ANDRÉ HAEFLIGER
VALENTIN POÉNARU

La classification des immersions combinatoires

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 23 (1964), p. 75-91
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1964__23__75_0>

LA CLASSIFICATION DES IMMERSIONS COMBINATOIRES

par André HAEFLIGER et Valentin POENARU (1)

Le but de ce mémoire est de donner une classification des immersions combinatoires d'une variété combinatoire dans une autre, à l'homotopie régulière près. La classification que nous proposons ici est la transposition dans le cadre combinatoire de celle donnée par Hirsch (cf. [1]) dans le cas différentiable. La notion qui remplace ici celle de fibré tangent à une variété différentiable est la notion de microfibré tangent à une variété combinatoire introduite par Milnor (cf. [3]). Le principe de la démonstration est inspiré directement par les méthodes de Smale [4] et Thom [5]. D'autre part, l'un d'entre nous a profité d'un séminaire donné à Princeton par Hirsch et Palais.

La catégorie dans laquelle nous travaillerons est celle dont les objets et les morphismes sont appelés d'habitude polyédraux, combinatoires ou linéaires par morceaux. Nous adopterons la terminologie « semi-linéaire », synonyme de « linéaire par morceaux », qui nous paraît plus brève. Pour les détails relatifs à la catégorie en question (en particulier la notion de voisinage régulier), nous renvoyons le lecteur à Zeeman [8]. Remarquons enfin que nous nous appuyons d'une façon essentielle sur le travail de Hudson et Zeeman [2].

1. Définitions et énoncé des résultats.

Une *variété semi-linéaire* V *de dimension* n est un espace topologique paracompact V, muni d'un atlas formé de cartes f_i qui sont les homéomorphismes de l'espace numérique $\mathbf{R}^n$ sur des ouverts de V, les changements de cartes $f_j^{-1}f_i$ étant des homéomorphismes locaux semi-linéaires de $\mathbf{R}^n$.

Une *immersion semi-linéaire* f d'une variété semi-linéaire V de dimension n dans une variété semi-linéaire X de dimension $n+q$ (avec $q \geqslant 0$) est une application semi-linéaire $f: \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ *localement plate*. Cela signifie que, pour tout $v \in \mathrm{V}$, il existe des cartes locales $g: \mathbf{R}^n \to \mathrm{V}$ et $h: \mathbf{R}^{n+q} \to \mathrm{X}$ telles que $g(0) = v$ et que $h^{-1}fg$ soit l'inclusion naturelle de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n+q}$. D'après les théorèmes profonds de Zeeman, le fait que f est localement injective implique que f est localement plate, si $q > 2$ (cf. [7]).

Un *plongement semi-linéaire* de V dans X est une immersion injective de V dans X. Ainsi les plongements considérés ici seront toujours localement non noués.

---

(1) Ce travail a été subventionné par le Fonds national de la Recherche scientifique suisse.

Une *homotopie régulière* reliant deux immersions f_0 et f_1 de V dans X est une application semi-linéaire $F : I \times V \to X$, où I est le segment [o, 1], telle que $F(i, v) = f_i(v)$ pour $i = 0, 1$, et que la condition suivante soit remplie : l'application $\widetilde{F} : I \times V \to I \times X$, définie par $\widetilde{F}(t, v) = (t, F(t, v))$ est une immersion localement plate uniformément en t. Ceci veut dire qu'il existe, pour tout $(t, v) \in I \times V$, des cartes locales $g : U \times \mathbf{R}^n \to I \times V$ et $h : U \times \mathbf{R}^{n+q} \to I \times X$, où U est un voisinage de t dans I et $g(t, o) = (t, v)$, commutant avec les projections sur I, et telles que $h^{-1}\widetilde{F}g$ soit l'inclusion naturelle de $U \times \mathbf{R}^n$ dans $U \times \mathbf{R}^{n+q}$.

Dans ces conditions, on dira que f_0 et f_1 sont régulièrement homotopes.

Nous rappelons qu'une *isotopie* reliant deux plongements $f_0, f_1 : V \to X$ est une homotopie régulière $F : I \times V \to X$ reliant f_0 et f_1, telle que $\widetilde{F} : I \times V \to I \times X$ soit injective.

On remarque que si « semi-linéaire » est remplacé partout par « différentiable », on retrouve bien des définitions équivalentes aux définitions usuelles d'immersion et d'homotopie régulière.

Rappelons que le *microfibré tangent* (ou brièvement le fibré tangent) TV à la variété semi-linéaire V est par définition le diagramme

$$V \xrightarrow{\Delta} V \times V \xrightarrow{p_1} V$$

où Δ est l'application diagonale et p_1 la projection sur le premier facteur. Une carte locale de TV est un homéomorphisme semi-linéaire $h : U \times \mathbf{R}^n \to V \times V$, où U est un ouvert de V, tel que $h(u, 0) = (u, u)$ et $p_1 h(u, 0) = u$, pour tout $u \in U$. Pour plus de détails sur les microfibrés, nous renvoyons le lecteur à Milnor [3].

Une *application fibrée* de TV dans le fibré tangent TX à X, se projetant sur une application semi-linéaire $\varphi : V \to X$, est une application semi-linéaire Φ définie dans un voisinage W de la diagonale Δ_V de $V \times V$, à valeur dans $X \times X$, et telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ V \times V & \xrightarrow{\Phi} & X \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

Par exemple, si f est une application semi-linéaire de V dans X, alors $(f, f) : V \times V \to X \times X$ est une application fibrée de TV dans TX, se projetant sur f, que nous appellerons la *différentielle df de f*.

Une représentation Φ de TV dans TX (notée $\Phi : TV \to TX$) est une application fibrée Φ de TV dans TX se projetant sur une application $\varphi : V \to X$ et dont la restriction à chaque fibre, au voisinage de Δ_V, est un plongement. Plus précisément, soit $\varphi^* TX$ le fibré induit de TX par φ (cf. Milnor [3]), c'est-à-dire le diagramme $V \to V \times X \to V$, où la première flèche est l'application $v \to (v, \varphi v)$ et la seconde la projection sur le premier facteur; soit Φ^* l'application fibrée de TV dans φ^*TX définie par $\Phi^*(v_1, v_2) = (v_1, p_2\Phi(v_1, v_2))$ où $(v_1, v_2) \in W$ et p_2 est la projection de $X \times X$ sur le second facteur. L'application fibrée Φ est une représentation si, pour tout $v \in V$, il existe un voisinage U, des cartes locales $h : U \times \mathbf{R}^n \to V \times V$ de TV et $h^* : U \times \mathbf{R}^{n+q} \to V \times X$ de TX telles que $h^{*-1}\Phi^* h : U \times \mathbf{R}^n \to U \times \mathbf{R}^{n+q}$ soit le produit de l'identité et de l'injection de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n+q}$.

Deux représentations Φ_1 et Φ_2 de TV dans TX définissent le même *germe de représentation* si Φ_1 et Φ_2 sont égaux sur un voisinage de Δ_V.

Si f est une immersion, sa différentielle df est une représentation de TV dans TX.

Si K est un complexe, on désigne par $K \times TV$ le microfibré induit de TV par la projection de $K \times V$ sur V (voir [3]). Deux représentations Φ_0 et Φ_1 de TV dans TX sont *homotopes* s'il existe une représentation Φ de $I \times TV$ dans TX telle que $\Phi(i, v_1, v_2) = \Phi_i(v_1, v_2)$ pour $i = 0, 1$ et si (v_1, v_2) sont dans un voisinage assez petit de Δ_V.

Remarquons que si f_0 et f_1 sont régulièrement homotopes, alors df_0 et df_1 sont des représentations homotopes.

