PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

WEISHU SHIH

Homologie des espaces fibrés

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 13 (1962), p. 5-87
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1962__13__5_0>

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est de continuer les études de J. Leray [14], J. P. Serre [16], E. Fadell et W. Hurewicz [9] sur la détermination de la suite spectrale d'un espace fibré $\mathscr{E}$ en fonction des modules d'homologie de sa base $\mathscr{B}$, de sa fibre $\mathscr{F}$ et de son groupe structural $\mathscr{G}$.

Supposons, pour simplifier, que les coefficients soient pris dans un corps, et que le groupe $\mathscr{G}$ soit $(n-1)$-connexe (en fait, on étudiera le cas plus général où l'anneau de coefficients est un anneau principal, et où $\mathscr{E}$ est un fibré n-trivial). Désignons par $\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{G})$ le classifiant de $\mathscr{G}$; et soit

$$\bar{\xi}^i \in \mathrm{H}^i(\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{G}), \mathrm{H}_{i-1}(\mathscr{G})), \qquad n+1 \leqslant i \leqslant 2n$$

l'élément qui correspond à l'isomorphisme de la transgression du fibré universel

$$\mathrm{H}_i(\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{G})) \underset{\approx}{\rightarrow} \mathrm{H}_{i-1}(\mathscr{G}) \qquad n+1 \leqslant i \leqslant 2n.$$

Définissons l'élément

$$\xi^i \in \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_{i-1}(\mathscr{G}))$$

par

$$\xi^i = \psi^*(\bar{\xi}^i)$$

où $\psi^* : \mathrm{H}^*(\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{G})) \to \mathrm{H}^*(\mathscr{B})$ est le morphisme induit par une application de $\mathscr{B}$ dans $\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{G})$ qui induit le fibré principal associé au fibré $\mathscr{E}$.

Désignons par ξ l'élément de $\mathrm{H}^*(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{G}))$

$$\xi = \sum_{n<k\leqslant 2n} \xi^k.$$

Pour tout entier $r \geqslant 2$, soit

$$\xi \frown^r_p : \sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F})) \to \sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}))$$

l'endomorphisme induit par le cap-produit $\xi \frown$ sur le module quotient

$$\sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F})) = \sum_{i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F})) \Big/ \sum_{j\leqslant p-r} \mathrm{H}_j(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F})),$$

où le cap-produit

$$\frown : \mathrm{H}^*(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{G})) \otimes \mathrm{H}_*(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F})) \to \mathrm{H}_*(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}))$$

est induit par l'application de Pontrjagin

$$\mathrm{H}_*(\mathscr{G})\otimes\mathrm{H}_*(\mathscr{F}) \to \mathrm{H}_*(\mathscr{F}).$$

Enfin, désignons par

$$\Gamma_p^r : \sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F})) \to \mathrm{H}_p(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}))$$

$$\mathrm{L}_p^r : \mathrm{H}_{p-r+1}(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F})) \to \sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}))$$

les projection et injection évidentes. Alors on a :

Théorème A. — Pour $2 \leqslant r \leqslant 2n+1$, *le terme* E_p^r *de la suite spectrale d'homologie du fibré* $\mathscr{E}$ *se calcule à l'aide des classes caractéristiques* ξ^i *et du cap-produit relatif à l'application de Pontrjagin, comme suit :*

$$\mathrm{E}_p^r \cong \mathrm{Z}_p^r/\mathrm{D}_p^r$$

où Z_p^r *est l'image par* Γ_p^r *du noyau de* $\xi\frown_p^r$:

$$\mathrm{Z}_p^r = \mathrm{Im}\,\Gamma_p^r(\mathrm{Ker}\,\xi\frown_p^r),$$

et D_p^r *est le sous-module de* $\mathrm{H}_p(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}))$ *formé des éléments dont l'image par* L_{p+r-1}^r *dans* $\sum_{p\leqslant i\leqslant p+r-1} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}))$ *appartient à l'image de l'endomorphisme* $\xi\frown_{p+r-1}^r$:

$$\mathrm{D}_p^r = (\mathrm{L}_{p+r-1}^r)^{-1}(\mathrm{Im}\,\xi\frown_{p+r-1}^r).$$

Considérons maintenant le morphisme composé

$$(\xi\frown_p^{r+1})\circ j : \sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F})) \xrightarrow{j}$$

$$\sum_{p-r\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F})) \xrightarrow{\xi\frown_p^{r+1}} \sum_{p-r\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}))$$

de l'inclusion évidente j avec l'endomorphisme $\xi\frown_p^{r+1}$; alors on a :

Théorème A bis. — Pour $2 \leqslant r \leqslant 2n$, *la restriction de* $(\xi\frown_p^{r+1})\circ j$ *au sous-module* $\mathrm{Ker}\,\xi\frown_p^r$ *de* $\sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}))$ *a son image dans le sous-module* Z_{p-r}^r *de* $\mathrm{H}_{p-r}(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}))$; *ainsi elle induit un morphisme*

$$\xi\frown_r^\# : \mathrm{Z}_p^r \to \mathrm{Z}_{p-r}^r/\mathrm{D}_{p-r}^r$$

qui, par passage au quotient, donne précisément la différentielle d_r :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_p^r \arrow[r, "d_r"] \arrow[d, "\approx"'] & \mathrm{E}_{p-r}^r \arrow[d, "\approx"] \\ \mathrm{Z}_p^r/\mathrm{D}_p^r \arrow[r, "\xi\frown_r^\#"] & \mathrm{Z}_{p-r}^r/\mathrm{D}_{p-r}^r \end{tikzcd}$$

de la suite spectrale d'homologie du fibré $\mathscr{E}$.

Considérons maintenant le cup-produit relatif à l'application de Pontrjagin

$$\smile : H^*(\mathscr{B}, H_*(\mathscr{G})) \otimes H^*(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F})) \to H^*(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}));$$

et l'endomorphisme induit par le cup-produit et la classe ξ :

$$\xi \smile_r^p : \sum_{p \leqslant i \leqslant p+r-1} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F})) \to \sum_{p \leqslant i \leqslant p+r-1} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}))$$

par passage au quotient

$$\sum_{p \leqslant i \leqslant p+r-1} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F})) = \sum_{p \leqslant i} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F})) \Big/ \sum_{p+r \leqslant i} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}))$$

Désignons par

$$\Gamma_r^p : \sum_{p \leqslant i \leqslant p+r-1} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F})) \to H^p(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}))$$

$$L_r^p : H^{p+r-1}(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F})) \to \sum_{p \leqslant i \leqslant p+r-1} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}))$$

les projection et injection évidentes. Alors on a :

Théorème B. — Pour $2 \leqslant r \leqslant 2n+1$, *le terme* E_r^p *de la suite spectrale de cohomologie du fibré* $\mathscr{E}$ *se calcule à l'aide des classes caractéristiques* ξ^i, *et du cup-produit relatif à l'application de Pontrjagin, comme suit :*

$$E_r^p \cong Z_r^p / D_r^p$$

où Z_r^p *est l'image par* Γ_r^p *du noyau de* $\xi \smile_r^p$:

$$Z_r^p = \operatorname{Im} \Gamma_r^p(\operatorname{Ker} \xi \smile_r^p)$$

et D_r^p *est le sous-module de* $H^p(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}))$ *formé des éléments dont l'image par* L_r^{p-r+1} *dans* $\sum_{p-r+1 \leqslant i \leqslant p} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}))$ *appartient à l'image de l'endomorphisme* $\xi \smile_r^{p-r+1}$:

$$D_r^p = (L_r^{p-r+1})^{-1}(\operatorname{Im} \xi \smile_r^{p-r+1}).$$

Considérons maintenant le morphisme composé

$$(\xi \smile_{r+1}^p) \circ j : \sum_{p \leqslant i \leqslant p+r-1} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F})) \xrightarrow{j} \sum_{p \leqslant i \leqslant p+r} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F})) \xrightarrow{\xi \smile_{r+1}^p}$$

$$\xrightarrow{\xi \smile_{r+1}^p} \sum_{p \leqslant i \leqslant p+r} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}))$$

de l'inclusion évidente j avec l'endomorphisme $\xi \smile_{r+1}^p$, alors on a :

Théorème B bis. — Pour $2 \leqslant r \leqslant 2n$, *la restriction de* $(\xi \smile_{r+1}^p) \circ j$ *au sous-module* $\operatorname{Ker} \xi \smile_p^r$ *de* $\sum_{p \leqslant i \leqslant p+r-1} H^i(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}))$ *a son image dans le sous-module* Z_r^{p+r} *de* $H^{p+r}(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}))$, *ainsi elle induit un morphisme :*

$$\xi \smile_{\#}^r : Z_r^p \to Z_r^{p+r} / D_r^{p+r}$$

qui, par passage au quotient, donne précisément la différentielle d^r *:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}_r^p & \xrightarrow{d^r} & \mathrm{E}_r^{p+r} \\ \approx \big\downarrow & & \big\downarrow \approx \\ \mathrm{Z}_r^p/\mathrm{D}_r^p & \xrightarrow{\xi \smile_{\#}^{r}} & \mathrm{Z}_r^{p+r}/\mathrm{D}_r^{p+r} \end{array}$$

de la suite spectrale de cohomologie du fibré $\mathscr{E}$.

Le contenu des divers chapitres est le suivant :

Le chapitre I contient les notions de classes fondamentales et de somme tordue de modules différentiels gradués (m.d.g.). Les classes fondamentales permettront de définir, dans le chapitre IV, le cap-produit (resp. cup-produit) généralisé, dont on a besoin pour établir les théorèmes A et B, quand les coefficients sont pris dans un anneau principal. Ensuite, nous nous servirons de la somme tordue de deux m.d.g. pour généraliser le théorème d'Eilenberg-Zilber [8] dans le cas du produit cartésien tordu, ce qui permet de transformer le problème de la suite spectrale d'un fibré en un problème d'algèbre homologique. Ceci compose le chapitre II. Au chapitre III, on définit d'abord les classes ξ^i pour un fibré n-trivial (cf. J. F. Adams [1]). Un fibré de groupe structural $(n-1)$-connexe est n-trivial, et les théorèmes A et B se généralisent encore une fois. D'autre part, en appliquant la formule de E. A. Brown [2], on démontre que le carré (au sens de Pontrjagin) de la classe caractéristique d'un fibré est nulle; et on obtient une condition nécessaire pour qu'une coalgèbre (resp. algèbre) graduée soit réalisable [12] par l'homologie (resp. la cohomologie) d'un espace. Enfin, le chapitre V est consacré à la démonstration des théorèmes A et B dans le cas où les coefficients sont dans un anneau principal et où $\mathscr{E}$ est n-trivial.

Il m'aurait été impossible de rédiger ce mémoire, si je n'avais pas reçu l'aide bienveillante que M. H. Cartan n'a jamais cessé de m'apporter dans mes études, tant par l'intermédiaire de ses cours et séminaire, que par de nombreux et précieux contacts directs qui ont amélioré considérablement ce travail, de même si je n'avais pas eu ses encouragements moraux et matériels (surtout pendant mes trois années de sanatorium). Je lui exprime ici mes sentiments de plus profonde reconnaissance.

Qu'il me soit permis de remercier aussi J. F. Adams, N. Bourbaki, A. Dold, C. Ehresmann, A. Grothendieck, I. Kupka, J. C. Moore, L. Schwartz, J. P. Serre et Wu Wen Tsün pour l'aide, les encouragements et les conseils qu'ils m'ont prodigués.

25 octobre 1961, Paris.

CHAPITRE I

CLASSE FONDAMENTALE ET SOMME TORDUE DES MODULES DIFFÉRENTIELS GRADUÉS

Dans ce chapitre, on commence par quelques rappels sur les propriétés élémentaires des foncteurs Hom et $\otimes$ pour les modules différentiels gradués (m.d.g.) sur un anneau Λ ; les démonstrations sont évidentes et nous les avons omises. Ensuite, la notion de classe fondamentale pour un m.d.g. est introduite. Enfin, dans le § 3, on donne la notion de somme tordue de deux modules différentiels gradués, et on démontre quelques propriétés dont on aura besoin plus tard.

§ 1. FONCTORIALITÉ DE Hom ET $\otimes$.

Étant donnés deux m.d.g. A et B, on désigne par

$$A\otimes B$$

le m.d.g. défini de la manière suivante :

$$(A\otimes B)_n = \sum_{i+j=n} A_i\otimes B_j$$
$$d(a\otimes b) = da\otimes b + (-1)^{\deg a} a\otimes db,$$

Remarque 1. — L'application :

$$s : a\otimes b \to (-1)^{pq} b\otimes a$$

où $p=\deg a$, $q=\deg b$, est un isomorphisme de m.d.g. de $A\otimes B$ sur $B\otimes A$.

Définissons maintenant le m.d.g.

$$\mathrm{Hom}(A, B)$$

comme suit :

$$\mathrm{Hom}^{-r}(A, B) = \mathrm{Hom}_r(A, B) = \prod_i \mathrm{Hom}(A_i, B_{i+r})$$
$$d_B(f(a)) = (df)(a) + (-1)^{\deg(f)} f(d_A a), \qquad \text{où } a\in A$$

On vérifie aussitôt que :

$$d(df) = 0$$

Remarque 2. — Observons que, lorsque B est de degré 0, cette convention est différente de la convention classique faite pour définir le « cobord » d'une cochaîne, dans la suite; on abandonnera ici la convention classique. D'autre part, les *cycles* de degré 0 de Hom(A, B) ne sont pas autre chose que les morphismes de m.d.g. de A dans B. Deux tels morphismes sont « homotopes » si et seulement si la différence des cycles qui les définissent est un « bord ».

Lemme 1. — *Soient* A, B, C *et* D *des* m.d.g. *Alors les morphismes :*

$$\varphi : \mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathrm{Hom}(C, D) \to \mathrm{Hom}(A \otimes C, B \otimes D)$$

$$\psi : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathrm{Hom}(C, C)$$

$$\Omega : \mathrm{Hom}(A, B) \otimes A \to B$$

définis par :

$$\varphi(f \otimes g)(a \otimes c) = (-1)^{(\deg. g)(\deg. a)} f(a) \otimes g(c)$$

$$\psi(f) = f \otimes 1_c \qquad \text{où } 1_C \text{ est le morphisme identique de } C$$

$$\Omega(f \otimes a) = f(a),$$

sont des morphismes de m.d.g. *de degré zéro.*

Remarque 3. — L'opérateur différentiel de $A \otimes B$ défini plus haut n'est autre que

$$\varphi(d_A \otimes 1 + 1 \otimes d_B).$$

Par abus de langage, on dira que c'est

$$d_A \otimes 1 + 1 \otimes d_B.$$

Proposition 1. — *Soit* C *une coalgèbre différentielle graduée, et* A, B, *des* m.d.g. *Pour tout cycle*

$$f \in \mathrm{Hom}(C, A)$$

de dimension r, le composé

$$\bar{f} : C \otimes B \xrightarrow{\Delta \otimes 1} C \otimes C \otimes B \xrightarrow{1 \otimes f \otimes 1} C \otimes A \otimes B$$

est encore un cycle de dimension r de $\mathrm{Hom}(C \otimes B, C \otimes A \otimes B)$, *où* Δ *est la diagonale de* C.

Démonstration. — En effet, $\bar{f}$ est l'image de f par le morphisme de m.d.g. de degré zéro :

$$\mathrm{Hom}(C, A) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}(C, C) \otimes \mathrm{Hom}(C, A) \otimes \mathrm{Hom}(B, B) \xrightarrow{\varphi}$$
$$\mathrm{Hom}(C \otimes C \otimes B, C \otimes A \otimes B) \xrightarrow[\mathrm{Hom}(\Delta \otimes 1, 1)]{} \mathrm{Hom}(C \otimes B, C \otimes A \otimes B)$$

c.q.f.d.

Lemme 2. — *Soient* A, B *et* C *des* m.d.g., *alors on a un isomorphisme canonique*

$$\psi : \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$$

de m.d.g. *de degré zéro.*

Démonstration. — Soit f un élément de Hom(A, Hom(B, C))

$$f = \prod_n f_n \qquad \text{où} \quad f_n : A_q \to \mathrm{Hom}_{n+q}(B, C),$$

et désignons par

$$g_n : A_q \otimes B_m \to C_{m+q+n}$$

le morphisme défini par

$$g_n(a \otimes b) = f_n(a)(b)$$

Alors, $g_n \in \mathrm{Hom}_n(A \otimes B, C)$; on pose

$$\psi(f_n) = g_n.$$

Par un calcul direct, on peut vérifier que ψ est bijectif et que

$$d \circ \psi = \psi \circ d.$$

c.q.f.d.

