcal{O}\,\mathrm{SE}$ est notée η_{E}. La paire de foncteurs adjoints considérée ci-dessus détermine une comonade qui permet d'associer à tout objet M de $\mathscr{A}$ une « résolution simpliciale » que nous notons $\mathrm{S}_{\bullet}\,\mathrm{M}$. Notons $\mathcal{O}' : \mathscr{V} \to \mathscr{E}$, $\mathcal{O}'' : \mathscr{K}_{\_} \to \mathscr{A}$ les foncteurs oubli; le théorème de [Mil] évoqué plus haut nous dit que les foncteurs $\mathcal{O}'\, \pi_s\, \mathrm{Q\,Rés}_{\bullet}(-)$ et $\pi_s\, \mathrm{QS}_{\bullet}\,\mathcal{O}''(-)$ sont naturellement équivalents.

Lemme **A.2.1.2.** — *Soient* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un* $\mathscr{A}$*-morphisme et* n *un entier. On fait les hypothèses suivantes :*

— M et N *sont connexes (i.e.* $\mathrm{M}^0 = \mathrm{N}^0 = 0$*)*;

— f *est surjective*;

— f *est bijective en degré* $\leqslant n$.

Alors le $\mathbf{F}_p$*-espace vectoriel gradué simplicial* $\mathrm{K}_{\bullet} = \ker(\mathrm{S}_{\bullet} f : \mathrm{S}_{\bullet}\,\mathrm{M} \to \mathrm{S}_{\bullet}\,\mathrm{N})$ *possède la propriété suivante :*

Pour $t - s \leqslant n$, *tout élément de* $(\mathrm{K}_s)^t$ *est somme de dégénérés.*

Démonstration. — Soit x un élément de K_s, $s > 0$, on peut supposer que x est de la forme décrite ci-dessous.

On se donne une famille finie $\{ x_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de M, l'un d'entre eux appartenant au noyau de f, et des surjections α_i, $s - 1 \geqslant i \geqslant 0$:

$$\Lambda = \Lambda_s \xrightarrow{\alpha_{s-1}} \Lambda_{s-1} \xrightarrow{\alpha_{s-2}} \Lambda_{s-2} \cdots \xrightarrow{\alpha_0} \Lambda_0.$$

On note λ_k l'élément générique de l'ensemble Λ_k, $s \geqslant k \geqslant 0$, et l'on pose

$$x_{\lambda_{s-1}} = \prod_{\lambda_s \in (\alpha_{s-1})^{-1}(\lambda_{s-1})} \eta_{\mathcal{O}\mathrm{M}}(x_{\lambda_s}),$$

$$x_{\lambda_{s-2}} = \prod_{\lambda_{s-1} \in (\alpha_{s-2})^{-1}(\lambda_{s-2})} \eta_{\mathcal{O}\mathrm{S}_0\mathrm{M}}(x_{\lambda_{s-1}}),$$

$$\cdots$$

$$x_{\lambda_0} = \prod_{\lambda_1 \in (\alpha_0)^{-1}(\lambda_0)} \eta_{\mathcal{O}\mathrm{S}_{s-1}\mathrm{M}}(x_{\lambda_1}),$$

et, pour finir,

$$x = \prod_{\lambda_0 \in \Lambda_0} \eta_{\mathcal{O}\mathrm{S}_s\mathrm{M}}(x_{\lambda_0})$$

(dans les formules ci-dessus $\prod$ désigne le produit dans les algèbres $\mathrm{S}_k\,\mathrm{M}$).

Si le degré de x est $\leqslant s + n$, le cardinal de Λ est nécessairement $\leqslant s$ et l'une des surjections α_i est une bijection. Or si α_i est une bijection, x est dans l'image de la i-ème dégénérescence.

On achève la démonstration de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) de A.1.1 dans le cas où f est surjective à l'aide de la proposition suivante.

Proposition **A.2.1.3.** — *Soient* $C_\bullet$ *un* $\mathcal{V}$*-complexe de chaînes et* b *un entier. On suppose que l'on a pour tout* s *les deux propriétés suivantes :*

— C_s *est un objet libre de* $\mathcal{V}$;

— $| H_s C_\bullet | \geqslant s + b$.

Alors, pour tout objet N *de* $\mathcal{V}$, *la cohomologie du complexe* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(C_\bullet, N)$ *vérifie* :

$$H^s \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(C_\bullet, N) = 0 \quad \textit{pour } s > \| N \| - b.$$

Démonstration. — Comme chaque C_s est libre, on dispose d'une suite spectrale « cohomologique du premier quadrant » :

$$\mathrm{Ext}^u_{\mathcal{V}}(H_v C_\bullet, N) \Rightarrow H^{u+v} \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(C_\bullet, N).$$

On montre ensuite que

$$\mathrm{Ext}^u_{\mathcal{V}}(H_v C_\bullet, N) = 0 \quad \text{pour } u + v > \| N \| - b$$

en remarquant qu'une $\mathcal{V}$-résolution libre « minimale » $R_\bullet$ de $H_v C_\bullet$ vérifie

$$| R_w | \geqslant v + b + w.$$

A.2.2. *Démonstration de l'implication* (i) $\Rightarrow$ (ii) *de* A.1.1 *dans le cas général.*

On ne suppose plus que f est surjective. On se ramène cependant au cas traité précédemment grâce à l'artifice ci-dessous.

Soit M une A-algèbre instable; le sous-espace de M, noté $M_{>n}$, formé des éléments de degré $> n$, est à la fois un sous-A-module et un idéal. On note $\mathrm{Sk}^n M$ le quotient $M/M_{>n}$; c'est un objet de $\mathcal{K}$ que l'on peut considérer comme le « n-squelette » de M. Le $\mathcal{K}$-morphisme $M \to \mathrm{Sk}^n M$ est un épimorphisme n-connexe; on note $\mathrm{Sk}^n f : \mathrm{Sk}^n M \to \mathrm{Sk}^n N$ le $\mathcal{K}$-morphisme induit par f. D'après A.2.1 il est équivalent de montrer que f ou $\mathrm{Sk}^n f$ vérifie la condition (ii).

On pose $C = M^n/N^n$. Le $\mathcal{K}$-morphisme $\mathrm{Sk}^n f$ peut se factoriser de la façon suivante :

$$\mathrm{Sk}^n M \overset{i}{\rightarrowtail} \mathrm{Sk}^n M \otimes ((\Sigma^n C)_+) \overset{g}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Sk}^n N;$$

en effet, le produit tensoriel de deux A-algèbres instables est leur coproduit dans la catégorie $\mathcal{K}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{Sk}^n M \otimes ((\Sigma^n C)_+), \mathrm{Sk}^n N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{Sk}^n M, \mathrm{Sk}^n N) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(((\Sigma^n C)_+), \mathrm{Sk}^n M)$$

et l'existence de l'épimorphisme g est garanti par la bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}((\Sigma^n C)_+, \mathrm{Sk}^n N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p}(C, N^n).$$

On observe que g est n-connexe et l'on termine à l'aide :

— de la factorisation $E^{s,t}(Sk^n f) = E^{s,t}(i) \circ E^{s,t}(g)$ (remarquer que le groupe $E^{s,t}(Sk^n M \otimes ((\Sigma^n C)_+))$ s'identifie au produit $E^{s,t}(Sk^n M) \times E^{s,t}((\Sigma^n C)_+)$ et l'application $E^{s,t}(i)$ à la projection sur le facteur $E^{s,t}(Sk^n M)$);

— de A.2.1 appliqué à g;

— de la trivialité de $E^{s,t}((\Sigma^n C)_+)$ pour $t - s < n$, qui est encore conséquence de A.2.1 (l'augmentation $(\Sigma^n C)_+ \to \mathbf{F}_p$ est n-connexe).

