PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

JEAN-PIERRE RAMIS

GABRIEL RUGET

Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 38 (1970), p. 77-91

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1970__38__77_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

COMPLEXE DUALISANT ET THÉORÈMES DE DUALITÉ EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE COMPLEXE

par JEAN-PIERRE RAMIS et GABRIEL RUGET

Soit X une variété analytique complexe de dimension n, dénombrable à l'infini; appelons $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X, et Ω le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré n sur X. La correspondance qui, à un $\mathcal{O}$-Module localement libre $\mathscr{F}$, associe $\mathscr{H}om(X; \mathscr{F}, \Omega)$, est involutive. Dans [11], Serre explicite, pour tout entier p et pour tout $\mathcal{O}$-Module localement libre $\mathscr{F}$, une topologie (de quotient de Fréchet) sur $H^p(X; \mathscr{F})$ et un accouplement :

$$H^p(X; \mathscr{F}) \times H_c^{n-p}(X; \mathscr{H}om(X; \mathscr{F}, \Omega)) \to \mathbf{C}$$

(où l'indice c désigne la famille des compacts de X) qui, lorsque les groupes $H^p(X; \mathscr{F})$ et $H^{p+1}(X; \mathscr{F})$ sont séparés, fait de l'espace vectoriel (non topologisé) $H_c^{n-p}(X; \mathscr{H}om(X; \mathscr{F}, \Omega))$ le dual topologique de $H^p(X; \mathscr{F})$.

On pourrait aussi mettre en valeur l'accouplement :

$$H_c^p(X; \mathscr{F}) \times H^{n-p}(X; \mathscr{H}om(X; \mathscr{F}, \Omega)) \to \mathbf{C}.$$

A condition de remplacer $H_c^{n-p}(X; \mathscr{H}om(X; \mathscr{F}, \Omega))$ par $\mathrm{Ext}_c^{n-p}(X; \mathscr{F}, \Omega)$, la démonstration de Serre s'étend [10] au cas où $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}$-Module cohérent quelconque, mais en utilisant des théorèmes difficiles (avec les notations de Schwartz : $\mathscr{E}$ est un $\mathcal{O}$-Module plat, et, pour tout $x \in X$, $\mathscr{D}'_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module injectif), puisque provenant de la division des distributions. Nous allons montrer, en suivant des idées de Grothendieck reprises par Malgrange, que le théorème de dualité pour les faisceaux cohérents sur une variété analytique est formellement beaucoup plus simple que cela (voir aussi [14]), et qu'il peut être généralisé aux espaces analytiques, à condition de remplacer Ω par un complexe « dualisant » convenable, et les Ext par des Hyperext. Comme prolongements, probablement très proches, de ce travail, indiquons, outre un article en préparation avec J.-L. Verdier sur un théorème de dualité relatif, que Malgrange pense pouvoir utiliser le complexe dualisant pour redémontrer des résultats de Siu [13] et d'Andreotti-Grauert [1].

1. Quelques lemmes sur certains complexes d'espaces vectoriels topologiques.

Précisons un point de vocabulaire à l'intention des lecteurs non familiers avec les catégories dérivées [7] : soit $\mathbf{A}$ une catégorie abélienne, et $C(\mathbf{A})$ la catégorie des complexes bornés à gauche d'objets de **A** (avec différentielles de degré $+1$ et morphismes de degré 0). Nous appellerons T l'automorphisme de $C(\mathbf{A})$ consistant en la translation d'un cran vers la gauche des complexes, accompagnée du changement de signe de toutes les différentielles. Un objet de $C(\mathbf{A})$ est dit acyclique lorsque tous ses objets de cohomologie sont nuls. Soit $u : X^\bullet \to Y^\bullet$ un morphisme de $C(\mathbf{A})$; on dira que c'est un quasi-isomorphisme s'il induit un isomorphisme des objets de cohomologie de $X^\bullet$ sur ceux de $Y^\bullet$; dans ce cas, on dira encore que $\xrightarrow{u} Y^\bullet$ est une résolution de $X^\bullet$. Nous appellerons cylindre de u le complexe $T(X^\bullet)\oplus Y^\bullet$ muni de la différentielle $\begin{pmatrix} T(d_X) & 0 \\ T(u) & d_Y \end{pmatrix}$. Il est équivalent d'affirmer que u est un quasi-isomorphisme, ou que son cylindre est acyclique.

Nous désignerons par le sigle **FS** (resp. **DFS**) les espaces de Fréchet-Schwartz (resp. les duals forts d'espaces de Fréchet-Schwartz [6]) et par le sigle **QFS** (resp. **QDFS**) les quotients d'espaces **FS** (resp. **DFS**) (ce sont en quelque sorte des espaces **FS** ou **DFS** non séparés).

Lemme 1. — Soient $X^\bullet$ *et* $Y^\bullet$ *deux complexes d'espaces de Fréchet (à différentielles linéaires continues) et u un morphisme (linéaire continu) de* $X^\bullet$ *dans* $Y^\bullet$. *Si u est un quasi-isomorphisme (au sens purement algébrique), il est un quasi-isomorphisme topologique, c'est-à-dire qu'il induit des isomorphismes entre les espaces de cohomologie de* $X^\bullet$ *et ceux de* $Y^\bullet$, *ces espaces étant munis de leurs topologies naturelles (qui ne sont pas nécessairement séparées).*

Si H^i et K^i désignent les espaces de cohomologie de $X^\bullet$ et $Y^\bullet$ respectivement, il suffit de montrer que u transforme l'adhérence de 0 dans H^i en l'adhérence de 0 dans K^i. Soient M^i et N^i les espaces de cycles de degré i de $X^\bullet$ et $Y^\bullet$ respectivement; ce sont des espaces de Fréchet; donc, l'application d_Y+u de $Y^{i-1}\oplus M^i$ dans N^i, qui est surjective, est un homomorphisme. Le fermé $Y^{i-1}+\overline{d_X(X^{i-1})}$ étant saturé par rapport à la « projection » d_Y+u, son image est un fermé de N^i : c'est donc $\overline{d_Y(Y^{i-1})}$, ce qui entraîne la propriété désirée lorsqu'on passe aux groupes de cohomologie.

Lemme 1 bis. — *Le lemme 1 reste vrai lorsqu'on suppose que* $X^\bullet$ *et* $Y^\bullet$ *sont tous deux, non pas des complexes de Fréchet, mais des complexes d'espaces* **DFS**.

Cela tient aux propriétés de permanence des espaces **DFS**, et au théorème du graphe fermé pour ces espaces [15].

Lemme 2. — Soit $E\xrightarrow{u}F\xrightarrow{v}G$ *une suite d'espaces* **FS** *et d'applications linéaires continues, telle que* $v\circ u=0$; *soit* $E'\xleftarrow{u'}F'\xleftarrow{v'}G'$ *la suite transposée (les duals étant munis de leur topologie forte). Alors, l'accouplement entre* F *et* F' *induit un accouplement a entre* $\operatorname{Ker} v/\overline{\operatorname{Im} u}$ *et* $\operatorname{Ker} u'/\overline{\operatorname{Im} v'}$, *accouplement qui fait de chacun de ces espaces (munis de leur topologie naturelle) le dual fort de l'autre.*

L'application naturelle de $\operatorname{Ker} u'/\overline{\operatorname{Im} v'}$ dans $(\operatorname{Ker} v/\overline{\operatorname{Im} u})'$ est surjective d'après Hahn-Banach, injective grâce à la semi-réflexivité de F, continue puisque a est hypocontinue par rapport aux bornés de $\operatorname{Ker} v/\overline{\operatorname{Im} u}$ (il suffit pour le voir de savoir remonter un borné, c'est-à-dire un relativement compact, de $\operatorname{Ker} v/\overline{\operatorname{Im} u}$ en un borné de $\operatorname{Ker} v$), donc bicontinue. Puisque $\overline{\operatorname{Ker} v/\operatorname{Im} u}$, étant un espace **FS**, est réflexif, nous avons aussi démontré l'autre assertion.