Lemme 3. — Soient A, B *et* C *des* m.d.g.; *alors le morphisme*

$$\varphi : \mathrm{Hom}(B, C) \otimes \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$$

défini par

$$\varphi(f \otimes g) = f \circ g$$

est un morphisme de m.d.g.; *de même pour le morphisme*

$$\varphi' : \mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom},(A\ C),$$

défini par

$$\varphi'(f \otimes g) = (-1)^{(\deg. f)(\deg. g)} g \circ f.$$

En particulier, les lemmes 2 et 3 entraînent la fonctorialité de Hom(B, C) que voici : on a des morphismes de m.d.g. :

$$\mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A, B), \mathrm{Hom}(A, C))$$
$$\mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(C, A), \mathrm{Hom}(B, A))$$

dont le premier associe à $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$, l'application

$$\mathrm{Hom}(A, f) : g \to f \circ g \qquad \text{où} \quad g \in \mathrm{Hom}(A, B);$$

le second associe à f l'application

$$\mathrm{Hom}(f, A) : h \to (-1)^{(\deg. h)(\deg. f)} h \circ f, \qquad \text{où} \quad h \in \mathrm{Hom}(C, A).$$

D'où :

Corollaire. — Si f et f' sont deux morphismes homotopes

$$f \sim f' : B \to C$$

alors Hom(A, f) *et* Hom(A, f') *sont des morphismes homotopes :*

$$\mathrm{Hom}(A, f) \sim \mathrm{Hom}(A, f') : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C);$$

de même Hom(f, A) *et* Hom(f', A) *sont des morphismes homotopes.*

§ 2. CLASSE FONDAMENTALE D'UN MODULE DIFFÉRENTIEL GRADUÉ

Soit M un m.d.g., et G_* un module gradué sur un anneau Λ; par définition :

$H_k(M, G_*)$ = module d'homologie H_k du m.d.g. $M\otimes G_*$,

$H^k(M, G_*)$ = module d'homologie H_{-k} du m.d.g. $\mathrm{Hom}(M, G_*)$,

où G_* est muni de la différentielle nulle; on pose

$$H_*(M, G_*)=\sum_k H_k(M, G_*),$$

$$H^*(M, G_*)=\sum_k H^k(M, G_*).$$

Remarque. — On convient de mettre les indices en haut pour l'homologie de $\mathrm{Hom}(M, G_*)$; les éléments de $H^k(M, G_*)$ sont donc les classes de cocycles appartenant à

$$\mathrm{Hom}^k(M, G_*)=\prod_i \mathrm{Hom}(M_i, G_{i-k}),$$

où $G_*=\sum_i G_i$.

Convention. — On ajoute un « $*$ » pour désigner un module gradué quand ce module est pris pour un module de coefficients. Par contre, s'il s'agit d'un module non gradué, on ne met pas de « $*$ ». Avec ces conventions :

$H_k(M, G_i)$ = module d'homologie H_k du m.d.g. $M\otimes G_i$, où G_i est considéré comme de degré 0;

$H_k(M, G_{i_*})$ = module d'homologie H_k du m.d.g. $M\otimes G_{i_*}$; où G_{i_*} est le module G_i considéré comme de degré i.

On a donc

$$H_k(M, G_{i_*})=H_{k-i}(M, G_i).$$

Définition 1. — *Une résolution projective d'un* m.d.g. M *se compose d'un* m.d.g. X *et d'un morphisme de* m.d.g.

$$f: X\rightarrow M$$

tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) X_n *est un module projectif sur* Λ, *où* $X=\sum_n X_n$;

2) f *est surjectif*;

3) $f_*: H_*(X) \underset{\approx}{\rightarrow} H_*(M)$ *est un isomorphisme.*

Proposition 1. — *Pour tout* m.d.g. M, *il existe une résolution projective* X *de* M. *De plus, si la graduation de* M *est positive* (i.e. si $M_i=0$, pour $i<0$), *alors on peut choisir un* X *de graduation positive.*

Démonstration. — Choisissons une résolution projective au sens de Cartan-Eilenberg (chapitre XVII, [5])

$$0\leftarrow M\xleftarrow{\varepsilon} X_{*,0}\xleftarrow{\xi_1} X_{*,1}\leftarrow\dots\xleftarrow{\xi_m} X_{*,m}\leftarrow\dots$$

Soit X le m.d.g.

$$\sum_{i,j} X_{i,j}$$

muni de la graduation

$$X_n = \sum_{i+j=n} X_{i,j}$$

et de la « différentielle totale »

$$\partial x = \xi_j(x) + (-1)^i dx$$

pour $x \in X_{i,j}$, en notant d la différentielle du m.d.g. X_{*j}.

Pour chaque n, soit f_n l'application composée

$$X_n \xrightarrow{\text{projection évidente}} X_{n,0} \xrightarrow{\varepsilon} M_n,$$

et soit $f : X \rightarrow M$ le produit des f_n. Alors, il est clair que f est un morphisme de m.d.g., surjectif, et que X_n est projectif. Il reste à voir que f_* est un isomorphisme $H_*(X) \underset{\approx}{\longrightarrow} H_*(M)$. Pour cela, considérons les filtrations de X et M par les sous-modules différentiels gradués

$$F_p X = \sum_{i \leqslant p} X_{i,j}$$

$$F_p M = \sum_{i \leqslant p} M_i$$

On vérifie aussitôt que

$$f(F_p X) \subseteq F_p M,$$

et que f induit un isomorphisme pour le terme $E_1(X) \approx E_1(M)$:

$$E_1^p(X) = H_*(F_p X / F_{p-1} X) \approx H_*(X_{p,*}) \approx M_p = E_1^p(M).$$

Donc, d'après le théorème 3.2 (chapitre XV de [5]), f_* est bien un isomorphisme.

c.q.f.d.

Proposition 2. — Soient donnés trois m.d.g. M, X *et* Y, *sur un anneau de dimension homologique finie, et des morphismes de* m.d.g.

$$f : X \rightarrow M$$
$$g : Y \rightarrow M$$

tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) X *est un module projectif, où* $X = \sum_n X_n$;

2) g *est surjectif;*

3) $g_* : H_*(Y) \underset{\approx}{\longrightarrow} H_*(M)$ *est un isomorphisme.*

Alors il existe un morphisme de m.d.g.

$$h : X \rightarrow Y,$$

unique à une homotopie près, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[dl, "g"] \\ M & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ & {}_{f}\searrow \quad \swarrow_{g} & \\ & M & \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. — Considérons le m.d.g. N défini par la suite exacte des m.d.g.

$$0 \to N \to Y \xrightarrow{g} M \to 0$$

Du fait que g_* est un isomorphisme de $H_*(Y)$ sur $H_*(M)$, on conclut que

$$H_*(N) = 0.$$

Appliquons le théorème 4.3 (chapitre XVII de [5]) au foncteur Hom, en remarquant que les hypothèses de convergence sont vérifiées (p. 369, Cas 2), puisque l'anneau de base est de dimension finie. On en déduit que

$$H_*(\mathrm{Hom}(X, N)) = 0$$

parce que X est projectif.

Alors, la suite exacte d'homologie déduite de la suite exacte des m.d.g.

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, N) \to \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, M) \to 0$$

(puisque X est projectif) entraîne qu'on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(X, g)_* : H_*(\mathrm{Hom}(X, Y)) \xrightarrow[\approx]{} H_*(\mathrm{Hom}(X, M)).$$

Soit $\bar{h} \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ un cycle tel que

$$\mathrm{Hom}(X, g)_* \{\bar{h}\} = \{f\}.$$

Alors $g \circ \bar{h}$ est homotope à f au moyen d'un morphisme

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_1(X, M), \qquad d \circ \varphi + \varphi \circ d = g \circ \bar{h} - f.$$

Or, g est surjectif et X est projectif, donc il existe un $\bar{\varphi}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ {}^{\bar{\varphi}}\swarrow & \downarrow{}^{\varphi} & \\ Y \xrightarrow{g} & M & \to 0 \end{array}$$

soit commutatif. En posant

$$h = \bar{h} - (d \circ \bar{\varphi} + \bar{\varphi} \circ d),$$

on vérifie aussitôt que

$$g \circ h = f.$$

De plus, la classe d'homotopie de h est bien unique puisque

$$\mathrm{Hom}(X, g)_* \{h\} = \{f\}$$

et que $\mathrm{Hom}(X, g)_*$ est injectif.

c.q.f.d.

Corollaire 1. — Si l'anneau Λ *est de dimension finie, deux résolutions projectives de* M *sont « homotopiquement équivalentes ».*

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que l'anneau de base Λ est héréditaire.

Définition 2. — Soit (X, f) *une résolution projective de* M. *On appelle* classe fondamentale *d'un* m.d.g. M, *tout élément*

$$\theta \in H^0(X, H_*(M))$$

de degré zéro, tel que pour chaque i, *la composante de* θ *dans* $H^i(X, H_i(M))$ *ait pour image dans* $\mathrm{Hom}(H_i(X), H_i(M))$ *l'isomorphisme*

$$(f_*)_i : H_i(X) \underset{\approx}{\rightarrow} H_i(M)$$

Remarque 1. — Une telle classe existe toujours. En effet, il suffit, dans la suite exacte

$$0 \rightarrow Z(X) \rightarrow X \xrightarrow{d} D(X) \rightarrow 0,$$

de choisir un relèvement

$$\rho : D(X) \rightarrow X$$

tel que $d \circ \rho =$ identité; un tel relèvement existe parce que D(X) est projectif, d'après le théorème 5.4 (chapitre I de [5]). Alors le composé

$$f \circ (1_x - \rho \circ d) : X \rightarrow Z(X) \xrightarrow{f} Z(M) \rightarrow H_*(M)$$

est un cocycle dont la classe de cohomologie est bien une classe fondamentale. Inversement, toute classe fondamentale peut être définie par un relèvement ρ convenable.

Remarque 2. — Étant données deux résolutions projectives (X, f) et (Y, g), le morphisme h de la proposition 2 définit un isomorphisme

$$H^0(Y, H_*(M)) \underset{\approx}{\xrightarrow{h^*}} H^0(X, H_*(M))$$

qui est indépendant du choix de h. Par conséquent, le choix d'une classe fondamentale pour une résolution projective de M détermine sans ambiguïté une classe fondamentale pour toute autre résolution projective.

Remarque 3. — En particulier, si M est projectif, alors $(M, 1_M)$ est une résolution projective de M, et une classe fondamentale de M peut être définie comme un élément

$$\theta^M \in H^0(M, H_*(M))$$

dont la composante dans $H^i(M, H_i(M))$ a pour image canonique dans

$$\mathrm{Hom}(H_i(M), H_i(M))$$

l'élément unité; et ceci pour tout i. De même, si K est un module sur Λ, et si

$$\mathscr{K} \rightarrow K \rightarrow 0$$

une résolution projective (ordinaire) de K, alors

$$\mathscr{M} = M \otimes \mathscr{K} \rightarrow M \otimes K$$

est une résolution projective du m.d.g. $M \otimes K$, et une classe fondamentale de $M \otimes K$ est donc un élément de

$$H^0(\mathcal{M};\ H_*(M, K))$$

Définition 3. — Une résolution injective *d'un* m.d.g. M *se compose d'un* m.d.g. X *et d'un morphisme de* m.d.g.

$$f : M \to X$$

tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) X_n *est un module injectif sur* Λ, *où* $X = \sum_n X_n$;

2) f *est une injection*;

3) $f_* : H_*(M) \underset{\approx}{\to} H_*(X)$ *est un isomorphisme.*

Proposition 3. — Pour tout m.d.g. M, *il existe une résolution injective* X *de* M.

La démonstration est duale de celle de la proposition 1.

Proposition 4. — Soient donnés trois m.d.g. M, X *et* Y *sur un anneau de dimension homologique finie, et des morphismes de* m.d.g.

$$f : M \to X$$
$$g : M \to Y$$

tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) Y_n *est un module injectif, où* $Y = \sum_n Y_n$;

2) f *est une injection*;

3) $f_* : H_*(M) \underset{\approx}{\to} H_*(X)$ *est un isomorphisme.*

Alors il existe un morphisme de m.d.g.

$$h : X \to Y,$$

unique à une homotopie près, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, "h"] & & Y \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Corollaire 2. — Si l'anneau Λ *est de dimension finie, deux résolutions injectives de* M *sont « homotopiquement équivalentes ».*

Définition 4. — Soit (X, f) *une résolution injective de* M; *on appelle* coclasse fondamentale *d'un* m.d.g. M *tout élément*

$$\omega \in H^0(H_*(M), X) = H_0(\mathrm{Hom}(H_*(M), X))$$

tel que, pour chaque i, *la composante de* ω *dans* $H_i(\mathrm{Hom}(H_i(M), X))$ *ait pour image, dans* $\mathrm{Hom}(H_i(M), H_i(X))$, *l'isomorphisme*

$$(f_*)_i : H_i(M) \underset{\approx}{\to} H_i(X).$$

Remarque 4. — Une telle coclasse existe toujours, lorsque l'anneau est héréditaire. Un cas particulier auquel on s'intéresse, est celui où

$$M = \mathrm{Hom}(N, K),$$

N étant un m.d.g. projectif, et K un module sur Λ. Soit $\mathscr{K}$ une résolution injective de K

$$o \to K \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{K}.$$

On prend

$$X = \mathrm{Hom}(N, \mathscr{K})$$

et,

$$f = \mathrm{Hom}(N, \varepsilon) : M \to X;$$

(alors (X, f) est une résolution injective de M).

Dans ce cas, une *coclasse fondamentale de* N est un élément

$$\omega^N \in H^0(H^*(N, K)\,;\ \mathrm{Hom}(N, \mathscr{K}))$$

qui induit l'élément unité de $\mathrm{Hom}(H^i(N, K), H^i(N, K))$ pour tout i.

§ 3. SOMME TORDUE DE DEUX MODULES DIFFÉRENTIELS GRADUÉS

Soient A et B deux m.d.g.; désignons par

$$B + A$$

le module gradué défini ainsi :

$$(B + A)_n = B_n + A_n$$

A chaque élément $\delta \in \mathrm{Hom}_{-1}(A, B)$, on associe le morphisme

$$d_\delta : B + A \to B + A$$

défini par :

$$d_\delta(x, y) = (d_B x + \delta y,\ d_A y),\ (= d_B x + \delta y + d_A y)$$

Lemme 1. — Pour que d_δ soit une différentielle, c'est-à-dire $d_\delta^2 = o$, il faut et il suffit que δ soit un cycle de $\mathrm{Hom}_{-1}(A, B)$.

En effet, on a d'abord :

$$\begin{aligned} d_\delta^2(x, y) &= d_\delta(d_B x + \delta y,\ d_A y) \\ &= (d_B^2 x + d_B \delta y + \delta d_A y,\ d_A^2 y) \\ &= (d_B \delta y + \delta d_A y,\ o). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la définition de Hom(A, B), on a :

$$d(\delta) y = d_B \delta y + \delta d_A y,$$

et le lemme est démontré.

Dans la suite, on désigne par

$$B +_\delta A$$

le module différentiel gradué ainsi défini par le cycle $\delta \in \mathrm{Hom}_{-1}(A, B)$. On va voir d'abord une justification de l'introduction de cette notion de *somme tordue*, et ensuite quelques propriétés dont on aura besoin plus tard.

Remarquons d'abord que les projection et injection canoniques induisent une suite exacte de m.d.g.

$$o \to B \to B +_\delta A \to A \to o$$

et on a

Lemme 2. — Le morphisme $\bar{\partial}$ *de la suite exacte d'homologie*

$$\ldots \underset{\bar{\partial}}{\to} H_*(B) \to H_*(B +_\delta A) \to H_*(A) \underset{\bar{\iota}}{\to} H_*(B) \to \ldots$$

associée à la suite exacte de m.d.g.

$$o \to B \to B +_\delta A \to A \to o$$

est précisément le δ_*

$$\bar{\partial} = \delta_* : H_*(A) \to H_*(B).$$

Ceci est évident, si on se reporte à la définition de $\bar{\partial}$ et de la différentielle de $B +_\delta A$.

Désignons par $\mathrm{Ext}^1(A, B)_D$ l'ensemble des classes d'extension de modules différentiels gradués

$$o \to B \to X \to A \to o,$$

et par $\mathrm{Ext}^1(\bar{A}, \bar{B})$ l'ensemble des classes d'extensions de modules gradués $\bar{A}$, $\bar{B}$. Alors on a un morphisme canonique

$$g : \mathrm{Ext}^1(A, B)_D \to \mathrm{Ext}^1(\bar{A}, \bar{B}),$$

où $\bar{A}$, $\bar{B}$ sont les modules gradués sous-jacents aux modules différentiels gradués A, B respectivement.

Proposition 1. — La suite

$$o \to H_{-1}(\mathrm{Hom}(A, B)) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1(A, B)_D \xrightarrow{g} \mathrm{Ext}^1(\bar{A}, \bar{B})$$

est exacte, où $H_{-1}(\mathrm{Hom}(A, B))$ *est le module d'homologie de dimension* — 1 *du* m.d.g. Hom(A, B),

et ∂ *sera défini dans la démonstration.*

Démonstration. — D'après le lemme 1, à chaque cycle δ de $\mathrm{Hom}_{-1}(A, B)$ correspond l'extension de modules différentiels gradués :

$$o \to B \to B +_\delta A \to A \to o$$

obtenue d'une façon évidente. On détermine ainsi un élément unique de $\mathrm{Ext}^1(A, B)_D$, qu'on peut poser comme l'image de $\{\delta\}$ par ∂. En effet, supposons δ_1 et δ_2 homologues; alors il existe un $\theta \in \mathrm{Hom}_0(A, B)$ tel que $d\theta = \delta_1 - \delta_2$; posons

$$\bar{\theta} : B +_{\delta_1} A \to B +_{\delta_2} A, \qquad \bar{\theta}(x, y) = (x + \theta y, y);$$

$\overline{\theta}$ est un morphisme de modules différentiels gradués, et le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B & \to & B+_{\delta_1}A & \to & A & \to & 0 \\ & & \downarrow 1_B & & \downarrow \overline{\theta} & & \downarrow 1_A & & \\ 0 & \to & B & \to & B+_{\delta_2}A & \to & A & \to & 0 \end{array}$$

est commutatif, comme on le vérifie aussitôt.

∂ est injectif : en effet, si $\partial(\{\delta\})=0$, alors il existe un morphisme $\overline{\theta}$ de modules différentiels gradués tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B & \to & B+_{\delta}A & \to & A & \to & 0 \\ & & \downarrow 1_B & & \downarrow \overline{\theta} & & \downarrow 1_A & & \\ 0 & \to & B & \to & B+A & \to & A & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif, où $B+A$ est muni de la différentielle d_B+d_A. Alors le morphisme défini par le composé

$$\theta : A \xrightarrow[\text{injection}]{} B+_{\delta}A \xrightarrow{\overline{\theta}} B+A \xrightarrow[\text{projection}]{p} B$$

$\theta\in\mathrm{Hom}_0(A, B)$, est tel que

$$\begin{aligned}(d(\theta))y &= d_B\theta y-\theta d_A y \\ &= d_B p\overline{\theta}(0, y)-d_A y \\ &= d_B p\overline{\theta}(0, y)-p\overline{\theta}(0, d_A y) \\ &= p(d_B+d_A)\overline{\theta}(0, y)-p\overline{\theta}(0, d_A y) \\ &= p\overline{\theta}(d_\delta(0, y))-p\overline{\theta}(0, d_A y) \\ &= p\overline{\theta}(y, 0)=p(\delta y, 0) \\ &= \delta y,\end{aligned}$$

donc δ est un bord, d'où $\{\delta\}=0$.