A.3. Démonstration de l'implication (iii) ⇒ (i) de la proposition A.1.1

Enonçons pour commencer le lemme suivant, dont la démonstration, qui ne présente pas de difficultés, est laissée au lecteur :

Lemme **A.3.** — *Soient* $f : M \to N$ *un homomorphisme de* A-*algèbres instables connexes non nulles et n un entier. Les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $f : M^t \to N^t$ *est un épimorphisme pour* $t \leqslant n$;

(ii) $E^{0,t}(f) : E^{0,t}(N) \to E^{0,t}(M)$ *est un monomorphisme pour* $t \leqslant n$.

La démonstration de l'implication (iii) ⇒ (i) de la proposition A.1.1 se fait par récurrence sur n.

Par hypothèse de récurrence, f est $(n-1)$-connexe. D'autre part, le lemme A.3 montre que f est surjective en degré $\leqslant n-1$. On sait donc déjà que f est bijective en degré $\leqslant n-1$; reste à montrer qu'elle est injective en degré $\leqslant n$.

Compte tenu de l'implication (i) ⇒ (ii) de A.1.1, on peut remplacer $f : M \to N$ par $Sk^n f : Sk^n M \to Sk^n N$ (cette notation est introduite en A.2.2). On note P l'image de $Sk^n f$ et $\varphi : Sk^n M \to P$ le $\mathcal{K}$-morphisme induit; il nous faut donc montrer que φ est un isomorphisme.

On considère les factorisations

$$E^{0,n}(Sk^n N) \to E^{0,n}(P) \to E^{0,n}(Sk^n M),\ E^{1,n}(Sk^n N) \to E^{1,n}(P) \to E^{1,n}(Sk^n M),$$

et l'on fait les observations suivantes :

— L'application $E^{0,n}(\varphi) : E^{0,n}(P) \to E^{0,n}(Sk^n M)$ est injective puisque φ est un épimorphisme.

— L'implication (i) ⇒ (ii) de A.1.1 montre que l'application

$$E^{1,n}(Sk^n N) \to E^{1,n}(P)$$

est bijective puisque le $\mathcal{K}$-morphisme $P \to Sk^n N$ est n-connexe.

Si bien que la surjectivité de $E^{0,n}(Sk^n N) \to E^{0,n}(Sk^n M)$ et l'injectivité de $E^{1,n}(Sk^n N) \to E^{1,n}(Sk^n M)$ entraînent que les applications $E^{0,n}(\varphi) : E^{0,n}(P) \to E^{0,n}(Sk^n M)$ et $E^{1,n}(\varphi) : E^{1,n}(P) \to E^{1,n}(Sk^n M)$ sont respectivement bijective et injective.

Avant d'achever notre démonstration de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) de A.1.1, il nous faut parler de « classe caractéristique d'une $\mathscr{K}_-$-extension ».

Classe caractéristique d'une $\mathscr{K}_-$-extension.

Soient M un objet de $\mathscr{K}_-$ et I un objet de $\mathscr{V}$. Une extension de M par I est la donnée d'un $\mathscr{K}_-$-diagramme

$$\mathrm{I} \overset{\psi}{\rightarrowtail} \mathrm{N} \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{M}$$

tel que :

— $\psi : \mathrm{I} \rightarrowtail \mathrm{N}$ est un monomorphisme;
— $\varphi : \mathrm{N} \twoheadrightarrow \mathrm{M}$ est un épimorphisme;
— $\psi(\mathrm{I})$ est le noyau de φ;
— le produit de tout élément de $\psi(\mathrm{I})$ par tout élément de N est nul (en d'autres termes la structure de M-module de I est triviale).

La classe caractéristique d'une telle extension est l'élément c de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{K}_-}(\mathrm{M}, \mathrm{I})$ défini de la façon suivante. Le choix d'une $\mathscr{E}$-section σ de φ (notation de 1.9.1) fournit un $\mathscr{K}_-$-morphisme $f : \mathrm{Rés}_0\, \mathrm{M} \to \mathrm{N}$. On vérifie tout d'abord que l'application $g : \mathrm{Rés}_1\, \mathrm{M} \to \mathrm{I}$, $x \mapsto \psi^{-1} f(d_0\, x - d_1\, x)$ est un $\mathscr{K}_-$-morphisme; par construction g est un 1-cocycle de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_-}(\mathrm{Rés}_\bullet\, \mathrm{M}, \mathrm{I})$. On vérifie ensuite que la classe c de g dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{K}_-}(\mathrm{M}, \mathrm{I})$ est indépendante du choix de σ. On vérifie enfin que c est nulle si et seulement si φ admet une $\mathscr{K}_-$-section. On observera que l'image $\varphi^* c$ de c dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{K}_-}(\mathrm{N}, \mathrm{I})$ est nulle.

Nous laissons au lecteur le soin de compléter la théorie des $\mathscr{K}_-$-extensions à la manière, par exemple, du chapitre XIV de [CE].

Fin de la démonstration de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) *de* A.1.1.

On note K le noyau de f en degré n et l'on considère la $\mathscr{K}_-$-extension

$$\Sigma^n\, \mathrm{K} \rightarrowtail (\mathrm{Sk}^n\, \mathrm{M})_- \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{P}_-,$$

$(\mathrm{Sk}^n\, \mathrm{M})_-$ et P_- désignant respectivement les idéaux d'augmentation de $\mathrm{Sk}^n\, \mathrm{M}$ et P. Comme l'application $\mathrm{E}^{1,n}(\varphi) : \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{K}_-}(\mathrm{P}_-, \Sigma^n\, \mathbf{F}_p) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{K}_-}((\mathrm{Sk}^n\, \mathrm{M})_-, \Sigma^n\, \mathbf{F}_p)$ est injective, il en est de même pour $\varphi^* : \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{K}_-}(\mathrm{P}_-, \Sigma^n\, \mathrm{K}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{K}_-}((\mathrm{Sk}^n\, \mathrm{M})_-, \Sigma^n\, \mathrm{K})$; en effet, le foncteur $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{K}_-}(-, \Sigma^n\, \mathrm{K})$ se plonge naturellement dans le foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_p}(\mathrm{K}^*, \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{K}_-}(-, \Sigma^n\, \mathbf{F}_p)),$$

K^* désignant le dual du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel K. D'après ce qui précède la classe caractéristique de la $\mathscr{K}_-$-extension ci-dessus est nulle et l'épimorphisme $\varphi : \mathrm{Sk}^n\, \mathrm{M} \to \mathrm{P}$ possède une $\mathscr{K}$-section. Notons τ une telle section; $\mathrm{E}^{0,n}(\tau)$ est une bijection puisqu'il en est ainsi pour $\mathrm{E}^{0,n}(\varphi)$. Le lemme A.3 implique alors que τ est un épimorphisme, ce qui montre enfin que φ est un isomorphisme.