Lemme 3. — *Soient* $X^\bullet$ *et* $Y^\bullet$ *deux complexes d'espaces* **FS** (*ou aussi bien deux complexes d'espaces* **DFS**), *et u un quasi-isomorphisme de* $X^\bullet$ *dans* $Y^\bullet$. *Alors, le transposé u' de u est un quasi-isomorphisme.*

En effet, le cylindre de u est acyclique; c'est donc un complexe dont les différentielles sont des opérateurs d'image fermée; le complexe transposé, qui est le cylindre de u', a lui aussi ses différentielles d'image fermée, et, d'après le lemme 2, il est acyclique.

Donnons enfin un lemme qui permet de s'assurer à peu de frais que des topologies sur des couples d'espaces en dualité coïncident :

Lemme 4. — *Soient* P, Q *deux espaces* **QFS** *et* R, S *deux espaces* **QDFS**, *a un accouplement entre* P *et* R *qui mette en dualité les séparés associés à ces espaces, b un accouplement du même type entre* Q *et* S, *u une application linéaire de* P *dans* Q *et v une application linéaire de* S *dans* R, *telles que u et v soient transposées par rapport à a et b. Alors, u et v sont continues.*

Puisque la fermeture de $\{0\}$ dans P (resp. S) est l'orthogonal de R (resp. Q), on voit que $u\overline{\{0_P\}} \subset \overline{\{0_Q\}}$, et que $v\overline{\{0_S\}} \subset \overline{\{0_R\}}$. Les applications u et v induisent donc, entre les espaces séparés associés à P, Q, R, S, des applications $\hat{u}$ et $\hat{v}$ transposées. Puisque $\hat{u}$ a une transposée, elle est faiblement continue, donc son graphe est fermé; elle est donc fortement continue, ainsi que $\hat{v}$, et la continuité de u et v en résulte.

2. Trace. Théorème de dualité élémentaire.

Reprenons les notations X, $\mathcal{O}$, Ω de l'introduction. Comme variété topologique, X est canoniquement orientée, et la dualité de Poincaré nous fournit une forme linéaire canonique sur $H_c^{2n}(X; \mathbf{C})$. Cette forme, précédée par le produit de composition des Ext (il s'agit d'Ext de faisceaux de **C**-espaces), donne un accouplement :

$$H_c^n(X; \Omega) \times \operatorname{Ext}_{\mathbf{C}}^n(X; \Omega, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}.$$

La structure complexe de X fournit maintenant (si nous pensons à l'interprétation de Yoneda des Ext) une n-extension remarquable de Ω par **C** : c'est l'extension :

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathcal{O} \xrightarrow{d'} \Omega^1 \xrightarrow{d'} \dots \xrightarrow{d'} \Omega \to 0,$$

où Ω^i désigne le faisceau des formes différentielles holomorphes de degré i sur X. La forme linéaire sur $H_c^n(X; \Omega)$ associée à cette extension est appelée la *trace*. La trace apparaît aussi comme suit : le complexe

$$0 \to \mathcal{D}'^{n,0} \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \mathcal{D}'^{n,n} \to 0, \tag{1}$$

où $\mathcal{D}'^{i,j}$ désigne le faisceau des germes de formes différentielles sur X de type (i, j) à coefficients distributions, est une résolution fine de Ω. Le groupe $H_c^n(X; \Omega)$ est donc le $(n+1)^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie du complexe d'espaces **DFS** :

$$0 \to \mathcal{E}'^{n,0}(X) \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \mathcal{E}'^{n,n}(X) \to 0. \tag{2}$$

Il est donc naturellement muni d'une structure **QDFS**, et on voit que l'intégration sur X des formes de type (n, n) à support compact induit une forme linéaire continue sur $\mathrm{H}^n_c(\mathrm{X}, \Omega)$: cette forme n'est autre que $(-1)^n$ fois la trace. (Etant donnée une section globale s à support compact de $\mathscr{D}'^{n,n}$, on en déduit [4] une n-extension $\bar{s}$, au sens de Yoneda, de $\mathbf{C}$ par Ω. Précédé par le complexe de d'-cohomologie, ce complexe donne l'extension $(-1)^{n^2}\omega\times\bar{s}\in\mathrm{Ext}^{2n}_{c,\mathbf{C}}(\mathrm{X}; \mathbf{C}, \mathbf{C})$; mais on constate d'autre part qu'il est « équivalent » à la $2n$-extension de $\mathbf{C}$ par $\mathbf{C}$ associée au complexe de De Rham :

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathscr{D}'_0 \to \mathscr{D}'_1 \to \dots \to \mathscr{D}'_{2n} \to 0$$

et à la section globale s de $\mathscr{D}'_{2n}=\mathscr{D}'^{n,n}$. La dualité de Poincaré étant donnée par une intégration, notre assertion est vérifiée.)

Soit maintenant $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}$-Module quelconque. Le produit de composition des Ext (de $\mathscr{O}$-Modules), suivi de la trace, nous donne les accouplements :

(3) $$\mathrm{H}^p(\mathrm{X}; \mathscr{F})\times\mathrm{Ext}^{n-p}_c(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \Omega) \to \mathbf{C}$$

et

(3 *bis*) $$\mathrm{H}^p_c(\mathrm{X}; \mathscr{F})\times\mathrm{Ext}^{n-p}(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \Omega) \to \mathbf{C}.$$

Lemme 5. — Si X *est une variété de Stein,* $\mathrm{H}^i_c(\mathrm{X}; \Omega)$ *est nul pour* $i \neq n$; $\mathrm{H}^n_c(\mathrm{X}; \Omega)$ *est séparé, et l'accouplement* (3) *le met en dualité avec* $\Gamma(\mathrm{X}; \mathscr{O})$ *(muni de sa structure* **FS** *habituelle).*

Notons $\mathscr{E}^{i,j}$ le faisceau des germes de formes différentielles sur X de type (i, j) à coefficients C^∞. Le complexe :

(1 *bis*) $$0 \to \mathscr{E}^{0,0} \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \mathscr{E}^{0,n} \to 0$$

est une résolution fine de $\mathscr{O}$; donc, les groupes $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}; \mathscr{O})$ sont les groupes de cohomologie du complexe d'espaces **FS** :

(2 *bis*) $$0 \to \mathscr{E}^{0,0}(\mathrm{X}) \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \mathscr{E}^{0,n}(\mathrm{X}) \to 0,$$

cependant que les $\mathrm{H}^i_c(\mathrm{X}; \Omega)$ sont les groupes de cohomologie du complexe transposé (2). Le lemme découle alors du théorème B (qui entraîne en particulier que toutes les différentielles de (2) et (2 *bis*) ont leur image fermée) et du lemme 2.

Lemme 5 bis. — *Si* X *est une variété de Stein,* $\mathrm{H}^i_c(\mathrm{X}; \mathscr{O})$ *est nul pour* $i \neq n$; *l'accouplement* (3 *bis*) *met en dualité* $\Gamma(\mathrm{X}; \Omega)$ *(muni de sa structure* **FS** *habituelle) et* $\mathrm{H}^n_c(\mathrm{X}; \mathscr{O})$ *(muni de la structure* **DFS** *obtenue en le considérant comme quotient de* $\mathscr{E}'^{0,n}(\mathrm{X})$).

Lemme 6. — Si X *est une variété de Stein, et si* $\mathscr{F}$ *est un* $\mathscr{O}$*-Module admettant une résolution finie par des* $\mathscr{O}$*-Modules libres de type fini, les groupes* $\mathrm{Ext}^i_c(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \Omega)$ *sont nuls pour* $i \neq n$, $\mathrm{Ext}^n_c(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \Omega)$ *est muni d'une structure* **DFS** *canonique, et* (3) *le met en dualité avec* $\Gamma(\mathrm{X}; \mathscr{F})$.

Ceci résulte des lemmes 1 *bis* et 2, par récurrence sur le minimum des longueurs des résolutions libres de $\mathscr{F}$.