Il est évident que l'application composée $g.\partial$ est nulle. Réciproquement, supposons que la classe d'extension de modules différentiels gradués

$$0\to B\to X\to A\to 0$$

soit telle que son image par g soit l'élément zéro de $\mathrm{Ext}^1(\overline{A}, \overline{B})$; on va montrer que cette classe est dans l'image de ∂. Or il existe, par hypothèse, un morphisme de modules gradués :

$$\rho : A\to X$$

tel que le composé $A\to X\to A$ soit l'identité (c'est-à-dire ρ est un « relèvement »). Considérons le morphisme

$$\delta=d_X\rho-\rho d_A : A\to B;$$

δ est un cycle de $\mathrm{Hom}_{-1}(A, B)$, et le morphisme

$$\overline{\rho} : B+_{\delta}A\to X, \qquad \overline{\rho}(x, y)=x+\rho y$$

induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B & \to & B +_{\delta} A & \to & A & \to & 0 \\ & & \downarrow 1_B & & \downarrow \overline{\varphi} & & \downarrow 1_A & & \\ 0 & \to & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A & \to & 0 \end{array}$$

comme on le vérifie aussitôt. Ceci prouve

$$\mathrm{Ker}\, g \subseteq \mathrm{Im}\, \partial$$

et la proposition 1 est démontrée.

c.q.f.d.

D'autre part, on peut se demander comment la classe d'homologie du cycle δ détermine l'extension :

(1) $\quad 0 \to \mathrm{Coker}\, \delta_{n+1} \to H_n(B +_{\delta} A) \to \mathrm{Ker}\, \delta_n \to 0 \qquad$ (où $\delta_n : H_n(A) \to H_{n-1}(B)$)

déduite de la suite exacte d'homologie associée à

$$0 \to B \to B +_{\delta} A \to A \to 0.$$

Pour cela, supposons que B et A soient libres, et choisissons une classe fondamentale θ^B. Alors on a (cf. Lemme 1, chapitre IV)

$$H_{-1}(\mathrm{Hom}(A, B)) \approx \prod_n H^n(A, H_{n-1}(B)).$$

Désignons par

$$\delta^* = \prod_n \delta^n \in H^1(A, H_*(B)), \qquad \delta^n \in H^n(A, H_{n-1}(B))$$

la classe qui correspond à $\{\delta\}$ par cet isomorphisme. On a :

Lemme 3. — L'image de δ^{n+1} *par l'application canonique*

$$H^{n+1}(A, H_n(B)) \to H^{n+1}(A, \mathrm{Coker}\, \delta_{n+1})$$

est un élément du sous-module $\mathrm{Ext}^1(H_n(A), \mathrm{Coker}\, \delta_{n+1})$ *de* $H^{n+1}(A, \mathrm{Coker}\, \delta_{n+1})$, *et l'image de cet élément par le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^1(H_n(A), \mathrm{Coker}\, \delta_{n+1}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Ker}\, \delta_n, \mathrm{Coker}\, \delta_{n+1})$$

déduit de l'inclusion $\mathrm{Ker}\, \delta_n \subseteq H_n(A)$, *est l'opposée de l'extension* (1). *En particulier, cela ne dépend pas du choix de* θ^B.

La démonstration est laissée au lecteur.

Remarque. — Une situation analogue dans le cas géométrique est valable aussi. Pour toute application continue $f : X \to Y$ de deux espaces topologiques, alors la classe

$$\xi = f^*(\theta^Y) \in H^*(X, H_*(Y)),$$

où θ^Y est une classe fondamentale de Y, détermine le groupe d'homologie relatif comme une extension de la forme (1), et qui ne dépend pas du choix de θ^Y. Plus généralement, supposons que l'on ait une filtration d'un espace X :

$$\to X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \to \dots \to X$$

par une suite d'espaces X_i et d'applications continues f_i, non nécessairement des inclusions. Alors les classes de cohomologie

$$\xi_i \in H^*(X_i, H_*(X))$$

définies par :

$$\xi_i = f_i^*(\theta^X), \qquad \theta^X \in H^*(X, H_*(X))$$

permettent de déterminer la suite spectrale associée à cette filtration.

Lemme 4. — Soit δ *un cycle de* $\mathrm{Hom}_{-1}(A, B)$, *et soit*

$$f : B \to B'$$

un morphisme de m.d.g.; *alors*

$$\bar{f} = f + 1_A : B +_\delta A \to B' +_{f_*(\delta)} A$$

est un morphisme de m.d.g., *où* $f_*(\delta)$ *désigne l'image de* δ *par le morphisme*

$$f_* : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, B')$$

induit par f.

La vérification est laissée au lecteur, ainsi que celle du lemme suivant.

Lemme 5. — Si $\nabla : A' \to A$ *est un morphisme de* m.d.g., *alors*

$$1_B + \nabla : B +_{\nabla^*(\delta)} A' \to B +_\delta A$$

est un morphisme de m.d.g., *où*

$$\nabla^* : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A', B)$$

désigne le morphisme induit par ∇.

Lemme 6. — Soit Φ *une homotopie de* f *à* g, f *et* g *étant deux morphismes de modules différentiels gradués* B *et* B' :

$$f, g : B \to B',$$
$$\Phi : B \to B'$$
$$f - g = d_{B'} \circ \Phi + \Phi \circ d_B.$$

A Φ *associons l'application*

$$F_\Phi : B' +_{f^*(\delta)} A \to B' +_{g^*(\delta)} A$$

définie par

$$F_\Phi(x, y) = (x + \Phi\delta y, y).$$

Alors F_Φ *est un isomorphisme de modules différentiels gradués.*

Démonstration. — En effet, le composé de F_Φ et $F_{-\Phi}$ est l'identité, donc il suffit de vérifier que $F_\Phi d = dF_\Phi$.

$$\begin{aligned}
F_\Phi d(x, y) &= F_\Phi(d_{B'}x + f\delta y, d_A y) \\
&= (d_{B'}x + f\delta y + \Phi\delta d_A y, d_A y) \\
&= (d_{B'}x + g\delta y + d_{B'}\Phi\delta y + \Phi d_B \delta y + \Phi\delta d_A y, d_A y) \\
&= (d_{B'}x + g\delta y + d_{B'}\Phi\delta y + \Phi d_B \delta y + \Phi(-d_B)\delta y, d_A y) \\
&= (d_{B'}x + g\delta y + d_{B'}\Phi\delta y, d_A y) \\
&= (d_{B'}(x + \Phi\delta y) + g\delta y, d_A y) \\
&= d(x + \Phi\delta y, y) \\
&= dF_\Phi(x, y)
\end{aligned}$$

c.q.f.d.

Ce lemme indique qu'on a un moyen canonique d'associer à chaque homotopie Φ un isomorphisme F_Φ.

Proposition 2. — Supposons qu'on ait la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & B' & & & & A' & & \\ & & {\scriptstyle\nabla_1}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\nabla_0} & & \\ 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & B +_{\delta_0} A & \rightarrow & A & \rightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & & & & & \\ & & B' & & & & & & \end{array}$$

où A, B, A', B' *sont des modules différentiels gradués et* ∇_0, ∇_1, f_1 *sont des morphismes de* m.d.g. *tels que* $\nabla_1 \circ f_1$ *soit homotope à l'identité de* B *au moyen de* Φ_1. (*On a donc*

$$\nabla_1 \circ f_1 - 1_B = d_B \circ \Phi_1 + \Phi_1 \circ d_B.)$$

Soit

$$\delta_1 = f_1 \circ \delta_0 \circ \nabla_0.$$

Alors le morphisme

$$\nabla_2 : B' +_{\delta_1} A' \rightarrow B +_{\delta_0} A$$

défini par

$$\nabla_2(x, y) = (\nabla_1 x + \Phi_1 \delta_0 \nabla_0 y, \nabla_0 y)$$

est un morphisme de modules différentiels gradués ; de plus le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & B & \longrightarrow & B +_{\delta_0} A & \rightarrow & A & \rightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\nabla_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\nabla_2} & & \uparrow{\scriptstyle\nabla_0} & & \\ 0 & \rightarrow & B' & \rightarrow & B' +_{\delta_1} A' & \rightarrow & A' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif.

La vérification est laissée au lecteur.

Corollaire 1. — Si ∇_0 *et* ∇_1 *sont des injections, alors* ∇_2 *aussi.*

Corollaire 2. — Si ∇_0 *et* ∇_1 *induisent des isomorphismes en homologie, il est de même pour* ∇_2.

Proposition 2 bis. — Supposons qu'on ait la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & A' & & \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle\nabla_0} & & \\ 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & B +_{\delta_0} A & \rightarrow & A & \rightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \\ & & B' & & & & A' & & \end{array}$$

où A, B, A', B' *sont des* m.d.g., *et* ∇_0, f_0, f_1 *des morphismes de* m.d.g. *tels que* $\nabla_0 \circ f_0$ *soit homotope à l'identité de* A *au moyen de* Φ_0 (*on a donc*

$$\nabla_0 \circ f_0 - 1_A = d_A \circ \Phi_0 + \Phi_0 \circ d_A).$$

Soit

$$\delta_1 = f_1 \circ \delta_0 \circ \nabla_0.$$

Alors le morphisme

$$f_2 : \mathrm{B} +_{\delta_0} \mathrm{A} \to \mathrm{B}' +_{\delta_1} \mathrm{A}'$$

défini par

$$f_2(x, y) = (f_1 x + f_1 \delta_0 \Phi_0 y, f_0 y)$$

est un morphisme de m.d.g., *et le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{B} & \longrightarrow & \mathrm{B} +_{\delta_0} \mathrm{A} & \to & \mathrm{A} & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \\ 0 & \to & \mathrm{B}' & \to & \mathrm{B}' +_{\delta_1} \mathrm{A}' & \to & \mathrm{A}' & \to & 0 \end{array}$$

est commutatif.

Proposition 3. — Sous les hypothèses des propositions 2 et 2 bis, l'application $\nabla_2 \circ f_2$ *est homotope à l'identité de* $\mathrm{B} +_{\delta_0} \mathrm{A}$ *au moyen de*

$$\Phi_2 : \mathrm{B} +_{\delta_0} \mathrm{A} \to \mathrm{B} +_{\delta_0} \mathrm{A}$$

défini par

$$\Phi_2(x, y) = (\Phi_1 x + \Phi_1 \delta_0 \Phi_0 y, \Phi_0 y).$$

Démonstration. — On veut vérifier que

$$\nabla_2 \circ f_2 - 1 = d \circ \Phi_2 + \Phi_2 \circ d$$

d désignant la différentielle de $\mathrm{B} +_{\delta_0} \mathrm{A}$, et 1 l'application identique de $\mathrm{B} +_{\delta_0} \mathrm{A}$. Or

$$\begin{aligned} \nabla_2 f_2(x, y) - (x, y) &= \nabla_2(f_1 x + f_1 \delta_0 \Phi_0 y, f_0 y) - (x, y) = \\ &(\nabla_1 f_1 x - x + \nabla_1 f_1 \delta_0 \Phi_0 y + \Phi_1 \delta_0 \nabla_0 f_0 y,\ \nabla_0 f_0 y - y) \end{aligned} \tag{2}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (d\Phi_2 + \Phi_2 d)(x, y) &= d(\Phi_1 x + \Phi_1 \delta_0 \Phi_0 y,\ \Phi_0 y) + \Phi_2(d_{\mathrm{B}} x + \delta_0 y,\ d_{\mathrm{A}} y) = \\ &(d_{\mathrm{B}} \Phi_1 x + d_{\mathrm{B}} \Phi_1 \delta_0 \Phi_0 y + \delta_0 \Phi_0 y,\ d_{\mathrm{A}} \Phi_0 y) + (\Phi_1 d_{\mathrm{B}} x + \Phi_1 \delta_0 y + \Phi_1 \delta_0 \Phi_0 d_{\mathrm{A}} y,\ \Phi_0 d_{\mathrm{A}} y) = \\ &(d_{\mathrm{B}} \Phi_1 x + \Phi_1 d_{\mathrm{B}} x + \delta_0 \Phi_0 y + d_{\mathrm{B}} \Phi_1 \delta_0 \Phi_0 y + \Phi_1 \delta_0 y + \Phi_1 \delta_0 \Phi_0 d_{\mathrm{A}} y,\ d_{\mathrm{A}} \Phi_0 y + \Phi_0 d_{\mathrm{A}} y) \end{aligned} \tag{3}$$

Comparons les relations (2) et (3); pour cela observons que

$$\begin{aligned} \nabla_1 f_1 x - x &= d_{\mathrm{B}} \Phi_1 x + \Phi_1 d_{\mathrm{B}} x \\ \nabla_1 f_1 \delta_0 \Phi_0 y &= \delta_0 \Phi_0 y + d_{\mathrm{B}} \Phi \delta_0 \Phi_0 y + \Phi_1 d_{\mathrm{B}} \delta_0 \Phi_0 y \\ \Phi_1 \delta_0 \nabla_0 f_0 y &= \Phi_1 \delta_0 y + \Phi_1 \delta_0 d_{\mathrm{A}} \Phi_0 y + \Phi_1 \delta_0 \Phi_0 d_{\mathrm{A}} y \\ \nabla_0 f_0 y - y &= d_{\mathrm{A}} \Phi_0 y + \Phi_0 d_{\mathrm{A}} y \\ \Phi_1 d_{\mathrm{B}} \delta_0 \Phi_0 y + \Phi_1 \delta_0 d_{\mathrm{A}} \Phi_0 y &= 0 \end{aligned}$$

D'où on conclut bien que

$$(\nabla_2 \circ f_2 - 1)(x, y) = (d \circ \Phi_2 + \Phi_2 \circ d)(x, y)$$

c.q.f.d.

Dans le cas où ∇_0 et ∇_1 vérifient les conditions

$$f_i \circ \nabla_i = 1 \qquad \text{pour } i = 0, 1,$$

on voudrait avoir la même égalité pour f_2 et Δ_2 ; mais ce n'est pas toujours vrai. Cependant on a la :

Proposition 4. — Sous les hypothèses des propositions 2 et 2 bis, supposons qu'on ait de plus les conditions suivantes :

$$\begin{array}{ll} f_0\circ\nabla_0 = 1_{A'}, & f_1\circ\nabla_1 = 1_B, \\ f_i\circ\Phi_i = 0, & \Phi_i\circ\nabla_i = 0, \\ \Phi_0\circ\Phi_0 = 0, & \Phi_1\circ\Phi_1 = 0, \end{array} \qquad i = 0, 1$$

Alors on a :

$$f_2\circ\nabla_2 = 1, \quad \Phi_2\circ\nabla_2 = 0, \quad f_2\circ\Phi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_2\circ\Phi_2 = 0$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\Phi_2\circ\nabla_2(x, y) &= \Phi_2(\nabla_1 x + \Phi_1\delta_0\nabla_0 y,\ \nabla_0 y) \\
&= (\Phi_1\nabla_1 x + \Phi_1\Phi_1\delta_0\nabla_0 y + \Phi_1\delta_0\Phi_0\nabla_0 y,\ \Phi_0\nabla_0 y) \\
&= 0 \\
f_2\circ\nabla_2(x, y) &= f_2(\nabla_1 x + \Phi_1\delta_0\nabla_0 y,\ \nabla_0 y) \\
&= (f_1\nabla_1 x + f_1\Phi_1\delta_0\nabla_0 y + f_1\delta_0\Phi_0\nabla_0 y, f_0\nabla_0 y) \\
&= (x, y) \\
f_2\circ\Phi_2(x, y) &= f_2(\Phi_1 x + \Phi_1\delta_0\Phi_0 y,\ \Phi_0 y) \\
&= (f_1\Phi_1 x + f_1\Phi_1\delta_0\Phi_0 y + f_1\delta_0\Phi_0\Phi_0 y, f_0\Phi_0 y) \\
&= 0 \\
\Phi_2\circ\Phi_2(x, y) &= \Phi_2(\Phi_1 x + \Phi_1\delta_0\Phi_0 y,\ \Phi_0 y) \\
&= (\Phi_1\Phi_1 x + \Phi_1\Phi_1\delta_0\Phi_0 y + \Phi_1\delta_0\Phi_0\Phi_0 y,\ \Phi_0\Phi_0 y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

c.q.f.d.