Appendice B

Un cas particulier de la théorie d'obstructions de Bousfield

L'objet de cet appendice est de démontrer dans le cas particulier qui nous intéresse le résultat de Bousfield que nous avons invoqué en 3.1.

Il nous faut tout d'abord fixer quelques notations et introduire un peu de terminologie.

B.1. Ensembles affines, ensembles simpliciaux affines, espaces cosimpliciaux quasi affines

B.1.1. On appelle *ensemble affine* un ensemble Z muni d'une action libre et transitive d'un groupe abélien V; on dit que V est le *groupe abélien sous-jacent* à Z. Soient Z, Z′ deux ensembles affines et V, V′ les groupes abéliens sous-jacents. Un morphisme de Z dans Z′ est la donnée d'un homomorphisme de groupes abéliens $\varphi : V \to V'$ et d'une application φ-équivariante $f : Z \to Z'$; on dit que φ est sous-jacente à f. La catégorie des ensembles affines est donc par définition munie d'un foncteur vers la catégorie des groupes abéliens $Z \mapsto V$, $f \mapsto \varphi$.

B.1.2. Comme à l'ordinaire on appelle *ensemble affine simplicial* un objet simplicial sur la catégorie des ensembles affines; on a donc une notion de *groupe abélien simplicial sous-jacent*. Soient Z un ensemble affine simplicial connexe, V le groupe abélien simplicial sous-jacent, et n un entier strictement positif. On pose

$$\pi_n V = \pi_n(V; 0), \qquad \pi_n Z = [S^n, Z] \quad \text{(homotopie libre)}.$$

Soient z_0 un 0-simplexe de Z, et $\alpha : V \to Z$ l'homéomorphisme $v \mapsto$ (dégénérescence de z_0) $+ v$. La composée de l'application induite par $\alpha : \pi_n V \to \pi_n(Z; z_0)$ et de l'application d'oubli $\pi_n(Z; z_0) \to \pi_n Z$ est une bijection indépendante du choix de z_0; en particulier $\pi_n Z$ est naturellement muni d'une structure de groupe abélien. L'isomorphisme $\alpha_* : H_n(V; \mathbf{Z}) \to H_n(Z; \mathbf{Z})$ est lui aussi indépendant du choix de z_0. Signalons au passage que l'homologie dont il est question dans cet appendice est *l'homologie entière* $H_*(\ ; \mathbf{Z})$ qui sera simplement notée H_* (contrairement à la convention faite dans le reste de l'article, où la notation H_* est réservée à l'homologie modulo p). Enfin, puisque pour l'espace V l'homomorphisme d'Hurewicz $\pi_n V \to H_n V$ est injectif (voir par exemple [Ma], p. 97), il en est de même pour l'espace Z.

Nous aurons besoin par la suite du lemme ci-dessous; dans son énoncé la notation $[z]$ désigne la n-chaîne correspondant à un n-simplexe z.

Lemme **B.1.2.** — *Soit v un n-simplexe de* V *dont toutes les faces, $d_i v$, $0 \leqslant i \leqslant n$, sont nulles ($v$ représente donc un élément de π_n V). Le cycle $[z+v]-[z]$ représente dans H_n Z l'image de la classe de v par l'application naturelle $\pi_n \mathrm{V} \to \mathrm{H}_n \mathrm{Z}$.*

Démonstration. — On regarde z (resp. v) comme une application simpliciale $\Delta^n \to \mathrm{Z}$ (resp. une application simpliciale pointée $(\Delta^n/\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^n) \to \mathrm{V}$); rappelons que le q-squelette d'un ensemble simplicial X est noté Sk^q X. On considère ensuite la composition

$$\Delta^n \times (\Delta^n/\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^n) \xrightarrow{z \times v} \mathrm{Z} \times \mathrm{V} \to \mathrm{Z},$$

la flèche de droite correspondant à la structure affine de Z. On considère enfin les deux cycles suivants de $\Delta^n \times (\Delta^n/\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^n)$:

$$[\delta_n \times \bar{\delta}_n] - [\delta_n \times *], \qquad [\varepsilon \times \bar{\delta}_n] - [\varepsilon \times *],$$

δ_n désignant le *n-simplexe standard* de Δ^n, $\bar{\delta}_n$ son image dans $\Delta^n/\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^n$, et ε « un point » de Δ^n. Les classes d'homologie qu'ils représentent coïncident, ce qui démontre le lemme B.1.2.

B.1.3. Le qualificatif « quasi affine » introduit ci-dessous est une variante du « group-like » de [BK1], p. 275 :

Définition **B.1.3.** — On dira qu'un espace cosimplicial $\mathrm{Z}^\bullet$ est *quasi affine* si, pour tout n,

a) Z^n est un ensemble affine simplicial;

b) les applications $d^i, s^i : \mathrm{Z}^n \to \mathrm{Z}^{n\pm 1}$, à l'exception de d^0, sont affines.

Suivant [Bou2], 5.6, on appelle objet *quasi cosimplicial* sur une catégorie $\mathscr{C}$ la donnée $\mathrm{C}^\bullet$ d'objets C^n de $\mathscr{C}$, n décrivant **N**, et d'applications $d^i : \mathrm{C}^{n-1} \to \mathrm{C}^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $s^i : \mathrm{C}^{n+1} \to \mathrm{C}^n$, $0 \leqslant i \leqslant n$, satisfaisant aux identités cosimpliciales usuelles; en particulier on obtient un objet quasi cosimplicial à partir d'un objet cosimplicial en oubliant d^0. Un espace cosimplicial quasi affine $\mathrm{Z}^\bullet$ possède donc un *groupe abélien simplicial quasi cosimplicial sous-jacent* $\mathrm{V}^\bullet$.

B.2. Rappel sur les groupes abéliens cosimpliciaux [BK1] [Bou2]

Soit $\mathrm{B}^\bullet$ un groupe abélien cosimplicial. Rappelons que l'on définit ses *groupes de cohomotopie* $\pi^n \mathrm{B}^\bullet$ par

$$\pi^n \mathrm{B}^\bullet = \mathrm{H}^n(\mathrm{B}^\bullet, d), \quad n \geqslant 0,$$

$\mathrm{B}^\bullet$ muni du cobord $d = \Sigma(-1)^i d^i$ étant considéré comme un complexe de cochaînes. On a également

$$\pi^n \mathrm{B}^\bullet = \mathrm{H}^n(\mathrm{N}^\bullet(\mathrm{B}^\bullet), d), \quad n \geqslant 0,$$

$N^\bullet(B^\bullet)$ désignant le *complexe de cochaînes normalisé* de $B^\bullet$, c'est-à-dire le sous-complexe de $B^\bullet$ défini par

$$N^n(B^\bullet) = \bigcap_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (\ker s^i : B^n \to B^{n-1}).$$

On considère maintenant un groupe abélien quasi cosimplicial $B^\bullet$. On pose

$$M^n(B^\bullet) = \{(b^0, b^1, \ldots, b^n) \in B^n \times B^n \times \ldots \times B^n ; s^i b^j = s^{j-1} b^i \text{ pour } 0 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

et l'on note s l'homomorphisme : $B^{n+1} \to M^n(B^\bullet)$, $b \mapsto (s^0 b, s^1 b, \ldots, s^n b)$. Le lemme ci-dessous est un cas particulier du lemme 5.7 de [Bou2] :

Lemme **B.2.** — *L'homomorphisme* $s : B^{n+1} \to M^n(B^\bullet)$ *possède une section*

$$t : M^n(B^\bullet) \to B^{n+1}.$$

La valeur de t sur un élément $(b^0, b^1, \ldots, b^n)$ *de* $M^n(B^\bullet)$ *est donnée par les formules suivantes* :

— $c_0 = d^1 b^0$;
— $c_k = c_{k-1} + d^{k+1}(b^k - s^k c_{k-1})$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant n$;
— $t(b^0, b^1, \ldots, b^n) = c_n$.