3. Le complexe dualisant : position du problème. Un premier théorème de dualité.

Etant donné un espace analytique X dénombrable à l'infini, de dimension bornée, nous voulons construire un complexe $\mathbf{K}_X^\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-Modules, borné, à cohomologie cohérente, et une forme linéaire canonique $\mathbf{T}_X$ sur $\mathrm{H}_c^0(X; \mathbf{K}_X^\bullet)$ tels que soit vrai le

Théorème 1. — Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F}$ et pour tout entier p, il existe sur $\mathrm{H}^p(X; \mathscr{F})$ une unique structure **QFS** *et sur $\mathrm{Ext}_c^{-p}(X; \mathscr{F}, \mathbf{K}_X^\bullet)$ une unique structure* **QDFS** *telles que la forme $\mathbf{T}_X$ induise un accouplement parfait entre les séparés associés de ces deux espaces. De plus, la séparation de $\mathrm{H}^p(X; \mathscr{F})$ est équivalente à celle de $\mathrm{Ext}_c^{1-p}(X; \mathscr{F}, \mathbf{K}_X^\bullet)$.*

Si X est lisse, de dimension n, $\mathbf{K}_X^\bullet$ sera une résolution de $\mathrm{T}^n\Omega$ et ces topologies et cet accouplement ne seront autres que ceux cités en introduction (modulo évidemment la substitution de $\mathrm{Ext}_c^{-p}(X; \mathscr{F}, \mathrm{T}^n\Omega)$ à $\mathrm{Ext}_c^{n-p}(X; \mathscr{F}, \Omega)$).

Au § 5, nous construirons :

1° Pour toute variété V, une résolution $\mathbf{K}_V^\bullet$ de $\mathrm{T}^{\dim V}\Omega_V$ telle que, pour tout entier p et tout $x \in V$, $\mathbf{K}_{V,x}^p$ soit un $\mathcal{O}_{V,x}$-module injectif.

2° Pour tout plongement f d'une variété V dans une autre variété W, un isomorphisme fonctoriel de complexes de $\mathcal{O}_V$-Modules :

$$\bar{f}: \quad \mathbf{K}_V^\bullet \xrightarrow{\approx} \mathscr{H}om(W; f_*\mathcal{O}_V, \mathbf{K}_W^\bullet)$$

compatible avec les traces sur $\mathrm{H}_c^{\dim V}(V; \Omega_V) = \mathrm{H}_c^0(V; \mathbf{K}_V^\bullet)$ et sur $\mathrm{H}_c^0(W; \mathbf{K}_W^\bullet)$.

Utilisons ces complexes $\mathbf{K}_V^\bullet$ pour construire le « complexe dualisant » $\mathbf{K}_X^\bullet$ de l'espace analytique X : soit U un ouvert de X, réalisable comme sous-ensemble analytique d'une variété de Stein, et soit $\xrightarrow{\varphi} V$ une telle réalisation. Le complexe $\mathbf{K}_U^\bullet = \mathrm{Hom}(V; \varphi_*\mathcal{O}_U, \mathbf{K}_V^\bullet)$, considéré comme $\mathcal{O}_U$-Module, ne dépend pas de la réalisation de U, comme on le voit en coiffant deux réalisations par une même troisième, et en utilisant la transitivité des isomorphismes $\bar{f}$; il est clairement muni d'une trace $\mathbf{T}_U : \mathrm{H}_c^0(U; \mathbf{K}_U^\bullet) \to \mathbf{C}$. On obtient $\mathbf{K}_X^\bullet$ en recollant des $\mathbf{K}_U^\bullet$, et la trace $\mathbf{T}_X$ de même (deux traces $\mathbf{T}_U$ et $\mathbf{T}_{U'}$ se recollent bien d'après Mayer-Vietoris et la nullité de $\mathrm{H}_c^1(U \cap U'; \mathbf{K}_{U\cap U'}^\bullet)$).

Lemme 7. — Soient U un ouvert de X, et $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_U$-Module. Supposons que U admette une réalisation $\xrightarrow{\varphi} V$ comme sous-ensemble analytique d'une variété de Stein, et que $\varphi_*\mathscr{F}$ admette une résolution finie par des $\mathcal{O}_V$-Modules libres de type fini. Alors, les groupes $\mathrm{Ext}_c^i(U; \mathscr{F}, \mathbf{K}_U^\bullet)$ sont nuls pour $i \neq 0$, $\mathrm{Ext}_c^0(U; \mathscr{F}, \mathbf{K}_U^\bullet)$ est muni d'une structure **DFS** *canonique, et l'accouplement déduit de $\mathbf{T}_U$ le met en dualité avec $\Gamma(U; \mathscr{F})$.*

Algébriquement, le morphisme canonique de $\mathrm{Ext}_c^i(V; \varphi_*\mathscr{F}, \mathbf{K}_V^\bullet)$ dans $\mathrm{Ext}_c^i(U; \mathscr{F}, \mathbf{K}_U^\bullet)$ est un isomorphisme (on se ramène aux $\mathscr{E}xt$ locaux par un argument standard de suite spectrale; les fibres de ces $\mathscr{E}xt$ sont égales, vu la cohérence de $\mathscr{F}$, aux Ext des fibres; là, l'isomorphisme est évident). Quant à $\Gamma(U; \mathscr{F})$ et à $\Gamma(V; \varphi_*\mathscr{F})$, ils sont évidemment topologiquement isomorphes. Le lemme 6 donne alors la topologie sur $\mathrm{Ext}_c^0(U; \mathscr{F}, \mathbf{K}_U^\bullet)$, et démontre la dualité désirée.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1 : soit $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent, et I un ensemble d'indices dénombrable. On peut trouver une famille de « cartes » $\varphi_i : \Theta_i \to \mathbf{C}^{N_i}$ et, dans chaque $\mathbf{C}^{N_i}$, un polydisque ouvert V_i tels que, si on pose $U_i = \varphi_i^{-1}(V_i)$, on ait :

1° Pour tout i, le système U_i, $\mathscr{F}_{|U_i}$, $\varphi_{i|U_i}$, V_i vérifie les hypothèses du lemme 7.

2° Les U_i forment un recouvrement ouvert localement fini (de Stein) de X : appelons-le $\mathfrak{U}$.

On pourra alors appliquer le lemme 7 non seulement aux U_i, mais aussi aux intersections finies de U_i. Le théorème de Leray, joint au théorème B, nous dit que les groupes $H^i(X; \mathscr{F})$ sont les groupes de cohomologie du complexe d'espaces **FS** :

$$C^\bullet(\mathfrak{U}, H^0(\mathfrak{U}; \mathscr{F})). \tag{4}$$

Nous avons ainsi muni les $H^i(X; \mathscr{F})$ de topologies **QFS**, ne dépendant pas du recouvrement $\mathfrak{U}$, d'après le lemme 1. D'après le lemme 7, la trace $\mathbf{T}_X$ met en dualité (topologique) le complexe de cochaînes (4) et le complexe de chaînes finies :

$$C^c_\bullet(\mathfrak{U}, \mathrm{Ext}^0_c(\mathfrak{U}; \mathscr{F}, \mathbf{K}^\bullet_X)), \tag{5}$$

où les Ext_c sont reliés par les flèches d'agrandissement évidentes (prolongement par zéro). Pour interpréter l'homologie de (5), considérons une résolution injective $L^\bullet$ de $\mathbf{K}^\bullet_X$, et le complexe double :

$$C^c_i(\mathfrak{U}, \mathrm{Hom}_c(\mathfrak{U}; \mathscr{F}, L^j)). \tag{6}$$

Si nous calculons l'hyperhomologie de (6) en dérivant d'abord par rapport à j, nous trouvons l'homologie de (5) (la suite spectrale est dégénérée d'après le lemme 7). Dérivons d'abord par rapport à i : L^j étant injectif, le faisceau $\mathscr{H}om(X; \mathscr{F}, L^j)$ est flasque, donc c-*mou*, la deuxième suite spectrale de (6) est aussi dégénérée [3], et l'hyperhomologie de (6) se réduit à l'homologie de $\mathrm{Hom}_c(X; \mathscr{F}, L^j)$, c'est-à-dire aux $\mathrm{Ext}^j_c(X; \mathscr{F}, \mathbf{K}^\bullet_X)$. D'après le lemme 2, nous avons ainsi obtenu des topologies **QDFS** sur les $\mathrm{Ext}^p_c(X; \mathscr{F}, \mathbf{K}^\bullet_X)$, telles que $\mathbf{T}_X$ mette en dualité les séparés associés de ces espaces avec les séparés associés des $H^{-p}(X; \mathscr{F})$ (le signe provient de ce que le complexe simple associé à (6) est gradué par $j-i$). Le lemme 4 assure l'unicité de ces topologies **QDFS**.