CHAPITRE II

LE THÉORÈME D'EILENBERG-ZILBER TORDU

Le théorème d'Eilenberg-Zilber [8] permet de comparer fonctoriellement l'homologie du produit cartésien avec l'homologie du produit tensoriel. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de la généraliser au cas où il s'agit du produit cartésien tordu [4]. Nous ne supposons pas que la condition de Kan soit vérifiée par les ensembles simpliciaux considérés B, F, etc. D'autre part, la notion de produit tordu qu'on considère sera celle de Moore [5], c'est-à-dire que la fonction tordante

$$\tau : B \to G$$

prend ses valeurs dans un monoïde simplicial G avec unité qui opère sur la fibre F du produit tordu

$$F \times_{\tau} B.$$

Un anneau principal Λ est donné une fois pour toutes comme anneau des coefficients. Désignons par

$$C(B)$$

le module Λ-libre ayant pour base l'ensemble simplicial B. Il porte une structure de module simplicial, donc aussi de m.d.g. [6]. On notera

$$C^N(B)$$

le module normalisé qui porte une structure de m.d.g. D'autre part, on utilise les mêmes notations qu'Eilenberg-Maclane dans « On the groups $H(\pi, n)$ » [7] : pour tout opérateur

$$M = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_l}$$

opérant sur les éléments de degré n, on désigne par M′ l'opérateur

$$M' = s_{i_1+1} \dots s_{i_k+1} \partial_{j_1+1} \dots \partial_{j_l+1}$$

opérant sur les éléments de degré $n+1$. On note h le composé $\nabla \circ f$:

$$h_n = \nabla_n \circ f_n$$

Rappelons que les morphismes ∇, f et Φ sont définis sur les modules non normalisés; par passage au quotient, ils définissent des morphismes (désignés par les mêmes lettres) sur les modules normalisés. Par exemple, la formule récurrente qui définit Φ_n (dans le module non normalisé) est celle-ci :

$$\Phi_0 = 0$$
$$\Phi_n = -(\Phi_{n-1})' + (h_n)' \circ s_0.$$

Enfin, dans un module simplicial, la notion

$$\alpha \equiv \beta$$

signifiera que $\alpha - \beta$ est dégénéré.

§ 1. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

Rappelons qu'Eilenberg et Zilber construisent des morphismes de foncteurs

$$\nabla : C^N(F) \otimes C^N(B) \to C^N(F \times B)$$

$$f : C^N(F \times B) \to C^N(F) \otimes C^N(B)$$

$$\Phi : C^N(F \times B) \to C^N(F \times B)$$

jouissant des propriétés qu'on va énoncer. En prenant la différentielle totale classique

$$d = d_F + d_B$$

sur le produit tensoriel (1), alors ∇ et f sont des morphismes de m.d.g. et

$$f \circ \nabla = 1, \quad f \circ \Phi = 0, \quad \Phi \circ \nabla = 0,$$

$$\nabla \circ f - 1 = d \circ \Phi + \Phi \circ d;$$

en outre, on va démontrer que

$$\Phi \circ \Phi = 0$$

ou plus précisément

$$\Phi_{n+1} \Phi_n = 0 \qquad n \geqslant 0$$

En effet, ceci est vrai pour $n = 0$ puisque $\Phi_0 = 0$. Supposons qu'on ait déjà démontré le fait pour $n \geqslant 0$, et montrons-le pour $n + 1$. Remarquons d'abord qu'on a

$$s_0 \circ \Phi_n = \Phi'_n \circ s_0$$

puisque Φ_n ne fait pas intervenir ∂_0. Alors on a

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1} \circ \Phi_n &= (-\Phi'_n + h'_{n+1} \circ s_0) \circ \Phi_n \\ &= \Phi'_n \circ \Phi'_{n-1} - \Phi'_n \circ h'_n \circ s_0 + h'_{n+1} \circ \Phi'_n \circ s_0 \\ &= (\Phi_n \circ \Phi_{n-1})' - (\Phi_n \circ h_n)' \circ s_0 + (h_{n+1} \circ \Phi_n)' \circ s_0 \\ &\equiv 0.\end{aligned}$$

Considérons maintenant la catégorie des produits cartésiens tordus : un morphisme de cette catégorie est défini par la donnée de trois morphismes simpliciaux

$$\varphi_B : B \to B'$$

$$\varphi_F : F \to F'$$

$$\varphi_G : G \to G'$$

(1) Par abus de langage, d_F désigne $d_F \otimes 1$ et d_B désigne $1 \otimes d_B$.

tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi_B} & B' \\ \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau'} \\ G & \xrightarrow[\varphi_G]{} & G' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F\times G & \longrightarrow & F \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_F\times\varphi_G} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_F} \\ F'\times G' & \longrightarrow & F' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_G\times\varphi_G} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_G} \\ G'\times G' & \longrightarrow & G' \end{array}$$

soient commutatifs, alors

$$\varphi_F\times\varphi_B : F\times_\tau B \to F'\times_{\tau'} B'$$

est une application simpliciale compatible avec la structure fibrée du produit tordu.

Or, la notion de produit cartésien est un cas particulier de celle de produit cartésien tordu : elle correspond au cas où la fonction tordante est triviale. Donc, il est naturel de généraliser le résultat d'Eilenberg-Zilber pour la catégorie des produits cartésiens tordus. En fait, on démontrera dans le § 2 le résultat suivant :

Désignons par d^τ la différentielle du m.d.g.

$$C^N(F\times_\tau B),$$

et par d celle de $C^N(F\times B)$, ainsi que la différentielle totale de $C^N(F)\otimes C^N(B)$. Considérons les morphismes

$$\begin{aligned} \nabla^\tau &: C^N(F)\otimes C^N(B) \to C^N(F\times_\tau B) \\ f^\tau &: C^N(F\times_\tau B) \longrightarrow C^N(F)\otimes C^N(B) \\ \Phi^\tau &: C^N(F\times_\tau B) \longrightarrow C^N(F\times_\tau B) \\ d^\tau &: C^N(F)\otimes C^N(B) \to C^N(F)\otimes C^N(B) \end{aligned}$$

définis par les formules suivantes :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \nabla^\tau &= [1+\Phi\circ(d^\tau-d)+\Phi\circ(d^\tau-d)\circ\Phi\circ(d^\tau-d)+\ldots]\circ\nabla \\ f^\tau &= f\circ[1+(d^\tau-d)\circ\Phi+(d^\tau-d)\circ\Phi\circ(d^\tau-d)\circ\Phi+\ldots] \\ \Phi^\tau &= [1+\Phi\circ(d^\tau-d)+\Phi\circ(d^\tau-d)\circ\Phi\circ(d^\tau-d)+\ldots]\circ\Phi \\ d^\tau-d &= f\circ[(d^\tau-d)+(d^\tau-d)\circ\Phi\circ(d^\tau-d)+(d^\tau-d)\circ\Phi\circ(d^\tau-d)\circ\Phi(d^\tau-d)+\ldots]\circ\nabla \\ &= f\circ(d^\tau-d)\circ\nabla^\tau = f^\tau\circ(d^\tau-d)\circ\nabla, \end{aligned}\right.$$

où Φ, ∇, f sont les morphismes d'Eilenberg-Zilber pour les modules simpliciaux $C^N(F\times B)$, $C^N(F)\otimes C^N(B)$. Si la fonction tordante τ est triviale, on a $d^\tau=d$ dans $C^N(F\times B)$, et par suite ∇^τ, f^τ, Φ^τ et d^τ se réduisent respectivement à ∇, f, Φ et d. Alors on a

Théorème 1. — Pour tout produit cartésien tordu $F\times_\tau B$, *le morphisme fonctoriellement associé*

$$d^\tau : C^N(F)\otimes C^N(B) \to C^N(F)\otimes C^N(B)$$

est une différentielle (*autrement dit, on a*

$$(d^\tau)^2=0);$$

on désignera le m.d.g. *ainsi obtenu par*

$$C^N(F)\otimes_\tau C^N(B).$$

De plus, soit

$$(\varphi_F, \varphi_B, \varphi_G) : F\times_\tau B \to F'\times_{\tau'} B'$$

un morphisme de produit tordu, alors le morphisme

$$C^N(\varphi_F)\otimes C^N(\varphi_B) : C^N(F)\otimes_\tau C^N(B) \to C^N(F')\otimes_{\tau'} C^N(B')$$

est un morphisme de m.d.g. (*on obtient donc un foncteur de la catégorie des produits tordus dans la catégorie des* m.d.g.). *Enfin, les morphismes*

$$\nabla^\tau : C^N(F)\otimes_\tau C^N(B) \to C^N(F\times_\tau B)$$
$$f^\tau : C^N(F\times_\tau B) \to C^N(F)\otimes_\tau C^N(B)$$

sont des morphismes de m.d.g. *(donc ils définissent des morphismes de foncteurs), tels que*

$$(2) \qquad \begin{cases} f^\tau\circ\nabla^\tau = 1, \quad f^\tau\circ\Phi^\tau = 0, \quad \Phi^\tau\circ\nabla^\tau = 0 \\ \nabla^\tau\circ f^\tau - 1 = d^\tau\circ\Phi^\tau + \Phi^\tau\circ d^\tau \\ \Phi^\tau\circ\Phi^\tau = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que ∇^τ *et* f^τ *induisent des isomorphismes des groupes d'homologie*

$$H_*(C^N(F)\otimes_\tau C^N(B)) \approx H_*(C^N(F\times_\tau B)),$$

ce dernier étant le groupe d'homologie du fibré.

Avant d'énoncer le théorème 2, remarquons que la fonction tordante τ qui détermine l'opérateur ∂_0 du produit tordu $F\times_\tau B$, est égale à l'application composée :

$$B \xrightarrow{\rho} G\times_\tau B \xrightarrow{\partial_0} G\times_\tau B \xrightarrow{p_G} G$$

où $\rho(x) = (e, x)$, $p_G(g, x) = g$. Alors une situation analogue pour $C^N(F)\otimes_\tau C^N(B)$ est encore valable. Plus précisément, posons la définition suivante :

Définition. — On appelle « Cochaîne fondamentale » *définie par la fonction tordante* τ *le morphisme composé*

$$\psi^\tau : C^N(B) \xrightarrow{\rho} C^N(G)\otimes_\tau C^N(B) \xrightarrow{d^\tau - d} C^N(G)\otimes_\tau C^N(B) \xrightarrow{p} C^N(G)$$

où $\rho(x) = e_0\otimes x$ (e_0 *désignant l'élément neutre de* G, *considéré comme* 0-*chaîne*), $p(y\otimes x) = y(\varepsilon x)$, ε *désignant l'augmentation de* $C^N(B)$.

Observons que ψ^τ est de degré -1. De plus, il est clair que $pd\rho = 0$, donc ψ^τ est aussi égal à $pd^\tau\rho$.

Théorème 2. — La différentielle d^τ *de* $C^N(F)\otimes_\tau C^N(B)$ *vérifie la relation :*

$$(d^\tau - d)x = \psi^\tau \frown x$$

où le cap-produit $\psi^\tau\frown$ *est le morphisme composé*

$$C^N(F)\otimes C^N(B) \xrightarrow{1_F\otimes\Delta} C^N(F)\otimes C^N(B)\otimes C^N(B) \xrightarrow{1\otimes\psi^\tau\otimes 1}$$
$$\to C^N(F)\otimes C^N(G)\otimes C^N(B) \xrightarrow{*\otimes 1_B} C^N(F)\otimes C^N(B);$$

Δ *désigne l'application diagonale de la coalgèbre* $C^N(B)$, *et* $*$ *le morphisme*

$$C^N(F)\otimes C^N(G) \xrightarrow{*} C^N(F)$$

induit par l'opération de G *sur* F.

En particulier, appliquant le théorème de Barratt-Gugenheim-Moore [2], on obtient un résultat de Brown [3] :

Corollaire (Théorème de Brown). — *Pour tout fibré* E *de base* B *connexe, fibre* F *et groupe structural* G, *il existe une cochaîne de Brown* $\psi^B : C^N(B) \to C^N(G)$ *de degré* -1, *telle que le morphisme de* $C^N(F)\otimes C^N(B)$ *défini par*

$$d_F + d_B + \psi^B \frown$$

soit une différentielle, et que l'homologie de ce m.d.g. *soit précisément l'homologie du fibré* E.

Remarque. — La cochaîne introduite ici, n'est pas tout à fait la même que celle de Brown. En effet, d'après Gugenheim [11], les inverses des éléments de G interviennent dans la construction de Brown, mais pas dans la nôtre. Cependant, notre cochaîne fondamentale associée à une fonction tordante τ vérifie aussi la formule de Brown

$$d\circ\psi^\tau + \psi^\tau\circ d + \psi^\tau \smile \psi^\tau = 0$$

car ceci est une condition nécessaire (et suffisante) pour que d^τ soit une différentielle, c'est-à-dire $(d^\tau)^2 = 0$.

§ 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Tout d'abord, on va écrire le m.d.g.

$$C^N(F\times_\tau B)$$

comme une somme tordue à l'aide de la filtration du n^e squelette (1) B^n de B, telle que chaque facteur de la somme ne dépende pas de la fonction tordante τ. Pour cela, considérons d'abord la suite exacte de m.d.g. quotients

$$(1) \qquad 0\to C(F\times_\tau B^p)/C(F\times_\tau B^{p-1}) \to C(F\times_\tau B^n)/C(F\times_\tau B^{p-1}) \to C(F\times_\tau B^n)/C(F\times_\tau B^p)\to 0$$

où $p\leqslant n$, induite par les injections canoniques

$$C(F\times_\tau B^m) \to C(F\times_\tau B^n) \qquad m\leqslant n,$$

où on utilise le même τ pour désigner la fonction tordante de B^n dans G obtenue par la restriction de τ à B^n. Puisque le foncteur de normalisation est exact, on déduit de (1) la suite exacte de m.d.g.,

$$(1\ bis) \qquad 0\to \mathscr{F}_p \to \mathscr{M}_{n,p} \xrightarrow{p_{n,p}} \mathscr{M}_{n,p+1} \to 0$$

---

(1) Rappelons que B^n est le sous-ensemble simplicial de B engendré par B_n, ensemble des simplexes de dimension n de B.

où on désigne par

$$\mathscr{M}_{n,p} = \mathrm{C^N}(\mathrm{F} \times_\tau \mathrm{B}^n)/\mathrm{C^N}(\mathrm{F} \times_\tau \mathrm{B}^{p-1}) \qquad p \leqslant n$$
$$\mathscr{F}_n = \mathscr{M}_{n,n}$$

les m.d.g. quotients ainsi définis.

La suite exacte (1 *bis*) admet un relèvement fonctoriel qu'on désigne par $\rho_{n,p+1}$

$$\rho_{n,p+1} : \mathscr{M}_{n,p+1} \to \mathscr{M}_{n,p}, \quad p_{n,p} \circ \rho_{n,p+1} = 1_{\mathscr{M}_{n,p+1}}.$$

En effet, il suffit évidemment de chercher un morphisme, pour tout ensemble simplicial B

$$\rho : \mathrm{C(B)} \to \mathrm{C(B)}$$

tel que :

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_{i+1} \circ \rho = \rho \circ \partial_{i+1} \qquad s_i \circ \rho = \rho \circ s_i & i \geqslant 0 \\ \text{la restriction de } \rho \text{ à } \mathrm{C(B}^p) \text{ est nulle,} \\ \text{le composé } \mathrm{C(B)} \xrightarrow{p} \mathrm{C(B)} \to \mathrm{C(B)/C(B}^p) \text{ soit la projection naturelle} \end{cases}$$

Lemme 1. — Il existe un morphisme qui vérifie (2) *et un seul ; de plus, il est fonctoriel.*

Démonstration. — D'après Dold [6], il y a une correspondance bijective entre les morphismes de degré zéro

$$\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$

de deux modules simpliciaux compatibles avec les ∂_{i+1} et s_i, et les applications linéaires de degré zéro

$$\mathrm{N}(\rho) : \mathrm{N(A)} \to \mathrm{N(B)}$$

où N(A) est le sous-module de A défini par

$$\mathrm{N(A)}_n = \bigcap_{i \geqslant 0} \mathrm{Ker}\, \partial_{i+1} ;$$

cette correspondance associe à chaque ρ sa restriction à N(A). Donc, un ρ qui satisfait à (2) doit satisfaire à

$$\mathrm{N}(\rho)_i = 0 \qquad i \leqslant p$$
$$\mathrm{N}(\rho)_i = 1 : \mathrm{N(C(B))}_i \to \mathrm{N(C(B))}_i \qquad i > p$$

Ceci détermine $\mathrm{N}(\rho)$, donc ρ. Que ρ soit fonctoriel est évident, et le lemme 1 est démontré.

Ceci étant, définissons le cocycle

$$\delta_{n,p+1} = d\rho_{n,p+1} - \rho_{n,p+1} d : \mathscr{M}_{n,p+1} \to \mathscr{F}_p.$$

On a donc (cf. proposition 1, § 3, chapitre 1)

$$\mathscr{M}_{n,p} = \mathscr{F}_p + \delta_{n,p+1} \mathscr{M}_{n,p+1},$$

d'où l'identification de m.d.g.

$$\mathrm{C^N}(\mathrm{F} \times_\tau \mathrm{B}) = \lim_n \mathscr{M}_{n,0} = \lim_n (\mathscr{F}_0 + \delta_{n,1}(\mathscr{F}_1 + \delta_{n,2}(\ldots + \delta_{n,n} \mathscr{F}_n) \ldots))$$

où le système inductif est défini par les injections évidentes. On désigne dans la suite par

$$\pi_p : \mathrm{C^N}(\mathrm{F} \times_\tau \mathrm{B}) = \bigoplus_i \mathscr{F}_i \to \mathscr{F}_p \to \bigoplus_i \mathscr{F}_i = \mathrm{C^N}(\mathrm{F} \times_\tau \mathrm{B})$$

le projecteur ainsi défini; alors on a évidemment

(3) $$\delta_{n,p+1}(x) = \pi_p \circ d^\tau(x)$$

et les éléments de l'image de π_p sont les sommes d'éléments de la forme

(3 *bis*) $$\alpha \otimes s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \beta$$

où la suite $(i_k, \dots, i_1)$ est strictement croissante, éventuellement vide, et

$$\beta \in C_p(B), \qquad \partial_{i+1}\beta = 0.$$

Lemme 2. — *$d^\tau - d$ applique l'image de π_n dans la somme des images des π_p $(p<n)$.*

Démonstration. — On applique $d^\tau - d$ à un élément de la forme (3 *bis*); si $i_k = 0$, $d^\tau - d$ s'annule. Sinon, soit $\beta = \sum_m \beta_m$, $\beta_m \in C_n(B)$; alors

$$\begin{aligned} & d^\tau(\alpha \otimes s_{i_1} \dots s_{i_k} \beta_m) - d(\alpha \otimes s_{i_1} \dots s_{i_k} \beta_m) \\ & = (\partial_0 \alpha * (s_{i_1 - 1} \dots s_{i_k - 1} \tau\beta_m - 1)) \otimes s_{i_1 - 1} \dots s_{i_k - 1} \partial_0 \beta_m \end{aligned}$$

est bien de filtration $\leqslant n-1$, puisque $\partial_0 \beta_m \in C_{n-1}(B)$.

c.q.f.d.

