PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

JURII I. MANIN

Rational surfaces over perfect fields (en russe)

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 30 (1966), p. 55-97
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1966__30__55_0>

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ НАД СОВЕРШЕННЫМИ ПОЛЯМИ

Ю. И. МАНИН

Пусть k-совершенное поле, F-алгебраическая поверхность над k. Поверхность F называется рациональной, если $F\otimes_k \overline{k}$ бирационально эквивалентна плоскости над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k. Поводом для рассмотрения таких поверхностей слежат прежде всего диофантовы задачи: неособая кубическая поверхность в $\mathbf{P}^3$ рациональна. Если рациональная поверхность F бирационально эквивалентна плоскости уже над k, то множество ее k-точек парамеризуется двумя независимыми параметрами <исключения лежат на конечном числе кривых>. В противном случае вопрос о существовании и описании множества всех k-точек <например, когда k-числовое поле>, является трудной задачей.

Аналогичная одномерная задача была рассмотрена в конце прошлого века и получила полное решение в работе Гильберта и Гурвица. Наличие k-точки и бирациональная тривиальность над k для неособых кривых рода нуль равносильны; всякая неособая кривая рода нуль над k становится изоморфной $\mathbf{P}^1$ над $\overline{k}$, то есть принадлежит к классу многообразий Севери-Брауэра — бирегулярных форм проективных пространств. Наконец, вопрос о существовании точки в числовом случае решается чисто локальными средствами.

Причина резкого усложнения ситуации при переходе к двумерному случаю состоит в том, что группа Кремоны Cr бирациональных автоморфизмов плоскости значительно больше проективной группы. Множество $H^1(k, \mathrm{Cr})$ бирациональных форм плоскости далеко не исчерпывается классами поверхностей Севери-Брауэра. В фундаментальной работе Энриквеса [7] классический « метод присоединения » используется для доказательства того, что всякая рациональная поверхность бирационально приводится над k к одной из поверхностей довольно ограниченного класса. Модернизированное изложение результатов Энриквеса содержится в первом параграфе нашей работы. Грубо говоря, на всякой рациональной поверхности можно найти либо пучок эллиптических, либо пучок рациональных кривых, параметризованный кривой рода нуль. Минимальные неособые поверхности первого типа имеют ранг группы Пикара ≤ 10, и тем самым « зависят от конечного числа параметров »; у поверхностей второго типа ранг группы Пикара неограничен.

Энриквес оставил открытым вопрос о дальнейшей классификации рациональных поверхностей. Эта задача исследоваласъ в работах Комессатти [6] и Сегре [18] в случае основного поля $k=\mathbf{R}$ а также в работе Сегре [17] для кубических поверхностей над произвольным полем нулевой характеристики. В недавней работе Исковских [10] метод Комессатти обобщается на некоторый класс рациональных поверхностей над произвольным полем. Основные результаты этих работ заключаются в отыскании бирациональных инвариантов рациональных поверхностей над основным полем. Во втором параграфе этой работы предлагается новые инварианты такого рода. Пусть F-рациональная поверхность, N(F)-группа классов дивизоров на $F\otimes_k\bar{k}$, рассматриваемая как модуль над группой Галуа G алгебраического замыкания основного поля. По известной двойственности Тэйта, G-модулю N(F) соответствует некоторый k-тор T. Оказывается, что все инварианты тора T, описанные в работе Оно [16] в частности $i(T)$, $h(T)$, $\tau(T)$, когда они определены, зависят лишь от бирационального класса поверхности F. Напомним, что $h(T)$ есть порядок группы $H^1(k, N(F))$; в действительности сама эта группа, а не только ее порядок, является инвариантом F. Мы пользуемся этим для доказательства того, что множество $H^1(k, Cr)$ бесконечно, если k-конечное поле. Этот результат впервые был доказан другим методом в работе Исковских; он показывает глубокое отличие группы Кремоны от алгебраических групп.

Третий параграф посвящен изучению рациональных поверхностей дель Пеццо, которые здесь определяются как поверхности с очень обильным антиканоническим классом. Исключительные кривые на них образуют классические конфигурации, богатые симметриями и играющие существенную роль в бирациональной классификации. Все рассматриваемые нами поверхности над $\bar{k}$ могут быть представлены как регулярные образы кубической поверхности в $\mathbf{P}^3$; из наших результатов поэтому следуют (иногда в более сильном варианте) ряд теорем работы Сегре [17], которая в значительной степени стимулировала интерес автора к этой теме.

Наконец, в четвертом параграфе высказывается гипотеза о том, что у всякой рациональной поверхности над C_1-полем k имеется k-точка, и приводятся некоторые аргументы в ее пользу.

Я глубоко признателен И.Р. Шафаревичу, который привлек мое внимание к рассматриваемому кругу вопросов и беседы с которым были для меня очень полезны. В частности, ему принадлежит весьма важное замечание, что из теоремы 2.2 вытекает следствие в п. 2.3.

0. Предварительные сведения

Всюду в дальнейшем k-фиксированное совершенное поле; $\bar{k}$-его алгебраическое замыкание, $G=G(\bar{k}/k)$-группа Галуа. Поверхность-это двумерная геометрически неприводимая алгебраическая k-схема; если не оговорено противное, все поверхности предполагаются приведенными.

Ниже сформулированы необходимые для дальнейшего факты.

0.1. ЛЕММА. — *(о разрешении особенносей над k). Пусть* F*-собственная k-поверхность. Существует регулярная собственная k-поверхность* F′ *и бирациональный k-морфизм* $F' \to F$.

0.2. ЛЕММА. — *(об устранении точек неопределенности рационального отображения над k). Пусть* F*-как в лемме* 0.1; $f : F \to X$*-рациональное отображение в алгебраическую k-схему* X. *Тогда существует такая собственная k-поверхность* F′, *такой бирациональной k-морфизм* $g : F' \to F$ *и такой k-морфизм* $h : F' \to X$, *что диаграмма рациональных отображений*

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ F \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

коммутативна.

(См. Абьянкар [1], и библиографию в этой книге).

0.3. Кривая на поверхности — это эффективный дивизор Картье, а также подсхема, соответствующая этому дивизору (Артин [3]) Группа $G = G(\overline{k}/k)$ действует на $F \otimes \overline{k}$ через второй множитель (здесь и в дальнейшем мы пишем $F \otimes \overline{k}$ вместо $F \otimes_k \overline{k}$).

ЛЕММА. — *Пусть* F — *k-поверхность,* $\overline{X} \subset F \otimes \overline{k}$*-некоторый дивизор. Дивизор* $X \subset F$ *такой, что* $\overline{X} = X \otimes \overline{k}$, *существует в том и только в том случае, когда* $s(\overline{X}) = \overline{X}$ *для всех* $s \in G$.

См. Картье [5] (Действие G на дивизор: это элемент группы $H^0(R(F \otimes \overline{k}) / \mathcal{O}^*_{F \otimes \overline{k}})$ и снова действие определяется через множитель $\overline{k}$). [Здесь $R(F \otimes \overline{k})$ — поле функций над $F \otimes k$].

0.4. k-поверхность F, собственная и регулярная называется k-минимальной поверхностью, если любой ее бирациональный k-морфизм $F \to F'$, где F′-регулярная поверхность, является изоморфизмом.

Пусть $X \subset F \otimes \overline{k}$-неприводимая исключительная кривая первого рода, то-есть такая, что $p_a(X) = 0$, $(X, X) = -1$.

ЛЕММА. — *Собственная регулярная k-поверхность* F *является k-минимальной в том и только в том случае, когда $\overline{k}$-поверхность* $F \otimes \overline{k}$ *либо не содержит неприводимых исключительных кривых первого рода, либо для любой такой кривой* $X \subset F \otimes \overline{k}$ *найдется элемент* $s \in G$ *такой, что* $s(X) \neq X$ *и кривая* $X + s(X)$ *связна.*

Доказательство. — a) Условие достаточно. Действительно, пусть это не так и пусть $f : F \to F'$-бирациональный k-морфизм, не являющийся изоморфизмом. Он индуцирует бирациональный $\overline{k}$-морфизм $\overline{f} : F \otimes \overline{k} \to F' \otimes \overline{k}$; ввиду геометрической регулярности F и F′; существует неприводимая исключительная кривая первого рода $X \subset F \otimes \overline{k}$, для которой $\overline{f}(X)$ является замкнутой точкой. Но тогда $\overline{f}(s(X))$ также является замкнутой точкой; однако не существует такого $\overline{k}$-морфизма, который стягивал бы кривую с неприводимыми компонентами $X, s(X), \ldots,$ ибо это противоречит лемме Мамфорда [13] об отрицательной определенности:

$$(X+s(X).X+s(X))\geqslant 0.$$

б) Условие необходимо.

Пусть $\overline{X}\subset F\otimes\overline{k}$-неприводимая исключительная кривая первого рода; предположим, что она не пересекается со всеми своими сопряженными. Пусть это будут $X_1, \ldots, X_d$; $p_a(X_i)=0$, $(X_i.X_i)=-1$, $(X_i.X_j)=0$, $i\neq j$. В силу леммы 0.3 существует такая кривая $X\subset F$, что

$$X\otimes\overline{k}=\sum_{i=1}^{d} X_i$$

Докажем, что существует бирациональный k-морфизм $f: F\to F'$, стягивающий эту кривую. Доказательство стандартное, и мы ограничимся наброском (см. Артин [3]).

Можно считать, что поверхность F проективная и что выполнены следующие условия:

$$H^1(F, \mathcal{O}(1))=0,$$
$$(\mathcal{O}(1).\mathcal{O}_F(X))=ad, \quad a\in\mathbf{Z}.$$

Тогда имеет место точная последовательность

$$0\to\mathcal{O}(1)\to\mathcal{O}_F(aX)(1)\to\mathcal{O}_{aX}\to 0$$

(Действительно, нуждается в проверке лишь точность в третьем члене: она следует из того, что фактором является пучок, локально изоморфный $\mathcal{O}_{aX}$ и соответствующий дивизору на X степени

$$(\mathcal{O}_F(aX)(1).\mathcal{O}_F(aX))=-a^2d+a^2d=0.$$

Так как $X\otimes\overline{k}$ распадается на непересекающиеся кривые рода нуль, на каждой из которых индуцируется дивизор нулевой степени, получаем треб уемое).

Отсюда находим точную последовательность

$$0\to H^0(F, \mathcal{O}(1))\xrightarrow{i} H^0(F, \mathcal{O}_F(aX)(1))\to H^0(F, \mathcal{O}_{aX})\to 0.$$

Пусть s_0-прообраз $1\in H^0(F, \mathcal{O}_{aX})$; $s_1, \ldots, s_n$-базис i-образа пространства $H^0(F, \mathcal{O}(1))$.

k-морфизм $f: F\to\mathbf{P}_k^n$, определенный пучком $\mathcal{O}_F(aX)(1)$ и набором его сечений $(s_0, \ldots, s_n)$, бирационален и является изоморфизмом на $F\setminus X$; кроме того, $s_0(x)=1$, $s_1(x)=\ldots=s_n(x)=0$ для любой точки $x\in X$, так что кривая X стягивается. Хорошо известно, что поверхность $f(F)\otimes\overline{k}$ регулярна; следовательно, ввиду совершенства поля k, поверхность $f(F)$ тоже регулярна. Лемма доказана.

0.5. ЛЕММА. — *Пусть $x\in F$ замкнутая точка на проективной k-поверхности F, рассматриваемая как подсхема с приведенной структурой. Пусть $f: F'\to F$-моноидальное преобразование с центром x. Пусть $x_1, \ldots, x_n\in F\otimes\overline{k}$-геометрические точки, лежащие над x, отождествляемые с замкнутыми точками $F\otimes\overline{k}$.*

Тогда морфизм $\overline{f}: \mathrm{F}'\otimes\overline{k} \to \mathrm{F}\otimes\overline{k}$, *индуцированный* f, *является моноидальным преобразованием с центром в* $\bigcup_{i=1}^{n} x_i$. *Точки* x_i *сопряжены относительно* G.

Наоборот, пусть задан набор сопряженных точек $x_i \in \mathrm{F}\otimes\overline{k}$ *и пусть* $\overline{f}: \overline{\mathrm{F}'} \to \mathrm{F}\otimes\overline{k}$*-моноидальное преобразование с центром* $\bigcup_{i=1}^{n} x_i$. *Тогда существует такая замкнутая точка* $x \in \mathrm{F}$, *что* $x\otimes\overline{k} = \bigcup_{i=1}^{n} x_i$, *и* $\overline{f} = f\otimes\overline{k}$, *где* f*-моноидальное преобразование с центром в* x.

1. Теорема Энриквеса

1.1. Будем называть k-поверхность F рациональной, если поверхность $\mathrm{F}\otimes\overline{k}$ бирационально эквивалентна плоскости, то есть поле функций $\mathrm{R}(\mathrm{F}\otimes\overline{k})$ является чистым расширением поля $\overline{k}$ степени трансцендентности два. Когда мы говорим, что k-поверхности F и F′ бирационально эквивалентны, мы всегда подразумеваем бирациональную эквивалентность над k. В этом случае, как следует из леммы 0.1, существует k-поверхность F″ и бирациональные k-морфизмы $f: \mathrm{F}'' \to \mathrm{F}$, $g: \mathrm{F}'' \to \mathrm{F}'$, Мы будем говорить, что поверхности F и F′ квазибирационально эквивалентны если существует поверхность F″, и морфизмы f, g предполагаемые радикальными и доминирующими. Для основного поля характеристики нуль эти понятия совпадают.

1.2. ТЕОРЕМА. — *Пусть* F*-рациональная* k*-поверхность. Существует регулярная собственная* k*-поверхность* F′, *квазибирационально эквивалентная поверхности* F, k*-кривая* C, *и* k*-морфизм* $f: \mathrm{F}' \to \mathrm{C}$ *со следующими свойствами:*

а) *Кривая* C *собственная, регулярная, геометрически неприводима и приведена;* $p_a(\mathrm{C}) = 0$.

б) *Пусть* x*-общая точка кривой* C; *общий слой* F'_x *морфизма* f *является собствнной, геометрически регулярной, геометрически неприводимой* $\varkappa(x)$*-кривой;* $p_a(\mathrm{F}'_x) = 0$ *или* 1.

Доказательство. Для всякой поверхности F символом ω_{F} будем обозначать канонический обратимый пучок на ней, $n(\mathrm{F})$-ранг группы $\mathrm{Num}(\mathrm{F}\otimes\overline{k})$ классов численной эквивалентности кривых на $\mathrm{F}\otimes\overline{k}$. Для всякой собственной регулярной рациональной поверхности F имеем в силу формулы Нетера

$$(\omega_{\mathrm{F}} \cdot \omega_{\mathrm{F}}) + n(\mathrm{F}) = 10;$$

поэтому сделав достаточно много моноидальных преобразований F с центром в замкнутых точках, мы сможем добиться того, что

$$(\omega_{\mathrm{F}} \cdot \omega_{\mathrm{F}}) < 0$$

Можно считать, что F проективна; согласно классическому результату, для всех достаточно больших n имеем:

$$\dim \mathrm{H}^0(\omega_{\mathrm{F}}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}(1)) = 0.$$

(см., например, Серр [19]; данное там доказательство относится к алгебраически замкнутому полю, но тривиальный случай формулы Кюннета показывает то же над k). Поэтому можно выбрать такое $n \geqslant 0$, что

$$\begin{aligned} &\dim H^0(\omega_F^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}(1)) \geqslant 2, \\ &\dim H^0(\omega_F^{\otimes (n+1)} \otimes \mathcal{O}(1)) \leqslant 1. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Выберем два линейно независимых сечения $s_0, s_1 \in H^0(\omega_F^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}(1))$; они определяют рациональное k-отображение $g : F \to \mathbf{P}_k^1$; в силу леммы 0.2 можно считать, что это морфизм, произведя над F несколько моноидальных преобразований. Рассмотрим целое замыкание C схемы $\mathbf{P}_k^1$ в поле R(F); морфизм g представляется в виде

$$F \xrightarrow{h} C \to \mathbf{P}_k^1$$

(см. Гротендик [8], IV, стр. 119-120). Кривая C геометрически неприводима и геометрически приведена, ибо поле k замкнуто в R(F); она, очевидно, собственна, нормальна и значит геометрически нормальна, ибо k-совершенное поле; $p_a(C) = 0$, ибо F-рациональная поверхность. Наконец, в докладе Серра [19] показано, что из условия (1.2.1) вытекает, что

$$p_a((F_{x_{\varkappa(x)}} \otimes \overline{\varkappa(x)})_{\mathrm{red}}) = 0 \quad \text{или} \quad 1, \tag{1.2.2}$$

где x-общая точка кривой C. Общий слой F_x всегда геометрически неприводим.