La dernière assertion du théorème provient de ce que, pour les espaces qui nous occupent, une application est d'image fermée si et seulement si sa transposée a une image fermée.

4. Un deuxième théorème de dualité.

Théorème 2. — Soient X *un espace analytique dénombrable à l'infini, de dimension bornée,* $\mathbf{K}^\bullet_X$ *son complexe dualisant, et* $\mathscr{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* X. *Alors, pour tout entier* p, *les espaces* $H^p_c(X; \mathscr{F})$ *et* $\mathrm{Ext}^{-p}(X; \mathscr{F}, \mathbf{K}^\bullet_X)$ *sont munis de topologies canoniques* (**QDFS** *et* **QFS** *respectivement*), *et la trace* $\mathbf{T}_X$ *induit entre ces espaces un accouplement qui fait du séparé associé de* *chacun le dual fort du séparé associé de l'autre. De plus, la séparation de* $H^p_c(X;\mathscr{F})$ *est équivalente à celle de* $\mathrm{Ext}^{1-p}(X;\mathscr{F},\mathbf{K}^{\bullet}_X)$.

Ici aussi, d'après le lemme 4, le couple de topologies sur $H^p_c(X;\mathscr{F})$ et $\mathrm{Ext}^{-p}(X;\mathscr{F},\mathbf{K}^{\bullet}_X)$ est le seul couple de topologies **QDFS**, **QFS** tel que $\mathbf{T}_X$ mette en dualité les séparés associés.

Commençons par un lemme analogue au lemme 5 :

Lemme 8. — Soient X *une variété de Stein de dimension n, et* K *un compact de Stein de* X. *Alors, les groupes* $H^i_K(X;\Omega)$ *sont nuls pour* $i \neq n$, $H^n_K(X;\Omega)$ *est muni d'une structure* **FS**, $\mathcal{O}(K)$ *d'une structure* **DFS**, *et la trace induit un accouplement parfait entre ces espaces ainsi topologisés.*

Considérons le cas $n \geqslant 2$; la nullité des $H^i(K,\mathcal{O})$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, jointe à la suite exacte :

$$\ldots \leftarrow H^{n-p+1}_c(X-K;\mathcal{O}) \leftarrow H^{n-p}(K;\mathcal{O}) \leftarrow H^{n-p}_c(X;\mathcal{O}) \leftarrow H^{n-p}_c(X-K;\mathcal{O}) \leftarrow \ldots,$$

entraîne la nullité des $H^i_c(X-K;\mathcal{O})$ pour $2 \leqslant i \leqslant n-1$ et nous apprend que les morphismes naturels de $\mathcal{O}(K)$ dans $H^1_c(X-K;\mathcal{O})$ et de $H^n_c(X-K;\mathcal{O})$ dans $H^n_c(X;\mathcal{O})$ sont des isomorphismes (algébriques). Le deuxième morphisme étant continu et de but séparé, sa source est séparée, et c'est un isomorphisme topologique. D'autre part, $H^1_c(X-K;\mathcal{O})$ est séparé (cela provient du principe du prolongement analytique, qui assure la $(n-1)$-convexité de $X-K$; cela correspond aussi à la nullité [9] de $H^n(X-K;\Omega)$), donc $\mathcal{O}(K)$ se trouve muni d'une topologie **DFS** (1). Considérons maintenant la suite exacte :

$$\ldots \to H^{p-1}(X-K;\Omega) \to H^p_K(X;\Omega) \to H^p(X;\Omega) \to H^p(X-K;\Omega) \to \ldots$$

Par dualité, nous savons que l'application naturelle de $\Gamma(X;\Omega)$ dans $\Gamma(X-K;\Omega)$ est un isomorphisme, d'où la nullité de $H^i_K(X;\Omega)$ pour $i=0,1$; pour $2 \leqslant i \leqslant n-1$, on utilise la nullité de $H^i(X-K;\Omega)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-2$, qui provient elle aussi de la dualité ($H^1(X-K;\Omega)$ est séparé parce que $H^n_c(X-K;\mathcal{O})$ l'est). Enfin, $H^{n-1}(X-K;\Omega)$, qui est algébriquement isomorphe à $H^n_K(X;\Omega)$, est séparé et en dualité avec $H^1_c(X-K;\mathcal{O})$. Le cas $n=1$ est tout semblable.

Enonçons sans démonstration l'analogue du lemme 7 :

Lemme 9. — Reprenons les hypothèses du lemme 7, et soit L *un compact de Stein de* V, *d'image réciproque* $\varphi^{-1}(L)=K$. *Alors, les groupes* $\mathrm{Ext}^i_K(X;\mathscr{F},\mathbf{K}^{\bullet}_X)$ *sont nuls pour* $i \neq 0$, $\mathrm{Ext}^0_K(X;\mathscr{F},\mathbf{K}^{\bullet}_X)$ *est muni d'une structure* **FS**, $H^0(K;\mathscr{F})$ *d'une structure* **DFS**, *et la trace met ces structures en dualité.*

Pour démontrer le théorème 2, reprenons un « recouvrement » de X comme pour la démonstration du théorème 1; donnons-nous de plus, dans chaque V_i, un

(1) En utilisant la dualité et le théorème du graphe fermé, on vérifie, si U est un voisinage de Stein de K, la continuité de l'application naturelle de $\mathcal{O}(U)$ dans $\mathcal{O}(K)$ ainsi topologisé; on en déduit que notre topologie **DFS** sur $\mathcal{O}(K)$ coïncide avec la topologie $\mathscr{LF}$ habituelle.

polydisque compact L_i, et faisons l'hypothèse que les compacts $K_i = \varphi_i^{-1}(L_i)$ forment un recouvrement localement fini $\mathfrak{K}$ de X. Considérons les deux complexes en dualité :

(8) $$C_c^{\bullet}(\mathfrak{K}, H^0(\mathfrak{K}; \mathscr{F}))$$

et

(8 *bis*) $$C_{\bullet}(\mathfrak{K}, \operatorname{Ext}^0_{\mathfrak{K}}(X; \mathscr{F}, \mathbf{K}^{\bullet}_X)),$$

dont le premier est un complexe d'espaces **DFS**, et le second un complexe d'espace **FS**. Les groupes de cohomologie de (8) étant les $H^i_c(X; \mathscr{F})$, et ceux de (8 *bis*) étant les $\operatorname{Ext}^{-i}(X; \mathscr{F}, \mathbf{K}^{\bullet}_X)$, le lemme 2 entraîne le théorème 2 (la dernière assertion du théorème se démontrant comme l'assertion analogue du théorème 1).

5. Construction du complexe dualisant.

Nous allons d'abord construire, étant donné un germe en un point x de variété analytique complexe V, ce qui sera la fibre en x du complexe $\mathbf{K}^{\bullet}_V$. A tout germe de plongement f du germe (V, x) dans un autre germe (W, y), nous associerons un isomorphisme $\bar{f}_x$ de $\mathbf{K}^{\bullet}_{V,x}$ sur $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{W,y}}(\mathcal{O}_{V,x}, \mathbf{K}^{\bullet}_{W,y})$ (lequel, en vertu de la cohérence de $f_*\mathcal{O}_V$, ne sera autre que la fibre en x de $\mathscr{H}om(W; f_*\mathcal{O}_V, \mathbf{K}^{\bullet}_W)$), fonctoriellement par rapport à la composition des plongements. Nous indiquerons ensuite quelle topologie sur $\bigcup_{x \in V} \mathbf{K}^{\bullet}_{V,x}$ en fait le complexe de faisceaux $\mathbf{K}^{\bullet}_V$. Nous laisserons au lecteur le soin de se convaincre qu'étant donné un plongement f de V dans W, les isomorphismes $\bar{f}_x$ se recollent en un isomorphisme $\bar{f}$ de $\mathbf{K}^{\bullet}_V$ sur $\mathscr{H}om(W; f_*\mathcal{O}_V, \mathbf{K}^{\bullet}_W)$.