En particulier, le lemme 2 entraîne que $d^\tau - d$ est nulle sur $\mathscr{F}_n$, autrement dit on a l'identification des m.d.g.

(4) $$C^N(F \times_\tau B^n)/C^N(F \times_\tau B^{n-1}) = \mathscr{F}_n = C^N(F \times B^n)/C^N(F \times B^{n-1}).$$

Désignons maintenant dans le produit tensoriel

$$C^N(F) \otimes C^N(B) = \bigoplus_n C^N(F) \otimes C^N_n(B)$$

par

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{M}}_{n,p} &= \sum_{p \leqslant i \leqslant n} C^N(F) \otimes C^N_i(B) = \sum_{i \leqslant n} C^N(F) \otimes C^N_i(B) \Big/ \sum_{j \leqslant p-1} C^N(F) \otimes C^N_j(B) \\ \overline{\mathscr{F}}_n &= \overline{\mathscr{M}}_{n,n} = C^N(F) \otimes C^N_n(B), \end{aligned}$$

et par

$$\pi_n : C^N(F) \otimes C^N(B) \to C^N(F) \otimes C^N_n(B) \to C^N(F) \otimes C^N(B)$$

le projecteur ainsi défini. Fixons n, et posons

$$\begin{aligned} \nabla^\tau_{n,n} &= \pi_n \nabla \pi_n : C^N(F) \otimes C^N(B) \to C^N(F \times_\tau B) \\ f^\tau_{n,n} &= \pi_n f \pi_n : C^N(F \times_\tau B) \to C^N(F) \otimes C^N(B) \\ \Phi^\tau_{n,n} &= \pi_n \Phi \pi_n : C^N(F \times_\tau B) \to C^N(F \times_\tau B) \\ d^\tau_{n,n} &= d_F \otimes 1 \quad \text{sur} \quad C^N(F) \otimes C^N_n(B) \end{aligned}$$

où ∇, f, Φ sont les morphismes d'Eilenberg-Zilber appliquant sur $C^N(F \times B)$. Ensuite, définissons (par récurrence descendante sur $p \leqslant n$ pour le n donné) les morphismes

$$\begin{aligned} \nabla^\tau_{n,p} &= \nabla^\tau_{p,p} + (1 + \Phi \circ \pi_p \circ d^\tau) \circ \nabla^\tau_{n,p+1} : C^N(F) \otimes C^N(B) \to C^N(F \times_\tau B) \\ f^\tau_{n,p} &= f^\tau_{p,p} + f^\tau_{n,p+1} + \overline{f} \circ \pi_p \circ d^\tau \circ \Phi^\tau_{n,p+1} : C^N(F \times_\tau B) \to C^N(F) \otimes C^N(B) \\ \Phi^\tau_{n,p} &= \Phi^\tau_{p,p} + (1 + \Phi \circ \pi_p \circ d^\tau) \circ \Phi^\tau_{n,p+1} : C^N(F \times_\tau B) \to C^N(F \times_\tau B) \\ d^\tau_{n,p} &= d^\tau_{p,p} + d^\tau_{n,p+1} + \overline{f} \circ \pi_p \circ d^\tau \circ \nabla^\tau_{n,p+1} : C^N(F) \otimes C^N(B) \to C^N(F) \otimes C^N(B), \end{aligned}$$

où $\overline{f} = \sum_i \pi_i f \pi_i$

et on va démontrer qu'ils induisent des morphismes (qu'on désigne par les mêmes lettres)

$$\nabla^{\tau}_{n,p} : \overline{\mathcal{M}}_{n,p} \to \mathcal{M}_{n,p}$$
$$f^{\tau}_{n,p} : \mathcal{M}_{n,p} \to \overline{\mathcal{M}}_{n,p}$$
$$\Phi^{\tau}_{n,p} : \mathcal{M}_{n,p} \to \mathcal{M}_{n,p}$$
$$d^{\tau}_{n,p} : \overline{\mathcal{M}}_{n,p} \to \overline{\mathcal{M}}_{n,p}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

(5) $\begin{cases} d^{\tau}_{n,p} \text{ est une différentielle de } \overline{\mathcal{M}}_{n,p} \\ \nabla^{\tau}_{n,p} \text{ et } f^{\tau}_{n,p} \text{ sont des morphismes de m.d.g. } (\overline{\mathcal{M}}_{n,p} \text{ muni de la différentielle } d^{\tau}_{n,p} \text{ et } \mathcal{M}_{n,p} \\ \qquad \text{de celle obtenue par passage au quotient de } d^{\tau}, \text{ qu'on désigne encore par } d^{\tau}) \\ f^{\tau}_{n,p} \circ \nabla^{\tau}_{n,p} = 1, \qquad \Phi^{\tau}_{n,p} \circ \nabla^{\tau}_{n,p} = 0, \qquad f^{\tau}_{n,p} \circ \Phi^{\tau}_{n,p} = 0 \\ \nabla^{\tau}_{n,p} \circ f^{\tau}_{n,p} - 1 = d^{\tau} \circ \Phi^{\tau}_{n,p} + \Phi^{\tau}_{n,p} \circ d^{\tau}, \qquad \Phi^{\tau}_{n,p} \circ \Phi^{\tau}_{n,p} = 0. \end{cases}$

En effet, pour $p=n$, ceci n'est autre que la condition des morphismes d'Eilenberg-Zilber appliquant sur les modules simpliciaux

$$C(F), \quad C(B^n, B^{n-1})$$

d'après (4). Supposons que le fait ait été démontré pour $p+1 \leqslant n$, et considérons le cas p. Pour cela, considérons dans les propositions 2 et 2 *bis* du § 3 chapitre 1, les substitutions que voici :

$$\begin{array}{ll} A \to \mathcal{M}_{n,p+1} & A' \to \overline{\mathcal{M}}_{n,p+1} \\ B \to \mathcal{F}_p & B' \to \overline{\mathcal{F}}_p \\ \delta_0 \to \delta^{\tau}_{n,p+1} & \Phi_0 \to \Phi^{\tau}_{n,p+1} \\ \nabla_0 \to \nabla^{\tau}_{n,p+1} & f_0 \to f^{\tau}_{n,p+1} \end{array}$$

$f_1 \to f$ des modules simpliciaux $C(B^p, B^{p-1})$ et $C(F)$
$\nabla_1 \to \nabla$ des modules simpliciaux $C(B^p, B^{p-1})$ et $C(F)$
$\Phi_1 \to \Phi$ des modules simpliciaux $C(B^p, B^{p-1})$ et $C(F)$

Alors les lemmes 4 et 5 du § 3 chapitre 1 et l'hypothèse de récurrence entraînent que le morphisme

$$\begin{aligned} \hat{d}(x+y) &= d_F x + f_1 \circ \delta_0 \circ \nabla_0 y + d^{\tau}_{n,p+1} y \\ &= d_F x + f_1 \circ \delta^{\tau}_{n,p+1} \circ \nabla^{\tau}_{n,p+1} y + d^{\tau}_{n,p+1} y \qquad \text{où } x \in \overline{\mathcal{F}}_p, y \in \mathcal{M}_{n,p+1} \end{aligned}$$

est une différentielle. Ensuite, les propositions 2 et 3 du § 3, chapitre 1, montrent que les morphismes

$$\hat{\nabla}(x+y) = \nabla x + \Phi \circ \delta^{\tau}_{n,p+1} \circ \nabla^{\tau}_{n,p+1} y + \nabla^{\tau}_{n,p+1} y \qquad \text{où } x \in \overline{\mathcal{F}}_p, y \in \overline{\mathcal{M}}_{n,p+1}$$
$$\hat{f}(x+y) = f_1 x + f_1 \circ \delta^{\tau}_{n,p+1} \circ \Phi^{\tau}_{n,p+1} y + f^{\tau}_{n,p+1} y \qquad \text{où } x \in \mathcal{F}_p, y \in \mathcal{M}_{n,p+1}$$

sont des morphismes de m.d.g., et que $\hat{\nabla} \circ \hat{f}$ est homotope à l'identité au moyen de

$$\hat{\Phi}(x+y) = \Phi_1 x + \Phi_1 \circ \delta^{\tau}_{n,p+1} \circ \Phi^{\tau}_{n,p+1} y + \Phi^{\tau}_{n,p+1} y \qquad \text{où } x \in \mathcal{F}_p, y \in \mathcal{M}_{n,p+1}.$$

Enfin, la proposition 4 du § 3, chapitre 1, montre que les relations entre les morphismes $\hat{f}$, $\hat{\nabla}$ et $\hat{\Phi}$ sont encore valables. D'autre part, (3) entraîne

$$\begin{aligned}\hat{d}(x+y) &= d_{\mathrm{F}}x + f_1 \circ \pi_p \circ d^\tau \circ \nabla^\tau_{n,p+1} y + d^\tau_{n,p+1} y \\ &= d^\tau_{p,p} x + \pi_p \circ f \circ \pi_p \circ d^\tau \circ \nabla^\tau_{n,p+1} y + d^\tau_{n,p+1} y \\ &= (d^\tau_{p,p} + \bar{f} \circ \pi_p \circ d^\tau \circ \nabla^\tau_{n,p+1} + d^\tau_{n,p+1})(x+y) \\ &= d^\tau_{n,p}(x+y)\end{aligned}$$

puisque $f_1 = \pi_p \circ f \circ \pi_p$ et que

$$\bar{f} \circ \pi_p = \sum_i \pi_i \circ f \circ \pi_i \circ \pi_p = \pi_p \circ f \circ \pi_p$$

Par la même façon, on démontre

$$\hat{\nabla} = \nabla^\tau_{n,p}, \qquad \hat{f} = f^\tau_{n,p}, \qquad \hat{\Phi} = \Phi^\tau_{n,p},$$

et ceci termine la récurrence, donc aussi la démonstration de (5).

En particulier, si $p = 0$, on obtient la différentielle $d^\tau_{n,0}$, d'où le m.d.g. $\bar{\mathscr{M}}_{n,0}$, ainsi que les morphismes de m.d.g. $f^\tau_{n,0}$, $\nabla^\tau_{n,0}$ et $\Phi^\tau_{n,0}$. D'autre part, il est facile de voir que le m.d.g. $\bar{\mathscr{M}}_{n,0}$ devient un sous-module différentiel gradué de $\bar{\mathscr{M}}_{n+1,0}$ au moyen de l'injection évidente

$$j : \bar{\mathscr{M}}_{n,0} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \bar{\mathscr{F}}_i \to \sum_{0 \leqslant i \leqslant n+1} \bar{\mathscr{F}}_i = \bar{\mathscr{M}}_{n+1,0}.$$

De même, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \bar{\mathscr{M}}_{n,0} \arrow[r, "\nabla^\tau_{n,0}"] \arrow[d, "j"'] & \mathscr{M}_{n,0} \arrow[d] \\ \bar{\mathscr{M}}_{n+1,0} \arrow[r, "\nabla^\tau_{n+1,0}"] & \mathscr{M}_{n+1,0} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Ceci démontre que le morphisme défini par

$$\tilde{d}^\tau \circ \pi_n = d^\tau_{n,0} \circ \pi_n$$

est une différentielle de

$$\mathrm{C^N(F)} \otimes \mathrm{C^N(B)} = \sum_n \bar{\mathscr{F}}_n;$$

et que les morphismes $\tilde{\nabla}^\tau$, $\tilde{f}^\tau$ et $\tilde{\Phi}^\tau$ définis par

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}^\tau \circ \pi_n &= \nabla^\tau_{n,0} \circ \pi_n \\ \tilde{f}^\tau \circ \pi_n &= f^\tau_{n,0} \circ \pi_n \\ \tilde{\Phi}^\tau \circ \pi_n &= \Phi^\tau_{n,0} \circ \pi_n\end{aligned}$$

sont des morphismes de m.d.g. vérifiant les mêmes conditions (5). Pour terminer la démonstration du théorème 1, il reste donc à montrer

$$\tag{6} \begin{aligned} \widetilde{\nabla}^\tau &= \nabla^\tau, & \widetilde{\Phi}^\tau &= \Phi^\tau \\ \widetilde{f}^\tau &= f^\tau, & \widetilde{d}^\tau &= d^\tau \end{aligned}$$

Établissons d'abord les formules suivantes

$$\tag{7} \pi_i \circ f \circ \pi_n = \pi_i \circ f \circ \pi_i \circ d \circ \Phi \circ \pi_n \qquad i \neq n$$

$$\tag{8} \Phi \circ d^\tau \circ \nabla = \Phi \circ (d^\tau - d) \circ \nabla$$

$$\tag{9} \Phi \circ \bar{d}^\tau \circ \Phi = \Phi \circ (d^\tau - d) \circ \Phi$$

où d est la différentielle de $C^N(F \times B)$, d^τ celle de $C^N(F \times_\tau B)$ et $\bar{d}^\tau$ est définie par la relation

$$\bar{d}^\tau \circ \pi_n = \sum_{i<n} \pi_i \circ d^\tau \circ \pi_n \qquad \text{pour tout } n.$$

En multipliant l'identité

$$d \circ \Phi + \Phi \circ d = \nabla \circ f - 1$$

à gauche par $\pi_i \circ f \circ \pi_i$ et à droite par π_n, on a alors (car $i \neq n$)

$$\pi_i \circ f \circ \pi_i \circ d \circ \Phi \circ \pi_n + \pi_i \circ f \circ \pi_i \circ \Phi \circ d \circ \pi_n = \pi_i \circ f \circ \pi_i \circ \nabla \circ f \circ \pi_n$$

Puisque π commute avec ∇ et Φ, et $f \circ \Phi = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \pi_i \circ f \circ \pi_i \circ d \circ \Phi \circ \pi_n &= \pi_i \circ f \circ \pi_i \circ \nabla \circ f \circ \pi_n \\ &= \pi_i \circ f \circ \nabla \circ \pi_i \circ f \circ \pi_n \\ &= \pi_i \circ f \circ \pi_n, \end{aligned}$$

car $f \circ \nabla = 1$. Pour vérifier (8), remarquons d'abord que

$$\sum_{i<n} \pi_i \circ (d^\tau - d) \circ \pi_n = (d^\tau - d) \circ \pi_n$$

parce que $d^\tau - d$ diminue la filtration au moins un degré, d'où on a

$$\tag{10} \bar{d}^\tau \circ \pi_n = \sum_{i<n} \pi_i \circ d^\tau \circ \pi_n = \sum_{i<n} \pi_i \circ d \circ \pi_n + (d^\tau - d) \circ \pi_n$$

En multipliant (10) à gauche par Φ et à droite par ∇, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi \circ \bar{d}^\tau \circ \pi_n \circ \nabla &= \Phi \circ \bar{d}^\tau \circ \nabla \circ \pi_n \\ &= \sum_{i<n} \pi_i \circ \Phi \circ d \circ \nabla \circ \pi_n + \Phi \circ (d^\tau - d) \circ \nabla \circ \pi_n \\ &= \Phi \circ (d^\tau - d) \circ \nabla \circ \pi_n \end{aligned}$$

puisque ∇ commute avec la différentielle d et que $\Phi \circ \nabla = 0$. Comme ceci est vrai pour tout n, (8) est démontré. Enfin, l'égalité

$$d \circ \Phi + \Phi \circ d = \nabla \circ f - 1$$

entraîne

$$\Phi \circ d \circ \Phi + \Phi \circ \Phi \circ d = \Phi \circ \nabla \circ f - \Phi$$

d'où

$$\Phi \circ d \circ \Phi = -\Phi$$

puisque $\Phi \circ \Phi = 0$. Donc, (10) entraîne :

$$\begin{aligned}\Phi \circ \bar{d}^{\tau} \circ \Phi \circ \pi_n = \Phi \circ \bar{d}^{\tau} \circ \pi_n \circ \Phi &= \sum_{i<n} \Phi \circ \pi_i \circ d \circ \pi_n \circ \Phi + \Phi \circ (d^{\tau} - d) \circ \pi_n \circ \Phi \\ &= \sum_{i<n} -\pi_i \circ \Phi \circ \pi_n + \Phi \circ (d^{\tau} - d) \circ \Phi \circ \pi_n \\ &= \Phi \circ (d^{\tau} - d) \circ \Phi \circ \pi_n,\end{aligned}$$

d'où s'achève la démonstration de (9).