Le résultat principal de ce travail est le suivant :

Théorème de classification. — Si $\dim X > \dim V$, *alors la correspondance associant à toute immersion* $f : V \to X$ *sa différentielle* $df : TV \to TX$ *induit une application bijective des classes d'homotopie régulière d'immersions de* V *dans* X *sur les classes d'homotopie des représentations de* TV *dans* TX.

On verra plus loin que les classes d'homotopie des représentations de TV dans TX correspondent bijectivement (comme dans le cas différentiable) aux classes d'homotopie des sections d'un fibré (cf. § 4). On est donc conduit à une théorie des obstructions : si l'on se propose par exemple de déformer une application continue $f : V \to X$ en une immersion, on rencontre des obstructions qui sont des éléments de $H^i(V, \pi_{i-1}(V^c_{n+q,n}))$, où $V^c_{n+q,n}$ est l'analogue combinatoire de la variété de Stiefel des n-repères dans $\mathbf{R}^{n+q}$. Dans un travail ultérieur, l'un de nous donnera des précisions sur les groupes $\pi_i(V^c_{n+q,n})$.

2. Les complexes semi-simpliciaux Im(V, X) et R(TV, TX).

Il est plus naturel d'introduire une structure semi-simpliciale (1) dans un ensemble d'applications semi-linéaires plutôt qu'une structure topologique, comme on le fait dans le cas différentiable. Nous allons donc définir le complexe semi-simplicial Im(V, X), respectivement Pl(V, X), des immersions, resp. des plongements, de V dans X.

Un k-simplexe F de Im(V, X), resp. Pl(V, X), est une application semi-linéaire $F : \Delta^k \times V \to X$, où Δ^k est le k-simplexe euclidien type, telle que l'application $\widetilde{F} : \Delta^k \times V \to \Delta^k \times X$ définie par $\widetilde{F}(t, v) = (t, F(t, v))$ soit une immersion, resp.

(1) Pour les notions élémentaires sur les complexes semi-simpliciaux que nous utiliserons, nous renvoyons le lecteur à [9].

un plongement, vérifiant la condition de platitude locale suivante. Pour tout point $(t, v) \in \Delta^k \times V$, il existe un voisinage U de t dans Δ^k et des cartes locales $g : U^k \times \mathbf{R}^n \to \Delta^k \to V$ et $h : U^k \times \mathbf{R}^{n+q} \to \Delta^k \times X$ commutant avec les projections sur Δ^k, telles que $g(t, 0) = (t, v)$ et que $h^{-1}\widetilde{F}g$ soit l'inclusion naturelle de $U \times \mathbf{R}^n$ dans $U \times \mathbf{R}^{n+q}$.

Plus généralement, soit K un complexe simplicial ordinaire et soit $F : K \times V \to X$ une application semi-linéaire telle que $\widetilde{F} : K \times V \to K \times X$ définie par $\widetilde{F}(t, v) = (t, F(t, v))$ soit une immersion, resp. un plongement, qui vérifie les mêmes propriétés de platitude locale que ci-dessus. On dira alors que F est une *application* (semi-linéaire) de K dans $\mathrm{Im}(V, X)$, *resp.* $\mathrm{Pl}(V, X)$.

Les opérateurs faces et dégénérescences de $\mathrm{Im}(V, X)$ et $\mathrm{Pl}(V, X)$ se définissent par composition avec les opérateurs correspondants de Δ^k. Il est clair que ces complexes semi-simpliciaux vérifient la condition d'extension de Kan qui prend ici la forme suivante. Soit Λ^k le bord de Δ^k moins une face; alors toute application de Λ^k dans $\mathrm{Im}(V, X)$ ou $\mathrm{Pl}(V, X)$ peut s'étendre suivant une application de Δ^k tout entier.

Remarquons qu'un 1-simplexe de $\mathrm{Im}(V, X)$, resp. $\mathrm{Pl}(V, X)$, n'est autre qu'une homotopie régulière, resp. une isotopie.

Nous définissons d'autre part le complexe semi-simplicial $R(TV, TX)$ des germes de représentations de TV dans TX. Un k-simplexe sera un germe de représentation du microfibré $\Delta^k \times TV$ dans le microfibré TX. C'est évidemment aussi un complexe de Kan.

Si $F : \Delta^k \times V \to X$ est un k-simplexe de $\mathrm{Im}(V, X)$, alors l'application de $\Delta^k \times V \times V$ dans $X \times X$ appliquant (t, v_1, v_2) sur $(F(t, v_1), F(t, v_2))$ est une représentation de $\Delta^k \times TV$ dans TX, donc définit un k-simplexe de $R(TV, TX)$ noté dF. L'application

$$d : \mathrm{Im}(V, X) \to R(TV, TX)$$

ainsi définie est une application semi-simpliciale. Le théorème de classification est une conséquence du théorème plus général suivant :

Théorème principal. — L'application $d : \mathrm{Im}(V, X) \to R(TV, TX)$ *est une équivalence d'homotopie si* $\dim X > \dim V$, *ou si* V *est une variété connexe à bord non vide.*

Cela signifie que, pour tout complexe fini K, l'application d induit une bijection des classes d'homotopie des applications de K dans $\mathrm{Im}(V, X)$ sur celles de K dans $R(TV, TX)$.

Remarques. — a) *Cas des variétés à bord.* — Désignons par $\mathbf{R}^n_+$ le demi-espace de $\mathbf{R}^n$ formé des points dont la dernière coordonnée x_n est $\geqslant 0$. Une variété semi-linéaire V de dimension n, à bord, est un espace topologique paracompact muni d'un atlas formé de cartes f_i qui sont les homéomorphismes de $\mathbf{R}^n$ où $\mathbf{R}^n_+$ sur des ouverts de V, les changements de cartes étant des homéomorphismes semi-linéaires locaux de $\mathbf{R}^n$ ou de $\mathbf{R}^n_+$. Le bord ∂V de V est l'ensemble des points de V qui sont images par des cartes définies sur $\mathbf{R}^n_+$ des points tels que $x_n = 0$; c'est bien une variété semi-linéaire de dimension $n-1$. Toute variété semi-linéaire V de dimension n, à bord, peut être considérée comme une sous-variété d'une variété M sans bord et de même dimension n. On peut obtenir M par exemple en adjoignant à V un « col » $\partial V \times I$. De plus, si M′ est une autre variété de dimension n sans bord contenant V, il existe un homéomorphisme semi-linéaire d'un voisinage de V dans M sur un voisinage de V dans M′ et qui est l'identité sur V (cf. Zeeman [8]).

Par une immersion d'une variété V à bord dans X, nous entendrons un germe [1] en V d'une immersion dans X d'un voisinage de V dans M; on définira de manière analogue une homotopie régulière. En vertu de la remarque précédente, les classes d'homotopie régulière d'immersions de V dans X ne dépendent pas du choix particulier de M. Le microfibré tangent TV à V sera par définition la restriction à V du microfibré tangent à M.

Avec cette terminologie, l'application $d : \mathrm{Im}(V, X) \to \mathrm{R}(TV, TX)$ est bien définie, et le théorème de classification ci-dessus est encore vrai pour une variété à bord.

Dans tout ce qui suit, V pourra être une variété à bord.

b) *Forme relative du théorème principal.* — Soit V′ un sous-complexe fini d'une triangulation de V et soit φ le germe sur V′ d'une immersion f. Désignons par $\mathrm{Im}_\varphi(V, X)$ le complexe semi-simplicial des immersions de V dans X, dont le germe en V′ est égal à φ; un k-simplexe de $\mathrm{Im}_\varphi(V, X)$ est un k-simplexe $F : \Delta^k \times V \to X$ de $\mathrm{Im}(V, X)$ tel que $F(t, v) = f(v)$, pour v appartenant à un voisinage de V′ dans V. De même, soit $\mathrm{R}_\varphi(TV, TX)$ le sous-complexe des germes de représentations de TV dans TX dont la restriction à V′ est df. Alors

$$d : \mathrm{Im}_\varphi(V, X) \to \mathrm{R}_\varphi(TV, TX)$$

est une équivalence d'homotopie, si $\dim X > \dim V$, ou si chaque composante connexe de $V - V'$ rencontre le bord de V.