A. *La fibre du complexe dualisant.*

Etant donné un germe de variété (V, x), appelons A l'anneau $\mathcal{O}_{V,x}$; Spec A désigne le spectre premier de A, et $\widetilde{A}$ le faisceau canonique sur Spec A. Si Z^p désigne l'ensemble des points de Spec A de codimension $\geqslant p$, le complexe de Cousin de $\widetilde{A}$ relatif à la filtration Z^p de Spec A est le complexe :

$$0 \to \mathscr{H}^0_{Z^0/Z^1}(\widetilde{A}) \to \mathscr{H}^1_{Z^1/Z^2}(\widetilde{A}) \to \ldots \to 0.$$

L'espace topologique Spec A est noethérien; ses fermés irréductibles ont un unique point générique; les Z^p sont stables par spécialisation, et tout point de $Z^p - Z^{p+1}$ est maximal dans Z^p. Il en résulte des isomorphismes fonctoriels canoniques ([7], motif F, p. 225) :

(9) $$\mathscr{H}^q_{Z^p/Z^{p+1}}(\widetilde{A}) \overset{\approx}{\to} \coprod_{\alpha \in Z^p - Z^{p+1}} i_\alpha(H^q_\alpha(\widetilde{A})),$$

où $H^q_\alpha(\widetilde{A})$ est la fibre en α de $\mathscr{H}^q_{\{\bar{\alpha}\}}(\widetilde{A})$, et où $i_\alpha(G)$ désigne le faisceau qui est constant et égal à G le long de $\{\bar{\alpha}\}$, et qui est nul ailleurs.

Les $\mathscr{H}^q_{Z^p/Z^{p+1}}(\widetilde{A})$ sont nuls pour $q>p$ ([7], lemme (2.4), p. 235), et aussi pour $q<p$ (car l'anneau A est régulier, donc de Cohen-Macaulay). L'application

naturelle $\widetilde{A} \to \mathscr{H}^0_{Z^0/Z^1}(\widetilde{A})$ fait donc ([7], chap. 4, (2.6)) du complexe de Cousin une résolution flasque de $\widetilde{A}$. Il en résulte que le complexe :

$$0 \to \Gamma\mathscr{H}^0_{Z^0/Z^1}(\widetilde{A}) \to \Gamma\mathscr{H}^1_{Z^1/Z^2}(\widetilde{A}) \to \dots$$

est une résolution de $\Gamma\widetilde{A} = A$ (les $H^i(\operatorname{Spec} A, \widetilde{A})$ sont nuls pour $i>0$!). Appelons le $L^{\bullet}_{V,x}$, et vérifions que c'est un complexe de A-modules injectifs : d'après (9), et la noethérianité de A, il suffit de vérifier que les $H^p_\alpha(\widetilde{A})$, pour $\alpha \in Z^p - Z^{p+1}$, sont A-injectifs. Or, on sait ([8], (4.13)) que $H^p_\alpha(\widetilde{A})$ est une enveloppe injective sur A_α du corps résiduel $\kappa(\alpha)$.

Par exemple, si V est une courbe, on obtient comme résolution de $\mathcal{O}_x$ le complexe $0 \to \mathscr{M}_x \to \mathscr{M}_x/\mathcal{O}_x \to 0$, où $\mathscr{M}_x$ est l'anneau des germes de fonctions méromorphes en x.

Nous poserons $\mathbf{K}^{\bullet}_{V,x} = T^{\dim V}(L^{\bullet}_{V,x} \otimes_A \Omega_{V,x})$.

Lorsque f est un isomorphisme local d'un germe (V, x) sur un autre (W, y), l'isomorphisme $\bar{f}_x$ va de soi. Envisageons maintenant le cas où (V, x) est un germe de sous-variété de codimension 1 de (W, y) : posons $A = \mathcal{O}_{V,x}$, $B = \mathcal{O}_{W,y}$, et choisissons une fonction régulière $z \in B$ définissant V. La suite :

$$0 \to B \xrightarrow{\mu_z} B \xrightarrow{\rho} A \to 0,$$

où μ_z désigne la multiplication par z et ρ la restriction, est exacte; ρ induit une application r qui fait de Spec A un sous-espace de Spec B. La suite de faisceaux sur Spec B :

$$0 \to \widetilde{B} \xrightarrow{\mu_z} \widetilde{B} \xrightarrow{\rho} r_*\widetilde{A} \to 0$$

est exacte. Nous appellerons Z^p (resp. T^p) l'ensemble des points de codimension $\geqslant p$ de Spec A (resp. Spec B); la trace de T^p sur Spec A est égale à Z^{p-1}. Nous voulons interpréter $\operatorname{Hom}_B(A, \Gamma\mathscr{H}^p_{T^p/T^{p+1}}(\widetilde{B})) = \coprod_{\beta \in T^p - T^{p+1}} \operatorname{Hom}_B(A, H^p_\beta(\widetilde{B}))$. Or, $\operatorname{Hom}_B(A, H^p_\beta(\widetilde{B}))$ s'identifie au noyau de $\mu_z : H^p_\beta(\widetilde{B}) \to H^p_\beta(\widetilde{B})$, morphisme qui s'insère dans la suite exacte :

$$H^{p-1}_\beta(\widetilde{B}) \to H^{p-1}_\beta(r_*\widetilde{A}) \xrightarrow{\partial_z} H^p_\beta(\widetilde{B}) \xrightarrow{\mu_z} H^p_\beta(\widetilde{B}),$$

dont le premier groupe est nul (B est régulier, donc de Cohen-Macaulay). Si $\beta \notin \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Spec} B - \operatorname{Spec} A$ est un voisinage de β, sur lequel le faisceau $r_*\widetilde{A}$ est nul; donc :

$$H^{p-1}_\beta(r_*\widetilde{A}) = \operatorname{Hom}_B(A, H^p_\beta(\widetilde{B})) = 0.$$

Si $\beta \in \operatorname{Spec} A$, $H^{p-1}_\beta(\operatorname{Spec} B; r_*\widetilde{A})$ s'identifie à $H^{p-1}_\beta(\operatorname{Spec} A; \widetilde{A})$, et ainsi :

$$\coprod_{\beta \in T^p - T^{p+1}} \operatorname{Hom}_B(A, H^p_\beta(\widetilde{B}))$$

s'identifie à :

$$\coprod_{\alpha \in Z^{p-1} - Z^p} H^{p-1}_\alpha(\widetilde{A}) = \Gamma\mathscr{H}^{p-1}_{Z^{p-1}/Z^p}(\widetilde{A}).$$

Nous avons obtenu un isomorphisme Δ_z (dépendant du générateur choisi z de l'idéal de V) :

$$\Delta_z : \quad L_{V,x}^{p-1} \approx \mathrm{Hom}_B(A, L_{W,y}^p).$$

Nous allons en déduire un isomorphisme :

$$\bar{f} : \quad \mathbf{K}_{V,x}^q \approx \mathrm{Hom}_B(A, \mathbf{K}_{W,y}^q).$$

Il suffit pour cela d'indiquer qu'il y a un isomorphisme naturel :

$$\omega_z : \Omega_{V,x} \otimes_A \mathrm{Hom}_B(A, L_{W,y}^p) \approx \mathrm{Hom}_B(A, \Omega_{W,y} \otimes_B L_{W,y}^p),$$

provenant du ρ-morphisme de $\Omega_{W,y}$ dans $\Omega_{V,x}$ qui, à la forme différentielle holomorphe $\psi_\wedge dz$, associe la forme $\psi_{|V}$; on vérifie enfin que l'isomorphisme $\bar{f}$ ainsi décrit ne dépend pas de z : si on remplace z par z', Δ est multiplié par $(z/z')_{|V}$, et ω^{-1} aussi (on a pu reconnaître le formalisme de la construction d'une classe-résidu) ([1]).

