PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

BARRY MAZUR
JACQUES TILOUINE

Représentations galoisiennes, différentielles de Kähler et « conjectures principales »

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 71 (1990), p. 65-103
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1990__71__65_0>

REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES, DIFFÉRENTIELLES DE KÄHLER ET « CONJECTURES PRINCIPALES »

par B. MAZUR et J. TILOUINE

0. Introduction

Ces dernières années, plusieurs « conjectures principales » ont été formulées en Arithmétique, leur trait commun étant qu'elles postulent l'égalité de deux idéaux; l'un est défini analytiquement — typiquement, ce sera l'idéal engendré par une fonction L p-adique dans un anneau de séries formelles — l'autre est défini arithmétiquement — typiquement, il s'agira de l'idéal caractéristique d'un module d'Iwasawa construit à partir de groupes de cohomologie galoisienne de certaines représentations p-adiques, le cas originel est bien sûr celui des p-groupes de classes d'idéaux dans une $\mathbf{Z}_p$-extension de corps de nombres.

En particulier, la « conjecture principale » sur $\mathbf{Q}$, démontrée dans [15], relie la fonction L p-adique de Kubota-Leopoldt au module d'Iwasawa construit à partir des p-groupes de classes de la tour cyclotomique. Il y a une « conjecture principale » plus générale sur un corps de nombres totalement réel, démontrée dans [27], qui affirme la même chose pour la fonction L p-adique de Deligne-Ribet. Il y a encore la « conjecture principale à deux variables » pour les corps quadratiques imaginaires, qui vient d'être démontrée par Kolyvagin-Rubin [19], postulant ce même lien pour les fonctions L p-adiques de Katz-Yager. Il y a enfin la « conjecture principale de Coates-Schmidt » pour la fonction L p-adique associée au « carré symétrique » de certaines formes modulaires classiques, qui est une conséquence de la conjecture principale à deux variables dans le cas des formes modulaires attachées aux caractères de Hecke (voir J. Coates et M. Flach, à paraître).

A la suite de travaux de H. Hida sur l'algèbre de Hecke des formes modulaires ordinaires p-adiques, de niveau auxiliaire arbitraire [7], [8], l'un des auteurs du présent article a été amené à étudier le problème de déformation de certaines représentations galoisiennes. Il s'agit des représentations de degré 2 qui sont co-ordinaires en p — c'est-à-dire telles que le module des coïnvariants par l'inertie en p soit libre de rang 1 — et qui sont non ramifiées hors d'un ensemble fini fixé de nombres premiers. L'existence de l'anneau des déformations universelles (lorsqu'il existe) attaché à ce problème a été étudiée dans [17]. En particulier, si $\bar{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\kappa)$ est une représentation résiduelle, irréductible sur la clôture algébrique du corps fini κ, associée à une forme modulaire p-adique p-ordinaire f, propre pour tous les opérateurs de Hecke, on montre que $\bar{\rho}$ est co-ordinaire et que l'anneau R^o des déformations universelles co-ordinaires de $\bar{\rho}$ existe. Soit $\mathrm{N}p^r$ le conducteur exact (au sens d'Atkin-Lehner) de f, où N et p sont premiers entre eux et $r \geqslant 0$.

Soit h_∞^{ord} l'algèbre de Hecke ordinaire (voir § 2 ci-dessous) de niveau $\mathrm{N}p^\infty$ construite par Hida, et soit R l'anneau localisé de h_∞^{ord} en l'idéal maximal de corps résiduel κ.

Les anneaux R et R^o ont chacun une structure naturelle d'algèbre sur l'algèbre d'Iwasawa Λ, et il y a un homomorphisme naturel de Λ-algèbres

$$\varphi ; \mathrm{R}^o \to \mathrm{R}.$$

Introduisons alors deux conditions sur la représentation $\bar{\rho}$ qui interviendront sans cesse dans ce travail.

(**R**) *la représentation* $\bar{\rho}$ *est absolument irréductible.*

(**P**) *toutes les formes* Λ*-adiques intervenant dans* R *sont* « N-*primitives* », i.e. *de niveau divisible par* N.

Pour la définition des formes Λ-adiques (et de la notion de N-primitivité) voir § 3 ci-dessous.

L'auteur en question s'est convaincu de la véracité de la

Conjecture (*). — *Sous les hypothèses* (**R**) *et* (**P**) *l'homomorphisme* φ *est un isomorphisme.*

Remarque. — Pour que (**P**) soit vraie, il suffit que le caractère abélien $\mathrm{dét}(\bar{\rho})$ soit de conducteur modéré égal à N et soit ramifié en p. Cette conjecture, le lecteur du présent article s'en apercevra rapidement, est fort proche des conjectures principales ci-dessus et spécialement des deux dernières citées dans le paragraphe précédent.

Un premier objet de notre article est de donner la démonstration (très simple) de la surjectivité de φ sous l'hypothèse que $p \geqslant 5$ et que le caractère abélien $\mathrm{dét}(\bar{\rho})$ est de conducteur exact $\mathrm{N}p$. Pour une reformulation élégante de la condition (**P**) et une démonstration de la surjectivité sous la seule hypothèse (**P**), voir le tout récent travail de F. Gouvêa [31]. Nous tirons alors de notre résultat la conséquence évidente que sa différentielle

$$d\varphi : \mathrm{R} \otimes_\Lambda \Omega_{\mathrm{R}^o/\Lambda} \to \Omega_{\mathrm{R}/\Lambda}$$

est également surjective.

Nous observons alors que $d\varphi$ établit un lien entre des modules de nature très différente. Le module de départ, qui rend compte de toutes les déformations (co-ordinaires non ramifiées hors d'un ensemble fixé de premiers) de la représentation galoisienne $\bar{\rho}$, peut être décrit en termes de cohomologie galoisienne. En fait, c'est un module d'Iwasawa provenant de ce que l'on peut appeler *la cohomologie galoisienne p-coordinaire de la représentation adjointe de la déformation universelle p-coordinaire de* $\bar{\rho}$. C'est une sorte de module d'Iwasawa particulièrement adaptée au cadre des travaux récents de Greenberg et Coates. Pour résumer, le module de départ est donc de nature arithmétique.

Le module d'arrivée, par contre, est le module des différentielles de Kähler sur Λ d'une composante locale de l'algèbre de Hecke; il rend donc compte d'un phénomène bien différent : en deux mots, il mesure la quantité de paquets dans R de formes p-adiques p-ordinaires distinctes mais congrues entre elles modulo l'idéal maximal de R. En d'autres termes, il est relié à ce que H. Hida appelle le module de congruences associé à une telle forme. Or, un des thèmes du travail de Doi et Hida est de relier les ordres de ces modules de congruences à des valeurs spéciales de fonction L du « carré symétrique » de formes modulaires p-adiques (classiques). Ainsi, ce module est de nature analytique.

Comme corollaire des considérations ci-dessus, nous envisageons la conjecture $(*)$ comme un nouvel avatar des « conjectures principales » citées au premier paragraphe.

Or, de la surjectivité de $d\varphi$, nous pouvons déduire un théorème général de divisibilité. A savoir que l'idéal caractéristique du module $\Omega_{R/\Lambda}$ divise celui de $R \otimes \Omega_{R^0/\Lambda}$ (cf. Th. 29 du texte). Ce résultat devient utile dès que l'on est en mesure d'identifier les modules en question en termes d'objets plus concrets. Nous réussissons à réaliser cette identification au § 11 dans certains cas et obtenons ainsi un résultat de divisibilité (Prop. 34 et Th. 35) prédit par la conjecture principale à deux variables pour les corps quadratiques imaginaires.

Pour décrire cette application, rappelons succinctement la « conjecture principale à deux variables » pour les corps quadratiques imaginaires ainsi que quelques résultats récents dans sa direction.

Soit K un corps quadratique imaginaire. Soit p un nombre premier impair ne divisant pas le nombre de classes de K et décomposé dans K. Soit F_0 une extension abélienne finie de K, galoisienne sur $\mathbf{Q}$, contenant le corps de Hilbert de K et de degré premier à p. Soit Ω/F_0 l'unique $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$-extension de F_0 provenant par changement de base d'une extension de K, et soient Ω^c et Ω^a les changements de base à F_0 des $\mathbf{Z}_p$-extensions cyclotomique et anticyclotomique de K. Soit $\Sigma = \mathrm{Gal}(\Omega/F_0)$, de sorte que $\Sigma \simeq \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$. Décomposons p dans K en $(p) = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$, et soit M/Ω la p-extension abélienne maximale non ramifiée hors des places divisant $\mathfrak{p}$ dans Ω. Notons que M est galoisien sur K mais non sur $\mathbf{Q}$. Soit $X = \mathrm{Gal}(M/\Omega)$ qu'on voit comme un Λ-module, où Λ est l'algèbre de groupe complétée $\mathbf{Z}_p[[\Sigma]]$. Soit $D \subset \overline{\mathbf{Q}}_p$ un anneau de valuation discrète fini sur $\mathbf{Z}_p$ et $\chi : \mathrm{Gal}(F_0/K) \to D^\times$ un caractère arbitraire. Soit X^χ la partie de $D \otimes X$ sur laquelle $\mathrm{Gal}(F_0/K)$ agit par χ. Notons $\mathrm{car}(X, \chi)$ l'idéal caractéristique dans $D \otimes \Lambda$ du module de type fini et de torsion $(D \otimes X)^\chi$. Brièvement, on peut dire que la conjecture principale à deux variables affirme que l'idéal $\mathrm{car}(X, \chi)$ est engendré par la fonction L p-adique de Katz-Yager attachée à K et à χ (cf. [11] et [28]), ou, de manière équivalente, que $\mathrm{car}(X, \chi) = \mathrm{car}((\mathscr{U}_\infty)^\chi/(\mathscr{E}_\infty)^\chi)$, l'idéal caractéristique de $(\mathscr{U}_\infty)^\chi/(\mathscr{E}_\infty)^\chi$, où $(\mathscr{U}_\infty)^\chi$ est la χ-partie de la limite projective des unités semi-locales au-dessus de $\mathfrak{p}$, et où $(\mathscr{E}_\infty)^\chi$ est la χ-partie de la limite des adhérences des images des unités elliptiques (cf [20] II.2 pour une définition précise).

Pour nous permettre de commenter commodément cette identité d'idéaux caractéristiques, identifions d'abord Λ à l'anneau des séries formelles à deux variables $\Lambda \simeq \mathbf{Z}_p[[S, T]]$ où S est la variable cyclotomique et T est la variable anticyclotomique (notations de [5], § 4), au sens que le quotient $\mathbf{Z}_p[[S]]$, resp. $\mathbf{Z}_p[[T]]$, de Λ par (T), resp. par (S), s'identifie à $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\Omega^a/F_0)]]$, resp. $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\Omega^c/F_0)]]$. Soit σ la conjugaison complexe de $\mathbf{C}$. Elle agit par conjugaison sur $\mathrm{Gal}(\Omega/F_0)$ et induit sur Λ l'involution $S \mapsto S$, $T \mapsto (1+T)^{-1} - 1$.

Soit maintenant $f(\chi; S, T) \in D[[S, T]]$ un générateur de l'idéal $\mathrm{car}(X, \chi)$ et $g(\chi; S, T) \in D[[S, T]]$ un générateur de $\mathrm{car}((\mathscr{U}_\infty)^\chi/(\mathscr{E}_\infty)^\chi)$. La conjecture principale est la conjonction des deux assertions :

$$(\mathrm{A}_\chi)\ f(\chi; S, T) \text{ divise } g(\chi; S, T)$$

$$(\mathrm{B}_\chi)\ g(\chi; S, T) \text{ divise } f(\chi; S, T).$$

Par la formule analytique du nombre de classes pour les extensions abéliennes F_0/K (cf. [4], dernier paragraphe, ou [20], II.5.1, et le § 8 de l'article à paraître [26]), il suffit de montrer soit (A_χ) pour *tous* les caractères χ de $\mathrm{Gal}(F_0/K)$, soit (B_χ) pour *tous* les caractères χ de $\mathrm{Gal}(F_0/K)$, pour obtenir le résultat complet, *i.e.* les deux assertions de divisibilité.

La démonstration récente de Kolyvagin-Rubin de cette conjecture illustre l'approche *versus* les assertions (A_χ). Notre application est bien sûr un corollaire de leur théorème mais procède d'une tout autre idée, susceptible de généralisations ultérieures.

Remarquons que l'autre assertion de divisibilité (B_χ) fournit en soi l'existence de p-extensions abéliennes de Ω non ramifiées hors de $\mathfrak{p}$ avec action prescrite de Λ, dès que la fonction L p-adique $g(\chi; S, T)$ n'est pas une unité.

Dans notre application, F_0 est le Ringklassenkörper de conducteur p de K; les caractères χ de $\mathrm{Gal}(F_0/K)$ sont dits anticyclotomiques car ils satisfont $\chi(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \chi(\tau^{-1})$ pour tout τ de $\mathrm{Gal}(F_0/K)$. En guise d'application de notre résultat de divisibilité, nous obtenons une divisibilité prédite par (B_χ) pour une large classe $\mathscr{X}^-$ de caractères de $\mathrm{Gal}(F_0/F)$. Pour préciser cette classe, disons qu'un caractère χ est de *type CW* s'il admet une écriture

$$\chi = \theta/(\theta \circ \sigma)$$

pour un caractère θ de conducteur divisant $\mathfrak{p}$. Le caractère θ est un caractère de l'extension abélienne maximale de K non ramifiée hors de $\mathfrak{p}$, dite extension de Coates-Wiles (CW en abrégé). On vérifie facilement que si le nombre de classes de K est impair, la moitié des caractères de $\mathrm{Gal}(F_0/K)$ sont de type CW, et le caractère θ associé à χ est unique.

Soit d'autre part π une uniformisante de D, et I le groupe d'inertie en $\mathfrak{p}$ (ou en $\bar{\mathfrak{p}}$) dans $\mathrm{Gal}(F_0/K)$. La classe $\mathscr{X}^-$ consiste alors en l'ensemble des caractères de $\mathrm{Gal}(F_0/K)$ de type CW et tels que $\chi(\mathrm{I}) \not\subset 1 + \pi D$.

Soit M^a la p-extension abélienne maximale de Ω^a non ramifiée hors des places de Ω^a au-dessus de $\mathfrak{p}$. Soit $X^a = \mathrm{Gal}(M^a/\Omega^a)$ le module d'Iwasawa anticyclotomique.

Pour chaque caractère anticyclotomique, soit $f^a(\chi, T) = \mathrm{car}(\chi, X^a)$ la série caractéristique dans $\mathbf{Z}_p[[T]]$ de $(X^a)^\chi$. Notons que $f(\chi; 0, T)$ divise $f^a(\chi; T)$ mais que l'égalité (à une unité près) n'a pas forcément lieu. Nous montrons au § 11, Th. 35, le

Théorème **1.** — *Si* K *est de nombre de classes h impair et si p ne divise pas* $6h\varphi(D)$ *et est décomposé dans* K, *alors pour tout caractère* χ *de* $\mathscr{X}^-$, $g(\chi; 0, T)$ *divise* $f^a(\chi; T)$.

Commentaires. — La faiblesse de cet énoncé comparé à (B_χ), à savoir la présence d'hypothèses sur χ et la divisibilité seulement le long du diviseur $S = 0$, provient de deux causes distinctes.

Le fait que notre résultat ne porte que sur des caractères χ anticyclotomiques et ne concerne que la variable anticyclotomique provient de ce que nous ne considérons la théorie de la déformation (présentée au § 5 de l'article) que sur le corps de base $F = \mathbf{Q}$. Nous pensons que sa version élargie à un corps de base assez général (pour inclure les corps cyclotomiques) pourrait permettre de traiter les χ plus généraux et d'accepter aussi la variable cyclotomique.

La limitation à *certains* caractères χ anticyclotomiques est de type plus technique. En fait, le théorème 1 est la somme de deux théorèmes distincts. Le premier (Prop. 34 du texte) montre la divisibilité, pour tout caractère de $\mathscr{X}^-$, de $f^a(\chi, T)$ par (une version tordue de) la série caractéristique $H_0(T)$ du module de congruences de Hida associé à θ. C'est ce théorème que nous déduisons, sans hypothèse sur le nombre de classes de K ni sur p — si ce n'est que p ne divise pas $6\varphi(D)$ — du résultat général de divisibilité (Th. 29). Le second théorème, disons théorème B (annoncé dans [25], et dont la démonstration détaillée paraîtra prochainement dans [26], Th. 0.3) montre la divisibilité (de la version tordue) de $H_\theta(T)$ par $g(\chi; 0, T)$ sous l'hypothèse que le nombre de classes de K n'est pas divisible par p. Pour ce théorème, il suffit de supposer que χ est de type CW. L'hypothèse $\chi(I) \not\subset 1 + \pi D$ n'est pas nécessaire.

D'autre part, à l'aide de la formule analytique du nombre de classes, on peut montrer facilement (voir [26], § 8) que la divisibilité énoncée dans le théorème 1, si elle était démontrée pour tous les caractères de type CW (sans la restriction $\chi(I) \not\equiv 1 \bmod. \pi$) entraînerait la « conjecture principale anticyclotomique » non pour tout le Ringklassenkörper F_0 de conducteur p, mais au moins pour son sous-corps F'_0 fixé par l'involution de $\mathrm{Gal}(F_0/K)$, symbole d'Artin de la différente de K :

Théorème **2.** — 1) *Si* K *est de nombre de classes* 1 *et p est décomposé dans* K *et ne divise pas* $6\varphi(D)$, *l'égalité* $f^a(\chi; T) = g(\chi, 0, T)$ *(à une unité près de* $\Lambda \otimes D$*) est vraie pour tout caractère* χ *de* $K'(p)$.

2) *Si* K *est de nombre de classes impair et p ne divise pas* $6\varphi(D)$, *et si la divisibilité* $g(\chi, 0, T) \mid f^a(\chi; T)$ *est vraie pour les caractères* χ *anticyclotomiques tels que* $\chi(I) \equiv 1 \bmod. \pi D$, *alors l'égalité*

$$f^a(\chi; T) = g(\chi, 0, T)$$

est vraie pour tout caractère de $K'(p)$.

Remarque. — Un des auteurs a récemment démontré la divisibilité $g(\chi, 0, \mathrm{T}) \mid f^a(\chi; \mathrm{T})$ pour les caractères χ anticyclotomiques tels que $\chi(\mathrm{I}) \equiv 1 \bmod. \pi$, ce qui permet de supprimer l'hypothèse correspondante dans l'assertion 2) du théorème. La démonstration paraîtra ultérieurement.

Par ailleurs, le résultat général de divisibilité (Th. 29) paraît être relié avec une divisibilité attendue dans le cas d'une courbe elliptique de Weil E (sans multiplication complexe) de la série caractéristique d'un module de Selmer par la fonction L p-adique du carré symétrique (construite par Hida [8] et Coates-Schmidt [3]). Il subsiste cependant des difficultés liées à la définition de la fonction L p-adique primitive qui retardent la démonstration d'un éventuel théorème.

Le premier auteur tient à conclure cette introduction en remerciant l'I.H.E.S. à Bures-sur-Yvette qui a facilité cette collaboration en lui fournissant soutien matériel et cadre propice.