B.3. Enoncé du critère de Bousfield garantissant que l'espace total d'un espace cosimplicial quasi affine connexe est non vide

Soit $Z^\bullet$ un espace cosimplicial quasi affine connexe (ce qui signifie, rappelons-le, que l'espace Z^n est connexe pour tout n). Soient s et t deux entiers, avec $s \geqslant 0$ et $t > 0$; le foncteur $[n] \mapsto \pi_t Z^n$ est un groupe abélien cosimplicial, noté $\pi_t Z^\bullet$, dont on peut considérer le s-ième groupe de cohomotopie $\pi^s \pi_t Z^\bullet$. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer :

Lemme **B.3** (A. K. Bousfield [Bou3]). — *Soit* $Z^\bullet$ *un espace cosimplicial quasi affine connexe. On suppose*

$$\pi^n \pi_{n-1} Z^\bullet = 0 \quad \textit{pour } n \geqslant 2.$$

Alors l'espace Tot $Z^\bullet$ *est non vide.*

B.4. Démonstration du lemme B.3

Il nous faut montrer que l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}^\bullet}(\Delta^\bullet, Z^\bullet)$ est non vide. Comme celui-ci est la limite inverse des ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}^\bullet}(\mathrm{Sk}^q \Delta^\bullet, Z^\bullet)$, q décrivant $\mathbf{N}$, on fait une *théorie d'obstructions* (rappelons que $\mathrm{Sk}^q \Delta^\bullet$ désigne le foncteur $\Delta \to \mathscr{S}$, $[n] \mapsto \mathrm{Sk}^q \Delta^n$).

Avant d'aborder cette théorie, introduisons encore quelques notations.

— On pose

$$\omega = \Sigma(-1)^i d_i[\delta_n] = \Sigma(-1)^i d^i[\delta_{n-1}];$$

la classe de la chaîne ω, toujours notée ω, engendre le groupe $H_{n-1}(\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^n)$ (l'espace $\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^n$ est le « bord » de Δ^n).

— On note $\Gamma^n(B^\cdot)$ le sous-groupe des n-cocycles d'un complexe de cochaînes $B^\cdot$ (parce que la notation Z^n n'est plus disponible !) :

$$\Gamma^n(B^\cdot) = \ker(d : B^n \to B^{n+1}).$$

Ces notations posées nous pouvons commencer à décrire la preuve du lemme B.3. Considérons le groupe abélien cosimplicial $B^\cdot = H_{n-1}(\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^\cdot)$; B^q est trivial pour $q < n$ et « le » générateur ω de B^n est un cocycle normalisé, c'est-à-dire un élément de $\Gamma^n(N^\cdot H_{n-1}(\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^\cdot))$. Comme la classe ω est sphérique, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}^\cdot}(\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^\cdot, Z^\cdot) \to \Gamma^n(N^\cdot(H_{n-1} Z^\cdot)), f \mapsto f_* \omega,$$

induit une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}^\cdot}(\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^\cdot, Z^\cdot) \to \Gamma^n(N^\cdot(\pi_{n-1} Z^\cdot))$$

que l'on note o ; la composée

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}^\cdot}(\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^\cdot, Z^\cdot) \to \Gamma^n(N^\cdot(\pi_{n-1} Z^\cdot)) \to \pi^n \pi_{n-1} Z^\cdot$$

est notée $\bar{o}$.

La proposition ci-dessous montre que $o(f)$ (resp. $\bar{o}(f)$) est l'obstruction à prolonger f (resp. la restriction de f à $\mathrm{Sk}^{n-2}\Delta^\cdot$) à $\mathrm{Sk}^n\Delta^\cdot$.

Proposition **B.4.1.** — *Soit f_{n-1} une application cosimpliciale de* $\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^\cdot$ *dans* $Z^\cdot$; *soit* f_{n-2} *sa restriction à* $\mathrm{Sk}^{n-2}\Delta^\cdot$.

a) L'application cosimpliciale f_{n-1} se prolonge en une application cosimpliciale f_n : $\mathrm{Sk}^n\Delta^\cdot \to Z^\cdot$ *si et seulement si $o(f_{n-1})$ est nulle.*

b) Il existe une application cosimpliciale f_n : $\mathrm{Sk}^n\Delta^\cdot \to Z^\cdot$ *dont la restriction à* $\mathrm{Sk}^{n-2}\Delta^\cdot$ *est f_{n-2} si et seulement si $\bar{o}(f_{n-1})$ est nulle.*

Démonstration de a). — Une application cosimpliciale $f_{n-1} : \mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^\cdot \to Z^\cdot$ n'est pas autre chose qu'une suite $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}; z_k \in Z^k_k\}$ (Z^k_k désigne l'ensemble des k-simplexes de Z^k) vérifiant :

$$d_i z_k = d^i z_{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \ 0 \leqslant i \leqslant k,$$
$$s^i z_k = s_i z_{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \ 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$

et f_{n-1} se prolonge à $\mathrm{Sk}^n\Delta^\cdot$ si et seulement s'il existe un n-simplexe z_n de Z^n vérifiant :

$$d_i z_n = d^i z_{n-1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \tag{1}$$

$$s^i z_n = s_i z_{n-1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1. \tag{2}$$

Par définition il existe un n-simplexe z_n de Z^n vérifiant (1) si et seulement si l'application $f_{n-1}^n : \mathrm{Sk}^{n-1} \Delta^n \to Z^n$ est homotopiquement triviale, autrement dit si et seulement si $o(f_{n-1})$ est triviale. Supposons donc qu'un tel simplexe existe. Le lemme B.2 montre alors que l'on peut faire en sorte que ce z_n vérifie aussi (2). Précisons un peu. Il nous faut montrer qu'il existe un élément v_n de V_n^n tel que :

$$d_i\, v_n = 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n, \tag{3}$$

$$s^i\, v_n = w(i), \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{4}$$

$w(i)$ désignant l'élément $s_i\, z_{n-1} - s^i\, z_n$ de V_n^{n-1}. Notons w le n-uple

$$(w(0), w(1), \ldots, w(n-1));$$

les relations (2), avec $n-1$ à la place de n, montrent que w appartient à $M^{n-1}(V_n^{\bullet})$. L'élément tw de V_n^n répond à la question (t est introduit dans le lemme B.2). Pour montrer que tw vérifie (3), on utilise, outre les identités simpliciales et cosimpliciales usuelles, les arguments suivants :

— les d^i et s^i commutent aux d_i et s_i et en particulier t « commute » aux d_i;
— le $(n-1)$-simplexe z_{n-1} vérifie les relations (2), avec $n-1$ à la place de n;
— le n-simplexe z_n vérifie les relations (1).