Если общий слой F_x геометрически приведен (в частности, если Char $k = 0$), все доказано. Иначе воспользуемся предложением 4.6.6 (Гротендик, [8], IV, стр. 69): существует такое конечное радикальное расширение K поля $\varkappa(x)$, что кривая $(F_{x_{\varkappa(x)}} \otimes K)_{\mathrm{red}}$ геометрически приведена. Пусть $C' \to C$-целое замыкание кривой C в поле K; рассмотрим диаграмму

$$(F \times_C C')_{\mathrm{red}} \to F \times_C C' \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} F.$$

Общий слой сквозного морфизма геометрически неприводим и приведен, ибо он изоморфен $(F_{x_{\varkappa(x)}} \otimes K)_{\mathrm{red}}$. Суперъективность и радикальность g очевидна. Регулярность общего слоя следует из теоремы Бертини.

1.3. В дальнейшем мы будем рассматривать бирациональные классы только таких рациональных поверхностей, для которых существует отображение на кривую с указанными в теореме 1.2 свойствами. В характеристике $p \neq 0$ это приводит к пренебрежению радикальными морфизмами.

1.4. Пусть имеется k-морфизм вида $f : F \to C$ с описанными в теореме 1.2 свойствами. C-схему F (относительно морфизма f) назовем C-минимальной, если во всякой коммутативной диаграмме вида

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \\ F' \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

где g, h — k-морфизмы, из того что g-бирационален, следует, что g-изоморфизм. Аналогично, я буду говорить, что $F\otimes\bar{k}$ $(C\otimes\bar{k})$-минимальна, если имеет место то же условие для $\bar{k}$ морфизмов. Положим $\bar{f}=f\otimes\bar{k}: F\otimes\bar{k}\to C\otimes\bar{k}$.

$(C\otimes\bar{k})$-минимальность означает, что в слоях морфизма $\bar{f}$ нет исключительных кривых первого рода; C-минимальность означает, что всякая исключительная кривая, лежащая в геометрическом слое морфизма f, пересекается с какой-нибудь из сопряженных к ней (см. лемму 0.4).

1.5. ТЕОРЕМА. — *Если C-поверхность F C-минимальна, и общий слой имеет род 1, то* $F\otimes\bar{k}$ $(C\otimes\bar{k})$*-минимальна.*

Доказательство. — Пусть это не так и пусть $X\subset F\otimes k$-исключительная кривая первого рода, стягиваемая бирациональным $C\otimes\bar{k}$-морфизмом g. Из коммутативности диаграммы следует, что $X\subset(F\otimes\bar{k})_x$, где $x\in C\otimes\bar{k}$-некоторая замкнутая точка кривой $C\otimes\bar{k}$ (мы отождествляем этот слой с его каноническим образом в $F\otimes\bar{k}$). Исследуем структуру геометрических слоев морфизма g. Нам понадобится следующая лемма:

ЛЕММА. — *Пусть* $F\otimes\bar{k}\to F'$*-некоторый* $(C\otimes\bar{k})$*-бирациональный морфизм, и пусть для замкнутой точки* $x\in C\otimes\bar{k}$ *слой* F'_x *обладает следующими двумя свойствами:*

а) *Для любой его неприводимой компоненты* X *имеем* $(X.X)<0$ *или* $p_a(X)\neq 0$.

б) *Если* X_i, X_j*-разные компоненты слоя* F'_x*, являющиеся неприводимыми исключительными кривыми первого рода, то кривая* X_i+X_j *несвязна.*

Тогда слой $(F\otimes\bar{k})_x$ *обладает теми же свойствами.*

Доказательство. — Лемма легко проверяется в случпе, когда g представляет собой моноидальное преобразование с центром в замкнутой точке; индукция дает требуемое в силу того, что всякий бирациональный морфизм разлагается в произведение таких моноидальных преобразований.

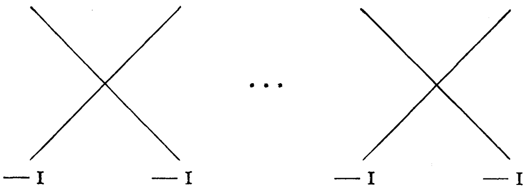
Продолжим доказательство теоремы 1.5.

Заметим, что если $\bar{k}$-морфизм $F'\to C\otimes\bar{k}$ с общим слоем рода 1 определяет $(C\otimes\bar{k})$-минимальную поверхность F', то его геометрические слои удовлетворяют условиям леммы. Это следует из классификации таких слоев, принадлежащей Кодаира и Нерону [15]. Из леммы тогда вытекает, что геометрические слои морфизма $\bar{f}$ удовлетворяют тем же условиям. Пользуясь леммой 0.4 из C-минимальности поверхности F заключаем, что в геометрических слоях морфизма $\bar{f}$ нет исключительных кривых первого рода, что доказывает требуемое.

1.6. ТЕОРЕМА. — *В прежних обозначениях если поверхность* F *C-минимальна, а род общего слоя равен нулю, то существует такая* $(C\otimes\bar{k})$*-поверхность* F' *и такой бирациональный* $(C\otimes\bar{k})$*-морфизм* $g: F\otimes\bar{k}\to F'$, *что*

а) *Структурный морфизм* $F'\to C\otimes\bar{k}$ *превращает* F' *в линейчатую поверхность со слоем* $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ *(то есть в косое произведение со слоем* $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ *и проективной структурной группой).*

б) Морфизм g является либо изоморфизмом, либо моноидальным преобразованием с центром в конечном числе замкнутых точек поверхности F' *(лежащих на разных слоях этой поверхности). Пусть эти точки лежат в слоях* $F'_{x_1}, \ldots, F'_{x_n}$. *Тогда сумма g-прообразов этих слоев на поверхности* $F\otimes\bar{k}$ $G(\bar{k}/k)$*-инвариантна и является набором конечного числа орбит, каждая из которых имеет вид*



(все неприводимые компоненты рода O).

Доказательство. — а) Для построения морфизма g стянем все исключительные кривые, содержащиеся в слоях морфизма $F\otimes\bar{k} \to C\otimes\bar{k}$. Легко показать тогда, что все слои морфизма $F' \to C\otimes\bar{k}$ будут кривыми арифметического рода нуль, приведенными и неприводимыми. В самом деле, если $F'_x = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, $a_i \geqslant 0$, $x \in F\otimes\bar{k}$-замкнутая точка, то

$$(F'_x \cdot \omega_{F'\otimes\bar{k}}) = (F'_x \cdot \omega_{F'\otimes\bar{k}} \otimes \mathcal{O}(F'_x)) = -2,$$

ибо

$$p_a(X) = p_a(X_i) = 0,$$

откуда

$$\Sigma a_i (X_i \cdot \omega_{F'\otimes\bar{k}}) = \Sigma a_i (X_i \cdot \omega_{F'\otimes\bar{k}} \otimes \mathcal{O}(X_i)) - \Sigma a_i (X_i \cdot X_i) = -2\Sigma a_i - \Sigma a_i (X_i \cdot X_i).$$

Если $(X_i \cdot X_i) \leqslant -2$ и $n \geqslant 1$, отсюда находим, что правая сумма $\geqslant 0$-противоречие; значит, $(X_i \cdot X_i) = 0$ и $n = 1$, $a_1 = 1$. Снова хорошо известно, что такие поверхности-линейчатые и однозначно определяются над k как расслоения числом Чженя (см. например [14]).

б) Морфизм $g : F\otimes\bar{k} \to F'$ всегда можно представить в виде произведения $(C\otimes\bar{k})$-морфизмов

$$F\otimes\bar{k} \xrightarrow{j} F'' \to F'$$

где F'' получается из F' моноидальным преобразованием с центрами в конечном числе замкнутых точек на F', лежащих по одной на каждом из слоев поверхности F', в окрестности которых g не является изоморфизмом. Покажем, что j является изоморфизмом. В противном случае пусть j-не изоморфизм в окрестности слоя F''_x; тогда j можно представить в виде

$$F\otimes\bar{k} \to F''' \to F''_x,$$

где второй морфизм-моноидальное преобразование с центром в одной точке на слое F''_x; но тогда, как легко видеть, слой $(F''')_x$ удовлетворяет условию леммы из 1.5 и, значит, слой $(F\otimes\overline{k})_x$ обладает свойствами, описанными в этой лемме. Это противоречит C-минимальности поверхности F в силу леммы 0.4. Группа G на поверхности $F\otimes\overline{k}$ переводит сумму всех приводимых слоев в себя. Очевидно, каждый такой слой состоит из двух однократно пересекающихся кривых рода нуль; из C-минимальности поверхности F и леммы 0.4 снова следует, что для каждой компоненты приводимого слоя существует автоморфизм из G, переводящий ее в другую компоненту этого же слоя.

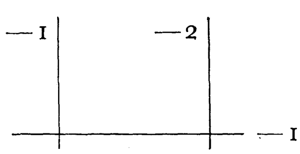
1.7. ТЕОРЕМА. — *Пусть* $F\otimes\overline{k}\to C\otimes\overline{k}$*-рациональная* $(C\otimes\overline{k})$*-поверхность, где* $C\otimes\overline{k}=\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$*, общий слой рода 1. Тогда* $n(F\otimes\overline{k})=10$*, и существует бирациональный* $\overline{k}$*-морфизм* $F\otimes\overline{k}\to\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$*. Для всякой неприводимой исключительной кривой первого рода* $X\subset F\otimes\overline{k}$ *имеем* $(X.F_x)=a$*, где число* a *не зависит от* X *и определяется условием* $\omega^{\otimes a}_{F\otimes\overline{k}}=\mathcal{O}_{F\otimes\overline{k}}(-F_x)$.

Доказательство. — Пусть $g: F\otimes\overline{k}\to F'$-бирациональный морфизм на некоторую $\overline{k}$-минимальную поверхность. Поскольку для любой неприводимой приведенной кривой $X\subset F\otimes\overline{k}$ с $p_a(X)=0$ имеем:

$$a((X.X)+2)=(X.F_x),$$

где $X\in C\otimes\overline{k}$-любая точка, и число a определяется из условия $\omega^{\otimes a}_{F\otimes\overline{k}}=\mathcal{O}_{F\otimes\overline{k}}(-F_x)$, находим отсюда, что нет таких кривых $(X.X)<-2$, все кривые $(X.X)=-2$ являются компонентами слоя, а все исключительные кривые первого рода удовлетворяют неравенству $(X.F_x)=-a$. Отсюда вытекает, в частности, что F' изоморфна-$\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^2$ или линейчатой поверхности F_2, квадрат стандартного сечения которой равен -2.

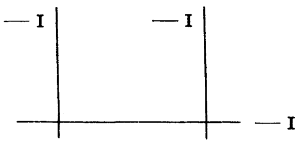
Если $F'=F_2$, то морфизм $F\otimes\overline{k}\to F_2$ является изоморфизмом в окрестности стандартного сечения линейчатой поверхности F_2; поэтому его можно представить в виде $F\otimes\overline{k}\to F'\to F_2$, где второй морфизм-моноидальное преобразование с центром в точке x на F_2, лежащей вне стандартного сечения. Следовательно, на F' лежит конфигурация кривых вида



,

где левая кривая-образ точки x, а нижняя-образ ее слоя. Мы можем стянуть образ слоя и затем стандартное сечение; получится, как легко видеть $\mathbf{P}^2$.

Если $F' = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, аналогичное представление $F \otimes \bar{k} \to F' \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, где второй морфизм-раздутие одной точка на $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, приводит к конфигурации



,

в которой две крайние кривые-образы образующих квадрики через эту точку; поэтому можно стянуть их до $\mathbf{P}^2$.

Наконец, из того, что $\omega^{\otimes a}_{F \otimes \bar{k}} = \mathcal{O}_{F \otimes \bar{k}}(-F_x)$, находим $(\omega_F . \omega_F) = 0$, так что $n(F) = 10$, в силу замечания в п. 1.2.

1.8. Следуя в основном Энриквесу, мы нашли два семейства поверхностей, содержащих представители всех классов (квази)-бирациональной эквивалентности. Семейство с эллиптическими кривыми имеет конечномерное пространство модулей; семейство с рациональными-нет.

1.9. Изложим основные сведения о линейчатых рациональных k-поверхностях. Каждая такая поверхность является k-формой одной из поверхностей F_n, $n \geqslant 0$: F_n в обозначениях Гротендика ([8], гл. II) имеет вид $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-n))$ то есть $\operatorname{Proj} S_n$, где S_n-пучок симметрических алгебр, порожденный пучком $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-n)$ на прямой $\mathbf{P}^1$; при этом в структуру линейчатой поверхности F_n входит ее канонический морфизм $p_n : F_n \to \mathbf{P}^1$. При $n \geqslant 1$ существует каноническое сечение $s_n : \mathbf{P}^1 \to F_n$, образ которого является единственной неприводимой кривой на F_n с индексом самоперечения $-n$. При этом $\mathbf{P}^1$-схема $F_n - s_n(\mathbf{P}^1)$ изоморфна $\mathbf{P}^1$-схеме $\mathbf{V}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-n))$.

Пусть F-какая-нибудь k-форма поверхности F_n. Очевидно, $F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$; поэтому формы F_0-это двумерные квадрики. Ограничимся дальше рассмотрением случая $n \geqslant 1$.

1.10. ТЕОРЕМА. — а) *Если* $n \equiv 1 \bmod 2$, *то любая* k*-форма поверхности* F_n *тривиальна, то есть изоморфна* F_n.

б) *Если* $n \equiv 0 \bmod 2$, $n \geqslant 2$, *то* k*-формы поверхности* F_n *находятся во взаимно однозначном соответствии с* k*-формами проективной прямой* $\mathbf{P}^1$*; соответствие устанавливается сопоставлением* F *кривой с индексом самопересечения* $-n$, *лежащей на ней.*

(Напомним, что k-формы проективной прямой $\mathbf{P}^1$ в свою очередь находится во взаимно-однозначном соответствии с кватернионными алгебрами над k (см. Амитсур [1] или Серр [21]).

Замечание. — В заметке [12] ошибочно утверждалось, что утверждение δ. верно для всех n.

Доказательство. — Пусть C-некоторая k-форма прямой $\mathbf{P}^1$, канонически лежащая на форме F поверхности F_n. Так как группа автоморфизмов поверхности $F_n \otimes \bar{k}$, как легко видеть, переводит слои проекции p_n в слои же (см. [12]), то у F будет существовать проекция $p: F \to C$. При этом пучок ростков сечений $\mathfrak{g}$ этой проекции локально свободен над C, и потому если C неизоморфна $\mathbf{P}^1_k$, то пучок $\mathfrak{g} \otimes \bar{k}$ на $C \otimes \bar{k} = \mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ изоморфен $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_{\bar{k}}}(-2m)$, ибо, как известно, гомоморфизм $(\operatorname{Pic} C)(k) \to (\operatorname{Pic} C \otimes \bar{k})(\bar{k})$ имеет своим образом подгруппу элементов, кратных двум.

Следовательно, если $n \equiv 1 \bmod 2$, то форма соответствующего канонического сечения тривиальна. Покажем, что если $n \equiv 0 \bmod 2$, то можно найти поверхность F, у которой будет в качестве сечения любая форма C прямой $\mathbf{P}^1_k$. При $n = 0$ возьмем $F = C \times \mathbf{P}^1_k$. Если искомая форма F поверхности F_n уже построена, построим форму поверхности F_{n+2} так: возьмем на каноническом сечении F (при $n = 0$ на любом сечении) замкнутую точку x степени 2 (то есть $[\varkappa(x) : k] = 2$), произведем моноидальное преобразование с центром в ней и затем стянем проходящий через эту точку слой (то есть произведем два « элементарных преобразования » с центрами в точках, лежащих над x на $F \otimes \bar{k}$: см. Нагата [14]). Леммы 0.4 и 0.5 гарантируют, что это можно сделать над k.

Остается проверить, что все формы F с фиксированной C изоморфны. Пусть k-одна такая форма; имеет место точная последовательность G-групп

$$1 \to \Gamma \to \operatorname{Aut}(F \otimes \bar{k}) \to \operatorname{Aut}(C \otimes \bar{k}) \to 1$$

(в которой эпиморфность в третье мчлене легко проверяется). Достаточн доказать, что $H^1(k, \Gamma) = \{1\}$ (это следует из когомологической последовательности, ибо нас интересует прообраз тождественного коцикла в $H^1(k, \operatorname{Aut}(C \otimes \bar{k}))$. Но, очевидно, $\Gamma = H^0(F \otimes \bar{k}, \mathscr{A}\!\mathit{ff})$, где $\mathscr{A}\!\mathit{ff}$-пучок ростков аффинных автоморфизмов расслоения $(F \backslash C) \otimes \bar{k} \to \mathbf{P}^1_{\bar{k}}$; имеем точную последовательность:

$$0 \to \mathcal{O}_{F \otimes \bar{k}}(-n) \to \mathscr{A}\!\mathit{ff} \to \mathcal{O}^*_{F \otimes \bar{k}} \to 0,$$

изк оторой следует, что $H^0(F \otimes \bar{k}, \mathscr{A}\!\mathit{ff})$ изоморфна полупрямому произведению $(n+1)$-й аддитивной и одной мультипликативной (фактор)-группы поля $\bar{k}$, что доказывает требуемое.