Si V′ est une sous-variété on a un résultat analogue en prenant pour $\mathrm{Im}_\varphi(V, X)$ le complexe des immersions de V dans X égales sur V′ à une immersion fixe, donnée, et pour $\mathrm{R}_\varphi(TV, TX)$ le complexe analogue.

3. Démonstration du théorème principal.

Comme dans le cas différentiable (voir Smale [4] et Thom [5]), le pas essentiel de la démonstration est le théorème de relèvement des homotopies pour les espaces d'immersions. Cette propriété s'exprime ici en disant que certaines applications sont des fibrations au sens de Kan (cf. [9]). D'une manière précise, on a les théorèmes suivants dont les démonstrations sont renvoyées aux §§ 7, 8, 9.

Soit V′ une sous-variété fermée de V, de même dimension que V. Soit $F : \Delta^k \times V \to X$ ou $F : \Delta^k \times TV \to TX$ un k-simplexe de $\mathrm{Pl}(V, X)$, $\mathrm{Im}(V, X)$ ou $\mathrm{R}(TV, TX)$; la restriction ρF de F à $\Delta^k \times V'$ ou à $\Delta^k \times TV' \subset \Delta^k \times TV$, est un k-simplexe de $\mathrm{Pl}(V', X)$, $\mathrm{Im}(V', X)$ ou $\mathrm{R}(TV', TX)$.

---

(1) Si X est un sous-espace de Y, le germe en X d'une application f d'un voisinage de X est la classe des applications qui sont définies dans des voisinages de X et qui sont égales à f dans des voisinages de X.

Nos théorèmes de fibration sont les suivants :

Théorème 1. — L'application de restriction

$$R(TV, TX) \to R(TV', TX)$$

est une fibration.

Théorème 2. — L'application de restriction

$$Pl(V, X) \to Pl(V', X)$$

est une fibration lorsque V' *est compacte.*

Théorème 3. — L'application de restriction

$$Im(V, X) \to Im(V', X)$$

est une fibration pour V' *compacte, si* $\dim X > \dim V$ *ou si chaque composante connexe de* $V - V'$ *rencontre le bord de* V.

Dans notre contexte, dire que cette dernière application est une fibration, c'est dire que la propriété suivante est vérifiée. Soit Λ^k le sous-complexe de Δ^k formé de sa frontière moins une face. Soit f' une application de Δ^k dans $Im(V', X)$. Alors toute application f de Δ^k dans $Im(V, X)$ se projetant par ρ sur la restriction de f' à Λ^k, peut s'étendre en une application de Δ^k dans $Im(V, X)$ se projetant sur f'. Dans cette définition, la paire (Δ^k, Λ^k) pourrait être remplacée par tout autre paire qui lui est homéomorphe semi-linéairement, par exemple un cube I^k et l'une de ses faces. La signification des deux premiers théorème est analogue. Il suffit de remplacer $Im(V, X)$ par $R(TV, TX)$ ou par $Pl(V, X)$.

Le théorème 1 résulte aisément du théorème de relèvement des homotopies pour les microfibrés. Le théorème 2 est dû essentiellement à Hudson et Zeeman [2]. La démonstration du théorème 3 fait un usage essentiel du théorème 2.

La seule propriété des fibrés semi-simpliciaux que nous utiliserons est la suivante. C'est une conséquence immédiate de la suite exacte d'homotopie et du « lemme des cinq ».

Proposition. — Soient $p_i : E_i \to B_i$, $i = 1, 2$, *deux fibrés semi-simpliciaux tels que les* p_i *soient surjectives et soit* f *une application fibrée de* E_1 *dans* E_2 *se projetant sur une application* f_0 *de* B_1 *dans* B_2.

Considérons les trois propriétés suivantes :

a) f *est une équivalence d'homotopie;*

b) f_0 *est une équivalence d'homotopie;*

c) *La restriction de* f *à chaque fibre de* E_1 *est une équivalence d'homotopie avec la fibre correspondante de* E_2.

Alors chacune de ces propriétés est impliquée par la conjonction des deux autres.

Pour prouver le théorème principal, nous utiliserons la théorie combinatoire des anses dont nous rappelons brièvement le principe.

Soit D^k le produit de k-intervalles $[-1, +1]$. Nous dirons que la variété semi-linéaire V de dimension n est obtenue en collant à la variété semi-linéaire V_0 une anse

$A = D^k \times D^{n-k}$ d'indice k, si V est homéomorphe semi-linéairement à la variété $V_0 \cup A$ obtenue en identifiant, dans la réunion disjointe de V_0 et de A, $\partial D^k \times D^{n-k}$ et une partie de ∂V par un homéomorphisme semi-linéaire. On sait que toute variété semi-linéaire V peut s'obtenir en collant successivement des anses, à partir de D^n (l'anse d'indice 0). Cette remarque permet de raisonner par récurrence sur le nombre des anses pour prouver le théorème principal.

On montre d'abord que le théorème est vrai lorsque V est un cube D^n (donc une anse d'indice 0); c'est le sujet du § 5.

Considérons ensuite une anse $A = D^k \times D^{n-k}$; nous pouvons identifier $\partial D^k \times D^{n-k+1}$ à un voisinage de $\partial D^k \times D^{n-k}$ dans A. Soit φ le germe sur $\partial D^k \times D^{n-k+1}$ d'une immersion f de A dans X. Désignons par $\mathrm{Im}_\varphi(D^k \times D^{n-k}, X)$ le complexe semi-simplicial des immersions de A dans X dont le germe sur $\partial D^k \times D^{n-k+1}$ est égal à φ, De même soit $R_\varphi(T(D^k \times D^{n-k}), TX)$ le complexe semi-simplicial des germes de représentations de TA dans TX dont la restriction à $\partial D^k \times D^{n-k+1}$ est df. On va prouver le

Lemme. — L'application

$$d : \mathrm{Im}_\varphi(D^k \times D^{n-k}, X) \to R_\varphi(T(D^k \times D^{n-k}), TX)$$

est une équivalence d'homotopie si $\dim X > n$ *ou si* $k < n$.

Démonstration. — Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Im}(\partial D^{k+1} \times D^{n-k}, X) & \xrightarrow{d} & R(T(\partial D^{k+1} \times D^{n-k}), TX) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow \\
\mathrm{Im}(\partial D_-^{k+1} \times D^{n-k}, X) & \xrightarrow{d} & R(T(\partial D_-^{k+1} \times D^{n-k}), TX) \\
\downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow \\
\mathrm{Im}(\partial D^k \times D^{n-k+1}, X) & \xrightarrow{d} & R(T(\partial D^k \times D^{n-k+1}), TX)
\end{array}$$

où ∂D_-^{k+1} est la partie du bord de D^{k+1} formée des points dont la dernière coordonnée est $\leqslant 0$.

La première flèche verticale est induite par la restriction à $\partial D_-^{k+1} \times D^{n-k}$ et la seconde est induite par la restriction à un voisinage $\partial D^k \times D^{n-k+1}$ de $\partial D^k \times \{0\} \times D^{n-k}$ dans $\partial D_-^{k+1} \times D^{n-k}$.