Ceci étant, revenons à la démonstration de (6). Remarquons d'abord qu'il suffit de vérifier

$$\widetilde{\nabla}^{\tau} \circ \pi_n = \nabla^{\tau} \circ \pi_n \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

D'après la formule récurrente (5) de la définition de $\nabla^{\tau}_{n,p}$, on déduit facilement

$$\begin{aligned}\nabla^{\tau} \circ \pi_n &= \nabla^{\tau}_{n,0} \circ \pi_n \\ &= (1 + \sum_{p<n} \Phi \circ \pi_p \circ d^{\tau} + \sum_{p<q<n} \Phi \circ \pi_p \circ d^{\tau} \circ \Phi \circ \pi_q \circ d^{\tau} + \\ &\qquad \sum_{p<q<r<n} \Phi \circ \pi_p \circ d^{\tau} \circ \Phi \circ \pi_q \circ d^{\tau} \circ \Phi \circ \pi_r \circ d^{\tau} + \ldots) \circ \pi_n \circ \nabla \circ \pi_n,\end{aligned}$$

et la définition du $\bar{d}^{\tau}$ entraîne

$$= (1 + \Phi \circ \bar{d}^{\tau} + \Phi \circ \bar{d}^{\tau} \circ \Phi \circ \bar{d}^{\tau} + \Phi \circ \bar{d}^{\tau} \circ \Phi \circ \bar{d}^{\tau} \circ \Phi \circ \bar{d}^{\tau} + \ldots) \circ \nabla \circ \pi_n$$

Alors, (7) et (8) entraînent

$$= (1 + \Phi \circ (d^{\tau} - d) \circ \nabla + \Phi \circ (d^{\tau} - d) \circ \Phi (d^{\tau} - d) \circ \nabla + \ldots) \circ \pi_n,$$

d'où on obtient

$$\widetilde{\nabla}^{\tau} = \nabla^{\tau}.$$

La démonstration du fait que $\widetilde{\Phi}^{\tau} = \Phi^{\tau}$ est exactement la même, montrons donc

$$\widetilde{f}^{\tau} = f^{\tau}.$$

Tout d'abord, la formule récurrente (5) entraîne qu'on a

$$\begin{aligned}\widetilde{f}^{\tau} \circ \pi_n &= f^{\tau}_{n,0} \circ \pi_n \\ &= f^{\tau}_{n,n} + \bar{f} \circ [\pi_{n-1} \circ d^{\tau} \circ \Phi + \pi_{n-2} \circ d^{\tau} \circ (1 + \Phi \circ \pi_{n-1} \circ d^{\tau}) + \ldots + \\ &\qquad \pi_0 \circ d^{\tau} \circ (1 + \Phi \circ \pi_1 \circ d^{\tau})(1 + \Phi \circ \pi_2 \circ d^{\tau}) \ldots (1 + \Phi \circ \pi_{n-1} \circ d^{\tau})] \circ \Phi \circ \pi_n\end{aligned}$$

Arrangeons les termes en suivant π, alors on obtient

$$\widetilde{f}^{\tau} \circ \pi_n = \{\bar{f} + \bar{f} \circ \bar{d}^{\tau} \circ [\Phi + \Phi \circ \bar{d}^{\tau} \circ \Phi + \Phi \circ \bar{d}^{\tau} \circ \Phi \circ \bar{d}^{\tau} \circ \Phi + \ldots]\} \circ \pi_n,$$

et (9) entraîne

$$\begin{aligned}&= \{\bar{f} + \bar{f} \circ \bar{d}^{\tau} \circ [\Phi + \Phi \circ (d^{\tau} - d) \circ \Phi + \Phi \circ (d^{\tau} - d) \circ \Phi \circ (d^{\tau} - d) \circ \Phi + \ldots]\} \circ \pi_n \\ &= \{\bar{f} + \bar{f} \circ \bar{d}^{\tau} \circ \Phi \circ [1 + (d^{\tau} - d) \circ \Phi + (d^{\tau} - d) \circ \Phi \circ (d^{\tau} - d) \circ \Phi + \ldots]\} \circ \pi_n\end{aligned}$$

D'autre part, d'après (10) et la définition de $\bar{f}$, on obtient

$$\bar{f}\circ\bar{d}^{\tau}\circ\Phi\circ\pi_m = \sum_{i<m} \pi_i\circ f\circ\pi_i\circ d\circ\Phi\circ\pi_m + \bar{f}\circ(d^{\tau}-d)\circ\Phi\circ\pi_m$$

d'où (7) entraîne :

$$= \sum_{i<m} \pi_i\circ f\circ\pi_m + \bar{f}\circ(d^{\tau}-d)\circ\Phi\circ\pi_m$$

Donc, on a

$$\bar{f}\circ\bar{d}^{\tau}\circ\Phi = \sum_{\substack{i,m\\ i<m}} \pi_i\circ f\circ\pi_m + \bar{f}\circ(d^{\tau}-d)\circ\Phi,$$

et ceci entraîne

$$\begin{aligned}\widetilde{f}^{\tau}\circ\pi_n &= \{\bar{f} + \bar{f}\circ(d^{\tau}-d)\circ\Phi[1 + (d^{\tau}-d)\circ\Phi + \ldots] + \\ &\qquad \Big(\sum_{i<m} \pi_i\circ f\circ\pi_m\Big)[1 + (d^{\tau}-d)\circ\Phi + \ldots + \ldots]\}\circ\pi_n \\ &= \{\bar{f}\circ[1 + (d^{\tau}-d)\circ\Phi + \ldots] + \Big(\sum_{i<m} \pi_i\circ f\circ\pi_m\Big)[1 + (d^{\tau}-d)\circ\Phi + \ldots]\}\circ\pi_n \\ &= \Big(\bar{f} + \sum_{i<m} \pi_i\circ f\circ\pi_m\Big)\circ[1 + (d^{\tau}-d)\circ\Phi + (d^{\tau}-d)\circ\Phi(d^{\tau}-d)\circ\Phi + \ldots]\circ\pi_n\end{aligned}$$

Or, on a évidemment

$$f = \bar{f} + \sum_{\substack{i<m\\ i,m}} \pi_i\circ f\circ\pi_m,$$

en effet, pour tout k, on a :

$$\begin{aligned}\Big(\bar{f} + \sum_{i<m} \pi_i\circ f\circ\pi_m\Big)\circ\pi_k &= \sum_i \pi_i\circ f\circ\pi_i\circ\pi_k + \sum_{i<m} \pi_i\circ f\circ\pi_m\circ\pi_k \\ &= \pi_k\circ f\circ\pi_k + \sum_{i<k} \pi_i\circ f\circ\pi_k \\ &= \sum_{i\leqslant k} \pi_i\circ f\circ\pi_k \\ &= f\circ\pi_k.\end{aligned}$$

Donc, on obtient finalement

$$\widetilde{f}^{\tau}\circ\pi_n = f\circ[1 + (d^{\tau}-d)\circ\Phi + (d^{\tau}-d)\circ\Phi(d^{\tau}-d)\circ\Phi + \ldots]\circ\pi_n$$

d'où

$$\widetilde{f}^{\tau} = f^{\tau}.$$

De même, on peut démontrer que

$$\widetilde{d}^{\tau} = d^{\tau}$$

et le théorème 1 est démontré d'après (6).

§ 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Les deux lemmes suivants seront démontrés au § 4.

Lemme 1. — Étant donnée une fonction tordante

$$\tau : B \to G$$

d'un ensemble simplicial B *dans un monoïde simplicial* G, *considérons les produits tordus*

$$(F \times G) \times_\tau B \qquad G \times_\tau B$$

où G *opère trivialement sur l'ensemble simplicial* F. *Alors le composé*

$$C^N(F) \otimes (C^N(G) \otimes_\tau C^N(B)) \xrightarrow{\alpha} (C^N(F) \otimes C^N(G)) \otimes C^N(B) \xrightarrow{\nabla_{F,G} \otimes 1_B} C^N(F \times G) \otimes_\tau C^N(B)$$

est un morphisme de m.d.g., α *désignant le morphisme d'associativité du produit tensoriel ordinaire.*

Lemme 2. — *Soient* A, B, F, *trois ensembles simpliciaux,* G *un monoïde simplicial qui opère sur* F, *et* τ *une fonction tordante de* B *dans* G. *Désignons par*

$$\tau_1 : B \times A \to G$$

la fonction tordante égale au composé de la projection canonique $B \times A \to B$ *et de* τ :

$$\tau_1(b, a) = \tau(b).$$

Alors le composé

$$C^N(F) \otimes_{\tau_1} C^N(B \times A) \xrightarrow{1_F \otimes f_{B,A}} C^N(F) \otimes (C^N(B) \otimes C^N(A)) \xrightarrow{\alpha} (C^N(F) \otimes_\tau C^N(B)) \otimes C^N(A)$$

est un morphisme de m.d.g.

Les lemmes 1 et 2 entraînent le résultat suivant :

Proposition 1. — *Soit donnée une fonction tordante*

$$\tau : B \to G$$

d'un ensemble simplicial B *dans un monoïde simplicial* G *qui opère sur* F *par une application simpliciale*

$$*' : F \times G \to F$$

Alors le morphisme composé

$$(1) \qquad C^N(F) \otimes (C^N(G) \otimes_\tau C^N(B)) \xrightarrow{\alpha} (C^N(F) \otimes C^N(G)) \otimes C^N(B) \xrightarrow{* \otimes 1_B} C^N(F) \otimes_\tau C^N(B)$$

est un morphisme de m.d.g., α *désignant le morphisme d'associativité du produit tensoriel. De même, on a le morphisme de* m.d.g.

$$(2) \qquad C^N(F) \otimes_\tau C^N(B) \xrightarrow{1_F \otimes \Delta_B} C^N(F) \otimes (C^N(B) \otimes C^N(B)) \xrightarrow{\alpha} (C^N(F) \otimes_\tau C^N(B)) \otimes C^N(B)$$

où

$$\Delta_B : C^N(B) \to C^N(B) \otimes C^N(B)$$

est la diagonale de la coalgèbre différentielle graduée $C^N(B)$.

Démonstration. — Le morphisme $*$ est, par définition, le composé

$$C^N(F) \otimes C^N(G) \xrightarrow{\nabla_{F,G}} C^N(F \times G) \xrightarrow{C^N(*')} C^N(F);$$

donc la première assertion résulte du lemme 1. Ensuite, si on prend $A = B$ dans le lemme 2, alors le morphisme $\alpha \circ (1_F \otimes \Delta_B)$ n'est autre que le composé

$$C^N(F) \otimes_\tau C^N(B) \xrightarrow{1 \otimes \Delta} C^N(F) \otimes_{\tau_1} C^N(B \times B) \xrightarrow{1 \otimes f_{B,B}} C^N(F) \otimes (C^N(B) \otimes C^N(B)) \xrightarrow{\alpha}$$
$$\to (C^N(F) \otimes_\tau C^N(B)) \otimes C^N(B)$$

où Δ est induit par l'application diagonale :

$$\Delta : B \to B \times B.$$

Donc $\alpha \circ (1_F \otimes \Delta_B)$ est bien un morphisme de m.d.g., puisque $1 \otimes \Delta$ est un morphisme de m.d.g., car on a évidemment

$$\tau = \tau_1 \circ \Delta.$$

c.q.f.d.

En identifiant $C^N(B)$ à un sous-module de $C^N(G) \otimes C^N(B)$ au moyen de ρ (cf. Définition § 1) alors on a :

Corollaire 1. — Pour tout $x \in C^N_n(B) \subseteq C^N_0(G) \otimes C^N_n(B)$, *on a*

$$d^\tau x - d_B x = \psi^\tau \frown x$$

dans le m.d.g. $C^N(G) \otimes_\tau C^N(B)$.

Avant de démontrer le corollaire, remarquons que [1]

$$(d^\tau - d)x = \psi^\tau(x) \otimes \partial_0 \partial_1 \ldots \partial_{n-1} x \text{ modulo } \sum_{1 \leqslant m} C^N(G) \otimes C^N_m(B). \tag{3}$$

Pour cela, rappelons d'abord que le morphisme Φ d'Eilenberg-Zilber peut être écrit sous la forme

$$\Phi(\alpha \otimes \beta) = \sum_{\substack{1 \leqslant l \\ m+l \leqslant n-1}} \Phi_{m,l,\nu}(\alpha) \otimes s_{\mu_1+l} \ldots s_{\mu_m+l} \partial_l \ldots \partial_{l+m-2}(\beta), \qquad \alpha \otimes \beta \in C^N_n(G \times B)$$

où $\Phi_{m,l,\nu}$ ne constitue que des opérateurs de G, et (μ, ν) désigne les $(m, n-m-l+1)$ « shuffle » [7]. Alors, (3) est une conséquence immédiate de la formule (1) du § 1 et du fait suivant : Supposons que la forme canonique [4] de l'opérateur $\partial_0 \partial_1 \ldots \partial_j s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k}$ ne contient pas des opérateurs dégénérescences, alors on a

$$\partial_0 \partial_1 \ldots \partial_j s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k} = \partial_0 \partial_1 \ldots \partial_{j-k}.$$

De plus, si $k \geqslant j$ et $k+l+2$ est le degré de x, alors on a

$$\partial_0 \partial_1 \ldots \partial_k \partial_j \partial_{j+1} \ldots \partial_{j+l} x = \partial_0 \partial_1 \ldots \partial_{k+l+1} x.$$

Ceci étant, revenons à la démonstration du corollaire 1. C'est trivial si x est de degré zéro ou 1. Supposons qu'on l'ait déjà démontré pour les degrés $\leqslant n-1$. Soit $x \in B_n$ et écrivons

$$\Delta_B x = b'_0 \otimes x + x \otimes b''_0 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} x^i \otimes x_i$$

où

$$b'_0 = \partial_1 \partial_2 \ldots \partial_n x, \qquad b''_0 = \partial_0 \partial_1 \ldots \partial_{n-1} x,$$
$$x^i = \partial_{n-i+1} \ldots \partial_n x, \qquad x_i = \partial_0 \partial_1 \ldots \partial_{n-i-1} x,$$

[1] D'ailleurs, si B_0 n'a qu'un élément (c'est-à-dire B est connexe), on n'a pas besoin de (3) pour démontrer le corollaire 1.

et d'après (3), posons

$$d^\tau x = \psi^\tau(x)\otimes b_0'' + h_1(x) + h_2(x) + \ldots + h_{n-1}(x)$$

où $h_i(x) = h_i'(x)\otimes h_i''(x) \in C^N_{n-i-1}(G)\otimes C^N_i(B)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ (puisque $n \geqslant 2$).

Alors on a, dans le m.d.g. $(C^N(G)\otimes_\tau C^N(B))\otimes C^N(B)$

$$d\circ\bar{\alpha}\circ\Delta_B x = d^\tau(e_0\otimes x)\otimes b_0'' + \Sigma d^\tau(e_0\otimes x^i)\otimes x_i + e_0\otimes b_0'\otimes dx + \Sigma e_0\otimes x^i\otimes dx_i$$

où e_0 est l'unité de G, et $\bar{\alpha}$ l'injection de $C^N(B)\otimes C^N(B)$ dans $(C^N(G)\otimes_\tau C^N(B))\otimes C^N(B)$.

Or, par l'hypothèse de récurrence, on a

$$d^\tau(e_0\otimes x^i) = \psi^\tau(x^i)\otimes(b_0^i)'' + \sum_{1\leqslant k\leqslant i-2} \psi^\tau(x^{i,k})\otimes x_k^i + e_0\otimes dx^i$$

où $x_k^i \in C^N_k(B)$, $x^{i,k}\in C^N_{n-k-1}(B)$ et $(b_0^i)'' = \partial_0\ldots\partial_{n-i-1}x^i = \partial_0\ldots\partial_{n-i-1}\partial_{n-i+1}\ldots\partial_n x$. Ce qui entraîne donc

$$d\circ\bar{\alpha}\circ\Delta_B x = \psi^\tau(x)\otimes b_0''\otimes b_0'' + \sum_i \psi^\tau(x^i)\otimes(b_0^i)''\otimes x_i + e_0\otimes b_0'\otimes dx +$$
$$\left\{\sum_i h_i(x)\otimes b_0'' + \sum_{i,k}\psi^\tau(x^{i,k})\otimes x_k^i\otimes x_i + \sum_i e_0\otimes dx^i\otimes x_i + \sum_i e_0\otimes x^i\otimes dx_i\right\}$$

où les termes dans « { } » se trouvent dans

$$\sum_{1\leqslant m} C^N(G)\otimes C^N_m(B)\otimes C^N(B)$$

Donc, d'après (2) de la proposition 1, l'égalité

$$\begin{aligned} d\circ\bar{\alpha}\circ\Delta_B x &= \alpha\circ(1\otimes\Delta_B)\circ d^\tau(x) \\ &= \psi^\tau(x)\otimes b_0''\otimes b_0'' + \sum_i h_i'(x)\otimes \bar{b}_0'\otimes h_i''(x), \quad \text{où} \quad \bar{b}_0' = \partial_1\ldots\partial_i h_i''(x) \end{aligned}$$

plus les termes qui se trouvent dans $\sum_{1\leqslant m} C^N(G)\otimes C^N_m(B)\otimes C^N(B)$; ceci démontre qu'on a

$$h_{n-1}'(x)\otimes h_{n-1}''(x) = \psi^\tau(x^{n-1})\otimes x_{n-1} + e_0\otimes dx,$$
$$h_i''(x) = x_i, \qquad h_i'(x) = \psi^\tau(x^i) \qquad \text{pour } 1\leqslant i\leqslant n-1.$$

Autrement dit, on a par définition même de $\psi^\tau\frown$:

$$\begin{aligned} d^\tau x &= \psi^\tau(x)\otimes b_0 + \sum_i \psi^\tau(x^i)\otimes x_i + e_0\otimes dx \\ &= dx + \psi^\tau\frown x \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Démonstration du théorème 2. — C'est une conséquence immédiate du fait que le morphisme (1) de la proposition 1 est un morphisme de m.d.g. En effet, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C^N(F)\otimes(C^N(G)\otimes_\tau C^N(B)) \arrow[r, "(*\otimes 1)\circ\alpha"] \arrow[d, "d\otimes 1+1\otimes d^\tau"'] & C^N(F)\otimes_\tau C^N(B) \arrow[d, "d^\tau"] \\ C^N(F)\otimes(C^N(G)\otimes_\tau C^N(B)) \arrow[r, "(*\otimes 1)\circ\alpha"] & C^N(F)\otimes_\tau C^N(B) \end{tikzcd}$$

et le corollaire 1 entraînent qu'on a : pour $y\otimes x \in C^N(F)\otimes C^N(B)$,

$$\begin{aligned} d^{\tau}(y\otimes x) &= (*\otimes 1)\circ(d\otimes 1 + 1\otimes d^{\tau})(y\otimes e_0\otimes x) \\ &= (d\otimes 1)(y\otimes x) + (1\otimes d)(y\otimes x) + \psi^{\tau}\frown(y\otimes x) \end{aligned}$$

par définition du morphisme $\psi^{\tau}\frown$, et que

$$dy * e_0 = dy$$

puisque e_0 est l'unité du monoïde G.