2. Некоторые бирациональные инварианты

2.1. Пусть F-регулярная k-поверхность. Символом N(F) будем обозначать группу $\operatorname{Num}(F \otimes \bar{k})$ классов дивизоров на $F \otimes \bar{k}$ с точностью до численной эквивалентности. Группа N(F) снабжена следующими дополнительными структурами:

a) Структурой непрерывного G-модуля (G-группа Галуа $\bar{k}/k$); при этом $N(F)^G \supset \operatorname{Num}(F)$. Как $\mathbf{Z}$-модуль группа N(F) не иммет кручения и имеет конечный ранг;

б) Спариванием $N(F)\times N(F)\to \mathbf{Z}$, которое определяется индексом пересечения. Это спаривание G-инвариантно, то есть для любых элементов $\xi, \eta\in N(F)$ и $s\in G$ имеем

$$(s(\xi).s(\eta))=(\xi.\eta);$$

в) Выделенным элементом $\omega_F\in N(F)$-каноническим классом поверхности F. На самом деле даже $\omega_F\in N(F)^G$.

Эти структуры обладают следующими функториальными свойствами. Для любого k-морфизма $f: F'\to F$ определяется G-гомоморфизм

$$f^*: N(F)\to N(F').$$

Если обе поверхности собственные и морфизм f бирационален то f^*-мономорфизм. В этом случае f^* сохраняет также индекс пересечения. При этих условиях определяется канонический гомоморфизм

$$f_*: N(F')\to N(F),$$

где для любого элемента $\xi\in N(F')$ элемент $f_*(\xi)\in N(F)$ определяется условием

$$(\xi.f^*(\eta))=(f_*(\xi).\eta)$$

для всех $\eta\in N(F)$. Отображения f^*, f_* определяют на N структуру функтора на категории $\mathfrak{B}(k)$ собственных регулярных k-поверхностей с бирациональными морфизмами. Значения этого функтора принадлежат категории $\mathfrak{C}(k)$ непрерывных $\mathbf{Z}$-свободных G-модулей конечного ранга.

Функториальное поведение канонического класса ω_F более сложно. Назовем элементарным морфизмом такой морфизм $f: F'\to F$ в категории $\mathfrak{B}(k)$, который является моноидальным преобразованием с центром в замкнутой точке (со структурой приведенной под-схемы) $x\in F$. Пусть $f^{-1}(x)\in N(F')$-класс слоя f над этой точкой в группе $N(F')$. Тогда

$$\omega_{F'}=f^*(\omega_F)+f^{-1}(x).$$

Поскольку любой морфизм в категории $\mathfrak{B}(k)$ разлагается в произведение элементарных, эта формула позволяет связать $\omega_{F'}$ с ω_F в общем случае.

Наконец, отметим, что замена поля констант k на его алгебраическое расширение $K\subset\bar{k}$ (то есть замена F на $F\otimes K$) соответствует функтору ограничения G-модулей N(F) на подгруппу; все остальные структуры в очевидном-смысле сохраняются.

Нам еще понадобится следующая хорошо известная.

ЛЕММА. — *Пусть $f: F'\to F$-морфизм в категории $\mathfrak{B}(k)$. Тогда имеет место каноническое прямое разложение G-модулей:*

$$N(F')=\mathrm{Im}\, f^*+\mathrm{Ker}\, f_*$$

(Ср. например, Нагата [14]). *Если морфизм f элементарен и является моноидальным преобразованием с центром в точке $x \in \mathrm{F}$, то $\mathrm{Ker} f_*$ порожден компонентами геометрического слоя $f^{-1}(x) \otimes \bar{k}$, так что они составляют выделенную систему образующих; их матрица пересечений, очевидно, равна $-\mathrm{E}$. Подгруппы $\mathrm{Im} f^*$ и $\mathrm{Ker} f_*$ ортогональны относительно индекса пересечения.*

Назовем тривиальным всякий G-модуль в категории $\mathfrak{C}(k)$, который изоморфен прямой сумме конечного числа модулей вида $\mathbf{Z}[\mathrm{G}]_{\mathbf{Z}[\mathrm{H}]} \otimes \mathbf{Z}$, где H пробегает открытые подгруппы группы G ($\mathbf{Z}$-тривиальный H-модуль). Имеет место следующая.

2.2. ТЕОРЕМА. — *Для того, чтобы k-поверхности F, F′ в категории $\mathfrak{V}(k)$ были бирационально эквивалентны над k, необходимо, чтобы существовали такие тривиальные G-модули M и M′, что*

$$\mathrm{N(F)} + \mathrm{M}' \approx \mathrm{N(F')} + \mathrm{M}.$$

Замечание. — В дальнейшем мы будем пользоваться этим критерием, учитывая только структуру G-модуля. Как показывает предыдущее обсуждение, более тонкие инварианты, возможно, могло бы дать требование о существовании продолжения индекса пересечения и канонического класса на $\mathrm{N(F)} + \mathrm{M}'$, но яне знаю, как это учитывать.

Доказательство. — Пользуясь леммами 0.1 и 0.2, из бирациональнойэ квивалентности поверхностей F и F′ над k мы можем заключить о существовании k-поверхности F″ k-морфизмов $f: \mathrm{F''} \to \mathrm{F}$ и $g: \mathrm{F'} \to \mathrm{F}$ в категории $\mathfrak{V}(k)$. Морфизм f можно разложить в произведение элементарных морфизмов. Лемма и обсуждение в конце предыдущего пункта показывает, что если f элементарен, то

$$\mathrm{N(F'')} = \mathrm{N(F)} + \mathrm{Ker} f_*,$$

а $\mathrm{Ker} f_*$-тривиальный G-модуль, изоморфный $\mathbf{Z}[\mathrm{G}]_{\mathbf{Z}[\mathrm{H}]} \otimes \mathbf{Z}$, где H-стационарная подгруппа одной из неприводимых исключительных кривых, стягиваемых морфизмом $f \otimes \bar{k}$. Индукция по числу элементарных морфизмов в которые разлагаестя f и g, показывает, что

$$\mathrm{N(F'')} = \mathrm{N(F)} + \mathrm{M}' = \mathrm{N(F')} + \mathrm{M},$$

где M и M′ тривиальны.

2.3. В работе Оно [16] описаны некоторые инварианты G-модулей из категоири $\mathfrak{C}(k)$, которые не меняются при прибавлении тривиального модуля.

Пусть $\mathrm{N} \in \mathfrak{C}(k)$ и пусть $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$-открытый нормальный делитель, тривиально действующий на N. Легко показать (см. Оно [16], § 3), что групп акогомологий $\mathrm{H}^1(\mathrm{G/H, N})$ не зависит от выбора H и что $\mathrm{H}^1(\mathrm{G/H, N+M}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{G/H, N})$, если M-тривиальный модуль (последнее вытекает из того, что

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathbf{Z}[\mathrm{G}]_{\mathbf{Z}[\mathrm{H}]} \times \mathbf{Z}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{H}, \mathbf{Z}) = 0).$$

Мы будем обозначать эту группу $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{N})$; теорема 2.2 показывает, что имеет место

СЛЕДСТВИЕ. — *Для того, чтобы две поверхности* F, F′ *из категории* $\mathfrak{B}(k)$ *были бирационально эквивалентны над k, необходимо, чтобы*

$$H^1(K, N(F)) = H^1(K, N(F'))$$

для всех конечных расширений $K \supset k$.

(Действительно, если F, F′ бирационально эквивалентны над k, то и над K тоже, привлечение конечных расширений на самом деле дает более тонкий инвариант, как будет видно из разбираемого ниже примера).

Группа $H^1(k, N(F))$ во многих интересных случаях поддается вычислению и доставляет довольно сильный способ различать классы бирациональной эквивалентности.

2.4. Еще одним инвариантом, который доставляет работа Оно [16], мне не удалось воспользоваться в конкретных примерах, но он заслуживает упоминания. Категория $\mathfrak{C}(k)^0$, двойственная к $\mathfrak{C}(k)$, эквивалентна категории k-торов. Предположим, что k-поле алгебраических чисел конечной степени или поле функций одной переменной над конечным полем констант. Пусть A_k—k-алгебра аделей поля k, $H \subset G$-открытый нормальный делитель, тривиально действующий на G-модуль $N \in \mathfrak{C}(k)$, N^0—k-тор, соответствующий этому модулю. Положим $N^0(A) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}\ A, N^0)$ для любой k-алгебры A. Пусть еще $K = \bar{k}^H$; тогда, как показывает Оно, группа

$$\mathrm{Ker}(H^1(N^0(K)) \to H^1(N^0(A)))$$

нез ависит от выбора H. Обозначим ее символом $H^1_0(k, N^0)$: это-группа локально тривиальных главных однородных пространств над тором N^0. Если $N^0 = N^0_1 + M$, где $M = \mathbf{Z}[G]_{\mathbf{Z}[H]} \otimes \mathbf{Z}$, то тор M^0 изоморфен $R_{K/k}(G_m)$, $K = \bar{k}^H$, (в обозначениях Оно [16]), и потому

$$H^1_0(k, N^0) = H^1_0(k, N^0_1).$$

В частности, обозначая вместе с Оно через $h(N)$, $i(N)$ порядки групп $H^1(k, N(F))$ и $H^1_0(k, N(F)^0)$ соответсвенно, а через $\tau(N)$-число тамагавы тора N^0, получаем из основного результата работы [16].

СЛЕДСТВИЕ. — *Числа* $i(N(F))$ *и* $\tau(N(F))$ *являются k-бирациональными инвариантами поверхности* F.

Можно предположить, что инвариантность числа Тамагавы $\tau(N(F))$ (для рациональной поверхности F), которая получается здесь формально, должна иметь некоторое арифметическое истолкование: в самом деле, дзета-функции тора $N(F)^0$ и поверхности F связаны друг с другом так же тесно, как дзета функции кривой и ее многообразие Якоби.

Теперь мы приметим критерий п. 2.3 для доказательства следующего результата.

2.5. ТЕОРЕМА. — *Предположим, что у поля k есть квадратичное расширение* K. *Тогда существует бесконечно много рациональных k-поверхностей* F, *попарно не бирационально эквивалентных над* k*, которые становятся тривиальными над* K. *Иначе говоря, ядро отображения*

$$H^1(k, \mathrm{Cr}) \overset{\mathrm{res}}{\to} H^1(K, \mathrm{Cr})$$

где $\mathrm{Cr} = \mathrm{Aut}\, \overline{k}(x, y)/\overline{k}$ *(группа Кремона), бесконечно.*

Частный случай. — Множество $H^1(k, \mathrm{Cr})$ бесконечно для любого конечного поля k.

Замечание. — Пусть $m(F) = \max(\omega_{F'}.\omega_{F'})$, где максимум берется по всем k-поверхностям F′, бирационально эквивалентным F. Очевидно, $m(F)$-бирациональный инвариант. Из приведенного ниже доказательства теоремы будет видно, что $m(F)$ в условиях теоремы может принимать столь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения.

Доказательство. — Рассмотрим в прямом произведении $\mathbf{P}^1 \times_k \mathbf{P}^1 \times_k \mathbf{P}^1$ поверхность

$$F : f_m(z_0, z_1) x_0 y_0 = x_1 y_1 g_m(z_0, z_1)$$

где f_m, g_m-взаимно простые формы степени m от двух переменных без кратных делителей; (x_0, x_1)-координаты первого множителя $\mathbf{P}^1$, (y_0, y_1)-второго, (z_0, z_1)-третьего. Поверхность F регулярна и неприводима. Рассмотрим ее проекцию $g : F \to \mathbf{P}^1$ на третий множитель. В точках $z \in \mathbf{P}^1$, где $f_m(z) g_m(z) \neq 0$, слоем является коника на $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$; в точках, где $f_m(z) g_m(z) = 0$, слоем является пара трансверсальных прямых.

Кроме того, имеются два стандартных сечения этой поверхности: кривые

$$X_0 : x_0 = y_1 = 0;$$
$$X_1 : x_1 = y_0 = 0.$$

Уже отсюда следует, что F бирационально эквивалентна плоскости.

На F бирегулярно действует $\mathbf{Z}_2$, с помощью перестановки первых двух множителей. Любое квадратичное расширение $K \supset k$ определяет поэтому гомоморфизм $h : G \to \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(F \otimes \overline{k})$; обозначим через F^h k-поверхность, полученную из F скрещиванием с помощью этого коцикла из $Z^1(G, \mathrm{Aut}(F \otimes \overline{k}))$. Вложение $\mathrm{Aut}(F \otimes \overline{k}) \to \mathrm{Cr}$ индуцирует отображение

$$H^1(G, \mathrm{Aut}(F \otimes \overline{k})) \to H^1(G, \mathrm{Cr}),$$

образ которого, очевидно, состоит из коциклов, распадающихся над K. Теперь вычислим группу $H^1(k, N(F^h))$.

Заметим, прежде всего, что каноническое спаривание $N(F) \times N(F) \to \mathbf{Z}$ определяет спаривание (групп гомологий Тейта)

$$H^p(G/H, N(F)) \times H^{-p}(G/H, N(F)) \to H^0(G/H, \mathbf{Z})$$

для любого открытого нормального делителя $H \subset G$, тривиально действующего на N(F). Легко показать, что это спаривание невырождено и определяет двойственность групп H^p и H^{-p}. Мы копируем доказательство теоремы 6.6 главы XII книги [4]: имеем точную последовательность G-модулей

$$0 \to N(F) \to \mathrm{Hom}(N(F), \mathbf{Q}) \to \mathrm{Hom}(N(F), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0,$$

где $N(F)$ отождествляется с $\mathrm{Hom}(N(F), \mathbf{Z})$ с помощью спаривания и первое вложение индуцировано вложением $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$. Эта точная последовательность определяет изоморфизмы

$$\delta : H^p(G/H, \mathrm{Hom}(N(F), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \to H^{p+1}(G/H, N(F)).$$

Рассматривая композицию этого изоморфизма с изоморфизмом следствия 6.5 главы XII книги [4], находим изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(H^{-p}(G/H, N(F)), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^p(G/H, N(F)).$$

Проверку того, что он соответствует спариванию, мы опускаем.

Мы будем теперь вычислять $H^{-1}(G/H, N(F))$ вместо $H^1(k, N(F))$. С этой целью используем следующую лемму.

2.9. ЛЕММА. — *Пусть* $\{X_i\} \subset F \otimes \bar{k}$ — G-*инвариантный набор неприводимых кривых, классы которых порождают группу* $N(F)$. *Пусть* S-*группа дивизоров, порожденная* $\{X_i\}$, $S_0 \subset S$-*подгруппа дивизоров численно эквивалентных* 0, $H \subset G$-*нормальный делитель конечного индекса, тривиально действующий на все* X_i, $N = \sum_{g \in G/H} g \in \mathbf{Z}[G/H]$. *Тогда имеем*:

$$H^1(k, N(F)) = H^{-1}(G/H, N(F)) = (NS \cap S_0)/NS_0.$$

Доказательство. — Рассмотрим точную последовательность G/H-модулей

$$0 \to S_0 \to S \to N(F) \to 0$$

От выбора группы H ничего не зависит; кроме того, $H^{-1}(G/H, S) = 0$, ибо S-тривиальный модуль.

Отсюда находим точную последовательность

$$0 \to H^{-1}(G/H, N(F)) \to H^0(G/H, S_0) \to H^0(G/H, S).$$

Тем самым

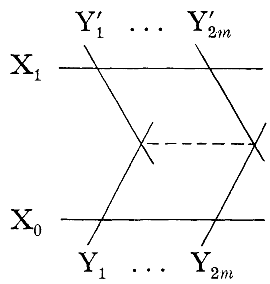
$$H^{-1}(G/H, N(F)) = \mathrm{Ker}\,(S_0^G/NG \to S^G/NS) = (NS \cap S_0)/NS_0.$$

2.10. Применим лемму 2.9 к нашей поверхности F^h. Пусть $L \supset K$-поле разложения формы $f_m g_m | K$. На $F \otimes L$ рассмотрим кривые Y_i, Y'_i-компоненты приводимых слоев, и определенные выше сечения X_0, X_1. Этот набор кривых G-инвариантен, а их классы на $F \otimes \bar{k}$ порождают $N(F)$; $X_0 + X_1$-одна орбита; остальные орбиты состоят из пар $Y_i + Y'_i$, если поле разложения $f_m g_m$ над k линейно свободно сK, что предполагается; тогда группа Галуа поля L/k имеет вид $\mathbf{Z}_2 \times H$, где $\mathbf{Z}_2$ переставляет X_0 с X_1 и набор (Y_i) с (Y'_i), а H действует на (Y_i) и (Y'_i) как на корни $f_m g_m$). Я утверждаю, тогда что

$$H^1(k, N(F^h)) = \begin{cases} (\mathbf{Z}_2)^{\varkappa-2}, & \text{если у } f_m g_m \text{ есть делитель нечетной степени} \\ (\mathbf{Z}_2)^{\varkappa-1} & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

где $\varkappa$-число неприводимых множителей у $f_m g_m$ над k.