B. *Le recollement des fibres.*

Etant donné un ouvert U de $\mathbf{C}^n$, nous allons indiquer comment on recolle les complexes $L_{U,x}^\bullet$ aux divers points $x \in U$ pour obtenir une résolution à fibres injectives $L_U^\bullet$ de $\mathcal{O}_U$. Etant donnée ensuite une variété V, pour obtenir $\mathbf{K}_V^\bullet$, il ne restera plus qu'à recoller des $L_U^\bullet$, puis à tensoriser au-dessus de $\mathcal{O}_V$ par Ω_V.

Si K est un polydisque fermé de $\mathbf{C}^n$ ([2]), l'anneau $\mathcal{O}_K$ des germes de fonctions analytiques au voisinage de K est noethérien (cf. [5]). Nous appellerons $L_K^\bullet$ le complexe des sections globales (sur Spec $\mathcal{O}_K$) du complexe de Cousin de $\mathcal{O}_K$.

Si K′ est un sous-polydisque fermé de K, l'application restriction $\rho_{KK'}$ de $\mathcal{O}_K$ dans $\mathcal{O}_{K'}$ fait de ce dernier un $\mathcal{O}_K$-module plat ([3]); on peut en déduire l'existence d'un $\rho_{KK'}$-morphisme naturel de $L_K^\bullet$ dans $L_{K'}^\bullet$, dont nous donnerons ci-dessous une construction explicite (on remarquera qu'en fait cette construction n'utilise pas la platitude de $\mathcal{O}_{K'}$ sur $\mathcal{O}_K$). Nous montrerons ensuite que si x est un point intérieur au polydisque K, le morphisme naturel $\varinjlim_{x \in \mathring{K}'} L_{K'}^\bullet \to L_x^\bullet$ (la limite étant étendue aux polydisques : $x \in \mathring{K}' \subset K$) est un isomorphisme. Il sera alors loisible de décider qu'une section au-dessus d'un ouvert U de $\mathbf{C}^n$ de la collection des $L_x^\bullet$ $(x \in U)$ est continue si, localement, elle est induite par un élément d'un $L_K^\bullet$.

([1]) Après recollement des fibres, $\bar{f}$ induit l'isomorphisme canonique de Ω_V sur $\mathcal{E}xt^{n-p}(W; \mathcal{O}_V, \Omega_W)$, où n désigne la dimension de W et p celle de V. Pour vérifier la compatibilité de $\bar{f}$ et des traces, il convient de réinterpréter cet isomorphisme : il provient de morphismes :

$$\mathcal{D}'^{p,p-i}_V \to \mathcal{H}om(W; \mathcal{O}_V, \mathcal{D}'^{n,n-i}_W),$$

eux-mêmes « *transposés* » des morphismes naturels :

$$\mathcal{E}_V^{0,i} \leftarrow \mathcal{E}_W^{0,i} \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_V.$$

([2]) Pour être tout à fait honnête, on utilise en fait des polydisques « *tordus* » par un changement de carte.
([3]) Ceci résulte des théorèmes A et B au voisinage de K′ et du théorème d'Oka.

(i) *Germes au voisinage d'un polydisque.*

On définit comme d'habitude les germes d'ensembles analytiques au voisinage d'un polydisque fermé K de $\mathbf{C}^n$. Soit $\mathbf{I} : X_K \to \mathbf{I}(X_K)$ l'application qui, à un germe d'ensemble analytique au voisinage de K, associe l'idéal des germes de $\mathcal{O}_K$ qui s'annulent identiquement dessus; $\mathbf{I}$ réalise une bijection [1] entre les germes d'ensemble analytique au voisinage de K et les fermés de Spec $\mathcal{O}_K$, les germes irréductibles correspondant aux fermés irréductibles de Spec $\mathcal{O}_K$ (i.e. aux idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$). De plus, $\operatorname{codim} X_K = \operatorname{codim} \mathbf{I}(X_K)$ (codim X_K étant la codimension « géométrique » ordinaire et codim $\mathbf{I}(X_K)$ la codimension du fermé associé à $\mathbf{I}(X_K)$ dans Spec $\mathcal{O}_K$).

Soient A et A' deux anneaux (commutatifs unitaires). A tout homomorphisme $\varphi : A \to A'$, on associe l'application continue $\varphi^a : \operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$.

On dira que le triplet (A, A', φ) satisfait à la condition (C) si :

$$(\varphi^a)^{-1}(\overline{\{x\}}) = \overline{\{(\varphi^a)^{-1}(x)\}} \quad \text{pour tout } x \in \operatorname{Spec} A.$$

Il est facile de voir que, si (A, A', φ) satisfait à (C), l'application φ^a est compatible avec les filtrations canoniques de Spec A et Spec A' :

$$(\varphi^a)^{-1}(Z_p(A)) \subset Z_p(A').$$

Lemme 10. — Si K *et* K' *sont des polydisques fermés de* $\mathbf{C}^n$, *avec* $K' \subset K$, *le triplet* $(\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_{K'}, \rho_{KK'})$ *vérifie la condition* (C).

L'application φ^a étant continue, l'ensemble $(\varphi^a)^{-1}(\overline{\{x\}})$ est fermé et on a : $\overline{\{(\varphi^a)^{-1}(x)\}} \subset (\varphi^a)^{-1}(\overline{\{x\}})$.

Il reste à prouver l'inclusion inverse. Soit z un idéal premier de $\mathcal{O}_K$. On lui associe un germe irréductible Z_K (au voisinage de $K : z = \mathbf{I}(Z_K)$). La restriction $Z_{K'}$ de ce dernier en un germe au voisinage de K' admet la décomposition irréductible $Z_{K'} = \bigcup_{i=1,\ldots,m} Z^i_{K'}$. Posant $z'_i = \mathbf{I}(Z^i_{K'})$, on vérifie que les z'_i sont les idéaux premiers maximaux de $\mathcal{O}_{K'}$ au-dessus de z. Ainsi, si y est une spécialisation de $x \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, les idéaux premiers de $\mathcal{O}_{K'}$ au-dessus de y sont des spécialisations des idéaux maximaux de $\{(\varphi^a)^{-1}(x)\}$.

(ii) *Le morphisme* $L^\bullet_K \to L^\bullet_{K'}$.

Soit α un point de codimension p de Spec $\mathcal{O}_K$. Nous devons (d'après (A) dont nous reprenons les notations) construire un $\rho_{KK'}$-morphisme λ de $H^p_\alpha(\widetilde{\mathcal{O}}_K)$ dans :

$$\coprod_{\beta \in Z^p(\mathcal{O}_{K'}) - Z^{p+1}(\mathcal{O}_{K'})} H^p_\beta(\widetilde{\mathcal{O}}_{K'}).$$

Nous n'expliciterons que le cas $p \geq 2$; pour $p = 0, 1$, la situation est semblable. Interprétons d'abord $H^p_\alpha(\widetilde{\mathcal{O}}_K)$: c'est la limite, pour les ouverts affines contenant α, de

[1] Un idéal quelconque $J \subset \mathcal{O}_K$ est engendré par un nombre fini de germes $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_K$ et on a le « Nullstellensatz » :

Racine de $J = \mathbf{I}$(germe défini par $(f_1, \ldots, f_m)$).