PLAN DE L'ARTICLE

1. Jacobiennes des courbes modulaires et groupes p-divisibles associés

Soit p un nombre premier $\geqslant 5$, N un entier $\geqslant 1$, non divisible par p. On considère pour chaque entier $r \geqslant 1$ la courbe modulaire $\mathrm{X}_r = \mathrm{X}_1(\mathrm{N}p^r)_{/\mathbf{Q}}$, compactifiée de la courbe affine $\mathrm{Y}_1(\mathrm{N}p^r)_{/\mathbf{Q}}$ qui classifie les classes d'isomorphisme de couples $(\mathrm{E}, i)_{/\mathrm{S}}$, où S est un $\mathbf{Q}$-schéma, $\mathrm{E}_{/\mathrm{S}}$ est une courbe elliptique sur S et i est une S-immersion du S-schéma en groupes des racines $\mathrm{N}p^r$-ièmes de l'unité $\mu_{\mathrm{N}p^r}$ dans E. Pour plus amples informations sur ces courbes, nous renvoyons à [12], chapitre 3, § 2 et § 7, et [15], chapitre 2, § 3. Rappelons simplement que le choix de ce problème de modules utilisant une immersion de $\mu_{\mathrm{N}p}$,plutôt que de $\mathbf{Z}/\mathrm{N}p^r\,\mathbf{Z}$ est naturel si l'on veut que le corps des fonctions sur $\mathbf{Q}$ de la courbe modulaire soit constitué des fonctions modulaires à coefficients de Fourier rationnels, ou encore si l'on veut que la pointe $i\infty$ soit rationnelle sur $\mathbf{Q}$ (le choix de $\mathbf{Z}/\mathrm{N}p^r\,\mathbf{Z}$ fournit une forme tordue par l'involution de Weil du choix précédent). Soit $\mathrm{J}(\mathrm{X}_r) = \mathrm{Pic}^0(\mathrm{X}_r)$ la jacobienne de X_r et $h_r(\mathbf{Z})$ la sous-algèbre de

End $J(X_r)$ engendrée par les endomorphismes $T(n) = T(n)_{\mathrm{Pic}}$ induits par fonctorialité contravariante des correspondances de Hecke sur X_r (cf. chap. 2, § 5 de [15]). Le lien avec la représentation classique des opérateurs de Hecke comme endomorphismes de l'espace des formes $\Gamma_1(Np^r)$-modulaires paraboliques est assuré par la remarque suivante. L'application de X_r dans sa jacobienne $J(X_r)$, $P \mapsto (P) - (i\infty)$ induit une identification des espaces tangents $\mathbf{Q}$-rationnels de X_r et $J(X_r)$; or, on sait (cf. [21], prop. 7.1; voir aussi le lemme 6.4 de [8]) que l'espace tangent $\mathbf{Q}$-rationnel de X_r s'identifie en tant que module sur l'algèbre $h_r(\mathbf{Z})$ à celui des formes paraboliques de poids 2 et niveau Np^r dont le q-développement est rationnel. Ceci étaie donc notre choix du modèle de X_r. Tous les éléments de $h_r(\mathbf{Z})$ sont définis sur $\mathbf{Q}$. Posons $h_r = h_r(\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_p$; cette $\mathbf{Z}_p$-algèbre finie et plate opère fidèlement sur le groupe p-divisible J_r des points d'ordre p-primaire de $J(X_r)$:

$$(1.1) \qquad J_r = J(X_r)\,[p^\infty]_{/\mathbf{Q}}.$$

Les revêtements $X_{r+1} \to X_r$ induisent des morphismes $J_r \to J_{r+1}$ à noyau fini compatibles avec les opérateurs de Hecke. L'algèbre $h_\infty = \mathrm{lim.proj}.h_r$ opère donc sur le groupe p-divisible $J_\infty = \mathrm{lim.ind}.J_r$. Notons de plus que $G_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ opère sur J_r et J_∞ de manière h_∞-équivariante. Soit $G_{N,r} = (\mathbf{Z}/Np^r\mathbf{Z})^\times$ et $G_{N,\infty} = \mathrm{lim.proj}.G_{N,r}$. On peut munir h_∞ d'une structure d'algèbre sur l'algèbre complétée $\mathbf{Z}_p[[G_{N,\infty}]]$ du groupe $G_{N,\infty}$ en passant à la limite dans les homomorphismes d'algèbres :

$$\mathbf{Z}_p[G_{N,r}] \to h_r; \qquad a \mapsto \langle a \rangle_{\mathrm{Pic}}$$

où $\langle a \rangle_{\mathrm{Pic}}$ provient par fonctorialité de Picard de l'automorphisme de X_r

$$\langle a \rangle : (E, i)_{/S} \to (E, i_0(\zeta \to \zeta^a))_{/S}.$$

Définissons également pour chaque racine Np^r-ième primitive de l'unité ζ l'involution de Weil ω_ζ par son action sur les couples $(E, i)_{/S}$: $\omega_\zeta((E, i)) = (E/\mathrm{Im}\, i, j)$, où $j : \mu_{Np^r} \to E/(\mathrm{Im}\, i)$ est déterminé par la condition $e_r(i(\zeta^a), j(\zeta^b)) = \zeta^{ab}$, e_r désignant l'accouplement de Weil sur le groupe des points de Np^r-torsion de E. Notons que ω_ζ est définie sur $\mathbf{Q}(\zeta_{Np^r})$ et que pour $\sigma_a : \zeta \mapsto \zeta^a$, on a la formule

$$\omega_\zeta^{\sigma_a} = \omega_{\zeta^a} = \omega_\zeta \circ \langle a \rangle.$$

Rappelons qu'à partir des correspondances de Hecke $T(n)$ et des automorphismes $\langle a \rangle$ de X_r, on peut également définir des endomorphismes de $J(X_r)$ par fonctorialité d'Albanese (cf. [15] chap. 2, § 5); nous noterons ces endomorphismes $T(n)_{\mathrm{Alb}}$ (resp. $\langle a \rangle_{\mathrm{Alb}}$) le lien entre fonctorialité de Picard et fonctorialité d'Albanese est donné par les formules :

$$\omega_\zeta \circ T(n)_{\mathrm{Pic}} \circ \omega_\zeta^{-1} = T(n)_{\mathrm{Alb}},$$
$$\omega_\zeta \circ \langle a \rangle_{\mathrm{Pic}} \circ \omega_\zeta^{-1} = \langle a \rangle_{\mathrm{Alb}}.$$

Comme $G_{N,\infty} = G_{N,1} \times \Gamma$, où $\Gamma \simeq 1 + p\mathbf{Z}_p$ et $G_{N,1} = (\mathbf{Z}/Np\mathbf{Z})^\times$, on voit que h_∞ est une algèbre sur $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ et un $G_{N,1}$-module. Nous choisissons comme générateur topologique de Γ l'élément $\gamma = 1 + Np$, ce qui nous permet d'identifier l'algèbre $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$

à l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[T]]$ des séries formelles à une variable T à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$ par $1 + T \mapsto [\gamma]$. Ainsi, l'algèbre h_∞ est munie d'une structure de Λ-algèbre. Bien que l'on puisse se convaincre aisément que h_∞ est de rang infini comme module sur Λ, H. Hida a isolé une sous-algèbre de h_∞, dite partie ordinaire de h_∞, finie sur Λ et dont la structure est bien maîtrisée. Nous rappelons quelques-uns de ses résultats dans le paragraphe suivant.

2. Rappels sur la théorie de Hida

La référence générale pour les résultats de H. Hida cités dans ce paragraphe est [7]. On peut décomposer h_∞ et h_r en $h_\infty^{\mathrm{ord}} \times h_\infty^{\mathrm{s.s.}}$, resp. $h_r^{\mathrm{ord}} \times h_r^{\mathrm{s.s.}}$ (où h_*^{ord} est le plus grand quotient de h_*^{ord} dans lequel $T(p)$ est inversible, et $h_*^{\mathrm{s.s.}}$ le plus grand quotient dans lequel $T(p)$ est topologiquement nilpotent). Soit e l'élément unité de h_∞^{ord}; c'est un idempotent de h_∞ qu'on appelle l'idempotent ordinaire; on pose $J_r^{\mathrm{ord}} = e.J_r$ et $J_\infty^{\mathrm{ord}} = e.J_\infty$. Pour tout $r \geqslant 1$, notons ω_r l'élément $(1+T)^{p^{r-1}} - 1$ de Λ (le r-ième polynôme d'Iwasawa), et posons $\Lambda_r = \Lambda/(\omega_r)$. Les trois théorèmes suivants proviennent de la théorie de Hida (cf. [7], Th. 3.1 et [8], Th. 1.2 et 3.1).

Leur démonstration utilise l'hypothèse $p \geqslant 5$.

Théorème **1**. — *La Λ-algèbre h_∞^{ord} est finie et plate.*

Soit ν le rang de h_∞^{ord} sur Λ.

Théorème **2**. — 1) *Pour tout $r \geqslant 1$, l'homomorphisme surjectif naturel*

$$h_\infty^{\mathrm{ord}}/\omega_r h_\infty^{\mathrm{ord}} \to h_r^{\mathrm{ord}}$$

est un isomorphisme.

2) *La Λ_r-algèbre h_r^{ord} est finie et plate de rang ν.*

Théorème **3**. — 1) *Les applications de transition $J_r^{\mathrm{ord}} \to J_{r+1}^{\mathrm{ord}}$ sont injectives et on a*

$$J_r^{\mathrm{ord}} = J_\infty^{\mathrm{ord}}[\omega_r] = \{ x \in J_\infty^{\mathrm{ord}};\ \gamma^{p^{r-1}}.x = x \}.$$

2) *Le dual de Pontryagin de J_∞^{ord} (resp. de J_r^{ord}) est libre sur Λ (resp. Λ_r) de rang* 2ν.

Comme Λ est local nœthérien complet, la Λ-algèbre finie h_∞^{ord} est semi-locale et produit de ses localisées aux idéaux maximaux. Soit R une composante locale de la Λ-algèbre h_∞^{ord} (c'est-à-dire l'anneau des fonctions d'une composante connexe de Spec h_∞^{ord}); c'est une Λ-algèbre finie et plate. Soit $\mathcal{M}$ son idéal maximal et κ son corps résiduel. Si $\omega : (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{Z}_p^\times$ désigne le caractère de Teichmüller, l'action de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times \subset G_{N,1}$ sur R se fait par un caractère ω^a pour un unique entier a compris entre 0 et $p-2$. Soit $J_r(R)$ resp. $J_\infty(R)$ la R-partie de J_r^{ord} resp. J_∞^{ord} et soit R_r l'image de R par l'homomorphisme $h_\infty \to h_r$.

En suivant de près les idées de [16], un des auteurs a déterminé dans [22] (Th. 4.4) dans certains cas la structure du groupe p-divisible $J_r(R)$ comme R-module. En notant $\mathbf{T}_p$ le groupe discret p-divisible $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, le résultat s'énonce :

Théorème **4.** — *Soit* $a \neq 0$ *et* $a \neq p-2$. *Pour chaque entier* r, *il y a un scindage de* R_r*-modules*

$$J_r(R) \cong R_r \otimes \mathbf{T}_p \oplus \mathrm{Hom}(R_r, \mathbf{T}_p);$$

ces scindages sont compatibles avec les inclusions $J_r^{\mathrm{ord}} \subset J_{r+1}^{\mathrm{ord}}$ *et induisent le scindage* R*-linéaire*

$$J_\infty(R) \cong R \otimes_\Lambda \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbf{T}_p) \oplus \mathrm{Hom}(R, \mathbf{T}_p).$$

Rappelons alors la définition suivante.

Définition **5.** — *Soit* κ *le corps résiduel de* R; *la représentation galoisienne* $\bar\rho : G_{\mathbf{Q}} \to GL_2(\kappa)$ *est dite* R*-résiduelle (associée à la composante locale* R*) si elle est non ramifiée hors de* Np *et si pour tout nombre premier* ℓ *ne divisant pas* Np, *le polynôme caractéristique de* $\bar\rho(\mathrm{Frob}_\ell)$ *est congru modulo* $\mathcal{M}$ *à* $X^2 - T(\ell)\,X + \ell\,\langle \ell \rangle$.

En imitant le § 15 de [14], on déduit facilement du théorème 2 le

Corollaire **6.** — *S'il existe une représentation* R*-résiduelle irréductible, alors* $\mathrm{Hom}_\Lambda(R, \Lambda)$ *est libre sur* R *et le dual de Pontryagin de* $J_\infty(R)$ *est libre de rang* 2 *sur* R.

Dans la suite de cet article, nous supposerons que la composante locale R de h_∞^{ord} considérée satisfait l'hypothèse :

(**R**) *il existe une représentation* R*-résiduelle absolument irréductible.*

3. Représentation galoisienne de degré 2 associée à une composante ordinaire de l'algèbre de Hecke

Dans ce travail, nous allons d'abord améliorer (Th. 7 et 9 ci-dessous) le résultat du théorème 4 en utilisant comme nouveaux ingrédients un résultat de [18] et la théorie de Carayol-Deligne.

Appelons forme Λ-adique ordinaire une forme Λ-linéaire de h_∞^{ord} vers Λ. Soit R une composante locale de l'algèbre de Hecke ordinaire h_∞^{ord}; on dit qu'une forme Λ-adique ordinaire f *intervient dans* R si elle se factorise à travers la projection $h_\infty^{\mathrm{ord}} \to R$.

Dans la suite de ce travail, nous n'étudierons que des composantes locales R satisfaisant l'hypothèse suivante :

(**P**) *les formes modulaires* Λ*-adiques intervenant dans* R *sont toutes ordinaires-primitives (*i.e. *de niveau divisible par* N*).*

Exemple. — Soit $r \geqslant 0$ un entier et f une forme nouvelle (classique) parabolique de poids $k \geqslant 2$ pour $\Gamma_1(Np^r)$, dont les coefficients de Fourier $a_n(f)$ sont dans $\overline{\mathbf{Z}}_p$. On suppose que f est normalisée, *i.e.* $a_1(f) = 1$, et qu'elle est p-ordinaire, *i.e.* $a_p(f) \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$. Il existe alors une unique composante locale R de h_∞^{ord} possédant un homomorphisme continu φ_f de Λ-algèbres $\mathrm{R} \to \overline{\mathbf{Z}}_p$ (l'action de Λ sur $\overline{\mathbf{Z}}_p$ est donnée par $\mathrm{T} \mapsto (1+p)^{k-2} - 1$), tel que $\varphi_f(\mathrm{T}(n)) = a_n(f)$. Soit $\bar\rho$ la représentation résiduelle associée à f. Supposons que $\bar\rho$ satisfait

$(\mathbf{R})$ $\bar\rho$ *est absolument irréductible*

et $(\mathbf{P}_{\bar\rho})$ *le caractère* $\mathrm{dét}(\bar\rho)$ *est de conducteur modéré exactement* N *et est ramifié en* p.

Alors, tout homomorphisme local de Λ-algèbres $\mathrm{R} \to \Lambda$ fournit une forme modulaire Λ-adique satisfaisant $(\mathbf{P})$.

Dans ce paragraphe et le suivant, nous allons déterminer la structure de $\mathrm{J}_\infty(\mathrm{R})$ comme module sur l'algèbre de Hecke et comme module galoisien en incluant le cas des composantes locales R avec $a = 0$, pourvu qu'elles satisfassent la condition $(\mathbf{R})$ ainsi que la condition $(\mathbf{P})$.

En réalité, nous serons amenés au § 5 à faire les hypothèses $(\mathbf{R})$ et $(\mathbf{P}_{\bar\rho})$; comme on vient de voir, elles impliquent $(\mathbf{P})$ pour la composante locale R.

L'hypothèse $(\mathbf{P}_{\bar\rho})$ sera satisfaite dans l'application à une composante « de type C.M. » qu'on a en vue. Cette amélioration du théorème 4 et donc du corollaire 6 ci-dessus, si elle semble minime, n'en est pas moins importante dans l'application donnée au § 11, car elle permettra d'aborder l'étude de *toutes* les branches non triviales du module d'Iwasawa anticyclotomique, et permet donc l'utilisation de l'astuce de la formule analytique du nombre de classes pour inférer, de *toutes* les divisibilités $(\mathrm{B})_\chi$, *toutes les égalités*. Dans ce paragraphe, l'hypothèse $(\mathbf{P})$ est suffisante.

Le point de départ de l'amélioration du théorème 4 est le résultat très général suivant (cf. [18]) :

Théorème **7**. — *Pour toute composante locale* R *de* h_∞^{ord} *satisfaisant* $(\mathbf{R})$, *le module* $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{R}, \Lambda)$ *est libre sur* R *et* $\mathrm{J}_\infty(\mathrm{R})$ *est colibre de rang* 2 *sur* R. *En outre, l'action de* $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ *sur le* R-*module libre de rang* 2

$$\mathrm{W} = \mathrm{Hom}(\mathrm{J}(\mathrm{R}), \mu_{p^\infty}) \tag{2.1}$$

définit une représentation $\rho : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}(\mathrm{W})$ *non ramifiée hors de* Np *et pour tout* ℓ *premier ne divisant pas* Np, *le polynôme caractéristique de* $\rho(\mathrm{Frob}_\ell)$ *est* $\mathrm{X}^2 - \mathrm{T}(\ell)\,\mathrm{X} + \ell\langle \ell \rangle$.

Démonstration. — Soit $p \geqslant 3$ et soit N un entier premier à p. Il est démontré dans [18] que pour toute composante locale R_1 de h_1, d'idéal maximal $\mathscr{M}_1$, l'existence d'une représentation R_1-résiduelle irréductible implique que l'espace $\mathrm{J}_1(\mathrm{R}_1)\,[\mathscr{M}_1]$ est de dimension 2 sur le corps résiduel κ de R_1. Par le critère du § 15 de [14], ceci implique que l'anneau $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}/\mathrm{TR}$ est de Gorenstein. Donc, R lui-même et tous les R_r ont également cette propriété (cf. [22], § 5). En outre, considérons le R-module $\mathrm{W} = \mathrm{J}_\infty(\mathrm{R})^*$; le κ-espace vectoriel $\mathrm{W}/\mathscr{M}\mathrm{W}$ s'identifie au dual de Pontryagin de $\mathrm{J}(\mathrm{R})\,[\mathscr{M}]$ qui est de dimension 2 sur κ. Par le lemme de Nakayama, il en résulte qu'il existe une surjection R-linéaire $R^2 \to W$. L'égalité des rangs sur Λ de ces modules montre qu'il s'agit d'un isomorphisme. On obtient ainsi une représentation $\rho : G_{\mathbf{Q}} \to GL_2(R)$ non ramifiée hors de Np avec le polynôme caractéristique voulu. En effet, pour tout nombre premier ℓ ne divisant pas Np, Frob_ℓ agissant sur $J_\infty(R)$ est annulé par $X^2 - T(\ell)_{\mathrm{Alb}} X + \ell \langle \ell \rangle_{\mathrm{Alb}}$ (cf. [21], Th. 7.9); par conséquent, Frob_ℓ agissant sur $W = \mathrm{Hom}(J_\infty(R), \mu_{p\infty})$ est annulé par $X^2 - T_\ell X + \ell \langle \ell \rangle$, ce qui implique par le théorème de Čebotarev que le polynôme caractéristique de ρ a la forme voulue. □

4. Composantes ordinaires et représentations galoisiennes coordinaires

Pour tout $G_{\mathbf{Q}}$-module M, on note M_I le module des coïnvariants de M par un sous-groupe fermé I de $G_{\mathbf{Q}}$.

Définition **8.** — *Soit* A *un anneau local nœthérien complet,* W_A *un* A*-module libre de rang* 2 *et* ρ_A *un homomorphisme continu de* $G_{\mathbf{Q}}$ *vers* $GL(W_A)$. *Nous dirons que* ρ_A *est une représentation* coordinaire *si pour toute place* v *de* $\overline{\mathbf{Q}}$ *au-dessus de* p, *le module* $(W_A)_I$ *des coïnvariants de* W_A *par le groupe d'inertie* I *en* v *dans* $G_{\mathbf{Q}}$ *est libre de rang* 1 *sur* A. *Il revient au même de dire que si* u_I *désigne l'idéal d'augmentation de* R[I], *le module* $u_I W_A$ *est facteur direct propre* (i.e. $\neq 0, W_A$) *de* W_A.

Sous les hypothèses **(P)** et **(R)**, nous allons démontrer que non seulement la représentation résiduelle $\bar{\rho}$ est coordinaire mais qu'il en est de même pour la représentation ρ de $G_{\mathbf{Q}}$ sur $W = \mathrm{Hom}(J_\infty(R), \mu_{p\infty})$. Nous utiliserons pour cela un résultat de Carayol-Deligne sur la restriction de la représentation de Deligne à un groupe de décomposition en p. Nous distinguerons dans la preuve les cas $a \neq 0, p-2$, puis $a = 0$. Dans le premier cas, nous pouvons aisément prouver que ρ et $\bar{\rho}$ sont coordinaires en invoquant le théorème 4.4 de [22]; par contre, pour $a = 0$, nous procédons à rebours en montrant d'abord que ρ est coordinaire pour en déduire que $\bar{\rho}$ l'est.

Notation. — Nous noterons $\chi : G_{\mathbf{Q}} \to G_{N,\infty}$ le caractère cyclotomique p-adique donnant l'action de $G_{\mathbf{Q}}$ sur $\mu_{Np\infty}$. A l'aide de la décomposition $G_{N,\infty} = (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \times \mathbf{Z}_p^\times$, on peut décomposer χ en (χ', χ_p). Le caractère χ_p est appelé caractère cyclotomique p-adique. Pour toute $\mathbf{Z}_p$-algèbre A, on note encore χ_p le composé de χ_p et de l'homomorphisme canonique $\mathbf{Z}_p \to A$.