Raisonnons par récurrence sur k; supposons que la dernière flèche horizontale soit une équivalence d'homotopie. Comme la deuxième flèche horizontale est toujours une équivalence d'homotopie (cf. § 5, car $D_-^{k+1} \times D^{n-k}$ est homéomorphe à D^n), il résulte des théorèmes 1 et 3 et de la proposition énoncée plus haut, que la restriction de d à chaque fibre [1] du fibré de projection β est une équivalence d'homotopie. Or en identifiant ∂D_{-}^{k+1} à D^k, chaque fibre est isomorphe à $\mathrm{Im}_\varphi(D^k \times D^{n-k}, X)$, de sorte que le lemme est démontré pour k et pour tout φ.

Pour pouvoir continuer la récurrence, il suffit de remarquer que chaque fibre de la fibration de projection α est aussi isomorphe à $\mathrm{Im}_\varphi(D^k \times D^{n-k}, X)$. Ainsi une nouvelle application des théorèmes 1 et 3 et de la proposition montre que la première flèche est une équivalence d'homotopie.

Le théorème principal se démontre maintenant lui-même par récurrence sur le nombre des anses. Supposons que $V = V_0 \cup A$, où $A = D^k \times D^{n-k}$; nous pouvons supposer que $V_0 \cap A = \partial D^k \times D^{n-k+1}$. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(V, X) & \longrightarrow & R(TV, TX) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Im}(V_0, X) & \longrightarrow & R(TV_0, TX) \end{array}$$

Supposons par récurrence que la deuxième flèche horizontale soit une équivalence d'homotopie. Les flèches verticales sont des fibrations, les fibres étant isomorphes à $\mathrm{Im}_\varphi(D^k \times D^{n-k}, X)$ et $R_\varphi(T(D^k \times D^{n-k}), TX)$ respectivement. La restriction de $d : \mathrm{Im}(V, X) \to R(TV, TX)$ à chaque fibre est une équivalence d'homotopie, d'après le temps précédent. La proposition montre donc que d lui-même est une équivalence d'homotopie.

Ceci achève la démonstration du théorème principal lorsque V est compact. La forme relative s'obtient en utilisant de nouveau la proposition précédente. Lorsque $\dim X = \dim V$ et que chaque composante connexe de $V - V'$ rencontre le bord de V, on doit remarquer que V s'obtient à partir de V' par adjonction d'anses d'indices $k < n$. Le cas où V n'est pas compact s'obtient par passage à la limite.

4. Interprétation des résultats.

Introduisons tout d'abord la variété de Stiefel combinatoire (ou semi-linéaire) $V^c_{n+q,n}$. C'est par définition le complexe semi-simplicial des germes en $0 \in \mathbf{R}^n$ d'immersions semi-linéaires des voisinages de $0 \in \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n+q}$ appliquant l'origine sur l'origine. Si dans la définition précédente on remplace semi-linéaire par différentiable, on obtient un complexe semi-simplicial qui a le même type d'homotopie que la variété de Stiefel $V_{n+q,n}$ des n-repères de $\mathbf{R}^{n+q}$.

---

(1) Bien entendu les fibres peuvent être différentes, quelques-unes en particulier se réduisent à $\varnothing$, mais nous considérons ici seulement la partie de la base qui coïncide avec Im_φ. C'est une remarque qu'on doit faire à plusieurs endroits pendant la démonstration.

Le complexe singulier semi-linéaire $\widetilde{\mathrm{V}}$ d'une variété semi-linéaire V est le complexe semi-simplicial dont les k-simplexes sont les applications semi-linéaires de Δ^k dans V. Il est clair que $\widetilde{\mathrm{V}\times\mathrm{X}}=\widetilde{\mathrm{V}}\times\widetilde{\mathrm{X}}$. Toute application semi-linéaire $f:\mathrm{V}\to\mathrm{X}$ induit une application semi-simpliciale $\widetilde{f}:\widetilde{\mathrm{V}}\to\widetilde{\mathrm{X}}$.

Nous allons définir maintenant le fibré semi-simplicial $\mathcal{R}(\mathrm{TV}, \mathrm{TX})$ des germes de représentations des fibres de TV dans celles de TX. Un k-simplexe de $\mathcal{R}(\mathrm{TV}, \mathrm{TX})$ est un germe de représentation de $\sigma_1^*\mathrm{TV}$ dans $\sigma_2^*\mathrm{TX}$ se projetant sur l'identité de Δ^k, où $\sigma_1^*\mathrm{TV}$ et $\sigma_2^*\mathrm{TX}$ sont les fibrés induits de TV et TX par des k-simplexes σ_1 et σ_2 de $\widetilde{\mathrm{V}}$ et $\widetilde{\mathrm{X}}$. La base de $\mathcal{R}(\mathrm{TV}, \mathrm{TX})$ est $\widetilde{\mathrm{V}}\times\widetilde{\mathrm{X}}$ et sa fibre est isomorphe à $\mathrm{V}^c_{q+n,n}$. On peut aussi interpréter $\mathcal{R}(\mathrm{TV}, \mathrm{TX})$ comme un fibré de base V par composition avec la projection $\widetilde{\mathrm{V}}\times\widetilde{\mathrm{X}}\to\widetilde{\mathrm{V}}$. Un k-simplexe de $\mathcal{R}$ (TV, TX) peut alors s'interpréter comme un germe de représentation de $\sigma^*\mathrm{TV}$ dans TX, où σ est un k-simplexe de $\widetilde{\mathrm{V}}$.

Proposition. — Les germes de représentation de TV *dans* TX *correspondent bijectivement aux sections du fibré* $\mathcal{R}(\mathrm{TV}, \mathrm{TX})$ *de base* $\widetilde{\mathrm{V}}$. *Il en est de même pour les classes d'homotopie.*

En effet, si $\Phi:\mathrm{TV}\to\mathrm{TX}$ est une représentation, la section correspondante s de $\mathcal{R}(\mathrm{TV}, \mathrm{TX})$ associe au k-simplexe $\sigma:\Delta^k\to\mathrm{V}$ le germe de représentation de $\sigma^*\mathrm{TV}$ dans TX obtenue en composant la représentation canonique de $\sigma^*\mathrm{TV}$ dans TV avec Φ.

Réciproquement, si s est une section de $\mathcal{R}(\mathrm{TV}, \mathrm{TX})$, alors on obtient un germe de représentation de TV dans TX en faisant correspondre à tout point $v\in\mathrm{V}$ la représentation $s(v)$ de la fibre de TV au-dessus de v dans TX.

Cette proposition, combinée avec le théorème de classification, entraîne le théorème suivant.

Théorème. — Les classes d'homotopie régulière des immersions de V *dans* X *correspondent bijectivement aux classes d'homotopie des sections du fibré* $\mathcal{R}(\mathrm{TV}, \mathrm{TX})$ *de base* $\widetilde{\mathrm{V}}$, *si* $\dim \mathrm{X}>\dim \mathrm{V}$ *ou si* V *est connexe à bord non vide.*

Remarquons que les germes de représentations de TV dans TX se projetant sur une application f de V dans X, correspondent bijectivement aux sections du fibré E_f de base $\widetilde{\mathrm{V}}$ induit du fibré $\mathcal{R}(\mathrm{TV}, \mathrm{TX})$ de base $\widetilde{\mathrm{V}}\times\widetilde{\mathrm{X}}$ par l'application $v\to(v,fv)$ de $\widetilde{\mathrm{V}}$ dans $\widetilde{\mathrm{V}}\times\widetilde{\mathrm{X}}$. Pour que f soit homotope à une immersion, il faut et il suffit qu'il existe une section du fibré E_f. Comme sa fibre est isomorphe à $\mathrm{V}^c_{n+q,n}$, on est conduit à des obstructions qui sont des éléments de $\mathrm{H}^{r+1}(\mathrm{V}, \pi_r(\mathrm{V}^c_{n+q,n})$.