$H^p_{\{\overline{\alpha}\}}(U;\widetilde{\mathcal{O}}_K)$. Lorsque U est affine, $H^i(U;\widetilde{\mathcal{O}}_K)$ est nul pour $i\geqslant 1$, et $H^p_{\{\overline{\alpha}\}}(U;\widetilde{\mathcal{O}}_K)$ s'identifie à $H^{p-1}(U-\overline{\{\alpha\}};\widetilde{\mathcal{O}}_K)$. Soit $f\in\mathcal{O}_K$; on lui associe l'ouvert affine $D_f=\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K-V(f)$. Si $D_{f_1},\ldots,D_{f_m}$ est un recouvrement affine de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K-\overline{\{\alpha\}}$, les $D_{f_j}\cap U$ forment, pour tout ouvert affine $U=D_g$, un recouvrement ouvert affine de $U-\overline{\{\alpha\}}$ et, d'après le théorème de Leray, un élément de $H^{p-1}(U-\overline{\{\alpha\}};\widetilde{\mathcal{O}}_K)$ s'identifie à un cocycle (modulo les cobords) de ce recouvrement. Soit $g_{j_1,\ldots,j_p}$ un cocycle ainsi associé à un élément $c\in H^p_\alpha(\widetilde{\mathcal{O}}_K)$ $(g_{j_1,\ldots,j_p}\in(gf_{j_1}\ldots f_{j_p})^{-1}\mathcal{O}_K)$. La restriction $\rho_{KK'}$ induit l'application $\rho^a_{KK'}$ de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}$ dans $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, l'image réciproque par $\rho^a_{KK'}$ d'un ouvert affine est évidemment encore un ouvert affine.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la construction de λ :

S'il n'y a pas d'idéal premier de $\mathcal{O}_{K'}$ au-dessus de α, nous posons $\lambda_{|H^p_\alpha(\widetilde{\mathcal{O}}_K)}=0$. Sinon, les idéaux premiers maximaux au-dessus de α sont en nombre fini, et tous de la même codimension que α (cf. (B), (i)), désignons-les par $\beta_1,\ldots,\beta_s$. Les ouverts $D_{\rho_{KK'}}(f_j)$ forment un recouvrement affine de $(\rho^a_{KK'})^{-1}(U)-(\overline{\{\beta_1\}}\cup\ldots\cup\overline{\{\beta_s\}})$, et les $\rho_{KK'}(g_{j_1,\ldots,j_p})$ déterminent un cocycle de ce recouvrement, donc un élément γ de $H^{p-1}((\rho^a_{KK'})^{-1}(U)-\bigcup_{i=1,\ldots,s}\overline{\{\beta_i\}};\widetilde{\mathcal{O}}_{K'})$. On peut trouver un voisinage affine V de β_k contenu dans $(\rho^a_{KK'})^{-1}(U)-\bigcup_{i\neq k}\overline{\{\beta_i\}}$. La restriction de γ à $H^{p-1}(V-\overline{\{\beta_k\}};\widetilde{\mathcal{O}}_{K'})$ induit un élément de $H^p_{\{\overline{\beta}_k\}}(V;\widetilde{\mathcal{O}}_{K'})$, donc un élément γ_k de $H^p_{\beta_k}(\widetilde{\mathcal{O}}_{K'})$. Nous poserons :

$$\lambda(c)=\sum_{k=1,\ldots,s}\gamma_k.$$

En utilisant le lemme 10, on vérifie (sans autre difficulté que l'écriture des diagrammes...) que le morphisme (d'objets gradués) ainsi obtenu coïncide avec le $\rho_{KK'}$-morphisme (de complexes) canonique de $L^\bullet_K$ dans $L^\bullet_{K'}$ (dont on prouve l'existence en utilisant la platitude de $\mathcal{O}_{K'}$ sur $\mathcal{O}_K$ et la compatibilité de $\rho_{KK'}$ avec les filtrations canoniques de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ et $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}$).

(iii) *Surjectivité de* $\varinjlim_{x\in K} L^\bullet_K\to L^\bullet_x$.

Soient $\beta\in Z^p-Z^{p+1}$, et $\gamma\in H^p_\beta(\widetilde{\mathcal{O}}_x)$. Il existe un polydisque K voisinage de x tel que $(\rho^a_{Kx})^{-1}\rho^a_{Kx}(\beta)$ soit égal à β (ce qui entraîne $(\rho^a_{K'x})^{-1}\rho^a_{K'x}(\beta)=\beta$, pour tout $K' : x\in K'\subset K$, et en particulier que les idéaux premiers $\alpha_{K'}=\rho^a_{K'x}(\beta)$ ont tous même hauteur p). Choisissons des générateurs $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ de α_K, et soit ψ un élément de $\mathcal{O}_x-\beta$ (ψ détermine un voisinage affine D_ψ de β). Supposons toujours $p\geqslant 2$: γ est représenté par un cocycle $\gamma_{i_1\ldots i_p}$ $(\gamma_{i_1\ldots i_p}\in(\psi\rho_{Kx}(\varphi_{i_1})\ldots\rho_{Kx}(\varphi_{i_p}))^{-1}\mathcal{O}_x)$. Choisissons un polydisque $L\subset K$ tel que ψ se relève en $\overline{\psi}$ dans $\mathcal{O}_L$ et tel que les $\gamma_{i_1\ldots i_p}$ se relèvent en $\overline{\gamma}_{i_1\ldots i_p}(\overline{\psi}\rho_{KL}(\varphi_{i_1})\ldots\rho_{KL}(\varphi_{i_p}))^{-1}\mathcal{O}_L$ formant un cocycle. Ce cocycle induit un élément $\overline{\gamma}$ de $H^p_{\alpha_L}(\widetilde{\mathcal{O}}_L)$ tel que $\lambda(\overline{\gamma})=\gamma$.

(iv) *Injectivité de* $\varinjlim_{x \in K} L^{\bullet}_{K} \to L^{\bullet}_{x}$.

L'injectivité se prouve de façon toute semblable (en remarquant que si $\beta_1, \ldots, \beta_s$ appartiennent à $Z^p - Z^{p+1}$, on peut trouver un polydisque fermé K, voisinage de x, aussi petit que l'on veut, tel que $(\rho^a_{Kx})^{-1}\rho^a_{Kx}(\beta_i)$ soit égal à β_i $(i = 1, \ldots, s)$).

Ayant décrit le complexe dualisant d'une variété, nous pouvons donner quelques précisions sur celui d'un espace X, tel que construit au § 3 :

En un point x de X, ce complexe semble, *a priori*, pouvoir être non nul du degré 0 au degré égal à l'opposé de la dimension tangentielle de X en x. En fait, l'interprétation donnée en (B), (ii) du complexe dualisant d'une variété montre que $\mathbf{K}^{\bullet}_X$ est nul en degrés inférieurs à l'opposé de la dimension de X en x (ceci entraîne d'ailleurs, par dualité, que les $H^i(X; \mathscr{F})$ sont nuls dès que $\mathscr{F}$ est cohérent et que i excède la dimension de X). D'autre part, il est clair par construction que $\mathbf{K}^{\bullet}_X$ est à cohomologie cohérente, et même à cohomologie nulle en degrés strictement supérieurs à l'opposé de la profondeur de X (si X admet un plongement f dans une variété U, on a : $H^i(\mathbf{K}^{\bullet}_X) = f^* \operatorname{Ext}^i(U; f_* \mathcal{O}_X, \mathbf{K}^{\bullet}_U)$).

Ainsi, dans le cas où X est une courbe, $\mathbf{K}^{\bullet}_X$ est une résolution d'un faisceau cohérent placé en degré -1, à savoir son $(-1)^{\text{ième}}$ faisceau de cohomologie (faisceau que l'on peut interpréter [11] à l'aide des formes différentielles régulières sur la courbe normalisée de X, et qui est inversible si X est une intersection complète ([1]).

Unicité du complexe dualisant.

Soient X un espace analytique et $\mathcal{O}$ son faisceau structural. On désigne par $\mathbf{D}(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des $\mathcal{O}$-Modules, par $\mathbf{D}_c(X)$ (resp. $\mathbf{D}^+_c(X)$, resp. $\mathbf{D}^-_c(X)$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}(X)$ dont les objets sont des complexes à cohomologie cohérente (resp. des complexes bornés à gauche, resp. à droite, à cohomologie cohérente).

Soit $\mathbf{R}^{\bullet} \in \operatorname{Ob} \mathbf{D}^+_c(X)$ un complexe dont les fibres sont de dimension injective finie (pour tout $x \in X$, il existe $n(x) \in \mathbf{Z}$ tel que $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_x}(\mathbf{C}, \mathbf{R}^{\bullet}_x) = 0$ pour $i > n(x)$). On lui associe le foncteur :

$$D : \mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(X)$$
$$D : F^{\bullet} \to R \operatorname{Hom}^{\bullet}(F^{\bullet}, \mathbf{R}^{\bullet}).$$

Définition. — Un complexe $F^{\bullet} \in \operatorname{Ob} \mathbf{D}(X)$ *est dit réflexif par rapport à* $\mathbf{R}^{\bullet}$ *si l'application naturelle* $F^{\bullet} \to DD(F^{\bullet})$ *est un isomorphisme.*

Définition. — Si tout $F^{\bullet} \in \operatorname{Ob} \mathbf{D}_c(X)$ *est réflexif par rapport à* $\mathbf{R}^{\bullet}$, *on dit que* $\mathbf{R}^{\bullet}$ *est un complexe dualisant.*

([1]) Nous verrons plus loin que ce faisceau est inversible si et seulement si X est « de Gorenstein ».