§ 4. DÉMONSTRATION DES LEMMES 1 ET 2 DU § 3

D'abord, on a besoin de quelques propriétés des foncteurs d'Eilenberg-Zilber.

Lemme 1. — *Soient* F, G *et* B *trois ensembles simpliciaux ; alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} C^N(F)\otimes C^N(G)\otimes C^N(B) \arrow[r, "\nabla_{F,G}\otimes 1_B"'] \arrow[d, "1_F\otimes\nabla_{G,B}"'] & C^N(F\times G)\otimes C^N(B) \arrow[d, "\nabla_{F\times G,B}"] \\ C^N(F)\otimes C^N(G\times B) \arrow[r, "\nabla_{F,G\times B}"'] & C^N(F\times G\times B) \end{tikzcd}$$

est commutatif (*où on identifie canoniquement* $F\times(G\times B)$, $(F\times G)\times B$ *et* $F\times G\times B$).

Lemme 1 bis. — *Soient* F, G *et* B *trois ensembles simpliciaux ; alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} C^N(F\times G\times B) \arrow[r, "f_{F\times G,B}"] \arrow[d, "f_{F,G\times B}"] & C^N(F\times G)\otimes C^N(B) \arrow[d, "f_{F,G}\otimes 1"] \\ C^N(F)\otimes C^N(G\times B) \arrow[r, "1\otimes f_{G,B}"'] & C^N(F)\otimes C^N(G)\otimes C^N(B) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Lemme 2. — A, B *et* F *étant des ensembles simpliciaux donnés, le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
C^N(F)\otimes C^N(B\times A) \arrow[r, "\nabla_{F,B\times A}"] \arrow[d, "1\otimes f_{B,A}"] & C^N(F\times(B\times A)) \arrow[d, "\approx"] \\
C^N(F)\otimes(C^N(B)\otimes C^N(A)) \arrow[d, "\approx"] & C^N((F\times B)\times A) \arrow[d, "f_{F\times B,A}"] \\
(C^N(F)\otimes C^N(B))\otimes C^N(A) \arrow[r, "\nabla_{F,B}\otimes 1_A"'] & C^N(F\times B)\otimes C^N(A)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Lemme 3. — On a la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
C^N(F)\otimes C^N(G\times B) \arrow[r, "\nabla_{F,G\times B}"'] \arrow[d, "1\otimes\Phi_{G,B}"'] & C^N(F\times(G\times B)) \arrow[d, "\approx"] \\
C^N(F)\otimes C^N(G\times B) \arrow[d, "\nabla_{F,G\times B}"'] & C^N((F\times G)\times B) \arrow[d, "\Phi_{F\times G,B}"] \\
C^N(F\times(G\times B)) \arrow[r, "\approx"'] & C^N((F\times G)\times B).
\end{tikzcd}$$

Lemme 3 bis. — *On a la commutativité du diagramme*

$$\begin{tikzcd}
C^N(F\times(B\times A)) \arrow[r, "\approx"'] \arrow[d, "\Phi_{F,B\times A}"] & C^N((F\times B)\times A) \arrow[d, "f_{F\times B,A}"] \\
C^N(F\times(B\times A)) \arrow[d, "\approx"] & C^N(F\times B)\otimes C^N(A) \arrow[d, "\Phi_{F,B}\otimes 1_A"] \\
C^N((F\times B)\times A) \arrow[r, "f_{F\times B,A}"'] & C^N(F\times B)\otimes C^N(A)
\end{tikzcd}$$

La démonstration des lemmes 1, 1 *bis* et 2 résulte d'un calcul direct à partir des définitions de ∇ et f; nous l'omettons ici. D'ailleurs, les lemmes 1 et 1 *bis* sont classiques [10].

Démonstration du lemme 3. — Supposons qu'on ait déjà démontré la commutativité pour les dimensions $\leqslant n-1$, $n \geqslant 1$ et considérons

$$\gamma \in F_q, \qquad (\alpha, \beta) \in (G \times B)_p \qquad\qquad p+q=n$$
$$z = \gamma \otimes (\alpha, \beta) \in C^N(F) \otimes C^N(G \times B),$$

alors on a :

$$\Phi_{F\times G,B} \nabla_{F,G\times B}(z) = -\Phi' \nabla(z) + h' s_0 \nabla(z) \tag{1}$$

D'autre part, d'après la formule [7]

$$\nabla(a \otimes b) = a \nabla b = a \nabla' s_0 b + (-1)^{\deg a} s_0 a \nabla' b \tag{2}$$

donc le premier terme du (1) est égal à

$$\begin{aligned} -\Phi' \circ \nabla_{F,G\times B}(z) &= -\Phi'(\gamma \nabla' s_0(\alpha, \beta)) + (-1)^q s_0 \gamma \nabla'(\alpha, \beta)) \\ &= -\Phi' \circ \nabla'(\gamma \otimes s_0(\alpha, \beta)) + (-1)^{q+1} \Phi' \circ \nabla'(s_0 \gamma \otimes (\alpha, \beta)) \\ &= -(\Phi \circ \nabla)'(\gamma \otimes s_0(\alpha, \beta)) + (-1)^{q+1} (\Phi \circ \nabla)'(s_0 \gamma \otimes (\alpha, \beta)) \end{aligned}$$

et l'hypothèse de récurrence entraîne :

$$\begin{aligned} &= (-1)^{q-1+1} (\nabla \circ (1 \otimes \Phi_{G,B}))'(\gamma \otimes s_0(\alpha, \beta)) + (-1)^{q+1+q} (\nabla \circ (1 \otimes \Phi))'(s_0 \gamma \otimes (\alpha, \beta)) \\ &= (-1)^q \nabla'_{F,G\times B}(\gamma \otimes \Phi'_{G,B} s_0(\alpha, \beta)) + (-1)^{2q+1} \nabla'_{F,G\times B}(s_0 \gamma \otimes \Phi'(\alpha, \beta)) \\ &= (-1)^q \nabla'_{F,G\times B}(\gamma \otimes \Phi'_{G,B} s_0(\alpha, \beta)) - \nabla'_{F,G\times B}(s_0 \gamma \otimes \Phi'_{G,B}(\alpha, \beta)) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} h' \circ s_0 \circ \nabla &= h' \circ \nabla' \circ s_0 \\ &= (\nabla_{F\times G,B} \circ f_{F\times G,B} \circ \nabla_{F,G\times B})' \circ s_0 \end{aligned}$$

Ceci, d'après le lemme 2, est égal à

$$(\nabla_{F\times G,B} \circ (\nabla_{F,G} \otimes 1) \circ (1 \otimes f_{G,B}))' \circ s_0$$

donc, d'après le lemme 1, c'est égal à

$$\begin{aligned} &(\nabla_{F,G\times B} \circ (1 \otimes \nabla_{G,B}) \circ (1 \otimes f_{G,B}))' \circ s_0 \\ &= (\nabla_{F,G\times B} \circ (1 \otimes h_{G,B}))' \circ s_0 \end{aligned}$$

Donc le second terme de (1) est égal à

$$h' \circ s_0 \circ \nabla(z) = \nabla'_{F,G\times B} \circ (1 \otimes h'_{G,B}) \circ s_0(z) = \nabla'_{F,G\times B} \circ (s_0 \gamma \otimes h'_{G,B} s_0(\alpha, \beta)).$$

On a, d'après (1)

$$\begin{aligned} &\Phi_{F\times G,B} \circ \nabla_{F,G\times B}(z) = -\Phi' \circ \nabla(z) + h' \circ s_0 \circ \nabla(z) = \\ &(-1)^q \nabla'_{F,G\times B}(\gamma \otimes s_0 \Phi_{G,B}(\alpha, \beta)) + \nabla'_{F,G\times B}[-s_0 \gamma \otimes \Phi'_{G,B}(\alpha, \beta) + s_0 \gamma \otimes h'_{G,B} s_0(\alpha, \beta)] \\ &= (-1)^q \nabla'_{F,G\times B}(\gamma \otimes s_0 \Phi_{G,B}(\alpha, \beta)) + \nabla'(s_0 \gamma \otimes \Phi(\alpha, \beta)) \\ &= (-1)^q [\gamma \nabla' s_0 \Phi_{G,B}(\alpha, \beta) + (-1)^q s_0 \gamma \nabla' \Phi(\alpha, \beta)] \end{aligned}$$

Alors la formule (2) entraîne que ceci est égal à

$$\begin{aligned} &= (-1)^q \gamma \nabla \Phi(\alpha, \beta) \\ &= (-1)^q \nabla_{F,G\times B} \circ 1 \otimes \Phi_{G,B}(z) \\ &= (\nabla_{F,G\times B} \circ (1 \otimes \Phi_{G,B}))(z) \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Démonstration du lemme 3 bis. — Remarquons d'abord qu'on vérifie facilement la formule

(3) $$f_n = (1\otimes\partial_0)\circ f'_{n-1} + \partial_1\partial_2\dots\partial_n\otimes 1$$

d'après la définition de f [7]. Supposons qu'on ait déjà la commutativité pour les dimensions $\leqslant n-1$ (où $n\geqslant 1$), et considérons le cas n. Alors on a :

$$\begin{aligned}f_{F\times B,A}\circ\Phi_{F,B\times A} &= ((1\otimes\partial_0)\circ f'_{F\times B,A} + \partial_1\dots\partial_n\otimes 1)\circ\Phi_{F,B\times A}\\ &= -(1\otimes\partial_0)\circ f'_{F\times B,A}\circ\Phi'_{F,B\times A} + (1\otimes\partial_0)\circ f'_{F\times B,A}\circ h'_{F,B\times A}\circ s_0 + (\partial_1\dots\partial_n\otimes 1)\circ\Phi_{F,B\times A}\\ &= -(1\otimes\partial_0)\circ(f_{F\times B,A}\circ\Phi_{F,B\times A})' + (1\otimes\partial_0)\circ(f_{F\times B,A}\circ h_{F,B\times A})'\circ s_0\end{aligned}$$

puisque $\partial_1\dots\partial_n\otimes 1\circ\Phi_{F,B\times A}$ est nul, d'après une vérification analogue à celle de $f\circ\Phi=0$. Donc, d'après le lemme 2, c'est égal à

$$\begin{aligned}&-(1\otimes\partial_0)\circ(f_{F\times B,A}\circ\Phi_{F,B\times A})' + (1\otimes\partial_0)\circ(f_{F\times B,A}\circ\nabla_{F,B\times A}\circ f_{F,B\times A})'\circ s_0\\ &= -(1\otimes\partial_0)\circ(f_{F\times B,A}\circ\Phi_{F,B\times A})' + (1\otimes\partial_0)\circ((\nabla_{F,B}\otimes 1)\circ(1\otimes f_{B,A})\circ f_{F,B\times A})'\circ s_0\end{aligned}$$

ceci, d'après le lemme 1 *bis*, est égal à

$$-(1\otimes\partial_0)\circ(f_{F\times B,A}\circ\Phi_{F,B\times A})' + (1\otimes\partial_0)\circ((\nabla_{F,B}\otimes 1)\circ(f_{F,B}\otimes 1)\circ f_{F\times B,A})'\circ s_0$$

On obtient donc

(4) $$f_{F\times B,A}\circ\Phi_{F,B\times A} = -(1\otimes\partial_0)\circ(f_{F\times B,A}\circ\Phi_{F,B\times A})' + (1\otimes\partial_0)\circ(h'_{F,B}\otimes 1)\circ f'_{F\times B,A}\circ s_0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(\Phi_{F,B}\otimes 1)\circ f_{F\times B,A} &= (\Phi_{F,B}\otimes 1)\circ(1\otimes\partial_0)\circ f'_{F\times B,A} + (\Phi_{F,B}\otimes 1)\circ(\partial_1\dots\partial_n\otimes 1)\\ &= (\Phi_{F,B}\otimes 1)\circ(1\otimes\partial_0)\circ f'_{F\times B,A}\end{aligned}$$

parce que $(\Phi_{F,B}\otimes 1)\circ(\partial_1\dots\partial_n\otimes 1)$ est nul en remarquant que $\Phi_0=0$; donc on a

$$\begin{aligned}&= (1\otimes\partial_0)\circ(\Phi_{F,B}\otimes 1)\circ f'_{F\times B,A}\\ &= -(1\otimes\partial_0)\circ(\Phi'_{F,B}\otimes 1)\circ f'_{F\times B,A} + (1\otimes\partial_0)\circ(h'_{F,B}s_0\otimes 1)\circ f'_{F\times B,A}\end{aligned}$$

d'où on obtient

(5) $$(\Phi_{F,B}\otimes 1)\circ f_{F\times B,A} = -(1\otimes\partial_0)\circ((\Phi_{F,B}\otimes 1)\circ f_{F\times B,A})' + (1\otimes\partial_0)\circ(h'_{F,B}\otimes 1)\circ(s_0\otimes 1)\circ f'_{F\times B,A}$$

D'après (4), (5) et l'hypothèse de récurrence, il ne reste qu'à vérifier

$$f'\circ s_0 = (s_0\otimes 1)\circ f'.$$

Mais ceci est évident, en effet

$$\begin{aligned}f'\circ s_0 &= \sum_i \partial_{i+2}\dots\partial_n s_0\otimes\partial_1\dots\partial_i s_0\\ &= \sum_i s_0\partial_{i+1}\dots\partial_{n+1}\otimes\partial_1\dots\partial_{i-1}\\ &= (s_0\otimes 1)\circ f'.\end{aligned}$$

c.q.f.d.

Ceci étant, revenons à la démonstration du lemme 1 du § 3. Puisque

$$f^\tau\circ\nabla^\tau = 1$$

d'après le théorème 1, le lemme 1 du § 3 devient une conséquence immédiate de la proposition suivante.

Proposition 1. — Étant donnée une fonction tordante

$$\tau : B \to G$$

d'un ensemble simplicial B *dans un monoïde simplicial* G, *considérons les produits tordus*

$$(F \times G) \times_\tau B, \qquad G \times_\tau B$$

où G *opère trivialement sur l'ensemble simplicial* F. *Alors le diagramme des morphismes de modules gradués :*

$$\begin{tikzcd}
C^N(F) \otimes (C^N(G) \otimes_\tau C^N(B)) \arrow[r, "1_F \otimes \nabla^\tau_{G,B}"] \arrow[d, "\alpha"] & C^N(F) \otimes C^N(G \times_\tau B) \arrow[d, "\nabla_{F, G \times_\tau B}"] \\
(C^N(F) \otimes C^N(G)) \otimes C^N(B) \arrow[d, "\nabla_{F,G} \otimes 1"] & C^N(F \times (G \times_\tau B)) \arrow[d, "i"] \\
C^N(F \times G) \otimes_\tau C^N(B) \arrow[r, "\nabla^\tau_{F \times G, B}"'] & C^N((F \times G) \times_\tau B)
\end{tikzcd}$$

est commutatif ; i désigne le morphisme de m.d.g. *défini par l'identification*

$$F \times (G \times_\tau B) = (F \times G) \times_\tau B$$

et α *le morphisme d'associativité du produit tensoriel ordinaire.*

Démonstration. — D'après la définition de ∇^τ (cf. (1), § 1), il suffit de vérifier

$$(6) \quad \begin{aligned} &\nabla_{F, G \times_\tau B} \circ (1 \otimes \nabla_{G,B}) = \nabla_{F \times G, B} \circ (\nabla_{F,G} \otimes 1) \\ &\nabla_{F, G \times_\tau B} \circ (1 \otimes [\Phi_{G,B} \circ (d^\tau - d) \circ \Phi_{G,B} \ldots \circ (d^\tau - d) \circ \nabla_{G,B}]) = \\ &\qquad \Phi_{F \times G, B} \circ (d^\tau - d) \circ \Phi_{F \times G, B} \circ \ldots \circ (d^\tau - d) \circ \nabla_{F \times G, B} \circ (\nabla_{F,G} \otimes 1). \end{aligned}$$

Pour cela, remarquons d'abord que le ∇ d'Eilenberg-Zilber utilise les opérateurs de dégénérescence, mais non les opérateurs de face, et que les ensembles simpliciaux $G \times_\tau B$ et $G \times B$ possèdent les mêmes dégénérescences, d'où on déduit

$$\nabla_{F, G \times_\tau B} = \nabla_{F, G \times B},$$

et le lemme 1 entraîne la première égalité dans (6). Ensuite, d'après le lemme 3, on a

$$\begin{aligned} &\nabla_{F, G \times B} \circ 1 \otimes [\Phi_{G,B} \circ (d^\tau - d) \circ \ldots \circ (d^\tau - d) \circ \nabla_{G,B}] \\ &= \nabla_{F, G \times B} \circ 1 \otimes \Phi_{G,B} \circ 1 \otimes [(d^\tau - d) \Phi \circ \ldots (d^\tau - d) \circ \nabla_{G,B}] \\ &= \Phi_{F \times G, B} \circ \nabla_{F, G \times B} \circ 1 \otimes (d^\tau - d) \circ 1 \otimes [\Phi \circ \ldots (d^\tau - d) \circ \nabla_{G,B}] \\ &= \Phi_{F \times G, B} \circ \nabla_{F, G \times B} \circ [d \otimes 1 + 1 \otimes d^\tau - (d \otimes 1 + 1 \otimes d)] \circ 1 \otimes [\Phi \ldots (d^\tau - d) \circ \nabla_{G,B}] \end{aligned}$$

Or, $\nabla_{F,G\times_\tau B}$ (resp. $\nabla_{F,G\times B}$) commute avec la différentielle totale, donc ceci est égal à

$$=\Phi_{F\times G,B}\circ(d^\tau-d)\circ\nabla_{F,G\times B}\circ 1\otimes[\Phi\circ(d^\tau-d)\dots(d^\tau-d)\circ\nabla_{G,B}]$$

Par le même raisonnement, on obtient

$$=\Phi_{F\times G,B}\circ(d^\tau-d)\circ\Phi_{F\times G,B}\circ(d^\tau-d)\circ\dots\circ(d^\tau-d)\circ\nabla_{F,G\times B}\circ 1\otimes\nabla_{G,B}$$

et le lemme 1 termine la démonstration de (6).

c.q.f.d.