Lorsque $\mathrm{X}=\mathbf{R}^{n+q}$, on peut remplacer $\mathcal{R}(\mathrm{TV}, \mathrm{TX})$ par le fibré des germes de représentations des fibres de TV dans la fibre de $\mathrm{T}\mathbf{R}^{n+q}$ au-dessus de o. La fibre de ce fibré étant isomorphe à $\mathrm{V}^c_{n+q,n}$, on obtient l'analogue du théorème de Smale [4].

Théorème. — Les classes d'homotopie régulière des immersions semi-linéaires de la sphère S^n *dans* $\mathbf{R}^{n+q}$ *correspondent bijectivement aux éléments de* $\pi_n(\mathrm{V}^c_{n+q,n})$, *pour* $q>0$. *Plus généralement, celles de* $\mathrm{S}^k\times\mathrm{D}^{n-k}$ *dans* $\mathbf{R}^{n+q}$ *correspondent bijectivement aux éléments de* $\pi_k(\mathrm{V}^c_{n+q,n})$, *si* $q>0$ *ou si* $k<n$.

5. Les immersions du cube D^n dans X.

Dans ce paragraphe nous prouvons le théorème principal dans le cas particulier où V est le cube $D^n=[-1, +1]^n$, à savoir :

Proposition. — *L'application* $d : \mathrm{Im}(D^n, X) \to R(TD^n, TX)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Désignons par $\mathrm{Im}_0(D^n, X)$ le complexe semi-simplicial des germes d'immersions de D^n dans X au point $o=(o, \dots, o)$ de D^n. Un k-simplexe de $\mathrm{Im}_0(D^n, X)$ est le germe sur $\Delta^k \times o$ d'un k-simplexe de $\mathrm{Im}(V, X)$, où V est une voisinage ouvert de o dans D^n.

Lemme 1. — *L'application naturelle* $\mathrm{Im}(D^n, X) \to \mathrm{Im}_0(D^n, X)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Remarquons tout d'abord qu'étant donné un voisinage V de o dans D^n, il existe un homéomorphisme semi-linéaire r de D^n sur un voisinage de o contenu dans V et qui est l'identité sur un voisinage de o. Il existe de plus une isotopie semi-linéaire $R : I \times D^n \to D^n$ reliant l'identité à r, telle que $R(t, x)=x$ pour x appartenant à un voisinage de o.

Soit $\varphi : K \times V \to X$ représentant une application semi-linéaire d'un complexe fini K dans $\mathrm{Im}_0(D^n, X)$, où V est un voisinage de o dans D^n. Alors l'application $f : K \times D^n \to X$ définie par $f(t, v)=\varphi(t, r(v))$ est une application de K dans $\mathrm{Im}(D^n, X)$ dont le germe sur $K \times o$ est représenté par φ.

Réciproquement, supposons que $f_0, f_1 : K \times D^n \to X$ soient des applications de K dans $\mathrm{Im}(D^n, X)$ telles que leurs germes sur $K \times o$ soient des applications homotopes de K dans $\mathrm{Im}_0(D^n, X)$; cela signifie qu'il existe une application $\Phi : I \times K \times V \to X$ représentant une application de $I \times K$ dans $\mathrm{Im}_0(D^n, X)$ et telle que $\Phi(t, k, v)=f_t(k, v)$ pour $t=0, 1$, $k \in K$ et $v \in V$. On peut même supposer que $\Phi(t, k, v)$ est indépendant de t pour $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ et $1-\varepsilon \leqslant t \leqslant 1$. Alors l'application

$$F(t, k, v)=\begin{cases} \Phi(t, k, R(t/\varepsilon, v)) & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon \\ \Phi(t, k, r(v)) & \varepsilon \leqslant t \leqslant 1-\varepsilon \\ \Phi(t, k, R(\frac{1-1}{\varepsilon}, v)) & 1-\varepsilon \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

est une homotopie reliant f_0 à f_1. Ceci achève la démonstration du Lemme 1.

Soit $R_0(TD^n, TX)$ le complexe des germes de représentations dans TX du microfibré TD^n restreint à o.

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(D^n, X) & \longrightarrow & R(TD^n, TX) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Im}_0(D^n, X) & \longrightarrow & R_0(TD^n, TX) \end{array}$$

où la première flèche verticale est l'application associant à un k-simplexe $\Delta^k \times D^n \to X$ son germe sur $\Delta^k \times o$, la seconde flèche verticale l'application de restriction et les flèches horizontales sont induites par d.

Lemme 2. — *L'application* $\mathrm{Im}_0(D^n, X) \to R_0(TD^n, TX)$ *induite par d est bijective.*

La vérification est immédiate en appliquant les définitions.

Lemme 3. — *L'application de restriction* $R(TD^n, TX) \to R_0(TD^n, TX)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Soit Φ une application d'un complexe fini K dans $R_0(TD^n, TX)$, c'est-à-dire un germe de représentation dans TX de la restriction du microfibré $K \times TD^n$ à $K \times o$. Comme TD^n est un fibré trivial, il existe une représentation ρ de $K \times TD^n$ sur sa restriction à $K \times o$ qui est une rétraction. La représentation Φ peut s'étendre suivant une représentation de $K \times TD^n$ dans TX; il suffit en effet de la composer avec ρ.

Un raisonnement analogue montre que si $\Phi_0, \Phi_1 : K \times TD^n \to TX$ sont deux représentations dont les restrictions à $K \times o$ sont homotopes, alors Φ_0 et Φ_1 sont homotopes.

La proposition est maintenant démontrée, puisque trois des flèches du diagramme ci-dessus sont des équivalences d'homotopie.

6. Démonstration des théorèmes de fibration 1 et 2 du § 3.

Dans ce qui suit, comme toutes les applications considérées sont semi-linéaires, nous omettrons le plus souvent le mot « semi-linéaire ».

Démonstration du théorème 1. — Soit V′ un sous-complexe d'une triangulation de V. Montrons d'abord que l'application de restriction $R(TV, TX) \to R(TV|V', TX)$ est une fibration, $TV|V'$ désignant la restriction de TV à V′. En termes explicites, si K est un complexe simplicial fini, nous voulons montrer que tout germe de représentation Φ' dans TX de la restriction du microfibré $I \times K \times TV$ à $P = (I \times K \times V') \cup (o \times K \times V)$ peut s'étendre suivant une représentation Φ de $I \times K \times TV$ dans TX. Or il existe une rétraction de $I \times K \times V$ sur P qui est homotope à l'identité; d'après le théorème de relèvement des homotopies pour les microfibrés (cf. Milnor [3]), il existe une représentation r du microfibré $I \times K \times TV$ sur sa restriction à P qui est une rétraction. La représentation Φ cherchée s'obtiendra en composant r avec Φ'.

Soit maintenant V′ une sous-variété de V. Pour prouver le théorème il suffira de montrer que l'application :

$$R(TV|V', TX) \to R(TV, TX)$$

est une fibration. En utilisant les considérations du § 4, on est ramené à prouver que l'application naturelle $V^c_{n+q,n} \to V^c_{n+q,n'}$ (dim $V' = n'$) obtenue par restriction aux sous-espaces $\mathbf{R}^{n'} \subset \mathbf{R}^n$ est une fibration. Ceci résulte du théorème de Hudson et Zeeman ci-dessous; on peut le prouver aussi directement, par voie semi-simpliciale.

Démonstration du théorème 2. — Elle se déduit facilement du théorème suivant dû à Hudson et Zeeman [1].