En outre, nous considérerons souvent le composé de $\chi : G_{\mathbf{Q}} \to G_{N,\infty}$ et du caractère « diamant de poids 2 » de $G_{N,\infty}$ vers R. Nous noterons

$$\langle \chi \rangle : G_{\mathbf{Q}} \to R^\times$$

le composé de ces homomorphismes de groupes.

Remarque. — Avec ces notations, nous déduisons aisément du théorème 5 que le caractère dét ρ est égal au caractère $\chi_p \langle \chi \rangle$. Sa restriction à un groupe d'inertie I en p est donc $\chi_p \langle \chi_p \rangle$.

Théorème **9**. — *Soit* $p \geqslant 5$. *Sous les hypothèses* (**P**) *et* (**R**), *si* $\text{dét}\,\bar\rho \neq 1$, *les représentations* $\bar\rho$ *et* ρ *sont coordinaires.*

Commentaires. — 1) On utilisera dans le cours de la démonstration l'hypothèse $p \geqslant 5$ car nous utiliserons la formule $J_r^{\text{ord}} = J_\infty^{\text{ord}}[\omega_r]$ du théorème 3, § 2, dont la démonstration par Hida utilise l'hypothèse $p \geqslant 5$. Cela ne signifie nullement que le théorème 9 soit faux pour $p = 2$ ou 3.

2) On a $\text{dét}\,\bar\rho \equiv \chi_p \langle \chi \rangle \equiv \omega^{1+a}$; donc l'hypothèse $\text{dét}\,\bar\rho \neq 1$ équivaut à $a \not\equiv p - 2 \bmod. p - 1$.

Démonstration. — Nous allons montrer qu'il y a une base de W sur R dans laquelle la matrice de la restriction de ρ à I est de la forme :

$$\rho = \begin{pmatrix} \chi_p \langle \chi_p \rangle & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{dét}\,\bar\rho \neq 1$, l'entier a modulo $p - 1$ est différent de $p - 2$. On distingue alors les cas $a \neq 0$, $p - 2$ et $a = 0$.

(i) Si $a \neq 0$, $p - 2$, cela résulte directement du théorème 4.4 de [22], car le scindage R-linéaire du dévissage en composantes connexes et étales de $J_\infty(R)$ fournit par dualité de Pontryagin une décomposition R-linéaire de W en la somme directe de W_I et d'un supplémentaire (pour être précis, $W_I \simeq \text{Hom}(C_\infty, \mu_{p^\infty})$).

La matrice de $\rho(\sigma)$ dans une base adaptée à cette décomposition a la forme voulue.

(ii) Soit $a = 0$. Considérons les polynômes d'Iwasawa $\omega_r = (1 + T)^{p^{r-1}} - 1$ et $\omega_{r,1} = \omega_r/\omega_1$ pour $r \geqslant 2$; nous poserons $R_r = R/(\omega_r)$ et $R_{r,1} = R/(\omega_{r,1})$. Nous allons procéder par approximations successives et montrer le résultat pour chaque quotient $W_{r,1}$ de W par $\omega_{r,1}$. Soit $J_{r,1}(R) = J(R)\,[\omega_{r,1}]$. Le module $W_{r,1}$ est égal à $\text{Hom}(J_{r,1}(R), \mu_{p^\infty})$; chaque caractère de la $\mathbf{Z}_p$-algèbre $R_{r,1}$ vers $\overline{\mathbf{Q}}_p$ correspond à une forme modulaire ordinaire, primitive au sens d'Atkin-Lehner-Miyake, f, de p-Nebentypus ε non trivial car $1 + T - \varepsilon(\gamma)$ divise $\omega_{r,1}$. Nous dirons que la forme intervient dans $R_{r,1}$. Le niveau exact d'une telle forme est alors Np^s, $r \geqslant s > 0$, et son p-Nebentypus est primitif de conducteur p^s exactement. Sinon, la valeur propre de f pour $T(p)$ serait nulle d'après la formule de Ogg-Li-Asai (cf. par exemple [9], lemme 4.1) ce qui contredirait l'ordinarité de f en p; c'est précisément pour n'avoir à considérer que des formes à p-Nebentypus primitif que nous avons introduit les polynômes $\omega_{r,1}$. Soit K_f le corps de nombres (contenu dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$) engendré par les valeurs propres de f (qui sont des nombres p-adiques entiers algébriques) et $\mathcal{O}_f$ son anneau des entiers; nous notons $\mathfrak{P}_f$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_f$ donné par la valuation p-adique de $\overline{\mathbf{Q}}_p$. D'après un théorème de Shimura bien connu, il existe une variété abélienne A_f, définie sur $\mathbf{Q}$, à multiplication $\mathbf{Q}$-rationnelle par $\mathcal{O}_f$,

$$\iota : \mathcal{O}_f \to \text{End}(A_f/\mathbf{Q}),$$

et munie d'un homomorphisme $\mathbf{Q}$-rationnel ξ_f vers $J(X_r)$, à noyau fini, de sorte que pour tout n, l'élément $\iota(a(n,f))$ agisse sur A_f comme $T(n)_{\mathrm{Pic}}$ agit sur $\xi_f(A_f)$.

Lemme **10.** — *Le groupe p-divisible* $J_{r,1}(R)$ *est isogène (sur* $\mathbf{Q}$*) à la somme* $\bigoplus A_f[\mathfrak{P}_f^\infty]$ *des groupes* $\mathfrak{P}_f$*-divisibles de* A_f, f *parcourant un système de représentants des orbites sous* $G_{\mathbf{Q}_p}$ *des formes associées aux caractères de* $R_{r,1}$ *vers* $\overline{\mathbf{Q}}_p$.

Remarque. — L'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur les formes modulaires à coefficients de Fourier p-adiques est évidemment donnée par l'action usuelle sur leurs coefficients de Fourier.

Démonstration. — La somme des homomorphismes ξ_f fournit un homomorphisme de $\bigoplus A_f[\mathfrak{P}_f^\infty]$ vers un sous-groupe p-divisible de $J(X_r)\,[p^\infty]$ qui coïncide avec $J_{r,1}$; pour le voir, on compare les $\overline{\mathbf{Q}}_p$-algèbres de Lie L_1 et L_2 de ces deux groupes p-divisibles, vues dans l'algèbre de Lie de $J(X_r)\,[p^\infty]$, on trouve $L_1 = \bigoplus \overline{\mathbf{Q}}_p.f^{\sigma_i}$, la somme portant sur les formes f^{σ_i}, où f est associée à un caractère $R_{r,1} \to \overline{\mathbf{Q}}_p$ et σ_i parcourt un système de représentants dans $G_{\mathbf{Q}_p} = D_{\mathfrak{P}_f}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ des classes modulo le fixateur de f. Il est clair que L_2 est le dual du sous-espace de $S_2(\Gamma_1(Np^r), \overline{\mathbf{Q}}_p)$ engendré par les formes associées aux caractères $R_{r,1} \to \overline{\mathbf{Q}}_p$; ces formes sont précisément les f^{σ_i}. Le lemme s'ensuit. □

On fixe pour toute la suite de cette démonstration un plongement de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$. On utilise alors le dictionnaire (Th. 5.19 et 6.15 de [29]) entre formes modulaires f et représentations automorphes π_f de $GL_{2/\mathbf{Q}}$. Comme le p-Nebentypus de f est primitif, on voit que la p-composante π_p de π_f est de type principal $\pi(\lambda, \mu)$, l'un des caractères λ ou μ étant non ramifié. En utilisant alors les théorèmes 7.1 et 7.4 de Langlands [13], on déduit de cela que la variété abélienne A_f de Shimura associée à une forme f intervenant dans $R_{r,1}$ acquiert bonne réduction après changement de base de $\mathbf{Q}$ à $\mathbf{Q}(\zeta_{p^r})$ (vu comme sous-corps de la clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ que nous avons fixée). En utilisant alors le sous-lemme 10, on voit que le groupe p-divisible $J_{r,1}(R)$ peut être prolongé en un groupe p-divisible sur $\mathbf{Z}_p[\zeta_{p^r}]$. On peut donc considérer son dévissage connexe-étale

$$(4.1)\qquad 0 \to J_{r,1}(R)^0 \to J_{r,1}(R) \to J_{r,1}(R)^{\text{ét}} \to 0.$$

L'action géométrique de I sur $J_{r,1}(R)^{\text{ét}}$ (voir rappel AG ci-après) se factorise à travers le groupe $I_r = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^r})/\mathbf{Q}_p)$; l'action de I_r est déterminée comme suit. En utilisant la $\mathbf{Q}$-rationalité des homomorphismes ξ_f du lemme, on est ramené à la détermination de l'action de I_r sur $A_f[\mathfrak{P}_f^\infty]$ pour chaque f intervenant dans $R_{r,1}$. On procède alors comme dans la démonstration du théorème 2.2 de [27]. Plus précisément, soit $\mathbf{A}$ le modèle de Néron de A_f sur $\mathbf{Z}_p$ et, si f est de niveau exact Np^s, soit $\mathbf{B}$ le modèle de Néron de A_f sur $\mathbf{Z}_p[\zeta_{p^s}]$; c'est un schéma abélien sur $\mathbf{Z}_p[\zeta_{p^s}]$. Par propriété universelle du modèle de Néron, on a un morphisme $\alpha: \mathbf{A} \times_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[\zeta_{p^s}] \to \mathbf{B}$; on note par un tilde ($\sim$) l'opération de passage à la fibre spéciale au-dessus du corps résiduel $\mathbf{F}_p$ de $\mathbf{Z}_p[\zeta_{p^s}]$. Si l'on considère la partie abélienne $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})$ de la fibre spéciale du schéma source, on obtient un morphisme $\tilde{\alpha} : \mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}}) \to \widetilde{\mathbf{B}}$. On forme alors le dévissage connexe-étale du groupe p-divisible $\mathrm{A}_f[\mathfrak{P}_f^\infty]_{/\mathbf{Z}_p[\zeta_{p^s}]}$:

$$(4.2) \qquad 0 \to \mathbf{B}[\mathfrak{P}_f^\infty]^0 \to \mathrm{A}_f[\mathfrak{P}_f^\infty] \to \mathbf{B}[\mathfrak{P}_f^\infty]^{\text{ét}} \to 0.$$

On observe d'abord que $\mathrm{T}(p)_{\mathrm{Pic}} = \iota(a(p,f))$ est un automorphisme de $\mathrm{A}_f[\mathfrak{P}_f^\infty]$, donc $e_{\mathrm{Pic}} = 1$ sur $\mathrm{A}_f[\mathfrak{P}_f^\infty]$; il n'y a donc pas à se soucier de l'idempotent ordinaire dans (4.2). Montrons maintenant que les termes extrêmes sont colibres de rang 1 sur $\mathcal{O}_{f,\mathfrak{P}_f}$ et déterminons l'action de I sur ces termes. Pour ce faire, on va transporter sur $\mathbf{B}$ via α l'action de I connue sur $\mathbf{A}$.

Soit ζ une racine primitive $\mathrm{N}p^s$-ième de l'unité dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$.

Nous notons $\mathbf{F}_q$ le corps résiduel de $\mathbf{Z}_p[\zeta]$ et nous posons $\zeta_{\mathrm{N}} = \zeta^{p^s}$. Soit ω_ζ l'involution de Weil associée à ζ; comme f est primitive, ω_ζ définit un automorphisme de A_f (sur $\mathbf{Q}_p(\zeta)$), qu'on prolonge à $\mathbf{B} \times \mathbf{Z}_p[\zeta]$ et aussi à la fibre spéciale $\widetilde{\mathbf{A}} \times \mathbf{F}_q$ de $\mathbf{A} \times \mathbf{Z}_p[\zeta]$. Remarquons de plus que l'anneau $\mathbf{Z}_p[\zeta]$ a même corps résiduel que $\mathbf{Z}_p[\zeta_{\mathrm{N}}]$. Grâce à cette remarque, on peut définir une « action géométrique de l'inertie » comme suit. Pour décrire cette action dans son cadre naturel, on doit se donner une extension finie totalement ramifiée d'anneaux intégralement clos et finis sur $\mathbf{Z}_p$ $\mathrm{S} \subset \mathrm{T}$; notons κ leur corps résiduel commun et K et L leurs corps des fractions respectifs. Soit $\mathrm{D}_{/\mathrm{K}}$ une variété abélienne et $\mathbf{D}_{/\mathrm{T}}$ le modèle de Néron de $\mathrm{D} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{L}$. Soit $g \in \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})$; on le fait agir sur la fibre spéciale $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \times_{\mathrm{T}} \kappa$ de la manière suivante.

Rappel AG. — Le morphisme $\pi_g : \mathbf{D} \to \mathrm{Spec}(\mathrm{T})$ composé du morphisme structural $\pi : \mathbf{D} \to \mathrm{Spec}(\mathrm{T})$ et du morphisme ${}^a g : \mathrm{Spec}(\mathrm{T}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{T})$ est lisse. De plus, comme D est définie sur K, on a un morphisme en fibre générique $u_g : \mathrm{D} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{L} \to \mathrm{D} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{L}$ au-dessus de π_g. Par propriété universelle du modèle de Néron, u_g se prolonge de façon unique en un morphisme au-dessus de π_g :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D} \arrow[rr, "u_g"] \arrow[dr, "\pi_g"'] & & \mathbf{D} \arrow[dl, "\pi_g"] \\ & \mathrm{Spec}(\mathrm{T}) & \end{tikzcd}$$

La fibre spéciale $\tilde{u}_g$ de u_g est le κ-morphisme de $\widetilde{\mathbf{D}}$ cherché.

Pour notre application, nous prendrons $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{Z}_p[\zeta]$ ou $\mathbf{B} \times \mathbf{Z}_p[\zeta]$. On a alors une action du groupe d'inertie $\mathrm{I} = \mathrm{I}_p(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ sur $\widetilde{\mathbf{A}} \times \mathbf{F}_q$ et $\widetilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{F}_q$ à travers son quotient $\mathrm{I}(\mathbf{Q}_q(\zeta_{p^s})/\mathbf{Q}_p) \simeq \mathrm{I}(\mathbf{Q}_p(\zeta)/\mathbf{Q}_p(\zeta_{\mathrm{N}}))$. Pour tout corps de nombres algébriques $\mathrm{E} \subset \overline{\mathbf{Q}}$, on pose $\mathrm{G}_{\mathrm{E}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathrm{E})$.

Enfin, pour toute variété abélienne $\mathscr{V}$ définie sur un corps E et pour tout nombre premier ℓ, notons $\mathrm{V}_\ell \mathscr{V}$ le module de Tate de $\mathscr{V}$ en ℓ tensorisé par $\mathbf{Q}$; c'est naturellement un G_{E}-module.

Lemme **11** (cf. [27], Th. 2.2). — (i) *Dans l'anneau* $\mathrm{End}(\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}}))$, *l'endomorphisme de Frobenius (absolu) coïncide avec* $\omega_\zeta \circ \iota(a(p,f)) \circ \omega_\zeta^{-1}$.

Si l'on pose $\mathfrak{P}'_f = \omega_\zeta \circ \mathfrak{P}_f \circ \omega_\zeta^{-1}$, *les groupes p-divisibles* $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}'^{\infty}_f]_{/\mathbf{F}_q}$ *et* $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}^{\infty}_f]_{/\mathbf{F}_q} = \omega_\zeta(\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}'^{\infty}_f]_{/\mathbf{F}_q})$ *sont étales.*

(ii) *L'homomorphisme* $\widetilde{\alpha}$ *est à noyau fini et induit une isogénie sur les groupes p-divisibles* : $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}^{\infty}_f] \to \widetilde{\mathbf{B}}[\mathfrak{P}^{\infty}_f]$; *cette isogénie commute avec l'action de* I. *Cette action sur* $\widetilde{\mathbf{B}}[\mathfrak{P}^{\infty}_f]$ *est donnée par* $\langle \chi_p \rangle_{\mathrm{Alb}}$.

(iii) *Les groupes p-divisibles* $\mathbf{B}[\mathfrak{P}^{\infty}_f]^{\text{ét}}$ *et* $\mathbf{B}[\mathfrak{P}^{\infty}_f]^0$ *sont non nuls, et sont tous deux colibres de rang* 1 *sur l'anneau de valuation discrète* $\mathcal{O}_{f,\mathfrak{P}_f}$.

Démonstration. — (i) Grâce au théorème 1 de Carayol [2], on a identité de la fonction L de la représentation automorphe π_f et de celle du système compatible de représentations ℓ-adiques $V_\ell A_f$. En particulier l'égalité des facteurs d'Euler en p donne, pour tout $\ell \neq p$,

$$\dim V_\ell A_f^{\mathrm{I}} = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Frob}_p = \omega_\zeta \circ \iota(a(p,f)) \circ \omega_\zeta^{-1}$$

sur $V_\ell A_f^{\mathrm{I}}$; de plus, par propriété universelle du modèle de Néron, on a un isomorphisme $G_{\mathbf{Q}_p}$-linéaire $A_f[\ell^\infty]^{\mathrm{I}} \simeq \widetilde{\mathbf{A}}[\ell^\infty]$, ce qui entraîne que l'endomorphisme de Frobenius π de $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})$ coïncide avec $\omega_\zeta \circ \iota(a(p,f)) \circ \omega_\zeta^{-1}$. Par transport de structure, on en déduit que l'endomorphisme de Frobenius π' de $\mathcal{G} = \mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}'^{\infty}_f]$ coïncide avec $a(p,f) \in \mathcal{O}_{f,\mathfrak{P}_f}$; comme f est ordinaire en $\mathfrak{P}_f$, on conclut que π' est un automorphisme du groupe p-divisible $\mathcal{G}$. Or, la partie étale d'un groupe p-divisible en caractéristique p est le plus grand sous-groupe sur lequel Frobenius est inversible; $\mathcal{G}$ est donc étale. Il en va de même pour $\mathcal{H} = \mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}^{\infty}_f] = \omega_\zeta(\mathcal{G})$.

(ii) Pour voir que $\widetilde{\alpha}$ est à noyau fini, il suffit de montrer pour un nombre premier ℓ différent de p que $\widetilde{\alpha}_\ell : V_\ell\,\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}}) \to V_\ell\,\widetilde{\mathbf{B}}$ est injectif. Remarquons pour cela que $V_\ell\,\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})$ s'identifie au sous-espace de $V_\ell A_f$ fixé par I. En effet, la partie affine de la composante neutre de $\widetilde{\mathbf{A}}$ est unipotente, car A_f a bonne réduction potentielle; son module de Tate ℓ-adique est donc nul. Or, on a $V_\ell A_f \simeq V_\ell\,\widetilde{\mathbf{B}}$, d'où l'assertion. Montrons de plus que $\widetilde{\alpha}$ induit une surjection sur les points des groupes p-divisibles. Notons que

$$\mathcal{H}(\overline{\mathbf{F}}_p) = \mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}^{\infty}_f]\,(\overline{\mathbf{F}}_p)$$

n'est pas nul car $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}^{\infty}_f]$ est étale et n'est donc pas nul dès qu'on s'est assuré que $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}}) \neq 0$. Cette non-nullité peut être démontrée comme suit. Rappelons que $\mathbf{A}_f$ est le modèle de Néron sur $\mathbf{Z}_p$ de A_f. La forme f est de p-Nebentypus primitif (de conducteur p^r). Il s'ensuit que l'idempotent 1_f de l'algèbre de Hecke défini par f intervient dans la représentation ℓ-adique associée à la jacobienne de la courbe d'Igusa $\mathrm{Ig}(\mathrm{N}p^r)_{/\mathbf{F}_p}$ (voir [15], proposition non numérotée page 267). Cette courbe intervient comme composante irréductible *de multiplicité 1* dans la fibre spéciale du modèle régulier minimal $\mathscr{X}$ sur $\mathbf{Z}_p$ de notre courbe modulaire $X_1(Np^r)$. De plus, en utilisant un théorème de Raynaud (Spécialisation du foncteur de Picard, *Publ. Math., I.H.E.S. 38*, 1970, Th. 8.1.4; voir aussi [15], prop. 1, chap. 2), on montre qu'à isogénie près, la jacobienne de la courbe d'Igusa est facteur direct de la partie abélienne de la fibre spéciale du modèle de Néron de la jacobienne de $\mathscr{X}$. En coupant les représentations ℓ-adiques de ces deux variétés abéliennes par l'idempotent 1_f, on obtient la non-nullité cherchée. Le groupe p-divisible $\mathscr{H}(\overline{\mathbf{F}}_p)$ est un $\mathcal{O}_{f,\mathfrak{P}_f}$-module sans cotorsion, donc colibre de rang 1 (il ne peut être de corang 2 car $p \in \mathfrak{P}_f$ définit un endomorphisme non séparable de $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})$). De même, $\widetilde{\mathbf{B}}[\mathfrak{P}_f^\infty](\overline{\mathbf{F}}_p)$ est un $\mathcal{O}_{f,\mathfrak{P}_f}$-module non nul sans cotorsion, de corang 1 (il ne peut avoir rang 2 car $p \in \mathfrak{P}_f$). On voit donc que sur les duaux de Pontryagin, $\widetilde{\alpha}$ induit un homomorphisme à conoyau fini, et est donc surjectif sur les groupes p-divisibles. La I-linéarité de $\widetilde{\alpha}$ provient évidemment de ce que $\alpha = \mathrm{Id}$ sur la fibre générique. La représentation de I sur $\widetilde{\mathbf{B}}[\mathfrak{P}_f^\infty]$ est donc isomorphe à celle sur $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}_f^\infty]$.