В самом деле, матрица пересечений имеет вид



$$(X_0 . X_0) = (X_1 . X_1) = -m, \qquad (Y_i . Y_i) = (Y'_i . Y'_i) = -1,$$

$$(X_0 . X_1) = 0, \qquad (X_0 . Y'_i) = (X_1 . Y_i) = 0,$$

$$(Y_i . Y_j) = (Y'_i . Y'_j) = (Y_i . Y'_j) = (Y'_i . Y_j) = 0, \quad i \neq j;$$

$$(X_0 . Y_i) = (X_1 . Y'_i) = 1.$$

Пусть еще M-порядок группы Галуа L/K, Z_i, $i = 1, \dots \varkappa$, сумма кривых в $i-\overline{u}$ орбите слоев, m_i-число компонент Z_i. Если Y_a, Y'_a принадлежмт i-й орбите, то $NY_\varkappa = NY'_\varkappa = \frac{M}{m_i} Z_i$. Пользуясь еще тем, что главные дивизоры численно эквивалентны нулю, находим

$$NS \cap S_0 = \{ \sum_{i=1}^{\varkappa} z_i \frac{M}{m_i} Z_i \mid z_i \in \mathbf{Z}, \sum_{i=1}^{\varkappa} z_i = 0 \}$$

С другой стороны, легкий подсчет показывает, что

$$S_0 = \{ x_0(X_0 - X_1) + \sum_{i=1}^{2m} y_i (Y_i + Y'_i) - x_0 \sum_{i=1}^{2m} Y'_i \mid x_0, y_i \in \mathbf{Z}, \sum_{i=1}^{2m} y_i = m x_0 \}$$

Отсюда легко следует наше утверждение.

Теперь легко доказать теорему. Если поле k бесконечно, рассмотрим поверхности F^h, где $f_m g_m$ разлагается на $2m$ линейных множителеи над k; $\varkappa = 2m$ можно сделать как угодно большим, и это число является k-бирациональным инвариантом поверхности F^h.

Если же k конечно, возьмем последовательность неприводимых многочленов f_m, g_m $(f_m \neq g_m)$ нечетных попарно взаимно простых степеней; пусть $F^{(m)}$-поверхность соответствующая F^h, а k_m-поле разложения f_m. Над k_m имеем:

$$H^1(k_m, F^{(m)} \otimes k_m) = (\mathbf{Z}_2)^{2m-2}$$

$$H^1(k_m, F^{(n)} \otimes k_m) = \{0\}, \quad n \neq m,$$

так что $F^{(m)}$ и $F^{(n)}$ бирационально неэквивалентны над k_m и тем более над k.

3. Поверхности дель Пеццо

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. — *Регулярная рациональная k-поверхность* F *называется поверхностью дель Пеццо, если пучок ω_F^{-1} очень обилен, а антиканоническая система не имеет неподвижных компонент.*

3.2. ЛЕММА. — *Пусть* F-*регулярная рациональная $\bar{k}$-поверхность, для которой* $(\omega_F.\omega_F)\geqslant 1$, $X\subset F$-*неприводимая кривая с* $(X.X)<0$. *Тогда имеет место одна из трех возможностей.*

а) X-*исключительная кривая первого рода, и* $(X.\omega_F^{-1})=1$*;*

б) X-*компонента неподвижной кривой антиканонической системы;*

в) $(X.X)=-2$ *и* $p_a(X)=0$, $(X.\omega_F^{-1})=0$;

Доказательство. — Применяя теорему Римана-Роха к поверхности F, находим

$$\dim H^0(F, \omega_F^{-1})=(\omega_F.\omega_F)+1+\dim H^1(F, \omega_F^{-1})$$

(ибо, по теореме двойственности Серра, $\dim H^2(F, \omega_F^{-1})=\dim H^0(F, \omega_F^{\otimes 2})=0$). Следовательно, в условиях леммы $\dim H^0(F, \omega_F^{-1})\geqslant 2$ и $\omega_F^{-1}=\mathcal{O}(-K)$, где K некоторая кривая. Пусть теперь $(X.X)<0$, X-неприводимая кривая. Имеем

$$2p_a(X)-2=(X.X)-(X.\omega_F^{-1}).$$

Отсюда следует, что если X не является неподвижной компонентой антиканонической системы, то, поскольку $(X.\omega_F^{-1})\geqslant 0$, имеем $(X.X)=-1$, $p_a(X)=0$ и $(X.\omega_F^{-1})=1$, либо $(X.X)=-2$, $p_a(X)=0$ и $(X.\omega_F^{-1})=0$. Лемма доказана.

3.3. СЛЕДСТВИЕ. — *Если* $F-\bar{k}$-*поверхность дель Пеццо, то любая неприводимая кривая с отрицательным индексом самопересечения на ней является исключительной кривой первого рода. Вложение* $F\to\mathbf{P}^n$, $n=(\omega_F.\omega_F)$, *определенное антиканоническим пучком, определяет взаимно однозначное соответствие между прямыми, лежащими на* F, *и неприводимыми исключительными кривыми первого рода на* F.

3.4. ТЕОРЕМА. — *Пусть* $F-\bar{k}$-*поверхность дель Пеццо,* $n=(\omega_F.\omega_F)$. *Тогда* $9\geqslant n\geqslant 3$. *Имеют место следующие факты.*

а) *При* $n=9$ F *изоморфна* $\mathbf{P}^2$.

б) *При* $n=8$ F *изоморфна либо* $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$, *либо образу* $\mathbf{P}^2$ *при моноидальном преобразовании с центром в одной замкнутой точке.*

в) *При* $3\leqslant n\leqslant 7$ F *изоморфна образу* $\mathbf{P}^2$ *при моноидальном преобразовании с центром в* $9-n$ *замкнутых точках на* $\mathbf{P}^2$, *из которых никакие три не лежат на одной прямой и никакие шесть-на одной конике.*

г) *Всякая исключительная кривая на* F *является либо образом точки-компоненты центра моноидального преобразования* $\mathbf{P}^2$, *либо образом прямой, проходящей через две таких точки, либо образом коники, проходящей через пять таких точек.*

Доказательство. — Пусть $p: F \to F'$ бирациональный морфизм поверхности F на минимальную модель. В силу 3.3 на F' нет кривых с отрицательным индексом самопересечения; поэтому F' изоморфна либо $\mathbf{P}^2$, либо $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Очевидно, при $(\omega_F . \omega_F) = 9$ имеет место первый случай, и p-изоморфизм; при $(\omega_F . \omega_F) = 8$ имеет место либо первый случай, и p-моноидальное преобразование с центром в одной точке, либо второй случай, и p-изоморфизм. При $(\omega_F . \omega_F) \leqslant 7$ из существования морфизма $F \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ следует существование морфизма $F \to \mathbf{P}^2$ (ср. 1.7). Утверждение в. следует из формулы Нетера и из отсутствия кривых с отрицательным квадратом на F. При $n < 3$ антиканоническая система не может быть очень обильной, ибо образ ее на плоскости состоит из кривых степени 3, проходящих через $9 - n$ точек на плоскости « в общем положении »: уже при $n = 2$ отображение, соответствующее этой линейной системе, имеет степень два, при $n = 1$-степень нуль.

Наконец, последнее утверждение следует из того, что образ исключительной кривой на $\mathbf{P}^2$, если он не является точкой, имеет регулярные точки в компонентах центра соответствующего моноидального преобразования (в самом деле, по следствию 3.3, две исключительные кривые пересекаются трансверсально как прямые в $\mathbf{P}^n$). Тогда простой подсчет индексов, основанный на замечании к лемме п. 1.1, доказывает требуемое (см. также Нагата [14]).

СЛЕДСТВИЕ. — *Исключительные кривые первого рода на поверхности дель Пеццо* F *порождают группу* N(F).

3.5. Остаток этого параграфа будет посвящен изучению форм простейших поверхностей дель Пеццо степени $9 \geqslant n \geqslant 4$ над незамкнутым полем k. Предварительно сделаем несколько общих замечаний о поверхностях этого класса.

Пусть $F \subset \mathbf{P}^n$-поверхность дель Пеццо с $(\omega_F . \omega_F) = n$. Пересекая F с достаточно общей гиперплоскостью $\mathbf{P}^{n-2}$ в $\mathbf{P}^n$ и произведя моноидальное преобразование с центром $F \cap \mathbf{P}^{n-2}$ на F, мы получим поверхность F' с пучком эллиптических кривых над проективной прямой B-базой пучка гиперплоскостей в $\mathbf{P}^n$, проходящих через $\mathbf{P}^{n-2}$, причем F' будет B-минимальной. Тем самым, бирациональные k-формы поверхностей дель Пеццо это частные случаи k-форм поверхностей с эллиптическим пучком: они получаются при стягивании такой k-кривой которая над $\bar{k}$ распадается в объединение n непересекающихся неприводимых кривых первого рода-сечений эллиптического пучка.

При фиксированном $n \geqslant 5$, $n \neq 8$ поверхности дель Пеццо степени n все становятся $\bar{k}$-изоморфными и при $n = 8$ существуют только 2 класса; это позволяет классифицировать их бирегулярные k-формы. После этого дополнительные соображения, специфические для каждого n, позволяют установить, что наличие k-рациональной точки равносильно бирациональной тривиальности пворехности F. Вопрос же о существовании точки для наиболее интересного случая числовых полей при $n \geqslant 6$ оказывается чисто локальным: справедлив принцип Хассе.

Случаи $n=3, 4$ (и тем более $n=2, 1, 0$) гораздо более трудны: критерий п. 2.3 позволяет установить существование бирационально нетривиальных k-форм даже над конечным полем k или над $k=\mathbf{R}$, причем на соответствующих поверхностях есть рациональные точки. Здесь мы ограничимся детальным разбором случая $n=4$. Подсчет когомологий в общем случае здесь становится очень громоздким: быть может, следует использовать связи этого класса поверхностей с группами Вейля исключительных простых групп Ли. Мы надеемся вернуться к этому вопросу позже.

Наконец, последнее. Исключительные кривые первого рода на всякой поверхности дель Пеццо порождают ее группу классов дивизоров. Поэтому для вычисления группы $H^1(k, N(F))$ (см. п. 2.3) достаточно знать, как группа Галуа действует на множество исключительных кривых. Очевидно, она сохраняет индекс пересечения, который может быть только нулем или единицей (следствие 3.3).

Пусть $\mathscr{E}_n$ $(6 \geqslant n \geqslant 3)$-пара, состоящая из (конечного) множества прямых на какой-нибудь поверхности дель Пеццо степени n, и бинарного отношения « индекс пересечения прямых равен единице » на этом множестве. Из теоремы 3.4 легко усмотреть, что объект $\mathscr{E}_n$ как множество с бинарным отношением определев числом n с точностью до изоморфизма. Пусть Γ_n-группа автоморфизмов объекта $\mathscr{E}_n$.

Следующие утверждения являются классическими, и мы приводим с наброском доказательства их лишь из-за отсутствия удобных ссылок.

3.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. — а) *Существует естественное вложение* $\mathscr{E}_n \subset \mathscr{E}_{n-1}$, *при котором* $\mathscr{E}_n$ *отождествляется с множеством элементов, не пересекающихся с фиксированным элементом множества* $\mathscr{E}_{n-1}$ *(это вложение множеств с бинарным отношении).*

б) *Группа* Γ_n *транзитивно действует на* $\mathscr{E}_n$, *а стационарная подгруппа любого элемента изоморфна* Γ_{n-1}.

в) *Число элементов* $\mathscr{E}_n$, Γ_n *в зависимости от* n *задается следующей таблицей*

n	6	5	4	3
$[\mathscr{E}_n]$	6	10	16	27
$[\Gamma_n]$	$2^2\,3$	$2^3\,3\cdot 5$	$2^7\cdot 3\cdot 5$	$2^7\cdot 3^4\cdot 5$

Доказательство. — При $n=6$ утверждения б) и в) проверяются непосредственно: исключительные кривые-это образы трех точек на плоскости и трех прямых проходящих через эти точки; группа Γ_6 яаляется группой симметрий шестиугольника.

При $n>6$ утверждение а) следует из того, что если стянуть одну прямую на поверхности дель Пеццо степени n, то получится поверхность дель Пеццо степени $n-1$ (это легко следует из теоремы 3.4). Утверждение б) получается тогда по индукции: группа Γ_{n-1} транзитивно действует на $\mathscr{E}_{n-1}$ а образы $\mathscr{E}_{n-1}$ при разных вложениях в $\mathscr{E}_n$ покрывают все множество $\mathscr{E}_n$, потому что для любой прямой на F найдется прямая, с ней не пересекающаяся: иначе ее стягивание привело бы к минимальной модели.

Число элементов $[\mathscr{E}_n]$ получается непосредственным подсчетом с помощью теоремы 3.4 г. Наконец, $[\Gamma_n]$ получается индукцией по формуле $[\Gamma_n]=[\mathscr{E}_n].[\Gamma_{n-1}]$.

Замечания. — *а)* Уже для $n=3$ объект $\mathscr{E}_3$ недостаточно полно отражает свойства инцидентности прямых на кубической поверхности: могут существовать тройки прямых, пересекающиеся в одной точке (точки Эккардта), что накладывает дополнительные ограничения на образ группы Галуа в Γ_3. Для $n=2, 1$ положение становится еще более сложным: в общем случае исключительные кривые могут иметь индекс пересечения больше единицы, а вырождения пересечений очень разнообразны. Тем не менее, можно ввести аналог объекта $\mathscr{E}_n$ и доказать утверждения, аналогичные предложению 3.6, для $n=2, 1$.

б) Можно поставить вопрос, реализуется ли полная группа Γ_n как образ группы Галуа, действующий на прямые поверхности дель Пеццо n-й степени над каким-нибудь полем.

Пусть U-открытое множество неособых кубических поверхностей в $\mathbf{P}^3$: дополнение к дискриминантной гиперповерхности в пространстве коэффициентов кубических форм от четырех переменных. Группа $\pi_1(\mathrm{U}, u)$ очевидно, действует на множестве прямых кубической поверхности, соответствующей точке $u \in \mathrm{U}$. Сегре [18] утверждает, что образ группы $\pi_1(\mathrm{U}, u)$ является полной группой автоморфизмов Γ_3 объекта $\mathscr{E}_3$ (по крайней мере, над комплексным полем). Отсюда следует утвердительный ответ на вопрос б) для всех $n=6, 5, 4, 3$.

3.7. ТЕОРЕМА. — *Пусть* F — *k-поверхность дель Пеццо степени n. Имеет место следующие утверждения:*

а) *При* $n=9$ F *k-изоморфна некоторой поверхности Севери-Брауэра.*

б) *При* $n=8$ F *k-изоморфна либо некоторой форме $\mathbf{P}^1_k \times \mathbf{P}^1_k$, либо образу $\mathbf{P}^2_k$ при моноидальном преобразовании с центром в некоторой k-точке.*

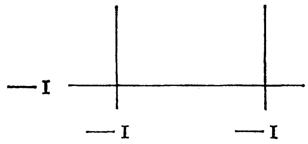
в) *При* $n=7$ F *k-изоморфна образу $\mathbf{P}^2$ при моноидальном преобразовании с центром в двух k-точках, либо с центром в замкнутой точке $x \in \mathbf{P}^2$, для которой* $[\varkappa(x):k]=2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. — *Поверхность дель Пеццо степени 7 всегда имеет k-точку.*

СЛЕДСТВИЕ 2. — *Пусть k-поле алгебраических чисел конечной степени или поле алгебраических функций одной переменной на дконечным полем констант. Если поверхность дель Пеццо* F *степени 8 или 9 имеет рациональную точку над всеми пополнениями $k_{\mathfrak{p}}$ поля k, то она имеет рациональную точку и над k.*

СЛЕДСТВИЕ 3. — *Для того, чтобы k-поверхность дель Пеццо степени 7, 8 или 9 была k-бирационально эквивалентна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы на ней существовала k-точка.*

(Доказательство всех этих утверждений немедленно следует из теоремы 3.4, леммы 0.4 и 0.5 и хорошо известных результатов; в частности, утверждение 3.7 в следует из того, что конфигурация исключительных кривых на поверхности дель Пеццо степени 7 имеет вид



так что все крайние прямые либо неподвижны, либо переставляются группой Галуа G, так что их вместо можно стянуть над k. Дальнейшие подробности мы опускаем).

3.8. Перейдем теперь к изучению поверхностей дель Пеццо степени 6. Применяемый метод опирается на возможность отображать некоторые открытые множества алгебраических k-схем в однородные пространства над k-торами, и мы опишем сначала это отображение в общей ситуации. Оно получается спуском Галуа из конструкции, введенной Серром [22] над алгебраически замкнутым полем (в докладе Серра содержится также определение этой конструкции с помощью некоторого универсального свойства).

Пусть V-собственная неприводимая и приведенная алгебраическая k-схема, $\{X_i\}\subset V\otimes\overline{k}$-конечное множество, дивизоров, каждый из которых является неприводимой и приведенной подсхемой $V\otimes\overline{k}$. Пусть S_0-группа главных дивизоров, порожденных $\{X_i\}$ и пусть $R\subset R(V\otimes\overline{k})^*$-группа рациональных функций на $V\otimes k$, дивизоры которых принадлежат S_0. Очевидно, $R\subset\Gamma(V\otimes\overline{k}\setminus\bigcup_i X_i, \mathcal{O}_V)$. Рассмотрим точную последовательность.

$$0\to\overline{k}^*\to R\to S_0\to 0 \tag{3.8.1}$$

Любое ее сечение $\varphi: S_0\to R$ определяет $\overline{k}$-морфизм открытого множества в тор $T\otimes\overline{k}$, где $T=\mathrm{Spec}\,k[S_0]$:

$$f: V\otimes\overline{k}\setminus\bigcup_i X_i\to\mathrm{Spec}\,\overline{k}[S_0],$$

который индуцирован гомоморфизмом колец

$$\overline{k}[S_0]\to\overline{k}[R]\to\Gamma(V\otimes\overline{k}\setminus\bigcup_i X_i, \mathcal{O}_{V\otimes\overline{k}})$$

(первый из них определен через φ, второй-вложение).