Théorème de Hudson et Zeeman. — *Soit* $f : I^h \times V \to X$ *un cube de plongements* (*c'est-à-dire une application de* I^h *dans* $Pl(V, X)$), *où* V *est une variété compacte, tel que* $f(I^h \times V) \cap \partial X = \emptyset$. *Il existe une application* $H : I^h \times X \to X$ *telle que*

a) *Pour tout* $t \in I^h$, *l'application* $H_t : X \to X$ *définie par* $H_t(v) = H(t, v)$ *est un homéomorphisme qui est l'identité en dehors d'un compact et sur* X;
b) *Pour le premier sommet* o *de* I^h, H_0 *est l'identité de* X;
c) H *recouvre* f, *c'est-à-dire* $H_t f(o, v) = f(t, v)$ *pour tout* $(t, v) \in I^h \times V$.

Soit maintenant V′ une sous-variété compacte d'une variété V. Supposons donné un cube de plongements $F_0 : I^h \times V \to X$ et un cube de plongements $F' : I \times I^h \times V' \to X$ tels qu'on ait $F'(o, \tau, v) = F_0(\tau, v)$ pour tout $(\tau, v) \in I^h \times V'$. Pour démontrer le théorème 2, il faut construire un cube de plongements $F : I \times I^h \times V \to X$ tel que $F | I \times I^h \times V' = F'$ et $F(o, \tau, v) = F_0(\tau, v)$ pour tout $(\tau, v) \in I^h \times V$.

D'après le théorème de Hudson et Zeeman, il existe un cube d'homéomorphismes $H : I \times I^h \times X \to X$ tel que, en posant $H_{t,\tau}(x) = H(t, \tau, x)$, on ait $H_{t,\tau} F'(o, o, v) = F'(t, \tau, v)$.

L'application F cherchée s'obtient en posant

$$F(t, \tau, v) = H_{t,\tau} H_{0,\tau}^{-1} F_0(\tau, v).$$

On remarque en effet que l'homéomorphisme $H_{t,\tau} H_{0,\tau}^{-1}$ est l'identité pour $t = o$ et que, pour $v \in V'$, $H_{t,\tau} H_{0,\tau}^{-1} F_0(\tau, v) = H_{t,\tau} F'(o, o, v) = F'(t, \tau, v)$.

7. Voisinage induit par une immersion.

Soit f une immersion de V dans X. Un *voisinage de* V *induit par* f est un triple $(\mathfrak{X}, i, \varphi)$ formé d'une variété $\mathfrak{X}$ de même dimension que X, d'un plongement propre [2] i de V dans l'intérieur de $\mathfrak{X}$ et d'une immersion φ de $\mathfrak{X}$ dans X telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathfrak{X} \arrow[dl, "\varphi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commute.

Les deux propositions suivantes affirment l'existence de $(\mathfrak{X}, i, \varphi)$ et en un certain sens, l'unicité du germe de $\mathfrak{X}$ (on pose $V = V'$ dans la proposition 2). Leurs démonstrations, qui sont dans le cadre de la topologie générale, ainsi que la définition précédente, s'appliquent aussi bien au cas des immersions topologiques ou différentiables qu'au cas semi-linéaire.

---

(1) Ce théorème est prouvé pour $h = 1$ dans [2]. Le cas général, $h > 1$, se trouve dans un travail à paraître de Hudson.

(2) Une application $f : X \to Y$ est propre si l'image inverse de tout compact de Y est un compact de X.

Proposition 1. — Pour toute immersion f d'une variété compacte V *dans* X, *il existe un voisinage de* V *induit par f.*

Démonstration. — Supposons construit un recouvrement ouvert $\{U_j\}_{j\in J}$ de V tel que :

a) pour tout $j\in J$, il existe un ouvert $X_j \subset X$ tel que $f|U_j$ soit un plongement propre de U_j dans X_j;

b) si $U_j \cap U_k = \emptyset$ et s'il existe un $l\in J$ tel que $U_j\cap U_l \neq \emptyset$ et $U_k \cap U_l \neq \emptyset$, alors $X_j \cap X_k = \emptyset$.

Considérons alors l'espace ΣX_j somme disjointe des X_j; ses points sont les couples (j, x), où $j\in J$ et $x\in X_j$. La relation qui identifie (j, x) et (k, y) si $x=y$ et si $U_j\cap U_k \neq \emptyset$, est une relation d'équivalence d'après *b)*. Le quotient $\mathfrak{X}$ de ΣX_j par cette relation est une variété séparée; la projection $(j, x)\to x$ de ΣX_j dans X donne par passage au quotient une immersion φ de $\mathfrak{X}$ dans X; de même, les inclusions $v\to(j, fv)$ de U_j dans ΣX_j se recollent après le passage au quotient et donnent un plongement i de V dans $\mathfrak{X}$.

Pour construire le recouvrement U_j, partons d'un recouvrement ouvert fini $\{V_r\}$ de V vérifiant la condition *a)*. Munissons V d'une métrique et soit ρ un nombre tel que toute boule de rayon ρ soit contenue dans au moins l'un des V_r. Le recouvrement $\{U_j\}$ sera alors formé d'un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\rho/3$; les ouverts $X_j\subset X$ correspondant aux U_j et vérifiant la condition *b)* se construisent facilement en tenant compte de l'hypothèse de trivialité locale de f.

Proposition 2. — Soient V′ *une sous-variété de* V *et f une immersion de* V *dans* X. *Soit* $(\mathfrak{X}, i, \varphi)$ (resp. $(\mathfrak{X}', i', \varphi')$) *un voisinage de* V (resp. V′) *induit par f* (resp. par $f'=f|V'$). *Il existe alors un plongement* J *dans* $\mathfrak{X}$ *d'un voisinage de* $i'(V')$ *dans* $\mathfrak{X}'$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[rr, "i'"] \arrow[dr, "f'"] \arrow[dd, "j"'] & & \mathfrak{X}' \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[dd, "J"] \\
& X & \\
V \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i"] & & \mathfrak{X} \arrow[ul, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

commute, j étant l'inclusion de V′ *dans* V.

Démonstration. — On peut construire un recouvrement $\{X_j\}$ de type fini de $i'(V')$ par des ouverts X_i de $\mathfrak{X}'$, vérifiant la condition suivante. Pour tout j, il existe un voisinage ouvert W'_j de l'adhérence $\overline{X}_j$ de X_j, et un ouvert $W_j\subset\mathfrak{X}$ tels que $\varphi_j=\varphi|W_j$ et $\varphi'_j=\varphi'|W'_j$ soient des homéomorphismes sur un même ouvert de X; de plus on suppose que $\overline{X}_j\cap i'(V') = \overline{i'(V')\cap X_j}$. Les homéomorphismes locaux $\varphi_j^{-1}\varphi'_j : X_j\to\mathfrak{X}$, restreints à un voisinage suffisamment petit de $i'(V')$ se recollent et définissent J.

Corollaire. — Avec les hypothèses de la proposition 2, il existe un voisinage V″ *de* V′ *dans* V *et un plongement* $i'' : V''\to\mathfrak{X}'$ *tels que* $i''|V'=i'$ *et* $\varphi' i''=f|V''$.

Il suffit de poser $V''=i^{-1}$(image de J) et $i''(v)=J^{-1}i(v)$ pour $v\in V''$.

Voisinage régulier induit par une immersion. — Dans ce cas semi-linéaire, on dira que $(\mathfrak{X}, i, \varphi)$ est un voisinage régulier de V induit par f si $\mathfrak{X}$ est une variété à bord qui est un voisinage régulier de la sous-variété $i(\mathrm{V})$. L'existence d'un tel voisinage résulte de la proposition 1 et de l'existence d'un voisinage régulier pour une sous-variété (cf. Whitehead [6], Zeeman [8]). De plus, si $(\mathfrak{X}_1, i_1, \varphi_1)$ et $(\mathfrak{X}_2, i_2, \varphi_2)$ sont deux voisinages réguliers de V induit par f, il existe un homéomorphisme ψ de $\mathfrak{X}_1$ sur $\mathfrak{X}_2$ tel que $\psi i_1 = i_2$. Ceci résulte de la proposition 2 et de l'unicité des voisinages réguliers d'une sous-variété.