Nous venons de vérifier que $\widetilde{\mathbf{B}}[\mathfrak{P}_f^\infty](\overline{\mathbf{F}}_p) = \mathbf{B}[\mathfrak{P}_f^\infty]^{\text{ét}}(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ est colibre de rang 1 sur $\mathcal{O}_{f,\mathfrak{P}_f}$, il en est donc de même pour $\mathbf{B}[\mathfrak{P}_f^\infty]^0(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ par autodualité de Cartier de $\mathbf{A}_f[\mathfrak{P}_f^\infty]$, d'où (iii).

Enfin, venons-en à l'action de l'inertie sur (4.2). On sait que le groupe I opère trivialement sur $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}_f'^\infty](\overline{\mathbf{F}}_p)$ car $\mathfrak{P}_f'$ est premier à $\mathfrak{P}_f$; ceci permet de trouver son action sur $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}_f^\infty] = \omega_\zeta(\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}_f'^\infty](\overline{\mathbf{F}}_p))$. Pour la décrire, rappelons que χ désigne le caractère cyclotomique donnant l'action de Galois sur les racines Np^∞-ièmes de l'unité. On note $\langle \chi \rangle_{\mathrm{Alb}}$ le caractère de $G_{\mathbf{Q}_p}$ composé des homomorphismes

$$\sigma \mapsto \chi(\sigma) \in G_{N,\infty} \to G_{N,r} = (\mathbf{Z}/Np^r\,\mathbf{Z})^\times \to \mathrm{End}(J(X_r)),$$

la dernière application étant donnée par le diamant par fonctorialité d'Albanese. Comme pour tout σ de I on a $\omega_\zeta^\sigma = \langle \chi(\sigma) \rangle_{\mathrm{Alb}}\, \omega_\zeta$, on tire de ce qui précède que I agit sur $\mathrm{ab}(\widetilde{\mathbf{A}})\,[\mathfrak{P}_f^\infty]$ par $\langle \chi \rangle_{\mathrm{Alb}}$. □

En utilisant finalement l'isogénie $\bigoplus \xi_f$ du lemme 10, on tire du lemme 11 que I agit sur $J_{r,1}(R)^{\text{ét}}$ par $\langle \chi \rangle_{\mathrm{Alb}}$ et que ce $R_{r,1}$-module est $\mathbf{Z}_p$-colibre de rang $(R_{r,1} : \mathbf{Z}_p)$. Par conséquent, le $\mathbf{Z}_p$-module $J_{r,1}(R)^0$ est également colibre de rang $(R_{r,1} : \mathbf{Z}_p)$. Appliquons alors $\mathrm{Hom}(-, \mu_{p^\infty})$ à la suite exacte (2.2) et posons $W_{r,1}^{\text{ét}} = \mathrm{Hom}(J_{r,1}(R)^0, \mu_{p^\infty})$ et $W_{r,1}^0 = \mathrm{Hom}(J_{r,1}(R)^{\text{ét}}, \mu_{p^\infty})$:

$$(\mathbf{2.3})_r \qquad 0 \to W_{r,1}^0 \to W_{r,1} \to W_{r,1}^{\text{ét}} \to 0.$$

Notons que l'interversion des notations est justifiée car $J_{r,1}(R)$ est autodual pour la dualité de Cartier et $W_{r,1}^{\text{ét}}$ s'identifie (comme $G_{\mathbf{Q}}$-module) au module de Tate tordu $Ta(J_{r,1}(R)^{\text{ét}}(\overline{\mathbf{Q}}_p)) \otimes \langle \chi \rangle$ de $J_{r,1}(R)^{\text{ét}}$ par cette dualité

$$(\text{resp. } W_{r,1}^0 \simeq Ta(J_{r,1}(R)^0(\overline{\mathbf{Q}}_p)) \otimes \langle \chi \rangle)$$

(voir [22], lemme 4.1).

Le groupe I opère sur cette suite de $R_{r,1}$-modules et de ce qui précède, on déduit que I opère trivialement sur $W^{\text{ét}}_{r,1}$ et par $\chi_p \langle \chi \rangle$ sur $W^0_{r,1}$, χ_p désignant le composé de χ avec la projection $G_{N,\infty} \to \mathbf{Z}_p^\times$. En utilisant alors notre hypothèse $a = 0 \bmod . p - 1$, nous observons que I agit par des caractères distincts modulo l'idéal maximal de $R_{r,1}$, et fournit donc un scindage sur $R_{r,1}$ de la suite $(2.3)_r$, de façon cohérente lorsque r croît. En effet, prenons g dans I tel que $\omega(g) \neq 1$, et considérons les sous-modules de W donnés par

$$W_1 = \operatorname{Ker}(\rho(g) - \chi_p(g) \langle \chi(g) \rangle) \quad \text{et} \quad W_2 = \operatorname{Ker}(\rho(g) - 1).$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a pour tout $r \geqslant 1$,

$$W_{r,1} = W_1/\omega_{r,1} W_1 \oplus W_2/\omega_{r,1} W_2$$

donc $W_1/\omega_{r,1} W_1 = W^0_{r,1}$ et $W_2/\omega_{r,1} W_2 \simeq W^{\text{ét}}_{r,1}$. On tire de cela que les termes extrêmes de la suite (2.3) sont libres de rang 1 sur l'anneau local $R_{r,1}$ et, en passant à la limite pour $r \to \infty$, que la représentation ρ a une matrice de la forme voulue dans une base de W adaptée au scindage de $(2.3)_\infty = \text{lim.proj.}\ (2.3)_r$. Il est alors aisé de déduire la coordinarité annoncée. □

Notation **12.** — *Nous fixons pour la suite une base* (e_1, e_2) *de* W *adaptée à la décomposition* $W = W_1 \oplus W_2$. *On a pour tout* g *de* I $(\rho(g) - 1)\, e_1 = (\chi_p(g) \langle \chi_p(g) \rangle - 1)\, e_1$ *et* $(\rho(g) - 1)\, e_2$ *est un multiple scalaire de* e_1; *donc* $u_I W = Re_1$ *et* $Re_2 \simeq W_I$.

Corollaire **13.** — *L'action de* Frob_p *sur* W_I *est donnée par* $T(p)$ *qui est une unité de* R.

Démonstration. — Par dualité de Cartier, on voit que le module des coïnvariants de $W_{r,1}$ s'identifie à

$$\operatorname{Hom}(J_{r,1}(R), \mu_{p^\infty})/\operatorname{Hom}(J_{r,1}(R)\,[\langle \chi \rangle], \mu_{p^\infty}) \simeq W^{\text{ét}}_{r,1},$$

en désignant par $J_{r,1}(R)\,[\langle \chi \rangle]$ la partie de $J_{r,1}(R)$ sur laquelle I opère par $\langle \chi \rangle$ (c'est-à-dire la partie étale de $J_{r,1}(R)$). On voit que Frob_p opère sur $A_f[\mathfrak{P}_f^\infty]^I$ par $T(p)_{\text{Alb}}$; on voit de même que le déterminant de Frob_p sur $A[\mathfrak{P}_f^\infty]$ est $\langle n_p \rangle_{\text{Alb}}$, où $n_p \in G_{N,\infty}$ est l'élément dont les projections dans $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ et $\mathbf{Z}_p^\times$ sont égales à p et 1 respectivement. On en déduit que Frob_p opère sur le dual de Cartier de $A[\mathfrak{P}_f^\infty]$ par $T(p)_{\text{Alb}}^{-1}$ et $\langle n_p \rangle_{\text{Alb}}^{-1} . T(p)_{\text{Alb}}$. C'est, bien sûr, le second qui donne Frob_p sur les coïnvariants par I. On remarque alors la relation $T(p)_{\text{Alb}} \langle n_p \rangle_{\text{Alb}}^{-1} = T(p)_{\text{Pic}}$. Comme cette formule est vraie pour tout f intervenant dans $R_{r,1}$, on conclut que Frob_p opère sur $W^{\text{ét}}_{r,1}$ par $T(p)$; pour finir, on passe à la limite inverse des $W^{\text{ét}}_{r,1}$ qui est égale à W_I. □

5. Représentations ordinaires et modules de différentielles

Soit κ un corps fini fixé et Art_κ la catégorie des anneaux artiniens locaux à corps résiduel égal à κ. Soit $\overline{V}$ un κ-espace de dimension 2 muni d'une représentation κ-linéaire $\bar{\rho} : G_{\mathbf{Q}} \to GL(\overline{V})$, absolument irréductible et non ramifiée hors de Np. La représentation $\bar{\rho}$ se factorise donc à travers le groupe de Galois de l'extension maximale $\mathbf{Q}_S/\mathbf{Q}$ non ramifiée hors de $S = \{$ facteurs premiers de $Np, \infty\}$. Nous noterons Π ce groupe de Galois. Nous supposons que la représentation $\bar{\rho}$ est coordinaire au sens de la définition 6. Soit $\mathbf{Q}(\bar{\rho})$ le corps fixé par le noyau de $\bar{\rho}$.

Remarque. — Si R est une composante locale de h_∞^{ord} satisfaisant les hypothèses (**P**) et (**R**), de corps résiduel κ, on a montré au théorème 7 que la représentation R-résiduelle irréductible $\bar{\rho}$ qui existe par (**R**) est coordinaire dès que la p-partie du caractère abélien dét $\bar{\rho}$ est non triviale. En outre, il existe alors une représentation coordinaire ρ de $G_{\mathbf{Q}}$ à valeurs dans $GL_2(R)$ relevant $\bar{\rho}$ et se factorisant à travers Π. Dans toute la suite de cet article, nous supposons que la composante R satisfait l'hypothèse $(\mathbf{P}_{\bar{\rho}})$ de l'introduction. Introduisons alors l'extension L de $\mathbf{Q}(\bar{\rho})$, p-extension maximale non ramifiée hors de p de $\mathbf{Q}(\bar{\rho})$. Posons $\Phi = \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}(\bar{\rho}))$.

Lemme **14**. — *Sous l'hypothèse* $(\mathbf{P}_{\bar{\rho}})$, *la représentation* ρ *restreinte à* $G_{\mathbf{Q}(\bar{\rho})}$ *est non ramifiée hors de* p, i.e. $\rho|_{G_{\mathbf{Q}(\bar{\rho})}}$ *se factorise à travers* Φ.

Démonstration. — Notons que le caractère abélien dét $\bar{\rho}$ est de conducteur exact Np. Le lemme est évidemment démontré si nous montrons que toute la ramification aux places divisant N est absorbée par l'extension $\mathbf{Q}(\text{dét}\,\bar{\rho})/\mathbf{Q}$. Soit $r \geqslant 1$ et P un polynôme irréductible divisant le polynôme $\omega_{r,1}$; soit f la forme modulaire primitive de niveau Np^r correspondant à P. La représentation $\mathbf{Q}_p \otimes (\rho \bmod . P)$ est isomorphe au module de Tate de la variété abélienne A_f. Cette variété abélienne a bonne réduction sur $\mathbf{Q}(\text{dét}\,\bar{\rho})$ en toute place divisant N, toujours d'après le théorème 7.1 de [13] qui s'applique à ces places grâce à l'hypothèse $(\mathbf{P}_{\bar{\rho}})$. Pour tout nombre premier ℓ divisant N, soit $I_\ell(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\text{dét}\,\bar{\rho}))$ un groupe d'inertie en ℓ sur $\mathbf{Q}(\text{dét}\,\bar{\rho})$; on a $\rho(I_\ell(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\text{dét}\,\bar{\rho}))) \equiv 1 \bmod . P$. Ceci étant vrai pour une infinité de polynômes premiers distincts, on en déduit, en tenant compte du fait que R est libre sur Λ, que $\rho(I_\ell(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\text{dét}\,\bar{\rho}))) = 1$. □

Nous fixons désormais une composante R qui vérifie les conditions $(\mathbf{P}_{\bar{\rho}})$ et (**R**) (donc en particulier (**P**) et (**R**)).

Ces considérations nous conduisent à introduire le foncteur

$$\mathscr{F} : \mathrm{Art}_\kappa \to \mathrm{Ens}$$

qui, à un anneau local artinien A, associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations $\rho_A : G_{\mathbf{Q}} \to GL_2(A)$ satisfaisant les conditions suivantes :

(i) ρ_A *se factorise à travers* Π;

(ii) *la restriction de* ρ_A *au groupe* $G_{\mathbf{Q}(\bar{\rho})}$ *se factorise à travers* Φ;

(iii) ρ_A *est coordinaire*;

(iv) *la réduction modulo l'idéal maximal de* A *coïncide avec* $\bar{\rho}$.

En adaptant la démonstration de la proposition 1 de [17], on montre que, sous l'hypothèse (**R**), ce foncteur est pro-représentable par un anneau local nœthérien complet R^o (on utilise le critère de Grothendieck-Schlessinger d'exactitude à gauche de $\mathcal{F}$). Il y a donc une représentation ordinaire universelle $\rho^o : G_{\mathbf{Q}} \to GL_2(R^o)$ telle que pour tout anneau local nœthérien complet A et toute représentation $\rho_A : G_{\mathbf{Q}} \to GL_2(A)$ satisfaisant les conditions (i)-(iv), il existe un unique homomorphisme $\varphi : R^o \to A$ tel que $\rho_A = \varphi \circ \rho^o$.

En particulier, d'après le théorème 5, il existe un homomorphisme $\varphi : R^o \to R$ tel que $\rho = \varphi \circ \rho^o$. Avant d'établir la surjectivité de φ, montrons qu'il s'agit d'un homomorphisme de Λ-algèbres. Considérons le problème de déformation universelle très simple suivant. Soit $\mathcal{M}_\Lambda$ l'idéal maximal de Λ.

$$\mathcal{F}_1 : \mathrm{Art}_\kappa \to \mathrm{Ens}$$

$A \mapsto \{$ caractères continus $G_{\mathbf{Q}} \to A^\times$ non ramifiés hors de S, dont la restriction à $\mathbf{Q}(\zeta_{Np})$ est non ramifiée hors de p, ∞ et dont la réduction modulo l'idéal maximal de A est égale à $\chi_p . \langle \chi \rangle$ modulo $\mathcal{M}_\Lambda \}$.

Soit $W(\kappa)$ l'anneau des vecteurs de Witt de κ. Soit $x \mapsto \tilde{x}$ le caractère de Teichmüller de κ vers $W(\kappa)$. Posons $u = 1 + Np$ et considérons le caractère $\rho^{(1)} : G_{\mathbf{Q}} \to (\Lambda \otimes W(\kappa))^\times$ défini par

(5.1) $$\rho^{(1)}(g) = (\chi_p(g) \langle \chi(g) \rangle)^\sim . u(g) . (1 + T)^{a(g)},$$

où $u(g)$ est la projection dans $1 + p\mathbf{Z}_p$ de $\chi_p(g)$ et $a(g) \in \mathbf{Z}_p$ est défini par $u(g) = u^{a(g)}$. Le caractère $\rho^{(1)}$ est non ramifié hors de S et sa restriction à $G_{\mathbf{Q}(\zeta_{Np})}$ est non ramifiée hors de p.

Lemme **15**. — *Le couple* $(\Lambda \otimes W(\kappa), \rho^{(1)})$ *est solution du problème universel* $\mathcal{F}_1$.

Commentaire. — Nous pourrions aussi omettre le facteur $u(g)$ dans (5.1) et définir ainsi un caractère $\rho'^{(1)}$. Il est clair que l'automorphisme $T \mapsto u.(1 + T) - 1$ de $\Lambda \otimes W(\kappa)$ échange ces caractères; le couple $(\Lambda \otimes W(\kappa), \rho'^{(1)})$ est donc isomorphe au couple $(\Lambda \otimes W(\kappa), \rho^{(1)})$. Le choix du caractère $\rho^{(1)}$ convient mieux à la suite de notre étude.

Démonstration. — Soit A un objet de Art_κ et $\xi : G_{\mathbf{Q}} \to A^\times$ un élément de $\mathcal{F}_1(A)$. Par la propriété universelle de l'anneau $W(\kappa)$, il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\alpha : W(\kappa) \to A$ compatible aux applications de réduction. Quitte à remplacer ξ par $\xi . \alpha((\chi_p \langle \chi \rangle)^\sim)^{-1}$, on peut supposer que ξ est à valeurs dans $(1 + \mathcal{M}_A)$. Il se factorise donc à travers la p-extension abélienne maximale de $\mathbf{Q}$ non ramifiée hors de Np. Comme nous avons supposé que p ne divise pas $\varphi(N)$, ξ s'identifie à un caractère

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{Np^\infty})/\mathbf{Q}(\mu_{Np})) \to A^\times.$$

En passant à l'algèbre complétée du groupe de Galois, identifiée à $\Lambda \otimes W(\kappa)$, une fois fixé le choix du générateur topologique σ_{1+Np} de ce groupe, on tire de ce caractère un unique homomorphisme $\beta : \Lambda \otimes W(\kappa) \to A$ tel que $\beta(1 + T) = \xi(\sigma_{1+Np})$. Enfin, on tord (-1) fois cet homomorphisme :

$$\beta_{-1}(1 + T) = u^{-1}.\beta(1 + T).$$

L'homomorphisme β_{-1} vérifie alors la relation $\beta_{-1} \circ \rho^{(1)} = \xi$. $\square$

Par ailleurs, le déterminant du caractère universel $\rho^o : G_{\mathbf{Q}} \to GL_2(R^o)$ fournit une déformation de $\chi_p \langle \chi \rangle \bmod \mathcal{M}_\Lambda$; il y a donc un unique homomorphisme canonique d'anneaux $i : \Lambda \to R^o$ tel que $i \circ \rho^{(1)} = \text{dét}\, \rho^o$. Ainsi, R^o est muni d'une structure naturelle de Λ-algèbre. En fait, il y a même un homomorphisme d'anneaux

$$j : \mathbf{Z}_p[[G_{N,\infty}]] \to R^o$$

induisant i sur $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ et tel que si $z = (\omega, \gamma)$ pour la décomposition $G_{N,\infty} = (\mathbf{Z}/Np\mathbf{Z})^\times \times \Gamma$, $j(z) = (\omega_p.\langle \omega \rangle)^\sim.i(\gamma)$; ceci résulte de l'identification de $G_{N,\infty}$ avec $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{Np^\infty})/\mathbf{Q})$ à l'aide du symbole d'Artin : $a \mapsto (\zeta \mapsto \zeta^a)$.

Pour tout $z \in G_{N,\infty}$, nous poserons $\langle z \rangle = j(z)$. D'autre part, nous avons expliqué au § 1 quelle est la structure de Λ-algèbre de R. La première indication signalant le lien entre R^o et R est alors :

Lemme **16**. — *L'homomorphisme* $\varphi : R^o \to R$ *est* Λ-*linéaire. On a même, pour tout* z *de* $G_{N,\infty}$, $\varphi(\langle z \rangle) = \langle z \rangle$.