Proposition 1. — Pour un complexe $\mathbf{R}^\bullet \in \mathrm{Ob}\, \mathbf{D}^+_c(X)$, *à fibres de dimension injective finie, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le complexe* $\mathbf{R}^\bullet$ *est dualisant.*

(ii) *Le faisceau structural* $\mathcal{O}$ *est réflexif par rapport à* $\mathbf{R}^\bullet$.

(iii) *Pour tout* $x \in X$, *le complexe (de* $\mathcal{O}_x$*-modules)* $\mathbf{R}^\bullet_x$ *est dualisant.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) est clair; il reste à établir (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (i) Le complexe $\mathbf{R}^\bullet$ est isomorphe (dans $\mathbf{D}^+(X)$) à un complexe $I^\bullet$ de $\mathcal{O}$-Modules injectifs. Le morphisme naturel $F^\bullet \to DD(F^\bullet)$ (de $\mathbf{D}(X)$) provient d'un morphisme de complexes

(1) : $F^\bullet \to \mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{Hom}^\bullet(F^\bullet, I^\bullet), I^\bullet)$ (cf. [7], chap. V, (1.2)).

Si (ii) est satisfaite, le morphisme (1) associé à $F^\bullet = \mathcal{O}$ est un quasi-isomorphisme, donc induit un quasi-isomorphisme sur les fibres (d'après la cohérence des objets de cohomologie), et (iii) est vérifiée ([7], chap. V, (2.1), (iv)). Inversement, si (iii) est vraie, le morphisme (1) induit l'application naturelle $F^\bullet_x \to D_x D_x(F^\bullet_x)$, qui est un isomorphisme, donc (1) est un quasi-isomorphisme sur les fibres et, par suite, un quasi-isomorphisme. Ainsi (1) induit un isomorphisme $F^\bullet \to DD(F^\bullet)$ et (i) est satisfaite.

Théorème 3 — Soit X *un espace analytique connexe. Soit* $\mathbf{R}^\bullet$ *un complexe dualisant sur* X. *Si* $\mathbf{R}'^\bullet \in \mathrm{Ob}\, \mathbf{D}(X)$, *il est dualisant si et seulement s'il existe un entier n et un faisceau inversible* $\mathscr{L}$ *sur* X *tels que :*

$$\mathbf{R}'^\bullet \cong \mathbf{R}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} T^n \mathscr{L} \qquad (\textit{dans } \mathbf{D}(X)).$$

De plus, si $\mathbf{R}'^\bullet$ *est dualisant,* $\mathscr{L}$ *et n sont déterminés de manière unique.*

Si $\mathbf{R}'^\bullet = \mathbf{R}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} T^n \mathscr{L}$, il est clair que $\mathbf{R}'^\bullet$ est dualisant. Inversement si $\mathbf{R}^\bullet$ et $\mathbf{R}'^\bullet$ sont dualisants, on désigne par D et D′ les foncteurs dualisants qui leur sont associés et on « recopie » ([7], chap. V, (3.1)). Posant $L^\bullet = D'D(\mathcal{O})$ et $L'^\bullet = DD'(\mathcal{O})$, on montre que $L^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} L'^\bullet \cong \mathcal{O}$; on conclut par l'analogue de ([7], chap. V, (3.3)).

Si $\mathbf{K}^\bullet_X$ est le complexe associé à l'espace analytique X, il est clair qu'il est dualisant (ce qui justifie notre terminologie!). Le théorème d'unicité va nous permettre dans certains cas particuliers d'obtenir des renseignements sur $\mathbf{K}^\bullet_X$.

Cas particuliers.

Espaces analytiques de Gorenstein :

Soit A un anneau local noethérien intègre. Rappelons que A est dit « de Gorenstein », si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées (cf. [2] et [7]) :

(i) A est un complexe dualisant (pour lui-même).

(ii) A admet une résolution injective finie.

(iii) Il existe un entier d tel que :

$$\mathrm{Ext}^i_A(k, A) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq d \\ k & \text{pour } i = d \end{cases}$$ (k désigne le corps résiduel de A).

Un anneau de Gorenstein est de Cohen-Macaulay; on en déduit que l'entier d de (iii) est la dimension de Krull de A.

Si A est un anneau noethérien, on dira qu'il est de Gorenstein, si tous ses localisés le sont (i.e. si le schéma (Spec A, $\widetilde{A}$) est un schéma de Gorenstein!).

Définition. — On dira qu'un espace analytique X, *de faisceau structural* $\mathcal{O}$, *est « de Gorenstein » si, pour tout* $x \in X$, $\mathcal{O}_x$ *est un anneau de Gorenstein.*

Proposition 2. — Soit X *un espace analytique de dimension n. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est un espace analytique de Gorenstein.*

(ii) « *Le* » *complexe dualisant* $\mathbf{K}^\bullet_X$ *est une résolution d'un faisceau inversible (placé en degré* $-n$*).*

(iii) *Le faisceau structural* $\mathcal{O}$ *est dualisant.*

(i)$\Leftrightarrow$(iii) d'après la proposition 1 et (ii)$\Leftrightarrow$(iii) d'après le théorème 3.

Intersections complètes.

Soit $X \subset U \subset \mathbf{C}^m$ une intersection complète définie par $m-n$ fonctions scalaires $f_1, \ldots, f_{m-n} \in \mathcal{O}(U)$. Il est facile de voir que l'espace analytique X, quotient de $\mathcal{O}(U)$ par l'idéal engendré par les f_i, est de Gorenstein (cf. [2]). On peut ainsi « remplacer » $\mathbf{K}^\bullet_X$ par un faisceau inversible Ω que le complexe de Koszul $K^{\mathcal{O}(U)}(f_1, \ldots, f_{m-n})$ permet de « calculer » :

$$\Omega = H^{-n}(\mathbf{K}^\bullet_X) = \mathrm{Ext}^{m-n}_{\mathcal{O}(U)}(\mathcal{O}(X), \Omega^m(U)) = H^{\mathcal{O}(U)}(f_1, \ldots, f_{m-n}; \Omega^m(U)) = \mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \Omega^m(U).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti et H. Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 193-259.

[2] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Zeitschrift*, **82** (1963), 8-28.

[3] G. E. Bredon, *Sheaf Theory*, McGraw-Hill, 1967, 176.

[4] P. Cartier, Les groupes $\mathrm{Ext}^s(A, B)$, *Séminaire A. Grothendieck*, 1956-1957 (exposé n° 3).

[5] J. Frisch, Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes, *Inventiones Math.*, **4** (1967), 118.

[6] A. Grothendieck, *Espaces vectoriels topologiques*, São Paulo, 1964.

[7] R. Hartshorne, Residues and Duality, *Lecture Notes in Mathematics*, **20**, Springer Verlag, 1966.

[8] R. Hartshorne, Local Cohomology, *Lecture Notes in Mathematics*, **41**, Springer Verlag, 1967.

[9] B. Malgrange, Faisceaux sur les variétés analytiques réelles, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957).

[10] B. Malgrange, Systèmes différentiels à coefficients constants, *Séminaire Bourbaki*, t. 15, 1962-1963, n° 246.

[11] J.-P. Serre, Un théorème de dualité, *Comm. Math. Helv.*, **29** (1955), 9-26.

[12] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Paris, Hermann, 1959.

[13] Y. T. Siu, Analytic sheaf cohomology groups of dimension *n* of *n*-dimensional complex spaces, *Trans A.M.S.*, **143** (1969).

[14] K. Suominen, Duality for coherent sheaves on analytic manifolds, *Ann. Acad. Scient. Fennicae*, Helsinki, 1968.

[15] F. Trèves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, New York, Academic Press, 1967.

Manuscrit reçu le 19 décembre 1969.