8. Démonstration du théorème 3 du § 3.

Soit V' une sous-variété compacte d'une variété V. Soient $\mathrm{F}_0 : \mathrm{I}^h \times \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ et $\mathrm{F}' : \mathrm{I} \times \mathrm{I}^h \times \mathrm{V}' \to \mathrm{X}$ des cubes d'immersions telles que $\mathrm{F}'(o, \tau, v) = \mathrm{F}_0(\tau, v)$, pour tout $(\tau, v) \in \mathrm{I}^h \times \mathrm{V}'$. Nous devons construire un cube d'immersions $\mathrm{F} : \mathrm{I} \times \mathrm{I}^h \times \mathrm{V} \to \mathrm{X}$ tel que $\mathrm{F} | \mathrm{I} \times \mathrm{I}^h \times \mathrm{V}' = \mathrm{F}'$ et $\mathrm{F}(o, \tau, v) = \mathrm{F}_0(\tau, v)$ pour tout $(\tau, v) \in \mathrm{I}^h \times \mathrm{V}$.

En utilisant la compacité du cube $\mathrm{I} \times \mathrm{I}^h$ et les propositions 1 et 2 du § 7, nous pouvons nous ramener au cas où la condition *c)* suivante est vérifiée :

Condition c). — Il existe un voisinage régulier (Ω, i', φ) de V' induit par l'immersion $f' : \mathrm{V}' \to \mathrm{X}$ définie par $f'(v) = \mathrm{F}'(o, o, v)$ et un cube de plongements $\mathrm{P}' : \mathrm{I} \times \mathrm{I}^h \times \mathrm{V}' \to \Omega$ tels que $\mathrm{F}' = \varphi \mathrm{P}'$ et $\mathrm{P}'(o, o, v) = i'(v)$.

Définition. — Nous dirons que le cube d'immersions F_0 est en *bonne position* relativement au voisinage Ω s'il existe un voisinage V'' de V' dans V et un cube de plongements $\mathrm{P}_0'' : \mathrm{I}^h \times \mathrm{V}'' \to \Omega$ prolongeant P', tels que $\varphi \mathrm{P}_0'' = \mathrm{F}_0 | \mathrm{I}^h \times \mathrm{V}''$ et que l'image par P_0'' de la frontière de V'' (c'est-à-dire de la frontière de V'' multipliée par I^h) dans V soit contenue dans $\partial\Omega$.

Si c'est le cas, on pourra construire F de la manière suivante. D'après le théorème de Hudson et Zeeman (cf. § 6), il existe un cube $\mathrm{H} : \mathrm{I} \times \mathrm{I}^h \times \Omega \to \Omega$ d'homéomorphismes de Ω tel que, en posant $\mathrm{H}_{t,\tau}(x) = \mathrm{H}(t, \tau, x)$, on ait $\mathrm{H}_{t,\tau}\mathrm{P}'(o, o, v) = \mathrm{P}'(t, \tau, v)$ et que $\mathrm{H}_{t,\tau} : \Omega \to \Omega$ soit l'identité sur $\partial\Omega$.

On définit alors F en posant :

$$\mathrm{F}(t, \tau, v) = \begin{cases} \varphi \mathrm{H}_{t,\tau} \mathrm{H}_{0,\tau}^{-1} \mathrm{P}''(o, \tau, v) & \text{pour} \quad v \in \mathrm{V}'' \\ \mathrm{F}_0(\tau, v) & \text{pour} \quad v \notin \mathrm{V}'' \end{cases}$$

Ainsi toute la difficulté de la démonstration consiste à se ramener au cas où le cube F_0 d'immersions est en bonne position relativement à Ω.

Nous commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme. — Sous la condition c), *il existe un* ε *positif, un voisinage arbitrairement petit* V'' *de* V', *un plongement* $i'' : \mathrm{V}'' \to \Omega$ *qui prolonge* i' *et un cube* $\mathrm{K} : [o, \varepsilon] \times \mathrm{I}^h \times \Omega \to \Omega$ *d'homéomorphismes de* Ω *fixes sur* $\partial\Omega$, *et tel que, si* $\mathrm{K}_{t,\tau}(x) = \mathrm{K}(t, \tau, x)$ *on ait*

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{t,\tau}\mathrm{P}'(o, o, v) &= \mathrm{P}'(t, \tau, v) && \text{pour } v \in \mathrm{V}'' \\ \varphi \mathrm{K}_{0,\tau} i''(v) &= \mathrm{F}_0(\tau, v) && \text{pour } v \in \mathrm{V}' \\ \mathrm{K}_{t,\tau} i''(v) &= \mathrm{K}_{0,\tau} i''(v) && \text{pour } v \in \text{frontière de V'' dans V.} \end{aligned}$$

Démonstration. — D'après le corollaire de la proposition 2 du § 7, on peut trouver un voisinage V'' suffisamment petit de V' dans V (par exemple un voisinage régulier), et un cube de plongements $P_0'': I^h \times V'' \to \Omega$ tel que $P_0''(\tau, v) = P'(o, \tau, v)$ pour $(\tau, v) \in I^h \times V'$ et que $\varphi P_0'' = F_0 | I^h \times V''$. On suppose de plus que l'image de P_0'' ne rencontre pas $\partial\Omega$. On posera $i''(v) = P_0''(o, v)$.

Nous construisons d'abord un cube $H: I \times I^h \times \Omega \to \Omega$ d'homéomorphismes de Ω qui sont l'identité sur $\partial\Omega$ et tels que

$$H_{t,\tau} P'(o, o, v) = P'(t, \tau, v) \qquad \text{pour } v \in V'$$

et

$$H_{0,\tau} P_0''(o, v) = P_0''(\tau, v) \qquad \text{pour } v \in V''.$$

Pour cela, on applique d'abord le théorème de Hudson et Zeeman pour construire un cube $H'': I^h \times \Omega \to \Omega$ d'homéomorphismes de Ω qui sont l'identité sur $\partial\Omega$ et tels que, si $H_\tau''(x) = H''(\tau, x)$, on ait $H_\tau'' P_0''(o, v) = P_0''(\tau, v)$ pour $(\tau, v) \in I^h \times V''$. D'autre part, d'après le théorème 2 (voir § 6), il existe un cube $H': I \times I^h \times \Omega \to \Omega$ d'homéomorphismes de Ω, fixes sur $\partial\Omega$, tels que $H_{t,\tau}'(x) = H'(t, \tau, x)$ soit égal à x pour $t = o$ et que $H_{t,\tau}' P'(o, \tau, v) = P'(t, \tau, v)$ pour $(t, \tau, v) \in I \times I^h \times V'$. On posera alors $H_{t,\tau} = H_{t,\tau}' H_{0,\tau}''$.

Soit ω un voisinage de $i''(V'')$ contenu dans l'intérieur de Ω et qui soit une variété à bord telle que i'' applique dans $\partial\omega$ la frontière de V'' dans V (cf. [8]). Si ε est assez petit, l'application $P: [o, \varepsilon] \times I^h \times V' \to \Omega$ définie par $P(t, \tau, v) = H_{0,\tau}^{-1} P'(t, \tau, v)$ aura son image dans ω. Il existe donc (voir démonstration du théorème 2, § 6) un cube $\mathcal{H}: [o, \varepsilon] \times I^h \times \omega \to \omega$ d'homéomorphismes de ω fixes sur $\partial\omega$, tels que $\mathcal{H}_{0,\tau}$ soit l'identité et que $\mathcal{H}_{t,\tau} P'(o, o, v) = H_{0,\tau}^{-1} P'(t, \tau, v)$ pour $(t, \tau, v) \in [o, \varepsilon] \times I^h \times V'$.