Démonstration. — Soit $z \in G_{N,\infty}$ et $g \in G_{\mathbf{Q}}$ un prolongement à $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\sigma_z : (\zeta \mapsto \zeta^z)$ pour tout $\zeta \in \mu_{Np^\infty}$. Décomposons z en (α, γ), où $\alpha \in (\mathbf{Z}/Np\mathbf{Z})^\times$ et $\gamma \in \Gamma$, puis $\alpha = (\alpha', \alpha_p)$, où $\alpha' \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ et $\alpha_p \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$. On a alors

(5.2) $$i \circ \rho^{(1} (g) = (\alpha_p.\langle \alpha \rangle) \ .i(\gamma).$$

Par conséquent,

(5.3) $$\varphi((\alpha_p.\langle \alpha \rangle)^\sim.i(\gamma)) = \chi_p(g).\langle \chi(g) \rangle.$$

D'autre part, dans R on a $\langle \chi(g) \rangle = \langle \alpha \rangle.\langle \gamma \rangle = \langle \alpha \rangle.(1 + T)^{a(\gamma)}$ et $\chi_p(\sigma) = \widetilde{\alpha}_p.\gamma$. En outre l'égalité : $\langle \alpha \rangle = (\langle \alpha \rangle)^\sim$ a lieu dans R. En effet, d'après $(\mathbf{P}_{\bar\rho})$ (i.e. p ne divise pas $\varphi(N)$), l'action de $(\mathbf{Z}/Np\mathbf{Z})^\times$ $(\subset G_{N,\infty})$ sur R est donnée par un caractère qui est congru à $(\langle - \rangle)^\sim \bmod \mathcal{M}$, donc coïncide avec $(\langle - \rangle)^\sim$. On voit ainsi que dans l'anneau R, $\chi_p(g).\langle \chi(g) \rangle = \widetilde{\alpha}_p.\gamma.(\langle \alpha \rangle)^\sim.(1 + T)^{a(\gamma)}$. Or, dans R^o, $\langle z \rangle = (\langle \alpha \rangle)^\sim.(1 + T)^{a(\gamma)}$, donc $\rho^{(1)}(g) = z_p.\langle z \rangle$; l'identité (5.3) devient donc $\varphi(z_p.\langle z \rangle) = z_p.\langle z \rangle$, et φ est $G_{N,\infty}$-équivariante. $\square$

Proposition **17**. — *L'homomorphisme* φ *est surjectif.*

Démonstration. — Pour tout nombre premier ℓ ne divisant pas Np, on a

(5.4) $$\varphi(\text{Tr}\, \rho^o(\text{Frob}_\ell)) = T(\ell) \in R.$$

De plus, si ℓ divise N, soit I_ℓ un groupe d'inertie en ℓ; montrons que Frob_ℓ opère sur les coïnvariants de W sous l'action de I_ℓ via $T(\ell)$. Pour toute f intervenant dans R (et de Nebentypus non trivial), on a $\text{Frob}_\ell = T(\ell)_{\text{Alb}}$ sur $A_f[p^\infty]^{I_\ell}$, grâce au théorème 2.1

de Carayol [2] (ou Deligne si $\ell \neq 2$); comme $\mu_{p\infty}$ est non ramifié sur $\mathbf{Q}_\ell$, on voit que $(W_{r,1})_{I_\ell} = \mathrm{Hom}(J_{r,1}(R)^{I_\ell}, \mu_{p\infty})$, l'action de Frob_ℓ sur ce module étant donnée par $\ell . T(\ell)^{-1}_{\mathrm{Alb}} = T(\ell)_{\mathrm{Pic}}$. Soit W l'espace de la représentation universelle ρ^o et α_ℓ l'élément de R^o par lequel Frob_ℓ opère sur W_{I_ℓ}; on a donc la formule

$$\varphi(\alpha_\ell) = T(\ell).$$

Enfin, pour $\ell = p$, il résulte du corollaire 13 que $\mathrm{Frob}_p = T(p)$ sur W_I, donc que $T(p)$ est image par φ du scalaire de R^o donnant l'action de Frob_p sur W_I. Ainsi, tous les opérateurs de Hecke dans R sont dans l'image de φ; on sait par ailleurs qu'ils constituent un système générateur de R comme Λ-algèbre. D'après le lemme 16 ceci achève la preuve de ce que φ est surjective. □

Bien qu'aucune information ne soit connue en général concernant la structure de Λ-algèbre de R^o, on pressent que R^o renferme des informations sur la théorie d'Iwasawa de corps de nombres, tandis que R renferme des informations analytiques (et contrôlées par une fonction L p-adique). C'est, entre autres, cette présomption qui a conduit l'un des auteurs à formuler la conjecture suivante :

Conjecture **18.** — *L'homomorphisme φ est un isomorphisme.*

Nous allons montrer que la seule surjectivité de φ conduit à des conséquences non triviales en théorie d'Iwasawa.

Une conséquence évidente de la surjectivité de φ est d'abord l'existence d'un homomorphisme de R^o-modules sur les différentielles de Kähler :

$$\Omega_{R^o/\Lambda} \otimes_{R^o} R \to \Omega_{R/\Lambda} \to 0. \tag{5.5}$$

Les considérations qui suivent vont expliquer le rôle de cette surjection.

Il nous faut d'abord introduire un module d'Iwasawa d'apparence exotique (son lien avec un objet plus orthodoxe sera fait dans le cas d'une composante R de type C.M.).

6. Cohomologie ordinaire et module d'Iwasawa

Nous posons d'abord une définition inspirée par l'article de R. Greenberg [6], § 1, mais modifiée pour l'adapter à notre contexte. Soit A une $\mathbf{Z}_p$-algèbre nœthérienne complète munie d'un caractère $\{\ \} : \mathbf{Z}_p^\times \to A$. Nous noterons $\{\chi_p\}$ le composé du caractère cyclotomique p-adique $\chi_p : G_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Z}_p^\times$ et de $\{\ \}$.

Définition **19.** — *Soit* $(A, \{\ \})$ *comme ci-dessus, soit* $\mathcal{N}$ *un* A*-module topologique, muni d'une action linéaire continue de* Π. *Nous dirons que* $\mathcal{N}$ *est* coordinaire *si pour toute place* v *de* $\mathbf{Q}_S$ *au-dessus de* p, *et pour* $I = I_v$, *le sous-groupe d'inertie de* Π *correspondant, il existe une filtration décroissante (dite* associée à I*) de* $\mathcal{N}$

$$F_I = \{ F_I^i \mathcal{N} \}_{i \in \mathbf{Z}}$$

telle que $F_I^i \mathcal{N} = 0$ *pour* i *assez grand, que* $F_I^i \mathcal{N} = \mathcal{N}$ *pour* i *assez petit, et que* I *agisse sur le* i*-ième quotient*

$$\mathrm{gr}_I^i \mathcal{N} = F_I^i \mathcal{N} / F_I^{i+1} \mathcal{N} \quad \textit{via le caractère } \chi_p^i . \{\chi_p^i\}.$$

Remarque. — Si I et I′ sont deux groupes d'inertie en p dans Π, il y a $\gamma \in \Pi$ tel que $I' = \gamma I \gamma^{-1}$, et si la filtration $\{ F^i_I \mathcal{N} \}_{i \in \mathbf{Z}}$ associée à I est donnée, la filtration $F^i_{I'} \mathcal{N}$ définie par $\gamma(F^i_I \mathcal{N})$ est associée au groupe I′. En particulier, l'ordre m (nombre de termes non nuls) de la filtration $\{ F^i_I \mathcal{N} \}_{i \in \mathbf{Z}}$ ne dépend pas de I.

Commentaire. — Dans sa définition, R. Greenberg considère des représentations de Π sur des $\mathbf{Z}_p$-modules; c'est pourquoi, dans sa définition de l'ordinarité, on ne voit apparaître que le caractère cyclotomique (et ses puissances) pour décrire l'action du groupe I d'inertie en p sur les quotients successifs. Dans notre situation, nous considérons des modules sur des $\mathbf{Z}_p$-algèbres locales nœthériennes complètes arbitraires (mais de corps résiduel fini κ fixé). Dans notre définition de la (co-)ordinarité, on doit donc autoriser comme caractères pour l'action de l'inertie I sur les quotients successifs des *déformations* de puissances du caractère cyclotomique $\omega : I \to \mathbf{F}_p^\times$. On a vu (lemme 15) que le couple universel pour le problème de déformation du caractère dét $\bar\rho$ (qui est une puissance non nulle de ω) est $(\mathbf{Z}_p[[T]], \chi_p \langle \chi_p \rangle)$. Pour toute $\mathbf{Z}_p$-algèbre locale nœthérienne complète de corps résiduel $\mathbf{F}_p$, toute déformation $\eta : I \to A^\times$ de dét $\bar\rho$ peut donc s'écrire $\eta = \chi_p \{ \chi_p \}$ pour un unique caractère $\{ \ \} : \mathbf{Z}_p^\times \to A^\times$ convenable. Ceci, à nos yeux, justifie la définition 19.

Etant donné un Π-module coordinaire $\mathcal{N}$, on peut munir son premier groupe de cohomologie d'une filtration indépendante des groupes d'inertie comme suit.

Définition **20.** — *Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on appelle filtration coordinaire de* $H^1(\Pi, \mathcal{N})$ *la filtration décroissante* $\{ F^i H^1(\Pi, \mathcal{N}) \}_{i \in \mathbf{Z}}$, *où le sous-groupe* $F^i H^1(\Pi, \mathcal{N})$ *est constitué des classes de cohomologie ξ pour lesquelles pour tout groupe d'inertie $I = I_v$ dans Π il existe un cocycle $c : \Pi \to \mathcal{N}$ représentant ξ et tel que $c(I) \subset F^i_I \mathcal{N}$.*

Commentaire. — Toute classe ξ de $H^1(\Pi, \mathcal{N})$ qui admet, pour un groupe d'inertie I, un représentant c satisfaisant $c(I) \subset F^i_I \mathcal{N}$, admet également, pour tout autre groupe d'inertie $I' = \gamma I \gamma^{-1}$, un représentant c' vérifiant $c'(I') \in F^i_{I'} \mathcal{N}$, à savoir le cocycle $c' : \tau \to \gamma . c(\gamma^{-1} \tau \gamma)$. Ceci montre qu'il suffit de choisir *un* groupe d'inertie I pour définir la filtration $\{ F^i H^1(\Pi, \mathcal{N}) \}_{i \in \mathbf{Z}}$ par la condition $c(I) \subset F^i_I \mathcal{N}$.

Expliquons alors le choix du module coordinaire $\mathcal{N}$ auquel nous nous intéresserons. Considérons d'abord le module W^o de la représentation universelle ρ^o. Il est libre de rang 2 sur l'anneau local nœthérien R^o et possède une structure de Π-module coordinaire d'ordre 2 : pour tout groupe d'inertie en p, I de Π il y a une filtration décroissante à deux crans de W^o :

$$0 = F^2_I W^o \subset F^1_I W^o = u_I W^o \subset F^0_I W^o,$$

et I opère sur $gr^i(W^o)$ par $\chi_p^i \langle \chi_p^i \rangle$. Considérons alors le R^o-module $\mathcal{N}$ de la représentation adjointe Ad ρ^o. On a

$$\mathcal{N} = \mathrm{End}^0(W^o) = \{ u \in \mathrm{End}\, W^o ; \mathrm{Tr}\, u = 0 \}.$$

C'est un R^o-module libre de rang 3 possédant une structure naturelle de Π-module coordinaire d'ordre 3 déduite de celle de W^o. Pour la définir, introduisons les notations suivantes. Soit A un anneau commutatif, M un A-module libre de type fini, N un sous-module de M. On note $\mathrm{End}^0(M, N)$ le sous-module de $\mathrm{End}^0(M)$ constitué des endomorphismes de M de trace nulle et laissant stable le sous-module N; de même, $\mathrm{Hom}^0(M, N)$ désigne le sous-module de $\mathrm{End}^0(M, N)$ constitué des endomorphismes de A de trace nulle et qui appliquent M dans N.

Définition **21.** — *Pour tout groupe d'inertie* I *en* p *dans* Π, *appelons* I-filtration naturelle *de* $\mathscr{N} = \mathrm{End}^0(W^o)$ *la filtration décroissante à trois crans*

$$F_I^i\mathscr{N} = \mathscr{N} \quad pour\ i \leqslant -1, \ F_I^0\mathscr{N} = \mathrm{End}^0(W^o, u_I W^o),$$
$$F_I^1\mathscr{N} = \mathrm{Hom}^0(W^o, u_I W^o), \quad et \quad F_I^i\mathscr{N} = 0 \quad pour\ tout\ i > 1.$$

Lemme **22.** — *L'action de* I *sur* $\mathrm{gr}_I^i(\mathscr{N})$ *est donnée par* $\chi_p^i \langle \chi_p^i \rangle$ *pour* $i = -1, 0, 1$, *i.e.* $\mathscr{N}$ *est coordinaire.*

Plus généralement, pour tout R^o-module M, nous pouvons considérer le Π-module $\mathscr{N}_M = \mathscr{N} \otimes_{R^o} M$, l'action de Π portant sur le premier facteur.

Lemme **23.** — *Pour tout* R^o*-module* M *et tout groupe d'inertie* I *en* p *dans* Π, *la* I*-filtration naturelle de* $\mathscr{N}_M$ *définie par*

$$F_I^i\mathscr{N}_M = (F_I^i\mathscr{N}) \otimes M$$

est coordinaire.

En particulier, $H^1(\Pi, \mathscr{N}_M)$ peut être muni de sa filtration coordinaire naturelle. Nous allons concentrer notre étude sur le « dernier terme non nul » de cette filtration :

Notations **24.** — (i) *Nous noterons* $H_o^1(\Pi, \mathscr{N}_M) = F^1 H^1(\Pi, \mathscr{N}_M)$. *Nous appellerons ce sous-groupe le* groupe de cohomologie coordinaire *du* Π*-module* $\mathscr{N}_M$.

(ii) *Notons*

$$H(M) = H_o^1(\Pi, \Phi, \mathscr{N}_M) \tag{6.1}$$

le sous-groupe de $H_o^1(\Pi, \mathscr{N}_M)$ *des classes* ξ *représentées par un cococyle* c *dont la restriction à* $G_{\mathbf{Q}(\bar{\rho})}$ *est non ramifiée au-dessus de* N *(i.e. se factorise à travers* Φ*).*

Nous obtenons ainsi un foncteur de la catégorie des R^o-modules dans elle-même.

La proposition suivante établit un lien naturel entre ce foncteur $H(-)$ et le foncteur $\mathrm{Hom}_{R^o}(\Omega_{R^o/\Lambda}, -)$. Ce résultat est l'analogue du calcul de l'espace tangent du foncteur de déformations ordinaires de la représentation $\bar{\rho} : \Pi \to GL(\overline{W})$ en termes du premier groupe de cohomologie de Π sur l'algèbre de Lie de $GL(\overline{W})$. C'est donc un lemme typique de la théorie des déformations.

Proposition **25**. — *Pour tout* R^o*-module* M, *il y a un isomorphisme canonique de* R^o*-modules*

$$\textbf{(6.2)} \qquad \mathrm{Hom}_{R^o}(\Omega_{R^o/\Lambda}, M) \simeq H^1_o(\Pi, \Phi, \mathcal{N}_M).$$

Cet isomorphisme est fonctoriel en M; *il fournit donc un isomorphisme de foncteurs* $\mathrm{Hom}_{R^o}(\Omega_{R^o/\Lambda}, -)$ *et* H.

Démonstration. — Construisons d'abord la flèche (6.2). Par définition du module des différentielles de Kähler, le membre de gauche de (6.2) s'identifie au module $\mathrm{Dér}_\Lambda(R^o, M)$ des dérivations Λ-linéaires de R^o vers M. Notons $R^o[M]$ l'algèbre sur R^o de module sous-jacent $R^o \oplus M$, dans laquelle M est de carré nul, et posons

$$W^o[M] = W^o \otimes_{R^o} R^o[M].$$

Si l'on note enfin $\Gamma_\Lambda(\pi)$ l'ensemble des sections de l'homomorphisme surjectif canonique de Λ-algèbres $\pi : R^o[M] \to R^o$, si l'on munit cet ensemble de la structure naturelle de Λ-module, si $\alpha(r) = r + m_r$ et $\lambda * \alpha(r) = r + \lambda . m_r$, on voit que l'application

$$\mathrm{Dér}_\Lambda(R^o, M) \to \Gamma_\Lambda(\pi), \qquad \delta \mapsto (r \to r + \delta(r))$$

est un isomorphisme Λ-linéaire. On remarque ensuite que le Λ-module $\Gamma_\Lambda(\pi)$ s'identifie au Λ-module des représentations de $G_{\mathbf{Q}}$ dans $\mathrm{Aut}(W^o[M])$ satisfaisant (i)-(iv) et de déterminant *égal* à celui de ρ^o dans l'anneau $R^o[M]$. Cette dernière identification est donnée par la propriété universelle de R^o étendue aux anneaux pro-artiniens de corps résiduel κ. En effet, si α est une section de π, la représentation $\rho_\alpha = \alpha \circ \rho^o$ est du type voulu et $\det \rho_\alpha = \det \rho^o$ dans $R^o[M]$. Réciproquement, si ρ_M est une représentation de degré 2 sur $R^o[M]$ de $G_{\mathbf{Q}}$ satisfaisant les conditions (i)-(iv), montrons qu'il existe un homomorphisme α de Λ-algèbres $R^o \to R^o[M]$ tel que $\rho_M = \alpha \circ \rho^o$. Notons que l'anneau $R^o[M]$ n'est pas nécessairement nœthérien (ni même pro-artinien) car nous ne supposons pas le module M de type fini sur R^o; néanmoins, nous pouvons supposer que la représentation ρ_M est définie sur un sous-anneau nœthérien (et complet) de $R^o[M]$ de la forme $R^o[M_0]$ où M_0 est un sous-module de type fini de M, ceci grâce à la condition (ii). En effet, le groupe Φ est (topologiquement) de type fini, car si l'on forme son quotient de Frattini (quotient par l'adhérence du sous-groupe $\Phi^p(\Phi, \Phi)$), on obtient un $\mathbf{F}_p$-espace de dimension finie d'après la théorie du corps de classes. Il est alors clair que si $g_1, \ldots, g_s$ engendrent Φ, et S est un système de représentants de $\mathrm{Im}\,\bar{\rho}$, tout module M_0 assez gros pour que $R^o[M_0]$ contienne les coefficients des matrices $\rho_M(g_i)$ et $\rho_M(S)$ convient. L'anneau $R^o[M_0]$ est pro-artinien, donc la propriété universelle de R^o fournit l'existence de l'homomorphisme α cherché. Il est alors évident que $\alpha \mapsto \rho_\alpha$ est bijective. Continuons l'itinéraire qui mène du membre de gauche de (6.2) au membre de droite.

Etant donnée une représentation ρ_M satisfaisant (i)-(iv), on définit un cocycle $c : \Pi \to \mathcal{N}_M$ par la formule suivante :

$$\textbf{(6.3)} \qquad \rho_M(g) = (\mathrm{Id} + c(g))\, \rho^o(g).$$

Ainsi, c est la partie infinitésimale par laquelle $\rho_{\mathbf{M}}$ diffère de ρ^o. Il est facile de vérifier que c est un cocycle à valeurs dans $\mathcal{N}_{\mathbf{M}}$ et que c est un cobord si et seulement s'il existe un élément v de $\mathrm{Aut}(\mathrm{W}^o[\mathrm{M}])$ tel que pour tout g de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$,

$$\rho_{\mathbf{M}}(g) = v\,\rho^o(g)\,v^{-1}.$$

Vérifions que c est coordinaire. Soit I un groupe d'inertie en p. Comme $\rho_{\mathbf{M}}$ est coordinaire en p, on peut, dans une base appropriée, écrire la matrice de $\rho_{\mathbf{M}}$ restreinte à I sous la forme

$$\begin{pmatrix} \chi_p \langle \chi_p \rangle & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que la matrice de c est nilpotente supérieure, i.e. $c(\mathrm{I}) \subset \mathrm{F}^1_{\mathrm{I}}\mathcal{N}_{\mathbf{M}}$. Ceci montre que c est coordinaire. Inversement, la donnée d'un cocycle coordinaire $c : \Pi \to \mathcal{N}_{\mathbf{M}}$ dont la restriction à $\mathbf{Q}(\bar{\rho})$ passe par Φ fournit une représentation $\rho_{\mathbf{M}}$ par la formule (6.3). Cette représentation satisfait (i)-(iv) par définition. Toutes les applications utilisées pour passer du membre de gauche au membre de droite dans (6.2) étant canoniques, il est clair que la transformation de $\mathrm{Hom}(\Omega_{\mathrm{R}^o/\Lambda}, -)$ à H ainsi obtenue est naturelle. □

Corollaire **26**. — *Le foncteur* $\mathrm{H} : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{H}(\mathrm{M})$ *de la catégorie des* R^o*-modules dans elle-même est exact à gauche.*

Démonstration. — C'est vrai de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}^o}(\Omega_{\mathrm{R}^o/\Lambda}, -)$. □

Commentaire. — Avant de poursuivre le chemin qui nous mène au théorème principal de cet article, il semble à propos de signaler une généralisation naturelle du foncteur H. En effet, le foncteur H nous permettra au § 8 de définir un module $\mathscr{X}$ sur $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{T}]]$ (conjecturalement de type fini et de torsion sur cette algèbre). Or, pour formuler un énoncé du type « conjecture principale » à deux variables, compatible avec la conjecture à une variable, il faut disposer d'un module d'Iwasawa sur $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{S}, \mathrm{T}]]$ dont la « valeur en $\mathrm{S} = 0$ » (i.e. le noyau ou le conoyau de la multiplication par S) soit pseudo-isomorphe à $\mathscr{X}$. Nous introduisons la variable S (la variable cyclotomique) de la manière suivante. Pour tout $n \geqslant 0$, soit Π_n (resp. Φ_n) le sous-groupe de Π (resp. de Φ) qui fixe $\mathbf{Q}(\zeta_{\mathrm{N}p^n})$. Tout module Π-coordinaire $\mathcal{N}$ est aussi Π_n-coordinaire; nous pouvons donc considérer la filtration de $\mathrm{H}^1(\Pi_n, \mathcal{N})$. Ainsi, pour tout R^o-module M, on considère le Π-module coordinaire $\mathcal{N}_{\mathbf{M}}$ et on définit les foncteurs $\mathrm{H}(-, n)$ comme en (6.2) par

$$\mathrm{H}(\mathrm{M}, n) = \mathrm{H}^1_o(\Pi_n, \Phi_n, \mathcal{N}_{\mathbf{M}}).$$

Pour chaque $n \geqslant 0$, l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}_p[\Pi/\Pi_n]$ opère sur $\mathrm{H}(\mathrm{M}, n)$ par conjugaison (i.e. $g \in \Pi/\Pi_n$ agit sur un cocycle c par $(g.c)(\tau) = g.c(g^{-1}\tau g)$.