Предположим теперь, что дивизор $\sum_i X_i$ G-инвариантен. Так как последовательность (3.8.1) расщепляется над $\mathbf{Z}$, имеем точную последовательность G-модулей

$$0\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S_0, \overline{k}^*)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S_0, R)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S_0, S_0)\to 0.$$

Учтем, что $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S_0, \bar{k}^*) = T(\bar{k})$-группа геометрических точек тора $T = \mathrm{Spec}\, k[S_0]$; точная последовательность когомологий дает гомоморфизм

$$\delta : \mathrm{Hom}_G(S_0, S_0) \to H^1(G, T(\bar{k})).$$

Пусть $h \in H^1(G, T(\bar{k}))$-образ id при этом гомоморфизме. Это-характеристический класс G-расширения (3.8.1), который в то же время определяет главное однородное пространство тора T над k. Пусть $X \subset V$ такой дивизор, что $X \otimes \bar{k} = \bigcup_i X_i$ на $V \otimes \bar{k}$.

3.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. — *Определим k-морфизм*

$$g : V \backslash X \to T^h$$

через гомоморфизм колец

$$(\bar{k}[S_0])^G \to (\bar{k}[R])^G \to \Gamma^G(V \otimes \bar{k} \backslash \bigcup_i X_i, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = \Gamma(V \backslash X, \mathcal{O}_V),$$

где действие группы G на $\bar{k}[S_0]$ определяется через коцикл h, так что

$$T^h = \mathrm{Spec}(\bar{k}[S_0])^G.$$

Тогда $g \otimes \bar{k} = f$ при надлежащем отождествлении $T \otimes \bar{k}$ с $T^h \otimes \bar{k}$, и морфизм g не зависит от выбора сечения Φ.

Доказательство. — Все следует из явного описания представителя коцикла $\{h_g\}$: пусть ${}^g z$ для $z \in S_0$-образ относительно действия $g \in G$; элемент $h_g \in T(\bar{k})$ определяется значениями на нем функций z, ибо $h_g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S_0, \bar{k}^*)$; тогда имеем (из явного описания δ):

$$z(h_g) = \varphi({}^g z) \circ (g\varphi(z))^{-1}.$$

Действие группы G на $\bar{k}[S_0]$ определяется тогда:

$$g(z) = z(h_g)\, {}^g z, \qquad z \in S_0,$$

то есть оно согласовано с действием G на $\bar{k}[R]$.

Если заменить сечение φ на $\psi : S_0 \to R$, то представитель коцикла h изменится на гомологичный ему.

3.10. ТЕОРЕМА. — *Пусть F — k-поверхность дель Пеццо степени шесть, $X_1, \ldots, X_6 \subset F \otimes \bar{k}$-все неприводимые исключительные кривые первого рода на $F \otimes \bar{k}$, $X \subset F$-такой дивизор, что $X \otimes \bar{k} = \sum_{i=1}^{6} X_i$. Положим $U = F \backslash X$. Тогда тор*

$$T = \mathrm{Spec}\, k[S_0]$$

двумерен, и отображение схемы U в главное однородное пространство над этим тором, описанное в предложении 3.9, является изоморфизмом.

Прежде чем доказывать этот результат, установим некоторые следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. — *Для того, чтобы k-поверхность дель Пеццо степени 6 была бирационально эквивалентна плоскости над k необходимо и достаточно, чтобы на ней существовала рациональная k-точка.*

Доказательство. — Необходимость условия тривиальна; покажем достаточность. Можно считать, что поверхность F k-минимальна: иначе дело сводится к поверхности дель Пеццо большей степени, для которых все доказано (следствие 3 теоремы 3.7).

Из минимальности F следует, что никакая ее k-точка не лежит на X. Действительно, по лемме 0.4 группа Галуа G действует на X_i, $i=1, \ldots, 6$ так, что никакая орбита не состоит из одной прямой и не содержит пары непересекающихся прямых. Поскольку кривые X_i образуют на $F\otimes\overline{k}$ « шестиугольник », отсюда легко следует, что на нем не может лежать G-инвариантная иочка.

Возьмем теперь k-точку $x\in F$ и произведем моноидальное преобразование $F'\to F$ с центром в x. Пусть $X_0\subset F'$-образ x на F'. Так как $x\in X$, поверхность F' является поверхностью дель Пеццо степени пять (теорема 3.4). Пользуясь утверждением г. теоремы 3.4, легко установить, что на поверхности $F'\otimes\overline{k}$ имеется ровно три неприводимые исключительные кривые Y_1, Y_2, Y_3, пересекающиеся с X; каждая из этих кривых пересекает две противоположные стороны шестиугольника исключительных кривых, перенесенного с $F\otimes\overline{k}$ на $F'\otimes\overline{k}$. Далее, кривая $Y_1+Y_2+Y_3$-G-инвариантна и, наконец, $(Y_i . Y_j)=0$ при $i\neq j$. Пусть $Y\subset F'$-такой дивизор, что $Y\otimes\overline{k}=Y_1+Y_2+Y_3$. По лемме 0.4, дивизор Y можно стянуть над k; пусть F_0-получившаяся поверхность. Легко видеть, что $F_0\otimes\overline{k}$ минимальна и изоморфна $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$; следовательно, F_0 k-изоморфна квадрике, но так как на F_0 есть k-точка, F_0 бирационально эквивалентна плоскости над k.

СЛЕДСТВИЕ 2. — *Поверхность дель Пеццо* F, *степени 6, определенная над числовым или функциональным полем k имеет k-точку в том, и только в том случае, если для всех пополнений k_p поверхность $F\otimes k_p$ имеет k_p-точку.*

Доказательство. — Результат немедленно следует из теоремы 3.10 и замечания Воскресенского [25], согласно которому для любого двумерного тора T над k имеет место принцип Хассе, то есть ядро гомоморфизма

$$H^1(k, T(\overline{k})) \to \prod H^1(k_p, T(\overline{k}_p))$$

тривиально.

Из этого следствия, в частности, вытекает результат Селмера [23] о том, что поверхности над числовыми полями вида

$$x^3+ay^3=b(z^3+at^3)$$

удовлетворяют принципу Хассе, ибо как заметил Сегре [17], на этой кубической поверхности F имеется тройка прямых стягиваемых над основным полем. То же следовательно, верно для любой кубической поверхности с такой тройкой.

3.11. *Доказательство теоремы 3.10.* — Как мы уже отмечали, все поверхности дель Пеццо степени шесть являются формами одной из них, ибо проективная группа транзитивно действует на тройках неколлинеарных точек на плоскости. Удобно в качестве основной k-формы выбрать поверхность $F \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, заданную уравнением

$$x_0 y_0 z_0 - x_1 y_1 z_1 = 0,$$

где (x_0, x_1), (y_0, y_1), (z_0, z_1)-однородные координаты сомножителей. Морфизм

$$\mathrm{pr}_{12} : F \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$$

есть моноидальное преобразование квадрики $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ с центром в точках

$$((0, 1), (1, 0)) \quad \text{и} \quad ((1, 0), (0, 1)).$$

Образы этих точек на F являются противоположными сторонами шестиугольника исключительных кривых на F. Аналогично обстоит дело с проекциями на другие пары множителей.

В обозначениях п. 3.8 в качестве $\varphi(S_0) \subset R$ можно взять группу функций, порожденную $\frac{x_0}{x_1}, \frac{y_0}{y_1}$ и $\frac{z_0}{z_1}$. Эта группа свободна ранга 2, G действует на нее, как и на S_0, тривиально, и очевидно, что соответствующий морфизм

$$F \backslash X \to \operatorname{Spec} k \left[\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_1}{x_0}, \frac{y_0}{y_1}, \frac{y_1}{y_0}\right]$$

является изоморфизмом. Тем самым, для любой k-поверхности дель Пеццо F степени шесть цикла исключительных кривых X морфизм предложения 3.9 $g : F \backslash X \to T^k$ обладает тем свойством, что $g \otimes \bar{k}$-изоморфизм. Отсюда вытекает, что g-изоморфизм.

3.12. ТЕОРЕМА. — *Пусть* F — *k-поверхность дель Пеццо степени n.*

а) *В случае бесконечного поля k предположим дополнительно, что существует такой элемент $z \in N(F)^G$, для которого число $(z . \omega_F^{-1})$ взаимно просто с n. Тогда на F существует k-точка. Если, кроме того, на $F \otimes \bar{k}$ нет G-инвариантной исключительной кривой первого рода (например когда F k-минимальна), то можно найти k-точку на F, не лежащую на исключительных кривых.*

б) *Если поле k конечно, то на всякой рациональной k поверхности существует k-точка. На поверхности дель Пеццо F степени n заведомо можно найти такую точку, не лежащую на исключительных кривых, если число q элементов поля k удовлетворяет неравенству*

$$q > 10 + e_n - n$$

где e_n-число неприводимых исключительных кривых первого рода на $F \otimes \bar{k}$.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

3.13. ЛЕММА. — *Предположим, что поле k бесконечно, и пусть F-регулярная проективная k-поверхность степени n. Тогда существует такой k-морфизм $f : F' \to F$, что морфизм $f \otimes \bar{k}$ является моноидальным преобазованием с центром в замкнутых точках поверхности $F \otimes \bar{k}$, и такой k-морфизм $p : F' \to \mathbf{P}^1$, что:*

$$p^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)) = f^*(\mathcal{O}_F(1)) \otimes \mathcal{O}_{F'}(-X)$$

где X-дивизор на F′, стягиваемый морфизмом f. Кроме того, можно считать, что все слои морфизма p геометрически неприводимы.

(Доказательство этого результата существенно содержится в статье Игузы [9]: для конструкции p и F′; нужно рассмотреть пучок гиперплоскости сечений F достаточно общим пучком гиперплоскостей пространства, содержащего F, и произвести моноидальное преобразование с центром в k-подсхеме базисных точек этого пучка).

3.14. *Доказательство теоремы 3.12.* — Начнем с рассмотрения бесконечного основого поля k. Пусть $p: F' \to \mathbf{P}^1$—k-морфизм, существование которого утверждается в лемме 3.13. Мы можем считать, что на $F \otimes \bar{k}$ нет G-инвариантной неприводимой исключительной кривой. Тогда морфизм $p: F' \to \mathbf{P}^1$ определяет на F′ структуру $\mathbf{P}^1$-минимальной поверхности, расслоенной на кривые рода 1: В самом деле, ни компоненты дивизора $X \otimes \bar{k}$, ни f-прообразы исключительных кривых на $F \otimes \bar{k}$ не могут лежать в слоях морфизма $p \otimes \bar{k}$.

Так как для любой k-точки $x \in \mathbf{P}^1$ имеем $\mathcal{O}_{F'}(F'_x) = \omega_{F'}^{-1}$ (лемма 3.13 и п. 2.1), из теоремы 1.7 следует, что неприводимые исключительные кривые на $F' \otimes \bar{k}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с сечениями $\bar{s}: \mathbf{P}^1_{\bar{k}} \to F' \otimes \bar{k}$ морфизма $p \otimes \bar{k}$, а G-инвариантные неприводимые исключительные кривые с сечениями $s: \mathbf{P}^1 \to F'$ морфизма p. Очевидно, достаточно доказать наличие G-инвариантного сечения.

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi: N(F') \to \mathbf{Z}$, определенный для любого $z \in N(F')$ формулой

$$\varphi(z) = (z \, . \, \omega_{F' \otimes \bar{k}}^{-1}).$$

Пусть $\bar{N} = \operatorname{Ker} \varphi$. Очевидно, $\omega_{F' \otimes \bar{k}} \in \bar{N}$; положим $N = \bar{N}/(\omega_{F' \otimes \bar{k}})$. Известно, что классы $\mathbf{P}^1_k$-поверхностей со слоем рода 1, которые над k становятся изоморфны $F' \otimes \bar{k}$, находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $H^1(k, N(F))$ (структура G-модуля с N(F)), очевидно, переносится на группы N, $\bar{N}$, ибо элемент $\omega_{F' \otimes \bar{k}}^{-1}$ G-инвариантен. Самой поверхности F′ соответствует в группе $H^1(k, N)$ ее характеристический класс $c(F')$, который является классом когомологий коцикла

$$s \to s(X) - X, \quad s \in G$$

где $X \in F' \otimes \bar{k}$-любая неприводимая исключительная кривая. (Очевидно,

$$s(X) - X \in \bar{N};$$

для краткости мы обозначаем класс этого дивизора в группе N тем же символом), Легко проверить, что от выбора X этот класс когомологий не зависит.

Докажем, что при выполнении условий теоремы $c(F') = 0$. Прежде всего, G-модуль $\bar{N}$ разлагается в прямую сумму

$$\bar{N} = N + \mathbf{Z}\omega_{F' \otimes \bar{k}},$$

где N вкладывается в $\overline{\mathrm{N}}$ как подгруппа, порожденная сечениями (это следует из теоремы 1.7 и из геометрической неприводимости слоев p). Тем самым, имеет место изоморфизм $\mathrm{H}^1(k, \overline{\mathrm{N}}) = \mathrm{H}^1(k, \mathrm{N})$, посредством которого мы отождествим эти группы. Рассмотрим точную последовательность G-модулей:

$$0 \to \overline{\mathrm{N}} \to \mathrm{N}(\mathrm{F}') \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Z} \to 0$$

и соответствующую ей когомологическую последовательность

$$\mathrm{N}(\mathrm{F}')^{\mathrm{G}} \xrightarrow{\varphi_*} \mathbf{Z} \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(k, \overline{\mathrm{N}}).$$

Легко проверяется, что $c(\mathrm{F}') = \delta(1)$. Поэтому достаточно проверить, что φ_*-эпиморфизм.

Пусть $z \in (\mathrm{N}(\mathrm{F}))^{\mathrm{G}}$-такой элемент, что степень $(z.\omega_{\mathrm{F}})$ взаимно проста с n. Пусть $f: \mathrm{F}' \to \mathrm{F}$-морфизм, описанный в лемме 3.13 и пусть

$$\xi = f^*(\omega^{-1}_{\mathrm{F}\otimes\bar{k}}) - \omega^{-1}_{\mathrm{F}'\otimes\bar{k}} \in \mathrm{N}(\mathrm{F}');$$

тогда имеем:

$$(\xi.\xi) = -n, \qquad (\xi.\omega^{-1}_{\mathrm{F}\otimes\bar{k}}) = n,$$

и $(\xi.f^*(z)) = 0$ для всех $z \in \mathrm{N}(\mathrm{F})$ (см. п. 2.1) Поэтому

$$(f^*(z).\omega^{-1}_{\mathrm{F}'\otimes\bar{k}}) = (f^*(z).f^*(\omega^{-1}_{\mathrm{F}\otimes\bar{k}})) - (f^*(z).\xi) = (\xi.\omega^{-1}_{\mathrm{F}\otimes\bar{k}}),$$
$$(f^*(\omega^{-1}_{\mathrm{F}\otimes\bar{k}}).\omega^{-1}_{\mathrm{F}\otimes\bar{k}}) = (\xi.\omega^{-1}_{\mathrm{F}\otimes\bar{k}}) = n.$$

Из взаимной простоты этих двух чисел следует, что φ_*-эпиморфизм, ибо, очевидно, $f^*(z)$ и $f^*(\omega^{-1}_{\mathrm{F}\otimes\bar{k}})$ принадлежат группе $\mathrm{N}(\mathrm{F}')^{\mathrm{G}}$. Следовательно, $c(\mathrm{F}') = 0$.

Но из обращения в нуль $c(\mathrm{F}')$ следует, что F' имеет сечение уже над k. Для полноты дадим набросок доказательства этого известного факта. Пусть $x \in \mathbf{P}^1_k$-общая точка, $i: \mathrm{F}'_x \otimes \bar{k} \to \mathrm{F}' \otimes \bar{k}$-вложение общего слоя, $\mathrm{X} \subset \mathrm{F}' \otimes \bar{k}$-некоторое $\bar{k}$-сечение, $i^*(\mathrm{X} \otimes \bar{k}) = \xi$-дивизор на $\mathrm{F}'_x \otimes \bar{k}$. Поскольку $c(\mathrm{F}') = 0$, имеем для всех

$$s(\xi) - \xi = s(\eta) - \eta,$$

где η-некоторый дивизор (на $\bar{k}(x)$-кривой F'_x) степени нуль. Поэтому дивизор $\xi - \eta$ G-инвариантен, а степень $\xi - \eta$ равна 1. Из теоремы Римана-Роха для кривой рода единица следует существование на общем слое $\mathrm{F}'_x \otimes k$ G-инвариантного эффективного дивизора степени 1; его замыкание на $\mathrm{F}' \otimes \bar{k}$ дает G-инвариантное $\bar{k}$-сечение.