Démonstration de b). — Notons F_k les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}^{\bullet}}(\mathrm{Sk}^k\, \Delta^{\bullet}, Z^{\bullet})$, q_k les applications de restrictions de F_{k+1} dans F_k, et G_k le sous-groupe de V_k^k formé des k-simplexes v_k tels que

$$d_i\, v_k = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant k,$$

$$s^i\, v_k = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Le groupe (abélien) G_k opère librement sur F_k et le quotient F_k/G_k s'identifie à $q_{k-1}(F_{k-1})$. Ci-dessous nous identifions $\pi_k\, V^k$ et $\pi_k\, Z^k$, et notons $r : G_k \to N^k(\pi_k\, Z^{\bullet})$ l'homomorphisme qui associe au k-simplexe v_k sa classe d'homotopie (rappelons que V^k est un groupe abélien simplicial). Une nouvelle application du lemme B.2 montre que r est surjectif, si bien que le point *b)* de la proposition est conséquence de la formule ci-dessous.

Lemme **B.4.2.** — *Les obstructions* $o(f_{n-1})$ *et* $o(f_{n-1} + v_{n-1})$, v_{n-1} *désignant un élément de* G_{n-1}, *sont reliées par la formule*

$$o(f_{n-1} + v_{n-1}) = o(f_{n-1}) + (d \circ r)\,(v_{n-1}),$$

où $r : G_{n-1} \to N^{n-1}(\pi_{n-1}\, Z^{\bullet})$ *est l'homomorphisme introduit plus haut et*

$$d : N^{n-1}(\pi_{n-1}\, Z^{\bullet}) \to \Gamma^n(N^{\bullet}(\pi_{n-1}\, Z^{\bullet}))$$

le cobord du complexe $N^{\bullet}(\pi_{n-1}\, Z^{\bullet})$.

Démonstration. — Comme l'homomorphisme d'Hurewicz $h : \pi_{n-1} Z^n \to H_{n-1} Z^n$ est injectif, il suffit de calculer la différence

$$(h \circ o)\,(f_{n-1} + v_{n-1}) - (h \circ o)\,(f_{n-1}).$$

Cette différence est représentée par la chaîne

$$\Sigma(-1)^i\, C_n(d^i)\,([z_{n-1} + v_{n-1}] - [z_{n-1}]),$$

$C_n(-)$ désignant le foncteur qui associe à un ensemble simplicial son groupe des n-chaînes à coefficients entiers. On achève à l'aide du lemme B.1.2.

Appendice C

Fibre homotopique et espace total

par Michel Zisman

Etant donné une application $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ entre espaces cosimpliciaux pointés, on cherche à définir naturellement un espace cosimplicial $\Gamma^\bullet(f^\bullet)$ et une application $\Gamma^\bullet(f^\bullet) \to X^\bullet$ qui joue le rôle de la « fibre homotopique » de $f^\bullet$. A cet effet, on définit des espaces

$$W^n(Y^\bullet) = Y^n \times Y^{n-1} \times \ldots \times Y^0$$

et

$$\overline{W}^n(Y^\bullet) = * \times Y^{n-1} \times \ldots \times Y^0.$$

Alors $W^\bullet(Y^\bullet)$ est un espace cosimplicial et $\overline{W}^\bullet(Y^\bullet)$ un sous-espace lorsque l'on définit les opérateurs de coface et de codégénérescence par les formules suivantes :

$$d^i(y^n, y^{n-1}, \ldots, y^0) = (d^i y^n, d^{i-1} y^{n-1}, \ldots, d^0 y^{n-i}, y^{n-i}, \ldots, y^0) \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant n;$$

$$d^{n+1}(y^n, y^{n-1}, \ldots, y^0) = (d^{n+1} y^n, d^n y^{n-1}, \ldots, d^1 y^0, *);$$

$$s^i(y^n, y^{n-1}, \ldots, y^0) = (s^i y^n, s^{i-1} y^{n-1}, \ldots, s^0 y^{n-i}, y^{n-i-2}, \ldots, y^0) \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant n-2;$$

$$s^{n-1}(y^n, y^{n-1}, \ldots, y^0) = (s^{n-1} y^n, s^{n-2} y^{n-1}, \ldots, s^1 y^0).$$

La projection sur le premier facteur définit une application $W^\bullet(Y^\bullet) \to Y^\bullet$ entre espaces cosimpliciaux pointés de fibre $\overline{W}^\bullet(Y^\bullet)$.

Proposition **C.1.** — *Si l'espace cosimplicial* $Y^\bullet$ *est fibrant, alors*

$$\overline{W}^\bullet(Y^\bullet) \hookrightarrow W^\bullet(Y^\bullet) \to Y^\bullet$$

est une fibration d'espaces cosimpliciaux.

Proposition **C.2.** — *Si l'espace cosimplicial* $Y^\bullet$ *est fibrant, alors l'espace* Tot $W^\bullet(Y^\bullet)$ *est contractile.*

Définissons maintenant $\Gamma^\bullet(f^\bullet)$ comme le produit fibré

$$\begin{tikzcd} \Gamma^\bullet(f^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & W^\bullet(Y^\bullet) \arrow[d] \\ X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

(il est à noter que la $\mathbf{F}_p$-coalgèbre cosimpliciale $H_*\,\Gamma^\bullet(f^\bullet)$ est exactement le « mapping cone », au sens de [Boul], de l'application $H_*(f^\bullet)$).

Le foncteur Tot transforme les fibrations entre espaces cosimpliciaux en fibrations ([BK1], X, 5.1) et commute aux limites inverses (puisque adjoint à droite du foncteur $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^\bullet$, $X \mapsto X \times \Delta^\bullet$). Nous pouvons énoncer :

Théorème **C.3.** — *Soit* $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ *une application entre espaces cosimpliciaux pointés. Si* $Y^\bullet$ *est fibrant, alors l'espace* Tot $\Gamma^\bullet(f^\bullet)$ *est la fibre homotopique de l'application* $\mathrm{Tot} f^\bullet : \mathrm{Tot}\, X^\bullet \to \mathrm{Tot}\, Y^\bullet$.

Démonstration de la proposition C.1. — Il faut montrer que pour tout entier n, l'application (voir [BK1], chap. X, où l'on trouvera en particulier la définition des notations M^n et s ci-dessous)

$$W^{n+1}(Y^\bullet) \to Y^n \times_{M^n(Y^\bullet)} M^n(W^\bullet(Y^\bullet))$$

est une fibration. Or cette application n'est autre que le produit

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} \times s \times \mathrm{Id} : Y^{n+1} \times Y^n \times (Y^{n-1} \times \ldots \times Y^0) \\ \to Y^{n+1} \times M^{n-1}(Y^\bullet) \times (Y^{n-1} \times \ldots \times Y^0). \end{aligned}$$

Puisque $Y^\bullet$ est fibrant, $s : Y^n \to M^{n-1}(Y^\bullet)$ est une fibration, et donc aussi $\mathrm{Id} \times s \times \mathrm{Id}$.