Pour chaque n, le sous-groupe $\Pi_{n+1} \subset \Pi_n$ est d'indice fini; on peut donc, pour tout Π-module $\mathcal{N}$, considérer les applications de restriction $\mathrm{Res}_n : \mathrm{H}^1(\Pi_n, \mathcal{N}) \to \mathrm{H}^1(\Pi_{n+1}, \mathcal{N})$.

Pour $\mathcal{N} = \mathcal{N}_M$, Res_n est compatible avec les filtrations, avec les conditions en Φ_n et Φ_{n+1} et avec les actions de Π/Π_n resp. Π/Π_{n+1}; nous pouvons donc poser

$$\mathrm{H}(\mathrm{M}, \infty) = \lim.\mathrm{ind}.\mathrm{H}(\mathrm{M}, n).$$

Ce module est naturellement muni d'une action de l'algèbre Λ' complétée du groupe $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{\mathrm{N}p^\infty})/\mathbf{Q}) = \lim.\mathrm{proj}.\Pi/\Pi_n$. Nous choisissons $\sigma_{1+\mathrm{N}p} : \zeta \mapsto \zeta^{1+\mathrm{N}p}$ comme générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{\mathrm{N}p^\infty})/\mathbf{Q}(\zeta_{\mathrm{N}p}))$. Par ce choix, nous identifions Λ' à l'algèbre $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{S}]]\,[\Delta]$, et nous avons en particulier une structure de $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{S}]]$-module sur $\mathrm{H}(\mathrm{M}, \mathrm{S})$. Il semble que ce foncteur intervienne dans la formulation de la conjecture principale à deux variables et que sa valeur en $\mathrm{S} = 0$ soit (pseudo)-isomorphe à H. Ces considérations seront développées dans un article ultérieur.

7. Série caractéristique d'un $\widetilde{\mathrm{R}}$-module de torsion

Soit R une composante locale de l'algèbre de Hecke ordinaire h_∞^{ord} satisfaisant l'hypothèse (**P**). L'anneau local nœthérien R est en particulier réduit et donc est contenu dans son anneau total des fractions Fract(R) qui est un produit fini de corps. Soit $\widetilde{\mathrm{R}}$ la clôture intégrale de R dans Fract(R). C'est un anneau nœthérien intégralement clos. Rappelons d'abord la structure des modules de type fini et de torsion sur un tel anneau (cf. [1], chap. 7, § 4). Introduisons pour tout anneau A le monoïde $\mathrm{D}_1(\mathrm{A})$ des diviseurs de A (cycles purement de codimension 1 dans Spec A); il s'identifie au monoïde libre sur l'ensemble $(\mathrm{Spec\,A})_1$ des idéaux premiers de hauteur 1 de A. Pour tout $\mathfrak{A}$ de $\mathrm{D}_1(\mathrm{A})$, on note $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{A})$ le coefficient de $[\mathfrak{P}]$ dans $\mathfrak{A}$. Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux éléments de $\mathrm{D}_1(\mathrm{A})$, nous dirons que $\mathfrak{A}$ divise $\mathfrak{B}$ si pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de hauteur 1 de A, $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{A}) \leqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{B})$. Pour chaque corps $\mathcal{K}$ composant l'anneau total des fractions de R, soit $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ la clôture intégrale de Λ dans $\mathcal{K}$. On a $\widetilde{\mathrm{R}} = \Pi_{\mathcal{K}}\, \mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ et $\mathrm{D}_1(\widetilde{\mathrm{R}}) = \bigoplus \mathrm{D}_1(\mathcal{O}_{\mathcal{K}})$. Soit X un $\widetilde{\mathrm{R}}$-module. Soit $\mathrm{X}_{\mathcal{K}} = \mathrm{X} \otimes_{\widetilde{\mathrm{R}}} \mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ la $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$-composante de X. En considérant pour chaque idéal premier $\mathfrak{P}$ de hauteur 1 de $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ la longueur du module localisé de $\mathrm{X}_{\mathcal{K}}$ en $\mathfrak{P}$, on construit un élément de $\mathrm{D}_1(\mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ qu'on appelle la « série caractéristique au sens strict » partielle $\mathrm{F}_{\mathrm{X}_{\mathcal{K}}}$ de $\mathrm{X}_{\mathcal{K}}$. La « série caractéristique au sens strict » F_{X} du module $\mathrm{X} = \bigoplus \mathrm{X}_{\mathcal{K}}$ est alors l'élément de $\mathrm{D}_1(\widetilde{\mathrm{R}}) = \bigoplus \mathrm{D}_1(\mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ donné par $\mathrm{F}_{\mathrm{X}} = \Sigma \mathrm{F}_{\mathrm{X}_{\mathcal{K}}}$.

Néanmoins, nous aurons besoin d'une généralisation de la notion de série caractéristique au cas d'un $\widetilde{\mathrm{R}}$-module X quelconque. Nous élargissons alors $\mathrm{D}_1(\widetilde{\mathrm{R}})$ à l'ensemble $\mathrm{D}'_1(\widetilde{\mathrm{R}})$ des fonctions de $(\mathrm{Spec}\,\widetilde{\mathrm{R}})_1$ vers $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire les sommes formelles $\mathfrak{A} = \Sigma\, \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{A}) . [\mathfrak{P}]$ à coefficients dans $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$, sans restriction sur le support de la famille $(\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{A}))$. L'entier $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{A})$ est appelé ordre en $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{A}$ et la divisibilité de $\mathfrak{B}$ par $\mathfrak{A}$ dans $\mathrm{D}'_1(\widetilde{\mathrm{R}})$ est définie comme dans $\mathrm{D}_1(\widetilde{\mathrm{R}})$ à partir de l'ordre sur $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Pour tout $\widetilde{\mathrm{R}}$-module X, on construit, exactement comme ci-dessus, un élément F_{X} de $\mathrm{D}'_1(\widetilde{\mathrm{R}})$ appelé « série caractéristique au sens large » de X.

Remarque **27.** — *Soient* X *et* Y *deux* $\widetilde{\mathrm{R}}$*-modules quelconques, et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un homomorphisme* $\widetilde{\mathrm{R}}$*-linéaire surjectif, alors* F_{Y} *divise* F_{X}.

8. Un module d'Iwasawa exotique

Soit R une composante locale de h_∞^{ord} satisfaisant (**P**) et (**R**); soit $\widetilde{\mathrm{R}}$ la clôture intégrale de R dans son anneau total des fractions Frac(R) (c'est un produit de corps contenant R grâce à l'hypothèse (**P**)); pour chaque idéal premier $\mathfrak{P}$ de hauteur ht($\mathfrak{P}$) égale à 1 dans $\widetilde{\mathrm{R}}$, notons $\mathbf{W}_\mathfrak{P} = \mathrm{Fract}(\widetilde{\mathrm{R}}_\mathfrak{P})/\widetilde{\mathrm{R}}_\mathfrak{P}$ l'enveloppe injective du corps résiduel de l'anneau de valuation discrète $\widetilde{\mathrm{R}}_\mathfrak{P}$. C'est un $\widetilde{\mathrm{R}}_\mathfrak{P}$-module injectif. Posons

$$\mathbf{W} = \bigoplus\nolimits_{\mathrm{ht}(\mathfrak{P})=1} \mathbf{W}_\mathfrak{P};$$

Ce module est un $\widetilde{\mathrm{R}}$-module injectif.

Lemme **28**. — *Pour tout* $\widetilde{\mathrm{R}}$*-module* X *de torsion, les modules* X *et* $\mathrm{X}^* = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{R}}}(\mathrm{X}, \mathbf{W})$ *ont même série caractéristique (éventuellement au sens large du* § 7*).*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de hauteur 1 de $\widetilde{\mathrm{R}}$; on a

$$\mathrm{X}^*_\mathfrak{P} = \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathbf{W})_\mathfrak{P} = \mathrm{Hom}(\mathrm{X}_\mathfrak{P}, \mathbf{W}_\mathfrak{P}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{X}_\mathfrak{P}, \mathrm{Fract}(\widetilde{\mathrm{R}}_\mathfrak{P})/\widetilde{\mathrm{R}}_\mathfrak{P}).$$

On voit par récurrence sur la longueur $m < \infty$ d'une suite de composition sur $\widetilde{\mathrm{R}}_\mathfrak{P}$ du localisé $\mathrm{X}_\mathfrak{P}$ de X en $\mathfrak{P}$ que $\mathrm{X}^*_\mathfrak{P}$ admet une suite de même longueur. Enfin, si $\mathrm{X}_\mathfrak{P}$ est de longueur infinie, il en va de même pour X^*. Ceci prouve que les coefficients de $[\mathfrak{P}]$ dans F_X et $\mathrm{F}_{\mathrm{X}^*}$ sont égaux pour tout $\mathfrak{P}$. □

D'autre part, on peut munir **W** d'une structure naturelle de R^o-module en composant les homomorphismes canoniques

$$\mathrm{R}^o \to \mathrm{R} \to \widetilde{\mathrm{R}}.$$

Le module d'Iwasawa qui va nous intéresser est alors :

$$\mathscr{X} = \mathrm{H}(\mathbf{W}). \tag{8.1}$$

Ce $\widetilde{\mathrm{R}}$-module est de torsion par définition mais n'est pas forcément de type fini. Il a néanmoins une série caractéristique $\mathrm{F}_\mathscr{X}$ au sens large. Nous allons montrer au paragraphe suivant que $\mathrm{F}_\mathscr{X}$ est divisible par une série « analytique ».

9. Le théorème de divisibilité

Considérons le $\widetilde{\mathrm{R}}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}^o}(\Omega_{\mathrm{R}^o/\Lambda}, \mathbf{W})$, l'action de $\widetilde{\mathrm{R}}$ provenant de celle de **W**. On a un isomorphisme canonique $\widetilde{\mathrm{R}}$-linéaire

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}^o}(\Omega_{\mathrm{R}^o/\Lambda}, \mathbf{W}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\Omega_{\mathrm{R}^o/\Lambda} \otimes_{\mathrm{R}^o} \mathrm{R}, \mathbf{W}) \simeq \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathrm{R}}}(\Omega_{\widetilde{\mathrm{R}}/\Lambda} \otimes_{\mathrm{R}^o} \widetilde{\mathrm{R}}, \mathbf{W}),$$

ce dernier isomorphisme venant de ce que $\widetilde{\mathrm{R}}/\mathrm{R}$ est de Λ-torsion alors que **W** est Λ-divisible.

Utilisant d'autre part la deuxième suite exacte fondamentale des différentielles de Kähler, on déduit de la surjection canonique $\varphi : \mathrm{R}^o \to \mathrm{R}$ une surjection de R-modules

$\Omega_{R^o/\Lambda} \otimes R \to \Omega_{R/\Lambda}$ et une surjection de $\tilde{R}$-modules $\Omega_{R^o/\Lambda} \otimes \tilde{R} \to \Omega_{R/\Lambda} \otimes \tilde{R}$. Cette surjection est d'importance pour notre propos car elle envoie un module sur lequel nous ne savons presque rien (il est de type fini sur $\tilde{R}$, mais nous ignorons s'il est de torsion car nous ne savons pas si R^o est finie sur Λ) sur un $\tilde{R}$-module connu par la théorie de Hida; en particulier, le module

$$\mathscr{Y} = \Omega_{R/\Lambda} \otimes \tilde{R} \tag{9.1}$$

est de $\tilde{R}$-torsion (on sait déjà qu'il est de type fini). Il admet une série caractéristique $F_{\mathscr{Y}}$ au sens strict du § 7. Or, d'après la proposition 20, le module $\mathscr{X}$ est $\tilde{R}$-isomorphe à $\mathrm{Hom}_{R^o}(\Omega_{R^o/\Lambda}, \mathbf{W})$, on tire donc des considérations qui précèdent qu'il y a une injection $\tilde{R}$-linéaire $\mathscr{Y}^* \subset \mathscr{X}$. Utilisant alors l'injectivité du $\tilde{R}$-module $\mathbf{W}$, on trouve, en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\tilde{R}}(-, \mathbf{W})$ à cette injection, une surjection $\tilde{R}$-linéaire $\mathscr{X}^* \to \mathscr{Y}$. On applique la remarque 22 pour conclure que $F_{\mathscr{Y}}$ divise $F_{\mathscr{X}^*}$, puis, grâce à la proposition 28, on a $F_{\mathscr{X}^*} = F_{\mathscr{X}}$. En rapprochant ces deux remarques, on obtient le théorème principal de ce travail.

Théorème **29**. — *La série caractéristique (au sens large)* $F_{\mathscr{X}}$ *du module d'Iwasawa* $\mathscr{X}$ *est divisible par la série caractéristique (au sens strict)* $F_{\mathscr{Y}}$ *du module des différentielles de Kähler* $\Omega_{R/\Lambda} \otimes \tilde{R}$.

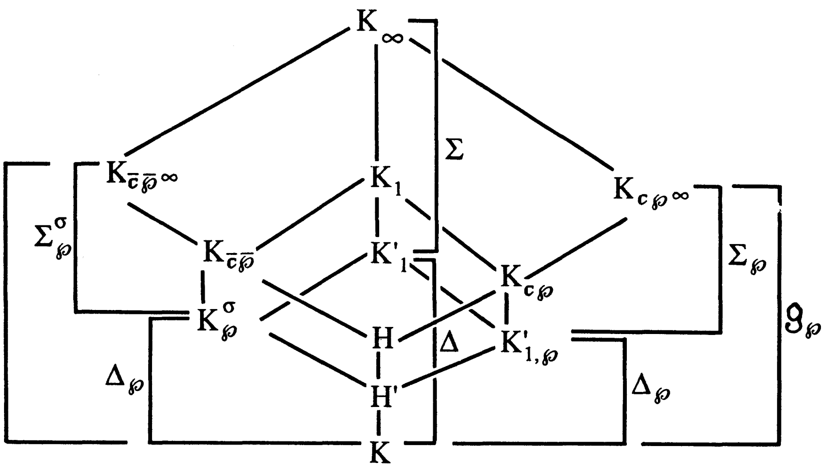
Dans les deux paragraphes suivants, nous allons appliquer ce résultat à la théorie d'Iwasawa d'un corps quadratique imaginaire en interprétant le module (9.1) comme un module d'Iwasawa classique dans le cas « C.M. » d'une composante R « admettant de la multiplication complexe ». Dans le dernier paragraphe nous expliquerons brièvement, dans le cas « C.M. », le lien de $F_{\mathscr{Y}}$ avec la fonction L p-adique de Katz-Yager (voir le Th. 35 du § 11). Il est à prévoir que dans le cas d'une forme modulaire elliptique f « sans multiplication complexe », le module (9.1) doit être interprété comme un groupe de Selmer de la courbe de Weil correspondant à f. Ce point mériterait évidemment d'être développé.

10. Interprétation du module exotique dans le cas d'une composante de type C.M. de l'algèbre de Hecke

Soit K un corps quadratique imaginaire d'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de discriminant $-$ D. Nous fixons un plongement de K dans le corps des nombres algébriques complexes et nous notons σ l'automorphisme de conjugaison complexe de $\mathbf{C}$, $z \mapsto \bar{z}$. Soit $\mathfrak{c}$ un idéal de $\mathcal{O}$ premier à son conjugué complexe. Soit $C = \mathrm{Norme}(\mathfrak{c})$. Désormais, l'entier auxiliaire N fixé depuis le § 1 sera pris égal à C.D. Soit p un nombre premier ne divisant pas $6N\varphi(N)$ et qui se décompose dans K en deux facteurs premiers $\mathfrak{p}$ et $\bar{\mathfrak{p}}$. On suppose qu'il existe un caractère de Hecke λ de K de type $(\nu, 0)$ et de conducteur $\mathfrak{c}$, i.e. $\lambda((\alpha)) = \alpha^\nu$ si $\alpha \equiv 1 \bmod . \mathfrak{c}$. Rassemblons pour plus de clarté les hypothèses sous lesquelles nous travaillerons dans ces deux derniers paragraphes (jusqu'au Théorème 33 exclusivement) :

$(\mathscr{H})$
(i) $\mathfrak{c}$ est premier à son conjugué,
(ii) p est décomposé dans K et ne divise pas $6N\varphi(N)$,
(iii) le type ν n'est pas divisible par $p-1$.

Soit H le corps de Hilbert de K. Pour chaque entier $r \geqslant 1$, considérons le corps de rayons K_r de conducteur $\mathfrak{C}p^r$ de K (resp. $K_{\mathfrak{c}\mathfrak{p}^r}$, $K_{\mathfrak{c}\mathfrak{p}^r}$ de conducteur $\mathfrak{c}\mathfrak{p}^r$, $\mathfrak{c}\mathfrak{p}^r$); soit $K_\infty = \bigcup K_r$ (resp. $K_{\mathfrak{c}\mathfrak{p}\infty} = \bigcup K_{\mathfrak{c}\mathfrak{p}^r}$ et $K_{\bar{\mathfrak{c}}\bar{\mathfrak{p}}\infty} = \bigcup K_{\bar{\mathfrak{c}}\bar{\mathfrak{p}}^r}$). Soit M la p-extension abélienne maximale de K_∞ non ramifiée hors de $\mathfrak{p}$. Notons X le groupe de Galois de M/K_∞. Le groupe $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ opère sur X par conjugaison, ce qui permet de munir X d'une structure de module sur l'algèbre complétée $\mathbf{Z}_p[[\mathscr{G}]]$. Pour toute extension E/F de groupe de Galois G, on pose $G^\sigma = \sigma . G . \sigma^{-1} = \mathrm{Gal}(E^\sigma/F^\sigma)$. On peut décomposer le groupe abélien profini $\mathscr{G}$, resp. $\mathscr{G}_\mathfrak{p} = \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{c}\mathfrak{p}\infty}/K)$, $\mathscr{G}_\mathfrak{p}^\sigma = \mathrm{Gal}(K_{\bar{\mathfrak{c}}\bar{\mathfrak{p}}\infty}/K)$, en produit $\Sigma \times \Delta$, resp. $\Sigma_\mathfrak{p} \times \Delta_\mathfrak{p}$, $\Sigma_\mathfrak{p}^\sigma \times \Delta_\mathfrak{p}^\sigma$ où Σ, resp. $\Sigma_\mathfrak{p}$, $\Sigma_\mathfrak{p}^\sigma$ est libre de rang 2, resp. de rang 1, sur $\mathbf{Z}_p$, et fixe un sous-corps K'_1 de K_1, resp. $K'_{1,\mathfrak{p}}$ de $K_{\mathfrak{c}\mathfrak{p}}$, resp. $K'^{\sigma}_{1,\mathfrak{p}}$ de $K_{\bar{\mathfrak{c}}\bar{\mathfrak{p}}}$, et où Δ, resp. $\Delta_\mathfrak{p}$, $\Delta_\mathfrak{p}^\sigma$ est fini et s'identifie par restriction à $\mathrm{Gal}(K'_1/K)$, resp. à $\mathrm{Gal}(K'_{1,\mathfrak{p}}/K)$, resp. à $\mathrm{Gal}(K'^{\sigma}_{1,\mathfrak{p}}/K)$. On résume sur le diagramme suivant les corps et groupes de Galois utiles pour la suite de notre étude (§ 10 et § 11).