Образ этого сечения на F является k-кривой рода нуль (с k-рациональной точкой), которая не совпадает ни с одной из исключительных кривых. Первая часть теоремы 3.12 доказана.

Пусть теперь k-конечной поле с числом элементов q. Как показал А. Вейль [24] число k-точек на рациональной k-поверхности равно

$$q^2 - (\Sigma\varepsilon_i)q + 1,$$

гле ε_i-характеристические корни представления морфизма Фробениуса на $\mathrm{N}(\mathrm{F})$. Поэтому это число $\equiv 1 \bmod q$ и, значит, отлично от нуля. Если F-поверхность дель Пеццо степени n, то ранг группы $\mathrm{N}(\mathrm{F})$ равен $10 - n$, а число k-точек, попадающих на исключительные кривые, не превосходит $e_n(q+1)$. Поэтому для существования k-точки, не лежащей на исключительных кривых, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$q^2-(10-n)q-e_n(q+1)+1>0,$$

которое, как легко видеть, следует из неравенства теоремы $q>10-n+e_n$.

Замечание 1. — Более детально рассматривая дивизор исключительных кривых, можно улучшить оценку, но для всех q результат не может быть верен: произведя моноидальное преобразование над $\mathbf{P}^2_k$ над полем k из двух элементов с центром в четырех k-точках, мы получим поверхность дель Пеццо степени пять, у которой все k-точки лежат на исключительных кривых.

Замечание 2. — В случае бесконечного поля k критерий теоремы 3.12 для поверхностей степени 9, 8, очевидно, неприменим, пбо в иервом случае $(z.\omega_F^{-1})$ всегда делится на 3, а во втором-на 2. Для степени 7 результат тривиален (следствие 1 из теоремы 3.7). С другой стороны, для поверхностей F с антиканонической системой без неподвижных компонент степени 2 результат верен. Для доказательства нужно лишь убедиться, что верен аналог леммы 3.13. Но антиканонический пучок дает рациональное отображение степени 2, и для построения нужно произвести моноидальное преобразование с центром в паре сопряженных относительно этого отображения точек.

3.15. ТЕОРЕМА. — *Пусть* F—*k-поверхность дель Пеццо степени пять,* K-*нормальное расширение поля k степени d и* $(d, 5)=1$. *Если на* $F\otimes K$ *есть* K-*точка, то* F *бирационально эквивалентна* $\mathbf{P}^2_k$.

Доказательство. — Пусть сначала $d=1$ и пусть существует k-точка x, не лежащая на исключительных кривых. Сделаем моноидальное преобразование с центром x. Получившаяся поверхность F′, обладает тем свойством, что образ точки x на $F'\otimes\overline{k}$ пересекает пять попарно непересекающихся неприводимых исключительных кривых, сумма которых инвариантна. Это следует из теоремы 3.4 г: если $F\otimes\overline{k}$ является образом $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$ при моноидальном преобразовании с центром в точках $x_1, \ldots, x_4$ и $x_0\in\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$-образ точки $x\otimes\overline{k}$, то интересующая нас пятерка исключительных кривых состоит из образов прямых, проходящих через точки x_0, x_i, и коники, проходящей через точки $x_0, x_1, \ldots, x_4$.

Стянув эту пятерку исключительных кривых над k, мы получим бирациональный k-морфизм поверхности F′ на тривиальную поверхность Севери-Брауэра, потому что на ней есть точка.

Пусть $d=1$ и рациональная точка $x\in F$ лежит на единственной неприводимой исключительной кривой. Тогда эта кривая определена над k. В силу теоремы 3.4 г, ее пересекает на $F\otimes\overline{k}$ тройка попарно непересекающихся неприводимых исключительных кривых. Стянув эту тройку над k, мы получим бирациональный k-морфизм поверхности F на квадрику, на которой есть рациональная точка (например, образ точки x).

Пусть, наконец, $d=1$ и k-точка $x \in \mathrm{F}$ лежит на пересечении двух неприводимых исключительных кривых на $\mathrm{F}\otimes\overline{k}$. Эту пару в силу теоремы 3.4 г) пересекает четверка исключительных кривых, стягиваемая над k, что снова дает требуемое. В частности, в силу теоремы 3.12 б) все доказано в случае конечного поля.

Рассмотрим теперь случай $d>1$. Поверхность $\mathrm{F}\otimes\mathrm{K}$ бирационально эквивалентна $\mathbf{P}_k^2$. Легко видеть, что на $\mathrm{F}\otimes\mathrm{K}$ существует такая кривая X, что $(\mathrm{X}.\omega_\mathrm{F})$ взаимно просто с 5. Например, если K-точка $x \in \mathrm{F}\otimes\mathrm{K}$ не лежит на исключительных кривых, достаточно взять в качестве X образ достаточно общей прямой на $\mathbf{P}_k^2$ относительно описанного выше бирационального соответствия (точнее, нужно, чтобы эта прямая неп роходила через точки $x_0, \ldots, x_4$). Аналогично разбираются другие два случая.

Пусть теперь Z — k-дивизор на F такой, что $\mathrm{Z}\otimes\mathrm{K}$ на $\mathrm{F}\otimes\mathrm{K}$ является суммой X и всех k-сопряженных к X. Тогда, очевидно, $(\mathrm{Z}.\omega_\mathrm{F}) \not\equiv 0 \bmod 5$, так что можно применить теорему 3.12 а), которая стодит все уже разобранному случаю $d=1$.

Замечание. — В работе Энриквеса [7] утверждается, что поверхность дель Пеццо степени 5 всегда содержит k-рациональную точку, но мне не удалось это доказать.

3.16. Критерий п. 2.3 в применении к поверхностям дель Пеццо степени $n \geqslant 5$, как нетрудно проверить, не дает нетривиальных результатов. При $n \leqslant 4$ существование рациональных точек перестает быть равносильным бирациональной тривиальности поверхности дель Пеццо. В частности, Б. Сегре [17] доказал, что минимальная кубическая поверхность бирационально нетривиальна, хотя легко построить примеры таких поверхностей, имеющих рациональную точку.

Ниже мы вычисляем группу $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{N}(\mathrm{F}))$ для минимальных поверхностей дель Пеццо F степени 4. Предварительно описывается всевозможные разбиения множества прямых на $\mathrm{F}\otimes\overline{k}$ на орбиты относительно действия группы Галуа; для каждого такого разбиения группа H^1 вычисляется с помощью леммы 2.9. Результат, подобный теореме Сегре, неверен. Хотя для большинства <12 из 19> разбиений группа либо нетривиальна, либо становится нетривиальной над расширением основного поля, это может быть неверно по крайней мере для одного из разбиений, и не проверено для остальных леми. В этих случаях вопрос открыт. Наши результаты неполны, и задача заслуживает дальнейшего изучения, ибо она относится к одной из простейших диофантовых систем уравнений: две квадратичные формы от пяти переменных <см. ниже, п. >4. Интересно было бы решить для нее вопрос о справедливости принципа Хассе. Кубические поверхности с одной рациональной прямой, вопрос с бирациональной нетривиальности которых оставлен открытым в статье Б. Сегре [17], также сводятся к этому случаю; наш критерий дает частичное его решение: для двенадцати типов из девятнадцати возможных.

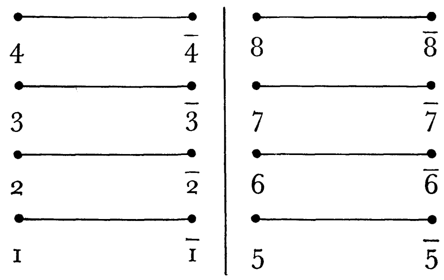
Читатель, интересующийся лишь результатом, может ограничиться просмотром пп. 3.18, 3.21, 3.22 и таблицы 3.27.

3.17. Пусть F—k-поверхность дель Пеццо степени 4. В п.п. 3.5-3.6 определена группа автоморфизмов Γ_4 « конфигурация прямых » $\mathscr{E}_4$ на $F\otimes\bar{k}$. Действие группы Галуа G на $F\otimes\bar{k}$ определяет гомоморфизм $G\to\Gamma_4$ (или, точнее, класс таких гомоморфизмов с точностью до сопряжения), образ которого определяет H^1. Поэтому полная информация о возможных типах поверхностей F состояла бы в описании всех подгрупп Γ_4 и вычислении H^1 для каждой из них. Но подгрупп слишком много, а H^1 на самом деле определяется лишь разбиением $\mathscr{E}_4$ на орбиты, которых гораздо меньше. Описанием таких разбиений мы сейчас займемся.

В дальнейшем удобно будет изображать $\mathscr{E}_4$ в виде графа вершины которого соответствуют прямым, а две вершины соединены симплексами тогда и только тогда, когда соответствующие прямые пересекаются. Всякая подгруппа группы Γ_4 действует на вершины; орбите соответствует подграф, состоящий из вершин этой орбиты и соединяющих их симплексов.

Рассмотрим следующий граф с 10-ю вершинами, пронумерованными, как показано на чертеже.

(3.17.1)



На этом чертеже не указаны симплексы, соединяющие вершины лежащие левее вертикальной черты с вершинами лежащими правее ее. Будем считать, что каждая вершина, лежащая по одну сторону черты, соединена еще ровно с одной из вершин каждой пары, лежащей по другую сторону черты. При этом вершины, левые (соответственно правые) в своей паре, соединяются с вершинами правыми (соответственно левыми) в своей паре, если они лежат на разных горизонтальных уровнях (строках) и с левыми (соответственно правыми), если они лежат в одной строке.

Например, вершина 1, кроме $\bar{1}$, соединена еще с 5, $\bar{6}$, $\bar{7}$, 8.

3.18. ЛЕММА. — *Описанный граф изоморфен* $\mathscr{E}_4$.

Доказательство. — Согласно теореме 3.4, $\mathscr{E}_4$ состоит из образов на поверхности $F\otimes\bar{k}$ пяти точек на $\mathbf{P}^2$, десяти прямых, проходящих через пары этих точек, и одной коники, проходящей через все точки. Пусть $x_0, \ldots, x_4$-образы точек, L_{ji} $(i\neq j;\ i, j=0, \ldots, 4)$-образ прямой через i-ю и j-ю точку, Q-образ коники. Следующая таблица устанавливает взаимно однозначное соответствие между вершинами описанного графа и этими кривыми.

1	2	3	4	5	6	7	8	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
L_{01}	x_2	x_3	x_4	x_1	L_{02}	L_{03}	L_{04}	x_0	L_{12}	L_{13}	L_{14}	Q	L_{34}	L_{24}	L_{23}

То, что при этом соответсвии сохраняется бинарное отношение, предлагается проверить читателю.

Граф, описанный в п. 3.19 будем называть каноническим графом объекта $\mathscr{E}_4$. Подгруппу $\Gamma \subset \Gamma_4$ будем называть допустимой, если подграфы ее орбит не состоят из изолированных вершин: допустимые подгруппы являются образами группы Галуа, действующей на минимальные поверхности.

СЛЕДСТВИЕ. — *Группа* Γ_4 *транзитивна на подграфах вида* •——• *графа* $\mathscr{E}_4$.

(Это не совсем очевидно лишь для таких подграфов, вершины которых лежат по разные стороны от вертикальной черты. Но из п. 3.19 легко усмотреть, это для каждого такого подграфа вершины, не соединенные с ним, объединяются в три пары вида •——•, оставшиеся вершины объединяются в четыре пары, и отношение между элементами этих восьми пар совпадают с описанными).

3.19 ЛЕММА. — *Пусть* $Z_1, \ldots, Z_n$*-все подграфы орбит некоторой группы, действующей на* $\mathscr{E}_4$. *Пусть* a_r*-число вершин в* Z_r, l_{rs}*-число симплексов, выходящих из одной вершины в орбите,* Z_r *и кончающихся в орбите* Z_s. *Числа* l_{rs} *не зависят от выбора вершины и удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\sum_{s=1}^{n} l_{rs} = 5, \qquad r = 1, \ldots, n; \tag{3.19.1}$$

$$a_r l_{rs} = a_s l_{sr}; \qquad r, s = 1, \ldots, n. \tag{3.19.2}$$

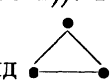
Кроме того,

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = 16, \tag{3.19.3}$$

и группа допустима в том и только том случае, когда $l_{rr} \geqslant 1$ *Для всех* r; *в частности,* $a_r \geqslant 2$.

Доказательство. — Независимость l_{rs} от выбора вершины в Z_r следует из транзитивности группы на орбите. Соотношение (3.19.1) вытекает из того, что в $\mathscr{E}_4$ из любой вершины выходит 5 симплексов. Соотношение (3.19.2) при $r = s$ тривиально, а при $r \neq s$ получается из подсчета двумя разными способами числа симплексов, соединяющих две данные орбиты. Равенство (3.19.3) означает, что всего вершин 16; последнее утверждение следует из определения.

3.20 ЛЕММА. — *Пусть* $\Gamma \subset \Gamma_4$*-допустимая подгруппа. Тогда каждая ее орбита состоит либо из 6, либо из 12, либо из* 2^α, $1 \leqslant \alpha \leqslant 4$, *вершин.*

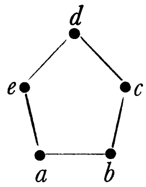
Доказательство. — Порядок группы Γ_4 равен $2^7.3.5$ (лемма 3.6 в)). Граф орбиты из трех вершин в силу леммы 3.19 должен был бы иметь вид  но, как легко убедиться, в каноническом графе нет таких подграфов. Орбиты из 15 элементов не может быть, ибо дополнением ее была бы орбита из одного элемента, что противоречит допустимости.

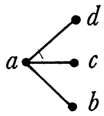
Покажем теперь, что не может быть орбит допустимой группы из 5 и 10 элементов.

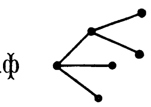
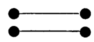
Пусть Z_1-такая орбита; так как $l_{11}\geqslant 1$, из (3.21.1) следует, что $l_{1s}\leqslant 4$ при $s\neq 1$, а из (3.19.2) тогда вытекает, что при $a_1\equiv 0 \bmod 5$ либо $a_s\equiv 0 \bmod 5$, либо $l_{1s}=l_{s1}=0$. Из (3.22.3) следует, что все a_s не могут делиться на 5, поэтому можно считать, что $l_{12}=0$.

С любой вершиной канонического графа, в частности, орбиты Z_2, не соединены 10 вершин- для разных вершин эти десятки не совпадают; следовательно, так как $a_2\geqslant 2$, из $l_{12}=0$ следует, что $a_1<10$.

Допустим, что $a_1=5$. Покажем прежде всего, что $l_{11}=2$ и Z_1 имеет такой вид:



Действительно, $l_{11}=1$ невозможно, ибо тогда вершины соединяются попарно. При $l_{11}=2$ строя орбиту последовательно и учитывая отсутствие треугольников, получим требуемый вид. Пусть $l_{11}=3$; орбита содержит подграф 

; d не может соединяться с b или c; поэтому имеется подграф  , что дает больше, чем надо, вершин. Случаи $l_{11}\geqslant 4$ невозможны. В силу следствия к лемме 3.18 можно найти такой изоморфизм $\mathscr{E}_4$ с каноническим графом, при котором $a\to 1$, $b\to \bar{1}$; тогда d попадает в левую восьмерку вершин; в силу того, что $l_{1s}=0$, если $a\neq 0 \bmod 5$, орбита Z_s содержится в множестве четырех вершин, не соединяющихся с a, b и d и составляющих две пары . Следовательно, если $Z_1, \ldots, Z_k$-все орбиты из 5 элементов, имеем

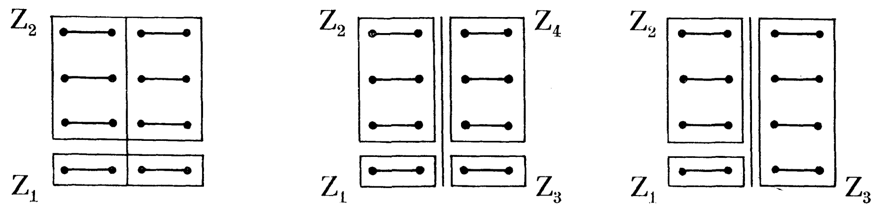
$$a_{k+1}+\ldots+a_n\leqslant 4.$$

Отсюда следует, учитывая (3.19.3), что а $a_{k+1}+\ldots+a_n=1$, а это противоречит допустимости группы.

Тем самым, орбиты могут состоять лишь из 6,12 или 2^{α}, $1\leqslant\alpha\leqslant 4$ элементов.