Démonstration de la proposition C.2. — Il résulte de la proposition C.1 que $W^\bullet(Y^\bullet)$ est fibrant. D'après le lemme 7.3 de [BK1], chap. X, il suffit donc de montrer que l'on a

$$\pi^s \pi_t\, W^\bullet(Y^\bullet) = *$$

pour tous s, t, avec $t - s \geqslant 0$.

Par définition, on a, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\pi_t\, W^n(Y^\bullet) = \pi_t(Y^n) \times \pi_t(Y^{n-1}) \times \ldots \times \pi_t(Y^0).$$

Considérons d'abord le cas $s = 0$ où $\pi^0 \pi_t$ est l'égalisateur des deux flèches

$$\pi_t(Y^0) \to \pi_t(Y^1) \times \pi_t(Y^0)$$

données respectivement par $y^0 \mapsto (d^0 y^0, y^0)$ et $y^0 \mapsto (d^1 y^0, *)$. Il vient donc $\pi^0 \pi_t = *$ pour $t \geqslant 0$.

Pour $s > 0$, on normalise le groupe cosimplicial $\pi_t\, W^\bullet(Y^\bullet)$:

$$\begin{aligned} N^n\, \pi_t\, W^\bullet(Y^\bullet) &= \pi_t\, W^n(Y^\bullet) \cap \ker s^0 \cap \ker s^1 \cap \ldots \cap \ker s^{n-1} \\ &\cong N^n\, \pi_t(Y^\bullet) \times N^{n-1}\, \pi_t(Y^\bullet). \end{aligned}$$

Pour $s = t = 1$, on vérifie que l'ensemble pointé de cohomotopie $\pi^1\, \pi_1\, W^\bullet(Y^\bullet)$ tel qu'il est défini dans [BK1], p. 284, est trivial.

Enfin, pour $t > 1$, tous les groupes sont commutatifs. Posons $B^\bullet = \pi_t(Y^\bullet)$ et notons d_B la différentielle du complexe de cochaînes $N^\bullet(B^\bullet)$. Lorsque l'on identifie le groupe $N^n\, \pi_t\, W^\bullet(Y^\bullet)$ au produit $N^n(B^\bullet) \times N^{n-1}(B^\bullet)$, la différentielle du complexe de cochaînes $N^\bullet(\pi_t\, W^\bullet(Y^\bullet))$ est donnée par $d(b^n, b^{n-1}) = (d_B\, b^n, b^n - d_B\, b^{n-1})$, ce qui montre que le complexe $N^\bullet(\pi_t\, W^\bullet(Y^\bullet))$ est acyclique. On a donc

$$\pi^s\, \pi_t\, W^\bullet(Y^\bullet) = H^s\, N^\bullet(\pi_t\, W^\bullet(Y^\bullet)) = 0 \quad \text{pour } s \geqslant 0,$$

et en particulier $\pi^s\, \pi_t\, W^\bullet(Y^\bullet) = 0$ pour $t - s \geqslant 0$.

C.4. Quelques suites exactes

Proposition **C.4.** — *Sous les hypothèses du théorème* C.3, *on a* :

— *pour* $t \geqslant 2$, *une suite exacte de groupes abéliens* :

$$\ldots\, \pi^{s-1}\, \pi_t\, X^\bullet \to \pi^{s-1}\, \pi_t\, Y^\bullet \to \pi^s\, \pi_t\, \Gamma^\bullet(f^\bullet) \to \pi^s\, \pi_t\, X^\bullet \to \pi^s\, \pi_t\, Y^\bullet \\ \to \pi^{s+1}\, \pi_t\, \Gamma^\bullet(f^\bullet) \ldots;$$

— *pour* $t = 1$, *une suite exacte de groupes et d'ensembles pointés* :

$$1 \to \pi^0 \pi_1\, \Gamma^\bullet(f^\bullet) \to \pi^0 \pi_1\, X^\bullet \to \pi^0 \pi_1\, Y^\bullet \to \pi^1 \pi_1\, \Gamma^\bullet(f^\bullet) \to \pi^1 \pi_1\, X^\bullet \to \pi^1 \pi_1\, Y^\bullet;$$

— *pour* $t = 0$, *une suite exacte d'ensembles pointés* :

$$\pi^0\, \pi_0\, \Gamma^\bullet(f^\bullet) \hookrightarrow \pi^0\, \pi_0\, X^\bullet \to \pi^0\, \pi_0\, Y^\bullet.$$

Démonstration. — Il est clair que $N^\bullet$ commute aux limites inverses, et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_t\, \Gamma^\bullet(f^\bullet) & \longrightarrow & \pi_t\, W^\bullet(Y^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_t\, X^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & \pi_t\, Y^\bullet \end{array}$$

est cartésien. Appliquons donc $N^\bullet$. Pour $t \geqslant 1$, on a

$$\pi_t\, \Gamma^\bullet(f^\bullet) \cong N^n\, \pi_t\, X^\bullet \times N^n\, \pi_t\, Y^\bullet.$$

Pour $t \geqslant 2$,

$$N^\bullet\, \pi_t\, \Gamma^\bullet(f^\bullet) \to N^\bullet\, \pi_t\, X^\bullet \to N^\bullet\, \pi_t\, Y^\bullet$$

est un « triangle » au sens de J.-L. Verdier. La suite exacte de cohomologie du triangle fournit la suite exacte recherchée. Pour $t = 0$ ou 1, on procède de même.

C.5. Remarques

C.5.1. Si l'espace cosimplicial $Y^\bullet$ est fibrant, alors l'espace Tot $\overline{W}^\bullet(Y^\bullet)$ a le type d'homotopie de l'espace de lacets Ω Tot $Y^\bullet$ (faire $X^\bullet = *$ dans le théorème C.3).

C.5.2. Soit $\theta : \Delta \to \Delta$ le foncteur défini sur les objets par $\theta([n]) = [n+1]$ et sur les morphismes $\alpha : [m] \to [n]$ par $\theta(\alpha)(0) = 0$ et $\theta(\alpha)(i+1) = \alpha(i) + 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant m$. On note $\Theta : \mathscr{E}ns^\bullet \to \mathscr{E}ns^\bullet$ le foncteur qui associe au foncteur $X^\bullet : \Delta \to \mathscr{E}ns$ le foncteur $X^\bullet \circ \theta$. On a $\pi^0\,\Theta(X^\bullet) = X^0$ puisque l'égalisateur des deux flèches $d^1, d^2 : X^1 \to X^2$ n'est autre que $d^0 : X^0 \to X^1$. Soit $C^\bullet(X^\bullet)$ l'ensemble cosimplicial pointé $\Theta(X^\bullet)/c^\bullet\,\pi^0\,\Theta(X^\bullet)$. Le foncteur $C^\bullet : \mathscr{E}ns^\bullet \to \mathscr{E}ns^\bullet_{pt}$ ($\mathscr{E}ns_{pt}$ désigne la catégorie des ensembles pointés) ainsi défini commute aux limites directes et possède un adjoint à droite $W^\bullet : \mathscr{E}ns^\bullet_{pt} \to \mathscr{E}ns^\bullet$. On note encore $C^\bullet$ et $W^\bullet$ les foncteurs étendus, degré par degré, aux catégories $\mathscr{S}^\bullet$ et $\mathscr{S}^\bullet_{pt}$ ($\mathscr{S}_{pt}$ désigne la catégorie des ensembles simpliciaux pointés). On a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}^\bullet}(C^\bullet(X^\bullet), Y^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}_{pt}^\bullet}(X^\bullet, W^\bullet(Y^\bullet)).$$

Le foncteur $W^\bullet$ coïncide avec le foncteur introduit au début de l'appendice, et la formule d'adjonction ci-dessus permet de donner une démonstration de la proposition C.2 qui ne fait pas appel à la suite spectrale de Bousfield-Kan.