Légende. — On a

$$[K_1 : K'_1] = [K_{\mathfrak{c}\mathfrak{p}} : K_{1,\mathfrak{p}}] = [K^\sigma_{\mathfrak{c}\mathfrak{p}} : K'^{\sigma}_{1,\mathfrak{p}}] = [H : H'];$$

on notera p^d ce degré commun. Il faut prendre garde que les corps au sommet des losanges du diagramme sont des *extensions* (de degré divisant 6) des composés des corps de part et d'autre. Néanmoins, comme $p \neq 2, 3$, l'application naturelle $\mathscr{G} \to \mathscr{G}_\mathfrak{p} \times \mathscr{G}_\mathfrak{p}^\sigma$ induit une suite exacte :

$$0 \to \Sigma \to \Sigma_\mathfrak{p} \times \Sigma_\mathfrak{p}^\sigma \to \mathrm{Gal}(H/H') \to 0.$$

D'autre part, le groupe Δ opère sur X.

Fixons une fois pour toutes un plongement de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, ce qui détermine une place $\mathfrak{P}$ de $\overline{\mathbf{Q}}$; nous choisissons ce plongement de sorte que $\mathfrak{P} \cap \mathrm{K} = \mathfrak{p}$. Au caractère de Hecke λ de type $(\nu, 0)$, on peut, suivant Weil [30], associer un caractère galoisien p-adique

$$\lambda_{\mathfrak{P}} : \mathcal{G} \to \overline{\mathbf{Q}}^{\times}$$

tel que pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}$ premier à p, on ait $\lambda_{\mathfrak{P}}((\mathfrak{a}, \mathrm{K}_\infty/\mathrm{K})) = \lambda(\mathfrak{a})$. Notons que $\lambda_{\mathfrak{P}}$ se factorise à travers $\mathcal{G}_{\mathfrak{P}}$.

Soit $\chi : \Delta \to \overline{\mathbf{Q}}_p^{\times}$ le caractère p-adique de Δ donné pour tout δ de Δ par

$$\chi(\delta) = \lambda_{\mathfrak{P}}(\delta)/\lambda_{\mathfrak{P}}(\sigma\,\delta\sigma).$$

On note $\mathcal{O}_\chi$ la sous-$\mathbf{Z}_p$-algèbre de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ engendrée par les valeurs de χ et $\mathrm{X}^{(\chi)}$, la χ-partie de X, définie par $\mathrm{X}^{(\chi)} = \mathrm{X} \otimes_{\mathbf{Z}_p[\Delta]} \mathcal{O}_\chi$.

D'autre part, considérons la série en $q = e^{2i\pi z}$

(10.1) $$f_\lambda(z) = \Sigma\lambda(\mathfrak{a})\, q^{\mathrm{Norme}(\mathfrak{a})},$$

la somme étant étendue aux idéaux de $\mathcal{O}$ premiers à $\mathfrak{c}$. Soit également

(10.2) $$f_\lambda^0(z) = f_\lambda(z) - \lambda(\mathfrak{p})\,.f_\lambda(pz).$$

D'après un théorème de Hecke-Shimura bien connu, la série f_λ (resp. f_λ^0) définit une forme modulaire primitive de niveau N (resp. de niveau Np mais de conducteur N) et de poids $\nu + 1$. On déduit de l'hypothèse $(\mathfrak{c}, \bar{\mathfrak{c}}) = 1$ que le Nebentypus ψ de f_λ (égal à celui de f_λ^0) est de conducteur N exactement. En outre, la forme f_λ^0 est ordinaire en $\mathfrak{P}$ car $\lambda(\bar{\mathfrak{p}}) \not\equiv 0 \bmod.\mathfrak{P}$.

Rappelons que l'on peut voir f_λ^0 comme la réduction de type $(\mathrm{N}p, \nu + 1, \psi)$ d'une forme Λ-adique « ordinaire primitive » au sens du corollaire 3.7 de [7]. Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}$ premier à $\mathfrak{p}$, notons $[\mathfrak{a}]$ la projection dans $\Sigma_{\mathfrak{p}}$ de $(\mathfrak{a}, \mathrm{K}_{\mathfrak{c}\mathfrak{p}\infty}/\mathrm{K})$. On fixe dans tout ce qui suit un caractère de Hecke φ de K de type $(1, 0)$ de conducteur $\mathfrak{p}$, tel que $\varphi(\mathfrak{a}) \equiv 1 \bmod.\mathfrak{P}$ pour tout $\mathfrak{a}$ premier à $\mathfrak{p}$. La forme Λ-adique en question f qui interpole f_λ^0 en niveau Np et poids $\nu + 1$ sera pour nous

$$f = \Sigma_{(\mathfrak{a},\mathfrak{p})=1}\, \lambda\varphi^{-\nu+1}(\mathfrak{a})\,.\,[\mathfrak{a}]\,.\,q^{\mathrm{N}\mathfrak{a}}.$$

Soit L un sous-corps de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$ contenant les valeurs de λ et de φ; soit $\mathcal{O}_{\mathrm{L}}$ (resp. κ) son anneau des entiers (resp. son corps résiduel). Les coefficients de f sont dans l'algèbre (complétée) $\mathcal{O}_{\mathrm{L}}[[\Sigma_{\mathfrak{p}}]]$ du groupe $\Sigma_{\mathfrak{p}}$ sur $\mathcal{O}_{\mathrm{L}}$. La composante R de h_∞^{ord} associée à f est définie comme l'unique anneau local facteur direct de h_∞^{ord} à travers lequel se factorise le caractère

$$\pi : h_\infty^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{O}_{\mathrm{L}}[[\Sigma_{\mathfrak{p}}]], \qquad \mathrm{T}(n) \mapsto (f \mid \mathrm{T}(n))/f.$$

Nous choisissons désormais comme générateur de $\Sigma_{\mathfrak{p}}$ l'élément s de $\Sigma_{\mathfrak{p}}$ tel que $s^{p^d} = 1 + \mathrm{C}p$; par ce choix, on peut identifier $\mathcal{O}_{\mathrm{L}}[[\Sigma_{\mathfrak{p}}]]$ avec l'anneau $\Lambda_{\mathrm{L}} = \mathcal{O}_{\mathrm{L}}[[\mathrm{U}]]$ des séries formelles à une variable à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathrm{L}}$; cet anneau est factoriel. L'application π est Λ-linéaire lorsqu'on munit Λ_L de la structure de Λ-module $1 + T \mapsto [1 + Cp] = (1 + U)^{p^d}$. Nous vérifions alors que les hypothèses $\mathscr{H}$ entraînent que la composante R « de type C.M.» définie ci-dessus satisfait les conditions (**R**) et ($\mathbf{P}_{\bar\rho}$) sous lesquelles le théorème 29 a été démontré.

Proposition **30.** — *La représentation* $\bar\rho : G_{\mathbf{Q}} \to GL_2(\kappa)$ *associée à la composante locale* R *est l'induite de* G_K *à* $G_{\mathbf{Q}}$ *du caractère* $\lambda_{\mathfrak{P}}$ mod. $\mathfrak{P}$. *La représentation* $\bar\rho$ *satisfait* (**R**) *et* ($\mathbf{P}_{\bar\rho}$), *donc aussi* (**P**).

Démonstration. — La représentation $\bar\rho$ est donnée par la réduction mod. $\mathfrak{P}$ de la représentation galoisienne associée à f_λ. Cette représentation a même polynôme caractéristique que l'induite de K à $\mathbf{Q}$ de $\lambda_{\mathfrak{P}}$ mod. $\mathfrak{P}$; on en déduit par le théorème de Brauer-Nesbitt que ces représentations sont isomorphes. Soit $\lambda_{\mathfrak{P}} \circ \sigma : g \mapsto \lambda_{\mathfrak{P}}(\sigma g \sigma)$ le composé de $\lambda_{\mathfrak{P}}$ et de la conjugaison complexe σ opérant par conjugaison sur G_K; comme nous supposons que p ne divise pas $6N\varphi(N)$, et que $\nu \not\equiv 0 \bmod. p - 1$, on a $\lambda_{\mathfrak{P}} \not\equiv \lambda_{\mathfrak{P}} \circ \sigma$ mod. $\mathfrak{P}$ et donc la représentation $\bar\rho$ est irréductible. En outre, dét $\bar\rho\,|_{G_K} \equiv \lambda_{\mathfrak{P}}$ mod. $\mathfrak{P}$ donc ce caractère abélien est ramifié en $\mathfrak{p}$. Notons que dét $\bar\rho = \chi_{-D} \otimes \mu$, où χ_{-D} est le caractère de $K/\mathbf{Q}$ et μ est un caractère de conducteur premier à D; le caractère abélien est donc de conducteur modéré divisible par D. La condition ($\mathbf{P}_{\bar\rho}$) est satisfaite. □

Remarque. — Notons que le corps $\mathbf{Q}(\bar\rho)$ contient K et on a $\mathbf{Q}(\bar\rho) = K(\tilde\lambda_{\mathfrak{P}} \oplus \tilde\lambda_{\mathfrak{P}} \circ \sigma)$.

Comme $\bar\rho$ est absolument irréductible, on tire du théorème 7 que la composante R est de Gorenstein et qu'on a une représentation coordinaire ρ à valeurs dans $GL_2(R)$ satisfaisant les conditions (i) à (iv) du § 3. On peut donc considérer le $\tilde{R}$-module

$$\mathscr{X} = H(\mathbf{W}),$$

et on sait, d'après le théorème 29, que sa série caractéristique est divisible par celle de $\Omega_{R/\Lambda} \otimes \tilde{R}$. Observons que le caractère $\pi : R \to \Lambda_L$ possède un unique prolongement $\tilde\pi$ à $\tilde{R}$ (sa normalisation) car Λ_L est intégralement clos.

On prend maintenant les « π-parties » des $\tilde{R}$-modules ci-dessus; il s'agit de

$$\textbf{(10.2)} \qquad \begin{cases} \mathbf{W}_\pi = \mathbf{W} \otimes_{\tilde{R}} \Lambda_L, \\ \mathscr{X}_\pi = H(\mathbf{W}) \otimes_{\tilde{R}} \Lambda_L = H^1_0(\Pi, \Phi, \mathscr{N}_{\mathbf{W}_\pi}), \\ \mathscr{Y}_\pi = \Omega_{R/\Lambda} \otimes_R \Lambda_L. \end{cases}$$

Soient $F_\pi(U)$ et $G_\pi(U)$ les séries caractéristiques des Λ_L-modules $\mathscr{X}_\pi$ et $\mathscr{Y}_\pi$. Par le théorème 29, nous savons que $G_\pi(U)$ divise $F_\pi(U)$. Nous allons maintenant étudier $\mathscr{X}_\pi$ en utilisant plusieurs fois la suite d'inflation-restriction. Nous montrerons ainsi qu'il y a une injection Λ_L-linéaire naturelle de $\mathscr{X}_\pi$ dans le Λ_L-module

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(X, \mathbf{W}_\pi(\alpha)) \oplus \mathrm{Hom}(\mathrm{Cl}_K, \mathbf{W}_\pi),$$

où X est le $\mathbf{Z}_p[\mathscr{G}]$-module défini ci-dessus, $\mathbf{W}_\pi(\alpha)$ est le $\Lambda_L[G_K]$-module obtenu par « torsion » de $\mathbf{W}_\pi$ par un caractère α et Cl_K est le groupe des classes de K — voir proposition 32 ci-dessous. Cette injection de modules fournira la divisibilité des séries caractéristiques au théorème 34.

Pour toute extension $E/\mathbf{Q}$ non ramifiée hors de S, on définit Π_E comme le sous-groupe de Π fixant E. Nous prendrons successivement $E = K$ puis $E = K_\infty$. Dans la suite de ce paragraphe, nous poserons pour abréger $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{W_\pi}$; ce Λ_L-module est muni de sa filtration naturelle (voir définition 20). On voit facilement (prop. 5.8 de [23]) que la représentation ρ_π obtenue en tensorisant par $\pi : R \to \Lambda_L$ la représentation ρ construite au théorème 9 n'est autre que la représentation induite de G_K à $G_\mathbf{Q}$ d'un caractère $\Theta : G_K \to \Lambda_L^\times$. Rappelons la définition de Θ. Soit $\gamma \to [\gamma]$ la projection de $\mathcal{G}_\mathfrak{P}$ sur $\Sigma_\mathfrak{P}$; alors, pour $g \in G_K$,

$$\Theta(g) = (\lambda_\mathfrak{P} . \varphi_\mathfrak{P}^{1-\nu}) (\gamma) . [\gamma] \in \Lambda_L^\times \tag{10.3}$$

où γ est la restriction de g à $K_{\mathfrak{c}\mathfrak{p}^\infty}$.

Soit W le module de la représentation ρ. Il est libre de rang 2 sur R. Pour tout caractère $\xi : G_K \to \Lambda_L^\times$, soit $\Lambda_L(\xi)$ le Λ_L-module libre de rang 1 sur lequel G_K opère par le caractère ξ. On voit que la base (e_1, e_2) fixée dans la notation 12 peut être prise telle que

$$W \otimes_R \Lambda_L = \Lambda_L(\Theta)\, e_1 \oplus \Lambda_L(\Theta \circ \sigma)\, e_2 \tag{10.4}$$

avec $\Theta \neq \Theta \circ \sigma$ sur G_K.

On utilise les notations du § 6 concernant les groupes de cohomologie (co-)ordinaire. En outre, on définit de la même façon que dans les notations 24, (ii), § 6, le groupe de cohomologie (co-)ordinaire $H^1_o(\Pi_K, \Phi, \mathcal{N})$, en considérant cette fois les groupes d'inertie $I \subset \Pi_K$ aux places au-dessus de $\mathfrak{p}$. Noter que $\Phi \subset \Pi_K$, ce qui donne du sens à cette définition.

Fait. — La restriction induit un isomorphisme

$$\mathcal{X}_\pi = H^1_o(\Pi, \Phi, \mathcal{N}) \simeq H^1_o(\Pi_K, \Phi, \mathcal{N})^{\langle 1, \sigma \rangle}. \tag{10.5}$$

Démonstration. — On montre d'abord que la restriction induit un isomorphisme $H^1(\Pi, \mathcal{N}) \simeq H^1(\Pi_K, \mathcal{N})^{\langle 1, \sigma \rangle}$. Soit $\mathcal{N}^{\Pi_K}$ le module des Π_K-invariants de $\mathcal{N}$. En vertu de la suite d'inflation-restriction, il suffit de montrer que $H^i(\langle 1, \sigma \rangle, \mathcal{N}^{\Pi_K}) = 0$ pour $i = 1, 2$. On remarque pour cela que ces groupes sont des Λ_L-modules annulés par la multiplication par 2 et que 2 est inversible dans Λ_L. Le résultat s'ensuit. Le passage à la cohomologie (co-)ordinaire est évident. □

On voit d'autre part que l'action de Π_K sur $\mathcal{N}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & (\Theta/\Theta \circ \sigma) . b \\ (\Theta \circ \sigma/\Theta) . c & -a \end{pmatrix}.$$

Introduisons le caractère $\alpha = \Theta/\Theta \circ \sigma : \Pi_K \to \Lambda_L^\times$. On peut décomposer le Π_K-module $\mathcal{N}$ en

$$\mathcal{N} \simeq \mathbf{W}_\pi \oplus \mathbf{W}_\pi(\alpha) \oplus \mathbf{W}_\pi(\alpha^{-1}) \tag{10.6}$$

par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

La première copie de $\mathbf{W}_\pi$ est stable par Π, l'action étant donnée par le caractère $\chi_{\mathrm{K}/\mathbf{Q}}$ de $\mathrm{K}/\mathbf{Q}$. L'action de la conjugaison complexe échange les deux dernières copies de $\mathbf{W}_\pi$.

Notons Cl_K le groupe des classes de K.

Fait. — *La décomposition* (10.6) *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^1_o(\Pi_\mathrm{K}, \Phi, \mathcal{N})^{\langle 1, \sigma\rangle} \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Cl}_\mathrm{K}, \mathbf{W}_\pi) \oplus \mathrm{H}^1_o(\Pi_\mathrm{K}, \Phi, \mathbf{W}_\pi(\alpha)).$$

Démonstration. — Soit $\Pi^{\mathrm{ab}}_\mathrm{K}$ l'abélianisé de Π_K. Il est d'abord évident que

$$\mathrm{H}^1(\Pi_\mathrm{K}, \mathcal{N})^{\langle 1, \sigma\rangle} \simeq \mathrm{Hom}_{\langle 1, \sigma\rangle}(\Pi^{\mathrm{ab}}_\mathrm{K}, \mathbf{W}_\pi(\chi_{\mathrm{K}/\mathbf{Q}})) \oplus \mathrm{H}^1(\Pi_\mathrm{K}, \mathbf{W}_\pi(\alpha)).$$

La condition d'ordinarité sur le premier facteur de la somme n'autorise que des homomorphismes triviaux sur les groupes d'inertie aux places au-dessus de $\mathfrak{p}$ *donc* en toutes les places au-dessus de p car ces homomorphismes sont σ-équivariants. Les homomorphismes en question se factorisent donc à travers Cl_K. La décomposition est alors évidente. Notons seulement que le second facteur de la somme doit être considéré comme sous-module de

$$\mathrm{H}^1_o(\Pi_\mathrm{K}, \Phi, \mathbf{W}_\pi(\alpha)) \oplus \mathrm{H}^1_o(\Pi_\mathrm{K}, \Phi, \mathbf{W}_\pi(\alpha^{-1}))$$

via l'application envoyant le cocycle $u \in \mathrm{Z}^1(\Pi_\mathrm{K}, \mathbf{W}_\pi(\alpha))$ sur le cocycle $\mathrm{U} \in \mathrm{Z}^1\left(\Pi_\mathrm{K}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}\right)$ donné par

$$\mathrm{U}(g) = \begin{pmatrix} 0 & u(g) \\ u(\sigma g \sigma) & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Il reste alors à étudier $\mathrm{H}^1_o(\Pi_\mathrm{K}, \Phi, \mathbf{W}_\pi(\alpha))$. On procède encore par inflation-restriction. On a la suite exacte

$$\text{(10.7)} \qquad 0 \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}, \mathbf{W}_\pi(\alpha)) \to \mathrm{H}^1(\Pi_\mathrm{K}, \mathbf{W}_\pi(\alpha)) \to \mathrm{H}^1(\Pi_{\mathrm{K}_\infty}, \mathbf{W}_\pi(\alpha))^{\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K})}.$$

Par définition de α, Π_{K_∞} opère trivialement sur $\mathbf{W}_\pi(\alpha)$ et donc

$$\mathrm{H}^1(\Pi_{\mathrm{K}_\infty}, \mathbf{W}_\pi(\alpha))^{\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K})} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K})}(\Pi_{\mathrm{K}_\infty}, \mathbf{W}_\pi(\alpha)).$$

Lemme **31.** — *On a* $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}, \mathbf{W}_\pi(\alpha)) = 0$.