Pour définir K, il suffira de poser :

$$K_{t,\tau}(x) = \begin{cases} H_{0,\tau} \mathcal{H}_{t,\tau}(x) & \text{pour} \quad x \in \omega \\ H_{0,\tau}(x) & \text{pour} \quad x \notin \omega \end{cases}$$

Réduction au cas où V *est une anse.* — Remarquons tout d'abord que nous pouvons toujours supposer (ce que nous n'avons pas encore fait) que V' est une sous-variété de même dimension que V. Si ce n'était pas le cas, on s'y ramènerait en remplaçant V' par un de ses voisinages réguliers V'' assez petit et en définissant $F(t, \tau, v) = H_{t,\tau} i''(v)$ pour $(t, \tau, v) \in I \times I^h \times V''$ (dans les notations de la première partie de la démonstration du lemme précédent).

Dans ces conditions, V peut s'obtenir à partir de V' par adjonction successive d'anses. Comme le composé de deux fibrations semi-simpliciales est encore une fibration, on peut se ramener au cas où V est la réunion de V' et d'une seule anse. Il revient alors au même de supposer que V est une anse $D^k \times D^{n-k}$ et que V' est un voisinage régulier de $\partial D^k \times D^{n-k}$, par exemple $V' = D^k \times D^{n-k} - (3/4) D^k \times D^{n-k}$; on désigne par aD^k le produit $[-a, +a]^k$. Nous supposerons aussi que le voisinage V'' du lemme précédent est $D^k \times D^{n-k} - (1/2) D^k \times D^{n-k}$.

Mise en bonne position relativement à Ω. — Soit N le sous-espace du produit $2D^k \times 2D^{n-k} \times 2D^q$ défini par

$$N = 2\,D^k \times 2D^{n-k} \times 2D^q - (1/3)D^k \times 2D^{n-k} \times 2D^q$$

et soit j'' l'inclusion naturelle $V'' \to V'' \times \{0\} \subset N$. Il est clair que N est un voisinage régulier de $j''(V'')$.

Nous montrons maintenant qu'il existe un homéomorphisme ψ de Ω sur N tel que $j'' = \psi i''$. Soit en effet $(\mathfrak{X}, i, \Phi)$ un voisinage régulier de $V = D^k \times D^{n-k}$ induit par l'immersion $f : D^k \times D^{n-k} \to X$ définie par $f(v) = F(o, o, v)$. Comme $\mathfrak{X}$ peut se « collapser » sur le disque $i(V)$, $\mathfrak{X}$ est isomorphe à $2D^k \times 2D^{n-k} \times 2D^q$ et le plongement i à l'inclusion $D^k \times D^{n-k} \to D^k \times D^{n-k} \times \{0\} \subset 2D^k \times 2D^{n-k} \times 2D^q$ (cf. [8]). Avec cette identification, $(N, i|V'', \Phi|N)$ est un voisinage régulier de V'' induit par l'immersion $f|V''$. L'existence de l'homéomorphisme ψ résulte de la dernière partie du § 8. Nous identifierons Ω à N et i'' à j'' par cet isomorphisme.

Soit $\alpha : [0, \varepsilon] \times [1/2, 1] \to [0, 2]$ la fonction semi-linéaire définie par

$$\alpha(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x = 1/2 \quad \text{et} \quad x \geq 3/4 \\ 2t/\varepsilon & \text{pour} \quad x = 5/8 \end{cases}$$

et qui est prolongée ailleurs linéairement (par rapport à x).

C'est maintenant que l'hypothèse $\dim X > \dim V$ intervient, c'est-à-dire $q > 0$.

Désignons par $(x_1, \ldots, x_k)$ les coordonnées d'un point x de D^k, par $(y_1, \ldots, y_{n-k})$ les coordonnées d'un point y de D^{n-k} et par $(z_1, \ldots, z_q)$ celles d'un point z de D^q.

Soit $Q : [0, \varepsilon] \times V'' \to N$ l'isotopie de i'' définie par

$$Q(t, x, y) = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}, z_1 + \alpha(t, \sup|x_i|), \ldots, z_q),$$

où V'' est considéré comme sous-espace de $D^k \times D^{n-k}$ et N de $2D^k \times 2D^{n-k} \times 2D^q$.

Soit $F : [0, \varepsilon] \times I^h \times V'' \to X$ le cube d'immersions défini par :

$$F(t, \tau, v) = \begin{cases} \varphi K_{t,\tau} Q(t, v) & \text{pour} \quad v \in V'' \\ F_0(\tau, v) & \text{pour} \quad v \notin V'' \end{cases}$$

(cf. lemme précédent).

Cette formule a bien un sens, car si v appartient à la frontière de V'' dans V, on a $\varphi K_{t,\tau} Q(t, v) = F_0(\tau, v)$, d'après les propriétés de K énoncées dans le lemme. D'autre part

$$F(t, \tau, v) = F'(t, \tau, v) \qquad \text{pour} \quad v \in V'$$

et

$$F(o, \tau, v) = F_0(\tau, v) \qquad \text{pour} \quad v \in V.$$

Le cube $F_\varepsilon = I^h \times V' \to X$ défini par $F_\varepsilon(\tau, v) = F(\varepsilon, \tau, v)$ est en bonne position relativement à $\Omega = N$. En effet, soit $V''' = D^k \times D^{n-k} - (5/8) D^k \times D^{n-k}$ et soit $P_\varepsilon : I_h \times V \to N$ le cube de plongements défini par $P_\varepsilon(\tau, v) = K_{\varepsilon,\tau} Q(\varepsilon, v)$. On a $\varphi P_\varepsilon = F_\varepsilon | I^h \times V'''$ et $P_\varepsilon(\tau, v) \in \partial N$ pour v appartenant à la frontière de V''' dans V.

On pourra donc prolonger la définition de F sur $[\varepsilon, 1] \times I^h \times V$ comme indiqué précédemment.

Enfin, dans le cas où $\dim V = \dim X$ et où chaque composante connexe de $V - V'$ rencontre le bord de V, alors V peut s'obtenir à partir de V' par adjonction d'anses d'indices $k<n$. Pour une anse $A = D^k \times D^{n-k}$ d'indice $k<n$, on définit F d'abord sur $I \times I_h \times D^k \times \{0\}$ et on étend ensuite F sur $I \times I^h \times D^k \times D^{n-k}$ en s'inspirant de la démonstration du lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Hirsch, Immersions of manifolds, *Trans. A.M.S.*, *93* (1959), 242-276.
[2] J. F. P. Hudson and E. C. Zeeman, On combinatorial isotopy, *Publ. Math.*, I.H.E.S., nº 19 (1964).
[3] J. Milnor, *Microbundles and differentiable structures*, Mimeographed Notes, Princeton University (1961).
[4] S. Smale, The classification of immersions of spheres in euclidean spaces, *Ann. of Math.*, *69* (1959), 327-344.
[5] R. Thom, *La classification des immersions d'après Smale*, Séminaire Bourbaki, décembre 1957.
[6] J. H. C. Whitehead, Simplicial spaces, nuclei and m-groups, *Proc. London Math. Soc.*, *45* (1939), 243-327.
[7] E. C. Zeeman, Unknotting combinatorial balls (à paraître).
[8] E. C. Zeeman, *Seminar on Combinatorial Topology*, I.H.E.S. (1963) (Mimeographed Notes), Paris.
[9] M. Zisman, Quelques propriétés des fibrés au sens de Kan, *Annales de l'Inst. Fourier* (1960), 345-457.

Institut Mathématique de l'Université de Genève.
Institut des Hautes Études Scientifiques.
Harvard University.

Reçu le 15 juillet 1963.