Appendice D

L'objet de cet appendice est de donner une démonstration de la proposition D.1 ci-dessous utilisant la caractérisation des A-modules instables « nilpotents » obtenue dans [LScl]. Cette proposition n'est qu'une variante d'un résultat de Serre ([Se], corollaire du § 2).

Proposition **D.1.** — *Soient* V *un p-groupe abélien élémentaire et* $\varphi : \mathrm{H}^* \mathrm{V} \to \mathrm{K}$ *un homomorphisme de* A-*algèbres instables. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) φ *est injectif;*

(ii) $\varphi((c_{\mathrm{V}})^n) \neq 0$ *pour tout entier n.*

Rappelons que c_{V} désigne l'élément de $\mathrm{H}^* \mathrm{V}$ défini de la façon suivante :

— pour $p = 2$,

$$c_{\mathrm{V}} = \prod_{u \in \mathrm{H}^1 \mathrm{V}-\{0\}} u;$$

— pour $p > 2$,

$$c_{\mathrm{V}} = \prod_{u \in \mathrm{H}^1 \mathrm{V}-\{0\}} \beta u,$$

$\beta : \mathrm{H}^1 \mathrm{V} \to \mathrm{H}^2 \mathrm{V}$ désignant l'opération de Bockstein.

La proposition D.1 peut être vue comme une conséquence de la proposition suivante qui est implicite dans [LScl] :

Proposition **D.2.** — *Soit x un élément d'une* A-*algèbre instable* K; *les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *x est non nilpotent*;

(ii) *il existe un p-groupe abélien élémentaire* W *et un homomorphisme de* A-*algèbres instables* $\rho : \mathrm{K} \to \mathrm{H}^* \mathrm{W}$ *tel que* $\rho(x)$ *est non nilpotent (c'est-à-dire* $\rho(x)$ *non nul pour* $p = 2$ *et* $(\rho(x))^p$ *non nul pour* $p > 2$*).*

Démonstration. — Rappelons qu'un A-module instable M est dit *nilpotent* dans la situation suivante :

— quand $p = 2$, si pour tout élément x de M il existe un entier n tel que

$$\mathrm{Sq}^{2^n|x|} \mathrm{Sq}^{2^{n-1}|x|} \ldots \mathrm{Sq}^{|x|} x = 0;$$

— quand $p > 2$, si pour tout élément de degré pair x de M il existe un entier n tel que

$$P^{p^n|x|/2} P^{p^{n-1}|x|/2} \dots P^{|x|/2} x = 0.$$

Rappelons également que l'on démontre dans [LSc1] qu'un A-module instable M est nilpotent si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H^* W) = 0$ pour tout p-groupe abélien élémentaire W.

Considérons maintenant le sous-A-module instable M de K engendré par x. Si x est non nilpotent alors il en est de même pour M (quand $p = 2$ on a

$$Sq^{2^n|x|} Sq^{2^{n-1}|x|} \dots Sq^{|x|} x = x^{2^{n+1}},$$

quand $p > 2$ le degré de x est nécessairement pair et l'on a

$$P^{p^n|x|/2} P^{p^{n-1}|x|/2} \dots P^{|x|/2} x = x^{p^{n+1}}).$$

D'après ce qui précède il existe un p-groupe abélien élémentaire W et un homomorphisme de A-modules instables $\mu : M \to H^* W$ tel que $\mu(x)$ est non nul. Comme $H^* W$ est $\mathscr{U}$-injectif, μ se prolonge en un homomorphisme de A-modules instables $\nu : K \to H^* W$ tel que $\nu(x)$ est non nul. En d'autres termes, l'application linéaire continue $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(K, H^* W) \to H^{|x|} W$, $\nu \mapsto \nu(x)$ ($\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(K, H^* W)$ est muni de sa topologie profinie et $H^{|x|} W$ de sa topologie discrète) est non nulle. Le théorème de « linéarisation » (théorème A.2.2 de [LZ2] ou corollaire 3.5 de [La1]) montre alors que la restriction de cette application à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K, H^* W)$ est encore non nulle : il existe un homomorphisme de A-algèbres instables $\rho : K \to H^* W$ tel que $\rho(x)$ est non nul.

Pour $p = 2$ la démonstration est achevée. Pour $p > 2$, on remplace x par x^p et l'on obtient un homomorphisme de A-algèbres instables $\rho : K \to H^* W$ tel que $\rho(x^p) = (\rho(x))^p$ est non nul.

Démonstration de la proposition D.1 *à l'aide de la proposition* D.2.

Soit $\varphi : H^* V \to K$ un homomorphisme de A-algèbres instables tel que $\varphi((c_V)^n)$ est non nul pour tout entier n. On applique la proposition D.2 à l'élément $\varphi(c_V)$ de K : il existe un p-groupe abélien élémentaire W et un homomorphisme de A-algèbres instables $\rho : K \to H^* W$ tel que $(\rho \circ \varphi)(c_V)$ est non nul. Le composé $\rho \circ \varphi : H^* V \to H^* W$, qui est un homomorphisme de A-algèbres instables, est induit par un homomorphisme de groupes $\lambda : W \to V$ (λ est la transposée de l'application $(\rho \circ \varphi)^1 : H^1 V \to H^1 W$) et l'on conclut grâce au lemme facile que voici :

Lemme **D.3.** — *Soit* $\lambda : W \to V$ *un homomorphisme de p-groupes abéliens élémentaires*; *alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) λ *est surjectif*;

(ii) *l'application* $\lambda^* : H^* V \to H^* W$ *est injective*;

(iii) $\lambda^* c_V \neq 0$.

La seule implication à mériter peut-être une démonstration est (iii) $\Rightarrow$ (i). Si λ est non surjective, il existe une classe non nulle u dans $H^1 V$ avec $\lambda^* u = 0$ et $\lambda^* c_V = 0$.

RÉFÉRENCES

[Ad] J. F. Adams, *Two Theorems of J. Lannes*, manuscrit, 1985.

[An] D. W. Anderson, A generalisation of the Eilenberg-Moore spectral sequence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972), 784-786.

[AS] M. F. Atiyah et G. Segal, *Equivariant cohomology and localization*, lecture notes, Warwick, 1965.

[BK1] A. K. Bousfield et D. M. Kan, Homotopy limits, Completions and Localizations, *Springer L.N.M.*, **304**, 1972.

[BK2] A. K. Bousfield et D. M. Kan, The homotopy spectral sequence of a space with coefficients in a ring, *Topology*, **11** (1972), 79-106.

[Bor] A. Borel *et al.*, Seminar on Transformation Groups, *Ann. of Math. Studies*, **46**, Princeton, 1960.

[Bou1] A. K. Bousfield, Nice homology coalgebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **148** (1970), 473-489.

[Bou2] A. K. Bousfield, On the homology spectral sequence of a cosimplicial space, *Amer. J. Math.*, **109** (1987), 361-394.