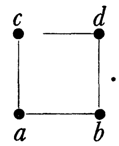
3.21. ЛЕММА. — *Пусть $\Gamma\subset\Gamma_4$-допустимая подгруппа и пусть существует орбита Γ, число вершин которой делится на три. Тогда можно найти такой* *изоморфизм $\mathscr{E}_4$ с каноническим графом, при котором разбиение на орбиты выглядит одним из следующих способов:*

(3.21.1)



I II III

Доказательство. — Пусть $a_2 \equiv 0 \bmod 3$. Тогда $a_2 = 12$ или 6. Пусть $a_2 = 12$. Имеем $12 l_{2s} = a_s l_{s2}$, причем $l_{2s}, l_{s2} \neq 0$, ибо с каждой вершиной не соединяются лишь 10 вершин. Если $1 \leqslant a_s \leqslant 2$, то $l_{s2} \geqslant 6 l_{2s}$, что невозможно, ибо $l_{s2} \leqslant 4$. Так как $a_s = 3$ тоже невозможно, имеем $a_s = 4$, $l_{s2} = 3 l_{2s}$. Тем самым, $n = 2$, $l_{21} = 1$, $l_{12} = 3$, $a_1 = 4$, откуда из условия $l_{12} + l_{11} = 5$ находим $l_{11} = 2$. Следовательно орбита Z_1 имеет вид



. Отобразим $\mathscr{E}_4$ в канонический граф, так, чтобы $(a, b) \to (1, \bar{1})$ легко видеть, что тогда можно добиться, чтобы $(c, d) \to (5, \bar{5})$, откуда следует описанный вид разбиения.

Допустим теперь, что есть две орбиты из 6 элементов: $a_1 = a_2 = 6$. Покажем, что случай $n = 3$, $a_3 = 4$ невозможен. Действительно, имеем $6 l_{13} = 4 l_{31}$, откуда либо $l_{13} = 2$, $l_{31} = 3$, либо $l_{13} = l_{31} = 0$. Аналогично, либо $l_{23} = l_{32} = 3$, либо $l_{23} = l_{32} = 0$. Одновременное неравенство нулю не может иметь места: иначе $l_{31} + l_{32} + l_{33} > 5$. Поэтому можно считать, что $l_{13} = l_{31} = 0$. Но с парой •——• не соединяется 6 вершин, и такие шестерки для разных пар не совпадают; поэтому при $a_3 = 4$ и $a_1 = 6$ условие $l_{13} = 0$ невозможно.

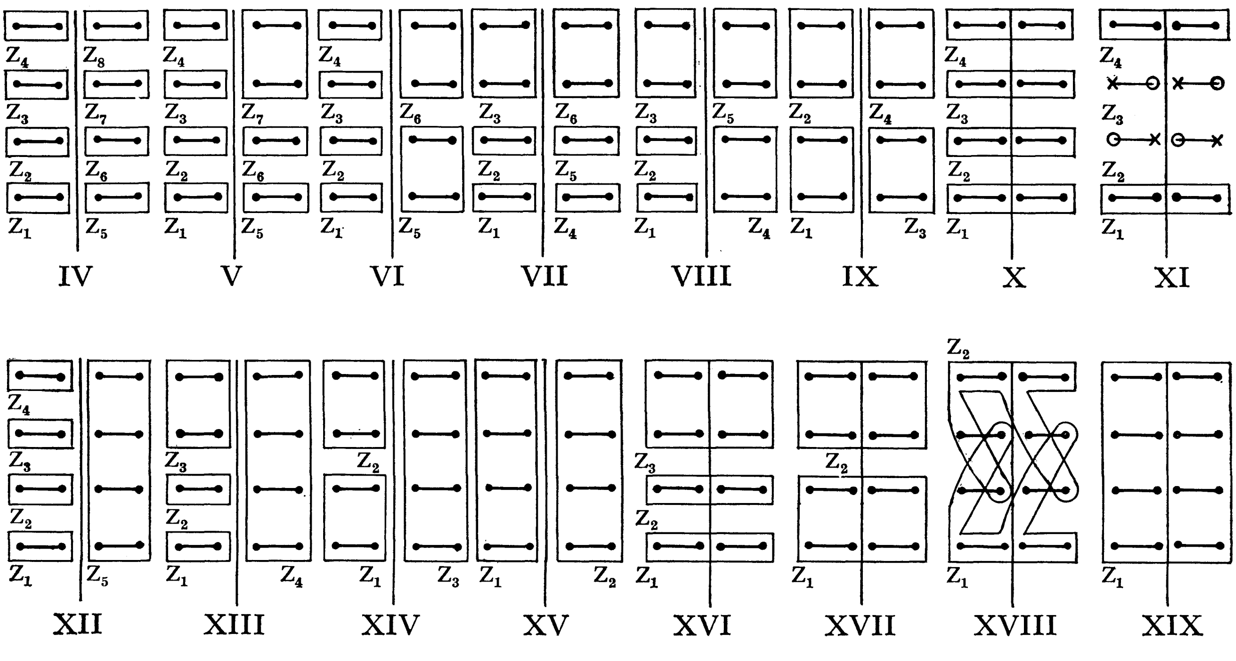
Значит, если $a_1 = a_2 = 6$, то $n = 4$ и $a_3 = a_4 = 2$. Так выше, из равенства $6 l_3 = 2 l_{31}$ находим $l_{13} = 1$, $l_{31} = 3$ или $l_{13} = l_{31} = 0$; аналогично, $l_{23} = 1$, $l_{32} = 3$ или $l_{23} = l_{32} = 0$. Одновременное неравенство или равенство нулю невозможно: в первом случае $l_{31} + l_{32} + l_{33} > 5$, во втором $l_{33} = 5$, что противоречит $a_3 = 2$. Поэтому можно считать, что $l_{13} = l_{31} = 0$. Отобразим $\mathscr{E}_4$ на канонический граф, так, чтобы орбита Z_3 попала на $(5, \bar{5})$. Тогда Z_1, очевидно, будет состоять из вершин $6, \bar{6}, 7, \bar{7}, 8, \bar{8}$. Орбита Z_4 попадает на одну из пар в левом столбце; легко видеть, что можно считать ее парой $1, \bar{1}$.

Разберем теперь случай, когда есть лишь одна орбита из 6 вершин. Пусть $a_1 = 6$, $a_s = 2^{\alpha_s}$, $s \geqslant 2$. Имеем прежде всего $6 l_{1s} = 2^{\alpha} l_{s1}$, $s \neq 1$. Если $l_{s1} \neq 0$, то $l_{s1} = 3$, $l_{1s} = 2^{\alpha_s - 1}$; если все $l_{1s} \neq 0$, то $\sum\limits_{s \geqslant 2} l_{1s} = \frac{1}{2} \sum\limits_{s \geqslant 2} a_s = 5$, что невозможно, ибо $l_{11} > 0$. Значит, для некоторых s имеем $l_{1s} = 0$. Так как $a_1 = 6$, как было замечено выше, такое s может быть только одно, скажем, $s=2$, и для него $a_2=2$. Орбиты Z_1 и Z_2 как выше, можно считать исчерпывающими правый столбец. Разбиение левого столбца на орбиты, если он не весь является орбитой, может быть только вида $4+4$ или $6+2$. Второй случай уже разобран. Покажем, что первый невозможен. Действительно, пусть $a_3=4$. Очевидно, $l_{33}=1$. Воспользуемся в этом месте тем, что наше разбиение определено группой. Так как у нее есть орбита из 6 элементов, ее порядок делится на 3; потому она содержит циклическую подгруппу порядка 3, и все они сопряжены. Такая группа действует на канонический граф, например, так: циклически переставляет три верхние строчки. Следовательно, у нее есть 4 орбиты по 3 несоединенных вершины и 4 орбиты по одной вершине. Любая орбита группы Г должна быть объединением таких орбит: но легко видеть, что орбита с $a=4$, $l=1$ этому условию не удовлетворяет.

Замечание. — В условиях леммы 3.21 группа Г обязательно имеет порядок 3.2^α. В самом деле, иначе ее орбиты были бы объединением орбит циклической 5-подгруппы, но последние, как нетрудно видеть, содержат 5, 5, 5 и 1 вершину, так что получить объединением орбиту из четырех или двух вершин невозможно.

3.22. ЛЕММА. — *Пусть Г-допустимая группа, орбиты которой на $\mathcal{E}_4$ состоят каждая из 2^α элементов. Тогда существует изоморфизм $\mathcal{E}_4$ на канонический граф, при котором разбиение на орбиты выглядит одним из следующих способов:*

(3.22.1)



Доказательство. — Сохраняем обозначения леммы 3.21. Если все $a_r = 2$, отобразив одну из орбит в $1, \bar{1}$, получим разбиение IV.

Пусть $\max a_i = 4$. Покажем, что если есть орбита Z_r с $l_{rr} = 2$, то $n = 4$, $a_1 = \ldots = a_4 = 4$ и $l_{rr} = 2$ для всех $r = 1, \ldots, 4$. (Если $l_{rr} = 1$ для всех r, то как легко видеть, получаем случаи V-IX; $l_{rr} > 2$-невозможно).

Пусть $\max a_i = 4$. Отображая Z_1 в $(1, \bar{1}, 5, \bar{5})$, убеждаемся, что любая вершина соединена с Z_1. Поэтому $l_{1s} \geqslant 1$ для всех $s > 1$; но $\sum_{s>1} l_{1s} = 5 - l_{11} = 3$; значит, орбит $\leqslant 4$; в соединении с $\max a_i = 4$ и $\Sigma a_i = 16$ это дает $a_1 = \ldots = a_4 = 4$. Покажем, что $l_{22} = 2$ (и аналогично, $l_{rr} = 2$ для всех $r \geqslant 2$). Иначе $l_{22} = 1$; отобразим Z_2 в канонический граф так, чтобы Z_2 попала в $(1\ \bar{1}\ 2\ \bar{2})$. Тогда у Z_1 две вершины будут слева от черты, а две-справа; вершины слева не соединены с Z_2, а справа-соединены; поэтому такое разбиение не соответствует никакой группе. Тем самым, $l_{rr} = 2$ для всех r, $l_{rs} = 1$ при $r \neq s$.

В этом случае могут получиться два существенно разных разбиения. Так как $l_{rs} = 1$, определено отображение $Z_r \to Z_s$. Назовем эти две орбиты правильно соединенными, если это отображение переводит соединенные вершины в соединенные.

Если все орбиты попарно правильно соединены, отображая одну из них в $(1, \bar{1}, 5, \bar{5})$, найдем, что у остальных трех орбит по каждую сторону от вертикальной черты должна лежать пара соединенных вершин. Получим конфигурацию X.

Предположим теперь, что Z_1 и Z_2 соединены неправильно. Отобразим Z_1 на $(1, \bar{1}, 5, 5)$; тогда у образа Z_2 будут две несоединенные вершины слева и две-справа; можно считать, что это будут $(2, \bar{3}, 6, \bar{7})$. Единственная подгруппа симметрий графа, натянутого на вершины Z_1 и Z_2, для которой Z_1 и Z_2 являются орбитами, изоморфна $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ и порождена следующими подстановками:

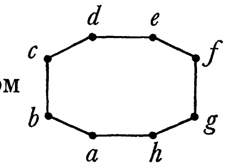
$$\alpha : (1\ \bar{1})\ (5\ \bar{5})\ (2\ \bar{3})\ (6\ \bar{7}),$$
$$\beta : (1\ \bar{5})\ (\bar{1}\ 5)\ (2\ \bar{7})\ (\bar{3}\ 6).$$

Из рассмотрения канонического графа легко увидеть, что отображение $\Gamma \to \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ (где Γ-подгруппа, осуществляющая данное разбиение на орбиты) не имеет ядра (то есть автоморфизм графа, оставляющий на месте вершины $1, \bar{1}, 5, \bar{5}, 2, \bar{3}, 6, \bar{7}$, тривиален). Поэтому, если α и β продолжаются до автоморфизмов канонического графа, то однозначно. На самом деле такое отображение существует и задается так:

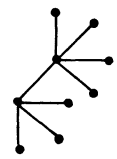
$$\alpha : (\bar{2}\ 3)\ (\bar{6}\ 7)\ (4\ \bar{4})\ (8\ \bar{8}),$$
$$\beta : (\bar{2}\ 7)\ (3\ \bar{6})\ (4\ \bar{8})\ (\bar{4}\ 8)$$

что приводит к разбиению XI.

В случае, когда $a_1 = 8$ и $l_{11} = 1$, получаем разбиения XII-XV, отображая одну из пар орбиты Z_1 на $5, \bar{5}$ в результате чего вся Z_1 попадает направо от черты.

Случай $a_1=8$, $l_{11}=2$ невозможен. В самом деле, строя граф такой орбиты последовательно, легко убедиться, что она должна иметь вид либо двух несоединенных квадратов, либо восьмиугольника. С квадратом в каноническом графе соединена любая вершина, поэтому первое невозможно. Пусть орбита является восьмиугольником 

. Отобразим (a, b) в $(1, \bar{1})$. С точностью до перенумеровки можно считать, что $(d, e) \to (2, \bar{2})$, $g \to 3$. Образы вершин f, h должны однократно соединяться с 3 и однократно-с системой $(1, \bar{1}, 2, \bar{2})$, но таких вершин в каноническом графе, очевидно, нет.

Случай $a_1=8$, $l_{11} \geqslant 4$ невозможен: строя орбиту последовательно и учитывая отсутствие треугольников, приходим к невозможному подграфу  -в нем уже 9 вершин.

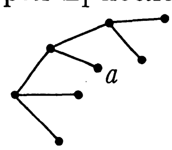
Остается разобрать случай $a_1=8$, $l_{11}=3$. Прежде всего, $l_{1s} \neq 0$ при $s>1$. Действительно, в Z_s содержится соединенная пара, а с ней не соединены только 6 вершин. Поэтому, учитывая, что $\sum_{s \geqslant 2} l_{1s}=2$, имеем: либо $n=3$, $a_2=a_3=4$, либо $n=2$, $a_2=8$.

Пусть $n=3$, $a_2=a_3=4$. Тогда $l_{12}=l_{13}=1$; $l_{21}=l_{31}=2$. Покажем, что случай $l_{22}=1$ невозможен. Иначе $l_{21}+l_{22}+l_{23}=5 \Rightarrow l_{23}=l_{32}=2$; $l_{31}+l_{32}+l_{33}=5 \Rightarrow l_{33}=1$. Отобразим Z_2 на $(1, \bar{1}, 2, \bar{2})$; так как $l_{32}=2$, любая вершина Z_3 лежит справа от черты; так как $l_{33}=1$, можно считать, что Z_3 отображается на $(5\ \bar{5}\ 6\ \bar{6})$. Остальные вершины составляют Z_1; но это невозможно, ибо, скажем, 3 соединена с Z_3, а 7-нет.

Следовательно, при а $a_1=8$, $l_{11}=3$, и $a_2=a_3=4$ имеем $l_{22}=l_{33}=2$; отсюда $l_{23}=l_{32}=1$. Покажем, что квадраты Z_2 и Z_3 правильно соединены; тогда, отображая Z_2 на $(1, \bar{1}, 5, \bar{5})$, а Z_3 на $(2, \bar{2}, 6, \bar{6})$, получим разбиение XVI. В самом деле, если Z_2 и Z_3 соединены неправильно, то можно считать, что

$$Z_2=(1, \bar{1}, 5, \bar{5}), \qquad Z_3=(2, \bar{3}, 6, \bar{7});$$

все остальные вершины должны образовать Z_1, что невозможно, ибо как показано при разборе разбиения XI, группа с орбитами Z_2 и Z_3 разбивает дополнение также на две четверки, а не транзитивна на нем.

Наконец, последний случай (за исключением тривиального XIX): $n=2$, $a_1=a_2=8$, $l_{11}=l_{22}=3$. Прежде всего, в Z_1 есть квадрат. (Иначе, строя Z_1 последовательно и учитывая отсутствие треугольников, найдем подграф 

,

и a не с чем соединяться). Отобразим этот квадрат в $(1, \bar{1}, 5, \bar{5})$. Любая другая вершина соединяется с этим квадратом; дважды соединяться не может, ибо в Z_1 еще 4 вершины, и для $l_{11}=3$ этого мало. Значит, из всех остальных вершин каждая соединена с одной из вершин $(1, \bar{1}, 5, \bar{5})$, и сами они очевидно, объединены в квадрат. Если он правильно соединен с первым квадратом, получаем разбиение XVII.

Пусть теперь он направильно соединен с первым квадратом. Тогда получим разбиение XVIII. Покажем относительно него следующий результат.

3.23. ЛЕММА. — *Пусть* Γ-*группа автоморфизмов канонического графа, осуществляющая разбиение* XVIII. *Тогда* Γ *содержит циклическую подгруппу второго порядка, разбиение для которой изоморфно разбиению* IV.

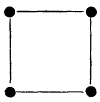
Доказательство. — Рассмотрим орбиту $Z_1=(1, \bar{1}, 5, \bar{5}, 2, 6, \bar{3}, \bar{7})$. Она является « косым кубом »: два основания его-квадраты-соединены неправильно. Подграф косого куба, натянутого на 4 вершины, не соединенные с любой данной, имеет вид •—•—•—•. Поэтому стационарная подгруппа вершины изоморфна $\mathbf{Z}_2$; так как группа автоморфизмов косого куба транзитивна на вершинах, ее порядок равен 16. Образ ограничения группы Γ на первую орбиту имеет порядок либо 8, либо 16. Во втором случае он является полной группой автоморфизмов косого куба и потому содержит циклическую подгруппу, порожденную элементом $(1\ 5)\ (2\ 6)\ (\bar{3}\ \bar{7})\ (\bar{1}\ \bar{5})$. Прообраз этой подгруппы в Γ порожден элементом $(1\ 5)\ (2\ 6)$ $(3\ 7)\ (4\ 8)\ (\bar{1}\ \bar{5})\ (\bar{2}\ \bar{6})\ (\bar{3}\ \bar{7})\ (\bar{4}\ \bar{8})$ и, как легко видеть, дает разбиение вида IV.