Démonstration. — Soit $\mathrm{K}(\alpha)$ le corps du noyau de α. Le groupe de Galois $\mathcal{G}_\alpha$ de $\mathrm{K}(\alpha)$ sur K est donc procyclique. Soit $\mathcal{G}' = \mathrm{Ker}\,\alpha$. On utilise à nouveau la suite d'inflation-restriction

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_\alpha, \mathbf{W}_\pi(\alpha)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}, \mathbf{W}_\pi(\alpha)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_\alpha}(\mathcal{G}', \mathbf{W}_\pi(\alpha)).$$

Comme $\mathcal{G}_\alpha$ opère trivialement sur $\mathcal{G}'$ mais que α n'est pas congru à 1 modulo l'idéal maximal de Λ_L, le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_\alpha}(\mathcal{G}', \mathbf{W}_\pi(\alpha))$ est nul. On montre alors que

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_\alpha, \mathbf{W}_\pi(\alpha)) = 0.$$

Fixons un générateur topologique γ de $\mathscr{G}_\alpha$. Soit z un 1-cocycle $\mathscr{G}_\alpha \to \mathbf{W}_\pi(\alpha)$. Il faut trouver x dans $\mathbf{W}_\pi(\alpha)$ tel que $z(\gamma) = \gamma(x) - x$. Comme $\alpha(\gamma)$ n'est pas congru à 1 modulo l'idéal maximal de Λ_L (puisqu'on a supposé ν non divisible par $p - 1$), on voit que $\alpha(\gamma) - 1$ est une unité de $\Lambda_L^\times$ et un tel x existe. $\square$

On peut alors démontrer la

Proposition **32.** — *Il y a un homomorphisme Λ_L-linéaire injectif*

$$\mathscr{X}_\pi \subset \mathrm{Hom}(\mathrm{Cl}_\mathbf{K}, \mathbf{W}_\pi) \oplus \mathrm{Hom}_\mathscr{G}(\mathrm{X}, \mathbf{W}_\pi(\alpha)).$$

Démonstration. — En vertu de la suite exacte (10.7), la restriction de $\Pi_\mathbf{K}$ à $\Pi_{\mathbf{K}_\infty}$ fournit une injection Λ_L-linéaire de $\mathrm{H}^1(\Pi_\mathbf{K}, \mathbf{W}_\pi(\alpha))$ dans $\mathrm{Hom}_\mathscr{G}(\Pi_{\mathbf{K}_\infty}, \mathbf{W}_\pi(\alpha))$. Si u est un cocycle représentant une classe (co-)ordinaire, il reste à traduire la condition d'ordinarité sur sa restriction. Soit U le cocycle associé à u :

$$\mathrm{U}(g) = \begin{pmatrix} 0 & u(g) \\ u(\sigma g \sigma) & 0 \end{pmatrix}.$$

La condition que la restriction de U est ordinaire dit que l'image de l'inertie I_∞ dans $\Pi_{\mathbf{K}_\infty}$ en une place au-dessus de $\mathfrak{p}$ est contenue dans $\mathrm{F}^1\mathscr{N}$, c'est-à-dire est constituée de matrices nilpotentes supérieures. Autrement dit, $u(\sigma \mathrm{I}_\infty \sigma) = 0$. C'est-à-dire que la restriction de u à $\Pi_{\mathbf{K}_\infty}$ est non ramifiée hors des places de K_∞ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Ceci signifie que u se factorise à travers X. $\square$

11. Une conséquence de la conjecture principale anticyclotomique

Nous conservons dans ce paragraphe les notations et les hypothèses du § 10. On peut voir K_∞ comme composé de l'extension p-cyclotomique $\mathrm{K}(\zeta_{p^\infty})$ et de l'extension K_∞^-, composée de K_1 et de la $\mathbf{Z}_p$-extension anticyclotomique $\mathbf{K}_\infty^-$ de K (i.e. galoisienne diédrale sur $\mathbf{Q}$). En posant $\mathscr{G}^- = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty^-/\mathrm{K})$, on a un dévissage canonique

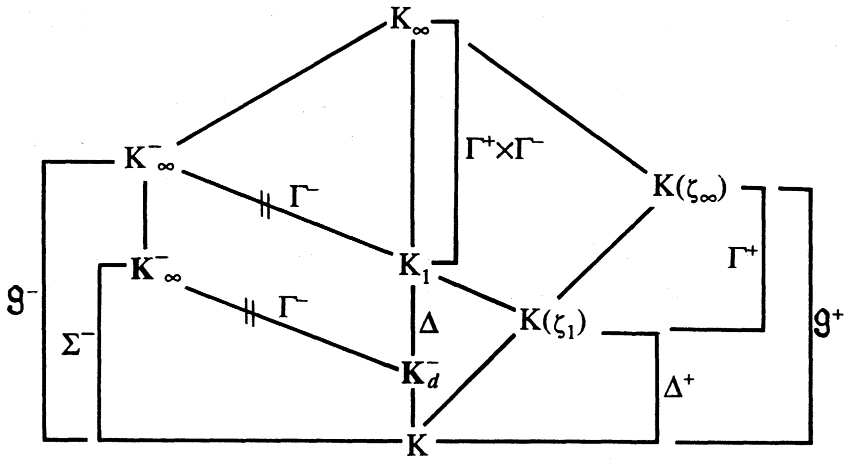
$$1 \to \Gamma^- \to \mathscr{G}^- \to \mathscr{G}_1 \to 1,$$

où $\mathscr{G}_1 = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_1/\mathrm{K})$ et $\Gamma^- = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty^-/\mathrm{K}_1)$. Cette suite ne possède pas de scindage canonique mais le groupe $\Sigma^- = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_\infty^-/\mathrm{K})$ se relève en un sous-groupe de $\mathscr{G}^-$, contenant Γ^- avec l'indice p^d, et fournit un scindage $\mathscr{G}^- = \Sigma^- \times \Delta^-$. Rappelons que nous avons fixé au § 10 un générateur topologique s de $\Sigma_\mathfrak{p}$; nous prenons pour générateur du sous-groupe Σ^- de $\mathscr{G}^-$ l'image de l'élément $s^- = \sqrt{(s/s^\sigma)}$ de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{G}^-$.

On vérifie facilement que le noyau du caractère $\alpha = \Theta/\Theta^\sigma$ restreint à Σ est engendré par $(ss^\sigma)^{p^d}$; nous notons ce groupe Γ^+ car il s'identifie à l'espace propre de valeur propre $+1$ de la conjugaison complexe opérant sur Σ. On a

$$\Sigma \simeq \Sigma^- \times \Gamma^+. \tag{11.1}$$

Nous rassemblons ces données sur la figure ci-contre.



Légende. — Les corps aux sommets de part et d'autre des losanges sont disjoints sur le corps situé à la pointe inférieure et ont exactement pour composé le corps à la pointe supérieure du losange. On note K_r^- le r-ième corps de la $\mathbf{Z}_p$-extension anticyclotomique de K; on a $K_\infty^- \cap K_1 = K_d^-$, où $p^d = (\Sigma^- : \Gamma^-)$.

Soient $M(K_\infty^-)$ la p-extension abélienne maximale non ramifiée hors de $\mathfrak{p}$ de K_∞^-, et $X(K_\infty^-)$ le groupe de Galois de $M(K_\infty^-)/K_\infty^-$. Il est clair que $X(K_\infty^-)$ est un $\mathcal{G}^-$-module compact, et en particulier aussi un Σ^--module.

Nous allons comparer les modules $X(K_\infty^-)$, $X/I_{\Gamma^+} X$, et $\mathcal{X}_\pi$.

Lemme **33.** — *Sous les hypothèses* $(\mathcal{H})$, *et en particulier sous l'hypothèse que* $\chi \neq 1$, *les* Σ^-*-modules* $X(K_\infty^-)^{(\chi)}$ *et* $(X/I_{\Gamma^+} X)^{(\chi)}$ *sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. — Considérons l'homomorphisme de restriction de X vers $X(K_\infty^-)$. Il est équivariant pour l'action de $\mathcal{G}$, en convenant que $\mathcal{G}$ opère sur $\mathcal{G}^-$ via l'homomorphisme de restriction $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^-$. Comme Γ^+ est égal au noyau de $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^-$, on voit que la partie abélienne maximale de M/K_∞^- n'est autre que $M(K_\infty^-)/K_\infty^-$, et on a une suite exacte de $\mathcal{G}^-$-modules

$$1 \to X/I_{\Gamma^+} X \to X(K_\infty^-) \to \Gamma^+ \to 1. \tag{11.2}$$

Par ailleurs, le caractère α restreint à la non-p-partie de $\mathcal{G}$ se factorise à travers la non-p-partie de $\mathcal{G}^-$ et coïncide sur ce groupe avec χ. Prenons la χ-partie des modules de la suite (11.2). On obtient un isomorphisme Σ^--linéaire

$$(X/I_{\Gamma^+} X)^{(\chi)} \simeq X(K_\infty^-)^{(\chi)}. \quad \square$$

Nous identifions alors $\mathcal{O}_L[[\Sigma^-]]$ et l'algèbre $\Lambda_L = \mathcal{O}_L[[U]]$ des séries formelles sur $\mathcal{O}_L$ par $s^- \left(= \sqrt{(s/s^\sigma)}\right) \mapsto 1 + U$. On a $\alpha(s^-) = \varphi_\mathfrak{P}(s)\,(1 + U)$; on est donc amené à définir une action tordue de Λ_L sur $X(K_\infty^-)^{(\chi)}$ par

$$(1 + U) \times x = w.(1 + U).x, \tag{11.3}$$

où l'unité w de $\mathcal{O}_L$ est définie par $w = \varphi_{\mathfrak{P}}(s)$; elle vérifie $w^{p^d} = 1 + \mathfrak{C}p$. Nous notons $X(K_\infty^-)^{(\chi)}(1)$ le module ainsi tordu.

Si $F(U)$ désigne la série caractéristique dans Λ_L du module $X(K_\infty^-)^{(\chi)}$, il est clair que la série caractéristique de $X(K_\infty^-)(1)$ est $F(w^{-1}(1+U)-1)$. Soit h le nombre de classes de K; on a alors

Proposition **34**. — *Soit* $F(U)$ *la série caractéristique du module d'Iwasawa anticyclotomique* $X(K_\infty^-)^{(\chi)}$. *La série caractéristique* $G_{\mathscr{Y}_\pi}(U)$ *de* $\Omega_{R/\Lambda} \otimes_R \mathcal{O}_\pi$ *divise* $h.F(w^{-1}.(1+U)-1)$ *dans* $\mathcal{O}_L[[U]]$.

Démonstration. — On tire du lemme 33 les égalités

$$\textbf{(11.4)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(X, \mathbf{W}_\pi(\alpha)) = \mathrm{Hom}_{\Sigma^-}((X/I_{\Gamma^+}X)^{(\chi)}, \mathbf{W}_\pi(\alpha)) = \mathrm{Hom}_{\Sigma^-}(X(K_\infty^-)^{(\chi)}, \mathbf{W}_\pi(\alpha)).$$

Mais il est clair que :

$$\mathrm{Hom}_{\Sigma^-}(X(K_\infty^-)^{(\chi)}, \mathbf{W}_\pi(\alpha)) =$$
$$\{f: X(K_\infty^-) \to \mathbf{W}_\pi;\ \text{pour tout } x \text{ dans } X(K_\infty^-),\ f((1+U).x) = w.(1+U).f(x)\} =$$
$$\mathrm{Hom}_{\Lambda_I}(X(K_\infty^-)^{(\chi)}(1), \mathbf{W}_\pi).$$

On applique alors la proposition 32. On obtient ainsi une injection Λ_L-linéaire à laquelle on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{\Lambda_L}(-, \mathbf{W}_\pi)$. On obtient une surjection Λ_L-linéaire $X(K_\infty)^{(\chi)}(1) \oplus \mathrm{Cl}_K \to \mathrm{Hom}_{\Lambda_L}(\mathscr{X}_\pi, \mathbf{W}_\pi)$. On peut alors conclure grâce à la remarque 27, au lemme 28 et au théorème 29. □

Commentaires. — Une fois ce résultat obtenu, il est important de réinterpréter également la série $G_{\mathscr{Y}_\pi}$ en termes plus concrets. Cette réinterprétation procède en deux étapes. La première est de montrer que la série caractéristique du module $\mathscr{Y}_\pi$ des différentielles de Kähler est divisible par la série caractéristique du module de congruences de Hida associé au caractère π de l'algèbre de Hecke ordinaire. Cette étape est franchie au § 9 de [23] (voir aussi le dernier paragraphe de [24]) sans aucune hypothèse auxiliaire. Notons que l'égalité de ces séries est conjecturée lorsque la composante R est de Gorenstein. La seconde étape consiste à montrer que la série de Katz-Yager, spécialisée à la variable anticyclotomique, divise la série caractéristique du module de congruences de π. Cette étape est franchie dans [26] sous l'hypothèse que $\mathfrak{c} = 1$ et p ne divise pas le nombre de classes de K. Nous allons donner ci-dessous un cas particulier du théorème obtenu en réunissant les deux étapes et la proposition 34.

Soit h le nombre de classes du corps quadratique imaginaire K. Supposons en plus des hypothèses ($\mathscr{H}$) du § 10, que h est impair et $\mathfrak{c} = 1$, et considérons un nombre premier p décomposé dans K ne divisant pas $6h\varphi(D)$. Soit K_∞^- la $\mathbf{Z}_p$-extension anticyclotomique de K. Soit $K(p)$ le Ringklassenkörper de K de conducteur p. Pour toute sous-extension F/K de $K(p)/K$, soit $G(F) = \mathrm{Gal}(F/K)$ et $F_\infty^- = F.K_\infty^-$. Soit $M(F_\infty^-)$ la p-extension abélienne maximale non ramifiée hors de $\mathfrak{p}$ de F_∞^-. Le corps F que nous étudierons est le sous-corps de $K(p)$ fixé par l'involution $\sigma_\delta \in \Delta^- = G(K(p)/K)$, image par le symbole d'Artin de la différente δ de $K/\mathbf{Q}$. La raison pour laquelle on introduit ce corps est que dans [26], § 9, on ne peut étudier que les caractères χ de Δ^- de la forme $\chi = \theta/\theta\circ\sigma$; on montre facilement que ce sont exactement les caractères de Δ^- qui se factorisent à travers G(F). Le module d'Iwasawa étudié dans le théorème sera $X(F_\infty^-) = \mathrm{Gal}(M(F_\infty^-)/F_\infty^-)$. C'est un module sur $\mathrm{Gal}(F_\infty^-/K) = \Delta^- \times \Gamma^-$ où Δ^- est fini d'ordre premier à p et $\Gamma^- \simeq \mathbf{Z}_p$. Soit χ un caractère quelconque de Δ^-. Disons que χ est de type CW lorsqu'il admet une écriture $\chi = \theta/\theta\circ\sigma$ pour un caractère θ (unique) de conducteur divisant $\mathfrak{p}$ (θ est un caractère de l'extension abélienne maximale de K non ramifiée hors de $\mathfrak{p}$, i.e. l'extension de Coates-Wiles de K). Lorsque le nombre de classes h de K est impair, on voit aisément que les caractères de Δ^- de type CW coïncident avec ceux de G(F). Pour χ de type CW, nous notons $f(\chi; T)$ la série caractéristique de la χ-partie de $X(F_\infty^-)$, après identification de $\mathcal{O}_L[[\Gamma^-]]$ et Λ_L comme au § 10. Pour tout caractère ξ du groupe Δ des classes de rayons de conducteur p, soit $g(\xi; S, T)$ la série de Katz-Yager correspondant à ξ. Pour tout caractère χ de Δ^-, on note $g_\chi(T) = g(\chi; 0, T)$ la spécialisation de $g(\chi; S, T)$ à la variable anticyclotomique.

Théorème **35.** — *Si h est impair et si p ne divise pas* $6\varphi(D)\,h$ *et est décomposé dans* K, *alors pour tout caractère non trivial χ de $\mathscr{X}^-$, la série $g_\chi(T)$ divise $f(\chi; T)$.*

Commentaires. — 1) Le cas du caractère trivial est un exercice facile de pure théorie d'Iwasawa (cf. [26], § 4).

2) Le théorème 35 généralise le théorème 4.1 de [25] au cas d'un caractère non trivial χ quelconque. Cette généralité accrue résulte des théorèmes 7 et 9 du présent travail qui sont vrais pour *toute* composante R dont le caractère ω^a d'action de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ sur R est non trivial. En effet, le théorème 0.2 de [26] utilise exclusivement l'hypothèse que p ne divise pas h et que $\mathfrak{c} = 1$ et ne suppose rien sur ω^a. On peut donc l'appliquer tel quel au corollaire 28 ci-dessus, qui, lui, est vrai pour tout $a \not\equiv 0 \bmod . p - 1$ grâce aux théorèmes 5 et 7.

3) L'explication de la restriction à des caractères χ de type CW *qui sont non triviaux modulo $\mathfrak{P}$ sur l'inertie en* $\mathfrak{p}$ vient de ce que le caractère ω^a n'est autre que la restriction de χ modulo $\mathfrak{P}$ au groupe d'inertie en $\mathfrak{p}$. Notre hypothèse sur χ équivaut donc à $a \not\equiv 0 \bmod . p - 1$.

RÉFÉRENCES

[1] Bourbaki N., *Algèbre Commutative, chapitre 7 : Diviseurs*, Paris, Hermann, 1965.

[2] Carayol H., Sur les représentations ℓ-adiques attachées aux formes modulaires de Hilbert, *C.R. Acad. Sc. Paris*, série I, 296 (1985), 629-632.

[3] Coates J., Schmidt K., Iwasawa theory for the symmetric square of an elliptic curve, *J. reine angew. Math.*, **375** (1987), 104-156.

[4] Gillard R., Fonctions L p-adiques des corps quadratiques imaginaires et de leurs extensions abéliennes, *J. reine angew. Math.*, **358** (1985), 76-91.

[5] Greenberg R., On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, *Inv. Math.*, **72** (1983), 241-265.

[6] Greenberg R., Iwasawa theory for p-adic representations, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **17** (1989), 97-137.

[7] Hida H., Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, **19** (1986), 231-273.

[8] Hida H., Galois representations into $GL_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, *Inv. Math.*, **85** (1986), 545-577.

[9] Hida H., A p-adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms, I, *Inv. Math.*, **79** (1985), 159-195.

[10] Hida H., Hecke algebras for GL_1 and GL_2, *Sém. Th. N. Paris, 1985-1986*, 131-163, Birkhäuser Verlag, 1986.

[11] Katz N., p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series, *Ann. of Math.*, **104** (1976), 459-571.

[12] Katz N., Mazur B., *Arithmetic Moduli of Elliptic Curves*, Ann. of Math. Studies, number 108, Princeton Univ. Press, 1985.

[13] Langlands R. P., Automorphic forms and ℓ-adic representations, in *Proc. Int. Summer School on Modular Functions of One Variable II*, Antwerp, 1972, Lecture Notes in Math., **349**, 361-500, Springer-Verlag, 1973.

[14] Mazur B., Modular Curves and the Eisenstein Ideal, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **47** (1977), 33-186.

[15] Mazur B., Wiles A., Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$, *Inv. Math.*, **76** (1984), 179-330.

[16] Mazur B., Wiles A., On p-adic families of Galois representations, *Comp. Math.*, **59** (1986), 231-264.

[17] Mazur B., Deforming Galois Representations, in *Galois Groups over* $\mathbf{Q}$, 385-438, Springer-Verlag, 1989.

[18] Mazur B., Ribet K., Two-dimensional representations in the arithmetic of modular curves, à paraître dans *Sém. Orsay*, 1987-1988, Ed. G. Henniart, *Astérisque*.

[19] Rubin K., *The « main conjectures » in Iwasawa theory for imaginary quadratic fields*, Preprint, Ohio State U., Columbus, Ohio, 1990.

[20] de Shalit E., *Iwasawa Theory of Elliptic Curves with Complex Multiplication*, Persp. in Math., vol. 3, Academic Press, 1987.

[21] Shimura G., *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1972.

[22] Tilouine J., Un sous-groupe p-divisible de la jacobienne de $X_1(Np^r)$ comme module sur l'algèbre de Hecke, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **115** (1987), 329-360.

[23] Tilouine J., *Kummer's Criterion over* Λ *and Hida's Congruence Module*, Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics, vol. 4, 1987.

[24] Tilouine J., Théorie d'Iwasawa classique et de l'algèbre de Hecke ordinaire, *Comp. Math.*, **65** (1988), 265-320.

[25] Tilouine J., Une conséquence de la conjecture principale dans la théorie d'Iwasawa d'un corps quadratique imaginaire, *C.R. Acad. Sci. Paris*, série 1, **306** (1988), 217-221.

[26] Tilouine J., Sur la conjecture principale anticyclotomique, *Duke Math. J.*, **59** (1989), 629-673.
[27] Wiles A., On p-adic representations over a totally real field, *Ann. of Math.*, **123** (1986), 407-456.
[28] Yager R., p-adic measures on Galois groups, *Inv. Math.*, **76** (1984), 331-343.
[29] Gelbart S., *Automorphic Forms on Adele Groups*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1975.
[30] Weil A., On a certain type of characters of idèle-class group of an algebraic number-field, in *Œuvres scientifiques*, vol. 2, [1955*c*], 255-261, Springer-Verlag, 1980.

B. M.
Department of Mathematics,
Harvard University,
Cambridge, Ma.02138
U.S.A.

et

Institut des Hautes Etudes scientifiques
35, route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette
France

J. T.
C.N.R.S., URA D.0752
Laboratoire de Géométrie algébrique et Théorie des Nombres
Mathématique, Bâtiment 425
Faculté des Sciences d'Orsay
91405 Orsay Cedex 05
France

et

Department of Mathematics
U.C.L.A.
Los Angeles, Ca.90024
U.S.A.

Manuscrit reçu le 6 juillet 1989.