[Bou3] A. K. Bousfield, Homotopy spectral sequences and obstructions, *Israël J. Math.*, **66** (1989), 54-104.

[Ca1] G. Carlsson, G. B. Segal's Burnside ring conjecture for $(\mathbf{Z}/2)^k$, *Topology*, **22** (1983), 83-103.

[Ca2] G. Carlsson, Segal's Burnside ring conjecture and the homotopy limit problem, Proc. Durham Symposium on Homotopy Theory, 1985, London, *Math. Soc. L.N.S.*, **117**, Camb. Univ. Press, 1987, 6-34.

[Ca3] G. Carlsson, Equivariant stable homotopy and Sullivan's conjecture, *Invent. math.*, **103** (1991), 497-527.

[CE] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[DDK] E. Dror, W. G. Dwyer et D. M. Kan, An arithmetic square for virtually nilpotent spaces, *Ill. J. of Math.*, **21** (1977), 242-254.

[De] M. Demazure, Lectures on p-Divisible Groups, *Springer L.N.M.*, **302**, 1972.

[DMN] W. G. Dwyer, H. R. Miller et J. A. Neisendorfer, Fibrewise completion and unstable Adams spectral sequence, *Israël J. Math.*, **66** (1989), 160-178.

[DMW1] W. G. Dwyer, H. R. Miller et C. W. Wilkerson, The Homotopic Uniqueness of BS^3, Algebraic Topology, Barcelona, 1986 (proceedings), *Springer L.N.M.*, **1298** (1987), 90-105.

[DMW2] W. G. Dwyer, H. R. Miller et C. W. Wilkerson, Homotopical Uniqueness of Classifysing Spaces, *Topology*, **31** (1992), 29-45.

[Dr] E. Dror, Pro-nilpotent representation of homology types, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **38** (1973), 657-660.

[DS] E. Dror Farjoun et J. Smith, A Geometric Interpretation of Lannes' Functor T, *Théorie de l'homotopie, Astérisque*, **191** (1990), 87-95.

[Dw] W. G. Dwyer, Strong convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence, *Topology*, **13** (1974), 255-265.

[DW] W. G. Dwyer et C. W. Wilkerson, Smith theory and the functor T, *Comm. Math. Helv.*, **66** (1991), 1-17.

[DZ] W. G. Dwyer et A. Zabrodsky, Maps between classifying spaces, Algebraic Topology, Barcelona, 1986 (proceedings), *Springer L.N.M.*, **1298** (1987), 106-119.

[Fr] P. Freyd, *Abelian Categories : An introduction to the theory of functors*, New York, Harper & Row, 1964.

[GZ] P. Gabriel et M. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory, *Ergebnisse der Math.*, **35**, Springer, 1967.

[HLS1] H.-W. Henn, J. Lannes et L. Schwartz, Analytic functors unstable algebras and cohomology of classifying spaces, Algebraic Topology, Northwestern University, 1988 (proceedings), *Cont. Math.*, **96** (1989), 197-220.

[HLS2] H.-W. Henn, J. Lannes et L. Schwartz, The Categories of unstable modules and unstable algebras modulo nilpotent objects, à paraître dans *American Journal of Mathematics*.

[Hs] W. Y. Hsiang, *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups*, New York, Springer Verlag, 1975.

[JMO] S. Jackowski, J. E. McClure et R. Oliver, Self-maps of classifying spaces of compact simple Lie groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **22** (1990), 65-72.

[La1] J. Lannes, Sur la cohomologie modulo p des p-groupes abéliens élémentaires, Proc. Durham Symposium on Homotopy Theory, 1985, London, *Math. Soc. L.N.S.*, **117**, Camb. Univ. Press, 1987, 97-116.

[La2] J. Lannes, *Cohomology of groups and function spaces*, preprint 1986.

[LSc1] J. Lannes et L. Schwartz, Sur la structure des A-modules instables injectifs, *Topology*, **28** (1989), 153-169.

[LSc2] J. LANNES et L. SCHWARTZ, A propos de conjectures de Serre et Sullivan, *Invent. math.*, **83** (1986), 593-603.

[LSt] P. S. LANDWEBER et R. E. STONG, The depth of rings of invariants over finite fields, Number Theory New York, 1984-1985, *Springer L.N.M.*, **1240** (1987), 259-274.

[LZ1] J. LANNES et S. ZARATI, Sur les $\mathcal{U}$-injectifs, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **19** (1986), 1-31.

[LZ2] J. LANNES et S. ZARATI, Foncteurs dérivés de la déstabilisation, *Math. Z.*, **194** (1987), 25-59.

[McL] S. MAC LANE, Categories for the Working Mathematician, *Graduate Texts in Math.*, **5**, Springer, 1971.

[Ma] J. P. MAY, Simplicial objects in algebraic topology, *Van Nostrand Math. Studies*, **11**, 1967.

[Mi1] H. R. MILLER, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, *Annals of Math.*, **120** (1984), 39-87, et corrigendum, *Annals of Math.*, **121** (1985), 605-609.

[Mi2] H. R. MILLER, The Sullivan Conjecture and Homotopical Representation Theory, *Proc. Internat. Congr. Math. Berkeley*, 1986, 580-589.

[Mi3] H. R. MILLER, Massey-Peterson towers and maps from classifying spaces, Algebraic Topology, Aarhus, 1982 (proceedings), *Springer L.N.M.*, **1051** (1984), 401-417.

[Mil] J. W. MILNOR, On axiomatic homology theory, *Pac. J. Math.*, **12** (1962), 337-341.

[Mo] F. MOREL, Quelques remarques sur la cohomologie modulo-p continue des pro-p-espaces et les résultats de J. Lannes concernant les espaces **hom**(BV, X), preprint 1991, à paraître dans les *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure.*

[Qui1] D. G. QUILLEN, Homotopical Algebra, *Springer L.N.M.*, **43**, 1967.

[Qui2] D. G. QUILLEN, The spectrum of an equivariant cohomology rung, I, II, *Ann. of Math.*, **94** (1971), 549-572 et 573-602.

[Re] D. L. RECTOR, Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence, *Comm. Math. Helv.*, **45** (1970), 540-552.

[Se] J.-P. SERRE, Sur la dimension cohomologique des groupes profinis, *Topology*, **3** (1965), 413-420.

[SE] N. E. STEENROD et D. B. A. EPSTEIN, *Cohomology operations*, Princeton Univ. Press, 1962.

[Su] D. SULLIVAN, *Geometric topology*, part I : *Localization, periodicity and Galois symmetry*, M.I.T. Press, 1970.

[Wa] C. E. WATTS, Intrinsic Characterization of Some Additive Functors, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 5-8.

[Za1] S. ZARATI, Quelques propriétés du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_p}(\ ,\mathrm{H}^*\mathrm{V})$, Algebraic Topology Göttingen, 1984, *Springer L.N.M.*, **1172** (1985), 204-209.

[Za2] S. ZARATI, *Dérivés du foncteur de déstabilisation en caractéristique impaire et applications*, thèse de doctorat d'Etat, Orsay, 1984.

Unités de Recherches associées au C.N.R.S., D 0169 et 212

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex

et

U.F.R. de Mathématiques
Université de Paris VII
Tour 45-55, 2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05

Manuscrit reçu le 6 juin 1990.