Предположим теперь, что образ Γ имеет порядок 8. В таком случае он не содержит стационарной подгруппы на одной из вершин косого куба. Эти вершины разбиваются на четыре пары $(1, 5)$, $(2, 6)$, $(\bar{3}, \bar{7})$, $(\bar{1}, \bar{5})$; элементы каждой пары и только они имеют общую стационарную подгруппу. Следовательно, автоморфизм β, переводящий 1 в 5, переводит 5 в 1, ибо он не может разбивать эти пары. Кроме того, он не оставляет на месте ни одну из вершин. Множества $(2\ 6)$ и $(\bar{1}\ \bar{7}\ \bar{3}\ \bar{5})$ являются объединением орбит при действии циклической группы, порожденной β, ибо первое множество состоит из вершин, соединенных с $(1, 5)$, а второй-не соединенных. Далее, β должен переводить 2 в 6 и 6 в 2. Если β к кому же переводит в себя каждую из пар $(\bar{1}, \bar{5})$, $(\bar{3}, \bar{7})$, то он совпадает с α и потому порождает разбиение IV.

В противном случае он должен менять местами пары $(\bar{1}, \bar{5})$ и $(\bar{3}, \bar{7})$. Покажем, что это невозможно. В самом деле, вершина $\bar{3}$ соединена с 5 и 6. Значит, прообраз должен быть соединен с 1 и 2 и быть $\bar{1}$ или $\bar{5}$, что противоречиво. Лемма доказана.

3.24. ЛЕММА. — *Пусть* Γ-*группа автоморфизмов канонического графа, дающая разбиение* XII. *Тогда* Γ *содержит допустимую подгруппу, дающую либо разбиение* IV, *либо разбиение, изоморфное* VI.

Доказательство. — Прежде всего, Γ является 2-группой. Действительно, ее 3-подгруппа и 5-подгруппа оставляют все вершины слева от черты на месте и потому тривиальны. Далее, пусть $\beta \in \Gamma$. Если β тождественно слева от черты, то β тривиально. Легко видеть, что в противном случае β нетривиально действует либо на всех четырех, либо на двух парах левее черты. В первом случае группа, порожденная β, дает разбиение IV. Во втором случае из транзитивности Γ на орбитах легко следует существование элементов β_1 и $\beta_2 \in \Gamma$, каждый из которых действует нетривиально на двух парах слева, а их произведение-на всех парах слева. Прямой подсчет показывает, что если β нетривиален на двух парах слева, то он переставляет « без перекручивания » две соседние пары справа и переставляет с перекручиванием две другие пары справа. Поэтому подгруппа Γ, порожденная β_1 и β_2, дает разбиение типа VI.

3.25. ЛЕММА. — *Поставим в соответствие всякому подграфу канонического графа цикл из поверхности* $F \otimes \bar{k}$, *являющийся суммой прямых, соответствующих его вершинам. Тогда группа главных дивизоров, натянутых на прямые, порождена попарными разностями циклов, соответствующих подграфам-квадратам*  .

Доказательство. — Все типы квадратов в каноническом графе перечислены ниже:

а. $(i, \bar{i}, j, \bar{j})$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $5 \leqslant j \leqslant 8$;

б. $(i_1, \bar{i}_2, i_1+4, \overline{i_2+4})$, $1 \leqslant i_1 \neq i_2 \leqslant 4$;

в. $(i_1, i_2, \overline{j_1+4}, \overline{j_2+4})$, $(i_1, i_2, j_1, j_2) = (1, 2, 3, 4)$;

г. $(\bar{i}_1, \bar{i}_2, j_1+4, j_2+4)$, $(i_1, i_2, j_1, j_2) = (1, 2, 3, 4)$.

Нетрудно убедиться, что индекс пересечения любой прямой с циклом любого квадрата равен I. Из следствия к теореме 3.4 вытекает тогда, что разности циклов квадратов являются главными дивизорами.

Покажем обратное. Стянув пятерку прямых на $F \otimes \bar{k}$ в пять точек, отобразим $F \otimes \bar{k}$ на $\mathbf{P}^2_{\bar{k}}$. Рассмотрим на $\mathbf{P}^2_{\bar{k}}$ дивизоры, являющиеся попарными разностями прямых через пары таких точек или разностью коники (через 5 точек) и суммы двух прямых. Из геометрических соображений ясно, что обратные образы этих дивизоров на $F \otimes \bar{k}$ порождают всю группу главных дивизоров, натянутую на прямые. Но, в обозначениях леммы 3.18, эти обратные образы равны

$$Q + x_3 + x_4 - (L_{01} + L_{02} + x_1) = (Q + x_3 + x_4 + L_{34}) - (L_{01} + L_{12} + L_{34} + x_1),$$
$$L_{ij} + x_i + x_j - (L_{01} + x_0 + x_1) = (Q + L_{ij} + x_i + x_j) - (Q + L_{01} + x_0 + x_1),$$

и, значит, являются разностями циклов квадратов.

3.26. Пусть дано разбиение $D : \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ канонического графа на подграфы орбит. Пусть a_i-число вершин Z_i, $d =$ н.о.к (a_i). Обозначим через C^0 группу нульмерных цепей графа $\mathscr{E}_4$ и пусть $N_D : C^0 \to C^0$-гомоморфизм, определенный условием: $N_D x = \frac{d}{a_i} \sum_{y \in Z_i} y$, где x-вершина Z_i. На группе C^0 определено спаривание в $\mathbf{Z}$, соответстующее индексу пересечения. Пусть P-ядро этого спаривания. Из леммы 2.9 легко следует.

3.27. ЛЕММА. — *Пусть* D-*разбиение канонического графа на орбиты, соответствующее* k-*поверхности дель Пеццо* F *степени 4. Тогда, в обозначениях п.* 3.26.

$$H^1(k, N(F)) = N_D C^0 \cap P / N_D P.$$

Теперь мы приведем таблицу значений $N_D C^0 \cap P/N_D P$ для описанных выше девятнадцати разбиений D. Образующие группы $N_D C^0 \cap P$ приведены в таблице (мы пишем Z_i вместо $\sum_{x \in Z_i} x$: см. леммы 3.21 и 3.22); подгруппа $N_D P$ легко вычисляется для каждого разбиения с помощью леммы 3.25. В последней графе таблицы указано, является ли поверхность бирационально нетривиальной, если мы можем это установить. В примечании к таблице указан пример группы, дающей разбиение типа II, у которой любая собственная подгруппа не является допустимой. Для соответствующей минимальной поверхности, следовательно, гомологический критерий не позволяет решить вопроса о бирациональной нетривиальности.

3.28. Таблица групп $H^1(k, N(F))$

Тип разбиения	Свободные образующие группы $N_D C^0 \cap P$	$N_D C^0 \cap P/N_D P$	Бирациональный тип поверхности
I	$Z_2 - 3Z_1$	0	?
II	$Z_2 - 3Z_1$ $Z_4 - 3Z_3$	0	?
III	$Z_2 - 3Z_1$	0	?
IV	$Z_i - Z_1, \quad i = 2, \ldots, 4$ $Z_j - Z_2, \quad j = 6, \ldots, 8$	$\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2$	нетривиальна
V	$2(Z_i - Z_1), \quad i = 2, \ldots, 4$ $Z_7 - 2Z_5$ $2(Z_6 - Z_5)$	$\mathbf{Z}_2$	нетривиальна
VI	$2(Z_i - Z_1), \quad i = 2, \ldots, 4$ $Z_6 - Z_5$	$\mathbf{Z}_2$	нетривиальна

3.28. Таблица групп $H^1(k, N(F))$ *(suite)*

Тип разбиения	Свободные образующие группы $N_D C^0 \cap P$	$N_D C^0 \cap P / N_D P$	Бирациональный тип поверхности
VII	$2(Z_2 - Z_1)$ $Z_3 - 2Z_1$ $2(Z_5 - Z_4)$ $Z_6 - 2Z_4$	$\mathbf{Z}_2$	нетривиальна
VIII	$2(Z_2 - Z_1)$ $Z_3 - 2Z_1$ $Z_5 - Z_4$	$\mathbf{Z}_2$	нетривиальна
IX	$Z_2 - Z_1$ $Z_4 - Z_3$	$\mathbf{Z}_2$	нетривиальна
X	$Z_i - Z_1, \quad i = 2, \ldots, 4$	$\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2$	нетривиальна
XI	$Z_i - Z_1$ $i = 2, 3, 4$	$\mathbf{Z}_2$	нетривиальна
XII	$4(Z_i - Z_1)$ $i = 2, 3, 4$	0	нетривиальна в силу леммы 3.24
XIII	$2(Z_3 - 2Z_1)$ $4(Z_2 - Z_1)$	0	?
XIV	$2(Z_2 - Z_1)$	0	?
XV	0	0	?
XVI	$2(Z_2 - Z_1)$ $Z_3 - 2Z_1$	$\mathbf{Z}_2$	нетривиальна
XVII	$Z_2 - Z_1$	$\mathbf{Z}_2$	нетривиальна
XVIII	$Z_2 - Z_1$	0	нетривиальна в силу леммы 3.23
XIX	0	0	?

Примечание. — Рассмотрим группу автоморфизмов Г канонического графа, порожденную следующими перестановками вершин:

$$\alpha : (1\ \bar{1})\ (2\ \bar{3})\ (\bar{2}\ 3)\ (4\ \bar{4})\ (5\ \bar{5})\ (6\ \bar{7})\ (\bar{6}\ 7)\ (8\ \bar{8})$$

$$\beta : (2\ 3\ 4)\ (\bar{2}\ \bar{3}\ \bar{4})\ (5\ 6\ 7)\ (\bar{5}\ \bar{6}\ \bar{7})$$

Она дает разбиение на орбиты типа II, так что для соответствующей поверхности $H^1(k, N(F)) = 0$. Далее, $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta^2$, так что порядок Г равен 6; любая ее нетривиальная собственная подгруппа сопряжена (α) или (β) и потому не является допустимой. Следовательно, $H^1(K, N(F)) = 0$ также для любого расширения $K \supset k$.

4. Замечание о рациональных точках

4.1. Пусть k-квазиалгебраически замкнутое поле (напомним, что, по определению, это означает существование k-точки на всякой k-гиперповерхности в $\mathbf{P}_k^n$, степень которой $\leqslant n$: см. Ленг [11]). Как показывают результаты п. 2, этого свойства явно не достаточно для того, чтобы всякая рациональная k-поверхность была тривиальна, даже когда k конечно. С другой стороны, мне кажется правдоподобной следующая.

ГИПОТЕЗА. — *Всякая рациональная k-поверхность F имеет k-точку, если поле k квазиалгебраически замкнуто.*

В силу теоремы 3.12 эта гипотеза верна для конечных полей. Независимо от предположения конечности мы можем доказать следующий частичный результат:

4.2. ТЕОРЕМА. — *Пусть k-бесконечное квазиалгебраически замкнутое поле. Гипотеза 4.1 справедлива для рациональных поверхностей с пучком кривых рода нуль, для форм абсолютно минимальных моделей и для поверхностей дель Пеццо степени $n \neq 5$.*

Доказательство. — Если на рациональной k-поверхности F есть пучок кривых рода нуль, то база этого пучка бирационально эквивалентна $\mathbf{P}_k^1$ и то же относится к каждому слою над k-точками бази: это следует из тривиальности группы Брауэра поля k. Отсюда следует, что множество k-точек всюду плотно на F. Если поверхность $F \otimes \bar{k}$ $\bar{k}$-минимальна, то F является бирегулярной формой $\mathbf{P}^2$. либо $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, либо линейчатой поверхности. В первом случае результат снова следует из тривиальности группы Брауэра. Во втором случае F вкладывается как квадрика в $\mathbf{P}^3$. Последний случай уже разобран.

Пусть теперь F-поверхность дель Пеццо степени n. В силу теоремы 3.7 случай $n = 9$ и 8 сводятся к разобранным, а случай $n = 7$ тривиален. При $n = 6$ теорема 3.10 показывает, что F содержит открытое k-множество, изоморфное главному однородному пространству над некоторым двумерным тором; но все такие пространства над квазиалгебраическим замкнутым полем тривиальны

(Серр [20]). При $n=3$ F является кубической поверхностью в $\mathbf{P}^3$, и требуемое следует из определения.

Наконец, при $n=4$ покажем, что при антиканоническом вложении F в $\mathbf{P}^4$ поверхность F является полным пересечением двух квадрик. Из теоремы Ленга [11] (и замечания Нагаты, снимающего дополнительные ограничения на поле k) будет следовать требуемое.

Так как $(\omega_F . \omega_F)=4$, достаточно доказать существование двух разных гиперквадрик, содержащих F. Размерность проективного пространства всех гиперквадрик в $\mathbf{P}^4$ равна 14. Покажем, что $\dim H^0(F, \omega_F^{-2})=13$. Это легко следету из представления $F \otimes \overline{k}$ в виде образа плоскости $\mathbf{P}^3_{\overline{k}}$ при моноидальном преобразовании с центром в пяти точках в достаточно общем положении: система $|\omega_F^{-2}|$ превращается в линейную систему кривых шестой степени, двукратно проходящих через каждую из пяти точек.

В случае характеристики нуль можно воспользоваться теоремой Римана Роха и критерием Кодаиры для доказательства того, что $\dim H^1(F, \omega_F^{-2})=0$, откуда также следует трубуемое.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ABHYANKAR S., *Ramification theoretic methods in algebraic geometry*, Princeton, 1959.

[2] AMITSUR S., Generic splitting fields of central simple algebras, *Ann. of Math.*, 62 (1955), pp. 8-43.

[3] ARTIN M., Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces, *Amer. Journal of Math.*, 84 (1962), pp. 485-496.

[4] CARTAN H., EILENBERG S., *Homological algebra*, Princeton (1956).

[5] CARTIER P., Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique, *Bull. Soc. math. France*, 86 (1958), pp. 177-251.

[6] COMESSATTI A., Fondamenti per la geometria sopra le superfici razionali dal punto di vista reale, *Math. Ann.*, 73 (1912), pp. 1-72.

[7] ENRIQUES F., Sulle irrazionalita da cui puo farsi dipendere la resoluzione d'un' equazione algebrica $f(x, y, z) = 0$ con funzioni razionali di due parametri, *Math. Annal*, vol. 49 (1897), pp. 1-23.

[8] GROTHENDIECK A. (avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ), Éléments de géométrie algébrique, *Publ. Math.* I.H.E.S., 4, 8, ...

[9] IGUSA J. I., Fibres ystems of Jacobian Varieties, *Amer. Journ. of Math.*, 78 (1956), I, 171-199; II, 747-760.

[10] Исковских В., *О бирациональных формах рациональных поверхностей* (печатается в Изв. АН СССР, сер. матем.).

[11] LANG S., On quasi-algebraic closure, *Annals of Math.*, 55 (1952), pp. 373-390.

[12] Манин Ю., *Об арифметике рациональных поверхностей*, Доклады АН СССР, t. 152 (1963), n° 1, 46-49.

[13] MUMFORD D., The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, *Publ. Math.* I.H.E.S., 9.

[14] NAGATA M., On rational surfaces 1, *Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto*, sér. A, XXXII (1960), pp. 351-370.

[15] NÉRON A., Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, *Publ. Math.* I.H.E.S., 21.

[16] ONO T., On the Tamagawa number of algebraic tori, *Annals of Math.*, vol. 78 (1963), 47-73.

[17] SEGRE B., The rational solutions of homogeneous cubic equations in four variables, *Math. Notae*, Universidad Rosario, anno II, fasc. 1-2, pp. 1-68.

[18] SEGRE B., *The non-singular cubic surfaces*, Clarendon Press, 1942.

[19] SERRE J.-P., Critère de rationalité pour les surfaces algébriques, *Sém. Bourbaki*, févr. 1957.

[20] SERRE J.-P., Cohomologie galoisienne, *Lecture Notes in Math.*, n° 5, Springer, 1964.

[21] SERRE J.-P., Corps locaux, *Act. Sci. Ind.*, n° 1296, Paris, 1962.

[22] SERRE J.-P., Morphismes universels et différentielles de troisième espèce, *Sém. Chevalley*, E.N.S., 1958-59.

[23] SELMER E., Sufficient congruence conditions for the existence of rational points on certain cubic surfaces, *Math. Scand.*, v. I (1953), pp. 113-119.

[24] WEIL A., Abstract versus classical algebraic geometry, *Proc. Int. Congr. of mathematicians 1954*, v. 3, pp. 550-558.

[25] Воскресенский В., *О двумерных алгебраических торах*, Изв. АН СССР, сер. матем., t. 29, n° 1 (1965), 239-244.