Remarque. — D'ailleurs, cette proposition entraîne que le morphisme du lemme 1 du § 3

$$(\nabla_{F,G}\otimes 1)\circ\alpha$$

est égal au composé des morphismes de m.d.g.

$$f^\tau_{F\times G,B}\circ i\circ\nabla_{F,G\times_\tau B}\circ(1_F\otimes\nabla^\tau_{G,B}).$$

D'autre part, on peut démontrer le lemme 1 du § 3 directement, mais il est intéressant de savoir les propriétés qui généralisent celles du début du § 4.

De même, le lemme 2 du § 3 devient une conséquence immédiate de la proposition suivante :

Proposition 2. — *Soient* A, B, F *trois ensembles simpliciaux,* G *un monoïde simplicial qui opère sur* F, *et* τ *une fonction tordante de* B *dans* G. *Désignons par*

$$\tau_1 : B\times A\to G$$

la fonction tordante définie par le composé de la projection canonique avec τ

$$\tau_1(b, a)=\tau(b).$$

Alors, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
C^N(F)\otimes_{\tau_1}C^N(B\times A) \arrow[r, "\nabla^{\tau_1}_{F,B\times A}"] \arrow[d, "1_F\otimes f_{B,A}"] & C^N(F\times_{\tau_1}(B\times A)) \arrow[d, "i"] \\
C^N(F)\otimes(C^N(B)\otimes C^N(A)) \arrow[d, "\alpha"] & C^N((F\times_\tau B)\times A) \arrow[d, "f_{F\times_\tau B,A}"] \\
(C^N(F)\otimes_\tau C^N(B))\otimes C^N(A) \arrow[r, "\nabla^\tau_{F,B}\otimes 1_A"'] & C^N(F\times_\tau B)\otimes C^N(A)
\end{tikzcd}$$

où i est le morphisme de m.d.g. *défini par l'identification évidente*

$$F \times_{\tau_1} (B \times A) = (F \times_\tau B) \times A$$

et α le morphisme d'associativité du produit tensoriel.

En particulier, on obtient le morphisme du lemme 2, § 3, $\alpha \circ (1 \otimes f_{B,A})$, comme le composé

$$(f^{\tau}_{F,B} \otimes 1) \circ f_{F \times_\tau B, A} \circ i \circ \nabla^{\tau_1}_{F, B \times A}$$

des morphismes de m.d.g.

Démonstration. — D'après la définition de ∇^τ (cf. (1), § 1), il suffit de vérifier

$$f_{F \times_\tau B, A} \circ \nabla_{F, B \times A} = (\nabla_{F,B} \otimes 1_A) \circ (1_F \otimes f_{B,A})$$

$$f_{F \times_\tau B, A} \circ \Phi_{F, B \times A} \circ (d^\tau - d) \circ \ldots \circ (d^\tau - d) \circ \nabla_{F, B \times A}$$
$$= ([\Phi_{F,B} \circ (d^\tau - d) \circ \ldots \circ (d^\tau - d) \circ \nabla_{F,B}] \otimes 1_A) \circ (1_F \otimes f_{B,A})$$

Pour cela, remarquons d'abord que l'opérateur f ne fait pas intervenir ∂_0 dans le premier facteur, d'où on déduit

$$f_{F \times_\tau B, A} = f_{F \times B, A},$$

et le lemme 2 entraîne la première égalité. Ensuite, d'après le lemme 3 *bis*, on a

$$\begin{aligned} & f_{F \times_\tau B, A} \circ \Phi_{F, B \times A} \circ (d^\tau - d) \ldots \circ (d^\tau - d) \circ \nabla_{F, B \times A} \\ &= f_{F \times B, A} \circ \Phi_{F, B \times A} \circ (d^\tau - d) \circ \ldots \circ (d^\tau - d) \circ \nabla_{F, B \times A} \\ &= (\Phi_{F,B} \otimes 1_A) \circ f_{F \times B, A} \circ (d^\tau - d) \circ \Phi \circ \ldots \circ (d^\tau - d) \circ \nabla_{F, B \times A} \end{aligned}$$

Or, $f_{F \times_\tau B, A}$ (resp. $f_{F \times B, A}$) commute avec la différentielle d_τ (resp. d), donc ceci est égal à

$$\begin{aligned} &= (\Phi_{F,B} \otimes 1_A) \circ [(d^\tau \otimes 1) \circ f_{F \times B, A} + \\ &\qquad (1 \otimes d) \circ f_{F \times B, A} - (d \otimes 1) \circ f_{F \times B, A} - (1 \otimes d) \circ f_{F \times B, A}] \circ \Phi \circ \ldots \circ (d^\tau - d) \circ \nabla_{F, B \times A} \\ &= (\Phi_{F,B} \otimes 1) \circ ((d^\tau - d) \otimes 1) \circ f_{F \times B, A} \circ \Phi_{F, B \times A} \circ \ldots \circ (d^\tau - d) \circ \nabla_{F, B \times A} \\ &= (\Phi_{F,B} \otimes 1) \circ ((d^\tau - d) \otimes 1) \circ (\Phi_{F,B} \otimes 1) \circ \ldots \circ ((d^\tau - d) \otimes 1) \circ f_{F \times B, A} \circ \nabla_{F, B \times A} \\ &= ([\Phi_{F,B} \circ (d^\tau - d) \circ \Phi_{F,B} \circ \ldots \circ (d^\tau - d)] \otimes 1) \circ f_{F \times B, A} \circ \nabla_{F, B \times A} \end{aligned}$$

donc, d'après le lemme 2, c'est égal à

$$\begin{aligned} &= ([\Phi_{F,B} \circ (d^\tau - d) \circ \ldots \circ (d^\tau - d)] \otimes 1) \circ (\nabla_{F,B} \otimes 1) \circ (1 \otimes f_{B,A}) \\ &= ([\Phi_{F,B} \circ (d^\tau - d) \circ \ldots \circ (d^\tau - d) \circ \nabla_{F,B}] \otimes 1_A) \circ (1_F \otimes f_{B,A}). \end{aligned}$$

c.q.f.d.

De même, on peut démontrer le fait suivant qui généralise le lemme 3 :

Proposition 3. — Étant donnée une fonction tordante

$$\tau : B \to G$$

d'un ensemble simplicial B *dans un monoïde simplicial* G, *considérons les produits tordus*

$$(F \times G) \times_\tau B, \qquad G \times_\tau B$$

où G *opère trivialement sur l'ensemble simplicial* F. *Alors le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
C^N(F)\otimes C^N(G\times_\tau B) \arrow[r, "\nabla_{F,G\times_\tau B}"] \arrow[d, "1_F\otimes\Phi^\tau_{G,B}"] & C^N(F\times(G\times_\tau B)) \arrow[d, "i"] \\
C^N(F)\otimes C^N(G\times B) \arrow[d, "\nabla_{F,G\times_\tau B}"] & C^N((F\times G)\times_\tau B) \arrow[d, "\Phi^\tau_{F\times G,B}"] \\
C^N(F\times(G\times_\tau B)) \arrow[r, "i"'] & C^N((F\times G)\times_\tau B)
\end{tikzcd}$$

est commutatif; i désigne le morphisme de m.d.g. *défini par l'identification évidente*

$$(F\times G)\times_\tau B = F\times(G\times_\tau B).$$

CHAPITRE III

UNE PROPRIÉTÉ DE LA CLASSE CARACTÉRISTIQUE

Dans ce paragraphe, on va donner une propriété de la classe caractéristique d'un fibré principal, en application de la formule de Brown. Tous les ensembles simpliciaux [4] considérés ici sont munis d'un point-base, les fibres-types dans les fibrés sont tous pris par rapport à ce point distingué.

§ 1. ÉNONCÉ DU RÉSULTAT

Pour tout ensemble simplicial

$$X = \bigcup_{n \geqslant 0} X_n,$$

notons :

X^n = le n^e squelette de X, sous-ensemble simplicial engendré par X_n,
$X^{(n)}$ = le n^e système de Postnikov [15] de X,
$X^{[n]}$ = la fibre de son n^e système de Postnikov [1].

Toutes les homologies sont à coefficients dans un anneau principal Λ.

On sait qu'un fibré principal E, de base B, et de groupe structural G tel que

$$\pi_i(G) = 0 \qquad \text{pour } i < n \ (n \geqslant 1),$$

possède une classe caractéristique

$$\xi_E \in H^{n+1}(B, H_n(G))$$

qu'on peut définir de la manière suivante. Soit

$$f^* : H^{n+1}(\overline{W}(G), H_n(G)) \to H^{n+1}(B, H_n(G))$$

le morphisme défini par une application f de B dans le classifiant $\overline{W}(G)$ [3], [15] de G qui induit le fibré principal. Et désignons par

$$\xi_0 \in H^{n+1}(\overline{W}(G), H_n(G))$$

la classe dont l'image par l'isomorphisme de la transgression

$$H^{n+1}(\overline{W}(G), H_n(G)) \approx H^n(G, H_n(G))$$

est égale à l'unique élément de $H^n(G, H_n(G))$ qui correspond à l'application identique de $H_n(G)$ par le théorème des coefficients universels. Alors on pose

$$\xi_E = f^*(\xi_0).$$

Rappelons (cf. chapitre 1, § 2) que si A est une algèbre graduée sur l'anneau Λ, alors :

$$H^*(X, A) = \sum_i \prod_p H^p(X, A_{p+i})$$

désigne l'algèbre graduée dont la multiplication est définie par le cup-produit classique :

$$H^p(X, A_r) \otimes H^q(X, A_s) \overset{\smile}{\to} H^{p+q}(X, A_r \otimes A_s) \to H^{p+q}(X, A_{r+s})$$

Maintenant, considérons le cas où A est égale à l'algèbre de Pontrjagin d'un groupe simplicial G; alors on a

Théorème 1. — Si un fibré principal E *de groupe* G *satisfait à la condition* $\pi_i(G) = 0$, $i < n$, *le carré de sa classe caractéristique* ξ_E *est nul*

$$\xi_E^2 = 0$$

dans $H^{2n+2}(B, H_{2n}(G))$.

Soit Π un groupe abélien, et soit $H_*(\Pi, n)$ l'homologie à coefficients entiers de $K(\Pi, n)$. Identifiant Π à $H_n(\Pi, n)$, la multiplication de l'algèbre $H_*(\Pi, n)$ induit une application

$$(1) \qquad * : \Pi \otimes \Pi \to H_{2n}(\Pi, n)$$

Théorème 2. — Soit X *un ensemble simplicial quelconque. Pour tout* $\xi \in H^{n+1}(X, \Pi)$, *l'élément* ξ^2 *de* $H^{2n+2}(X, H_{2n}(\Pi, n))$ *cup-carré de* ξ *pour l'application* (1) *est nul.*

Remarque. — Le théorème 1 peut être considéré comme une condition nécessaire pour qu'un élément de $H^{n+1}(B, H_n(G))$ soit obstructif. Une autre condition de ce genre peut être obtenue à l'aide des notions de k-invariant d'Eilenberg-Maclane qu'on ne va pas préciser ici.

§ 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Observons d'abord que, d'après le théorème de Fadell-Hurewicz [9]

$$d_{n+1}x = \xi_E \frown x$$

(où d_{n+1} est la différentielle de la suite spectrale) ; puisque le carré de la différentielle d_{n+1} est nul, on a

$$\xi_E \frown (\xi_E \frown x) = (\xi_E \smile \xi_E) \frown x = d_{n+1}^2 x = 0$$

ainsi on peut donc conjecturer que $\xi_E \smile \xi_E$ doit être nul. On va donner une démonstration de ce fait, basée sur la formule de Brown. D'abord, il suffit de le démontrer pour $G^{[n-1]}$, car l'inclusion canonique

$$G^{[n-1]} \to G$$

est une homotopie équivalence (puisque $\pi_i(G) = 0$ pour $i < n$) ; donc on peut supposer que G vérifie la condition

$$G_i = \{s_0^i e_0\} \qquad i \leqslant n-1.$$

Ceci entraîne que la cochaîne fondamentale ψ (cf. § 1, Définition, chapitre II) satisfait à

$$\psi_i = 0 \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n$$

puisque $C_i^N(G) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$. La formule de Brown :

$$(1) \qquad d\psi_m + \psi_{m-1}d + \sum_{p+q=m} \psi_p \smile \psi_q = 0$$

montre alors que les valeurs prises par ψ_{n+1} sont des cycles de G. Donc le composé de ψ_{n+1} avec la projection canonique p

$$\psi'_{n+1} = p \circ \psi_{n+1} : C_{n+1}^N(B) \xrightarrow{\psi_{n+1}} Z_n(G) \xrightarrow{p} H_n(G)$$

est un cocycle dont la classe de cohomologie n'est autre que ξ_E :

$$\{\psi'_{n+1}\} = \xi_E$$

Choisissons un projecteur :

$$\varphi : C_{2n}^N(G) \to Z_{2n}(G);$$

la restriction de φ à $Z_{2n}(G)$ est donc égale à l'identité. Posons

$$\overline{\psi}_{2n+1} = p \circ \varphi \circ \psi_{2n+1} : C_{2n+1}^N(B) \to H_{2n}(G).$$

Ensuite, on a par définition même

$$\psi_{n+1} \smile \psi_{n+1} : C_{2n+2}^N(B) \xrightarrow{\Delta} C_{n+1}^N(B) \otimes C_{n+1}^N(B) \xrightarrow{\psi_{n+1} \otimes \psi_{n+1}} Z_n(G) \otimes Z_n(G) \to Z_{2n}(G)$$

et le composé

$$p \circ (\psi_{n+1} \smile \psi_{n+1}) : C_{2n+2}^N(B) \to H_{2n}(G)$$

est précisément un cocycle dans la classe de cohomologie

$$\xi_E^2 = \xi_E \smile \xi_E = \{p \circ (\psi_{n+1} \smile \psi_{n+1})\} \in H^{2n+2}(B, H_{2n}(G)).$$

La formule (1) donne, pour $m = 2n+2$,

$$(2) \qquad d\psi_{2n+2} + \psi_{2n+1}d + \psi_{n+1} \smile \psi_{n+1} = 0$$

(puisque $\psi_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$). Donc l'image de $\psi_{2n+1}d$ est contenue dans $Z_{2n}(G)$ puisque les deux autres termes sont ainsi, et on a

$$\varphi \circ \psi_{2n+1} \circ d = \psi_{2n+1} \circ d$$

En appliquant p au premier membre de la relation (2), on obtient

$$\overline{\psi}_{2n+1}d + p \circ (\psi_{n+1} \smile \psi_{n+1}) = 0$$

puisque $p \circ d = 0$. Mais ceci équivaut à dire que $p \circ (\psi_{n+1} \smile \psi_{n+1})$ est un cobord, donc

$$\xi_E^2 = \{p \circ (\psi_{n+1} \smile \psi_{n+1})\} = 0.$$

Enfin, le théorème 2 est une conséquence immédiate du précédent, car il existe un fibré principal de base X, de groupe structural $K(\Pi, n)$, dont ξ est la classe caractéristique.

§ 3. APPLICATION AU PROBLÈME DE LA RÉALISATION

On dit qu'une coalgèbre graduée C (resp. une algèbre graduée A) sur un anneau Λ est *réalisable* s'il existe un espace topologique X tel que C (resp. A) soit isomorphe à la coalgèbre d'homologie de X à coefficients dans Λ (resp. à l'algèbre de cohomologie de X à coefficients dans Λ) : $C \approx H(X, \Lambda)$.

Dans un travail récent de Kan-Whitehead [13], ils construisent des groupes gradués qui ne sont pas réalisables par la cohomologie d'un espace. Maintenant, on va donner une condition nécessaire pour qu'une coalgèbre graduée sans torsion soit réalisable, lorsque Λ est soit l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers, soit $\mathbf{Z}_p$ avec p premier.

D'abord, pour tout module M sur Λ et tout entier n, on note

$$M^{[n]} \text{ le module } H_{2n}(M, n, \Lambda)$$

et l'application (1) du § 1 sera

$$(1\ bis) \qquad * : M \otimes M \to M^{[n]}.$$

Étant donné une coalgèbre C sur Λ, on définit pour chaque entier n, un morphisme $\widetilde{\Delta}_n$ qui est le composé

$$\widetilde{\Delta}_n = * \circ \Delta' : C_{2n} \xrightarrow{\Delta'} C_n \otimes_\Lambda C_n \xrightarrow{*} C_n^{[n-1]}$$

où le premier morphisme Δ' est le composé de la comultiplication de la coalgèbre

$$\Delta_{2n} : C_{2n} \to (C \otimes_\Lambda C)_{2n}$$

et de la projection canonique de $(C \otimes_\Lambda C)_{2n}$ sur le facteur $C_n \otimes_\Lambda C_n$. Alors on a :

Théorème 3. — Une condition nécessaire pour que C *soit réalisable est que*

$$\widetilde{\Delta}_n = 0$$

pour tout $n \geqslant 1$.

Désignons par $A^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$ le dual d'un Λ-module A; alors on a :

Corollaire. — Pour qu'une algèbre A *de type fini dont chaque* A_n *est projectif, soit réalisable, il faut que le composé*

$$\psi_n : (A_n^{*[n-1]})^* \to A_n \otimes_\Lambda A_n \to A_{2n}$$

soit nul pour $n \geqslant 1$, *où le second morphisme est la restriction de la multiplication de l'algèbre* A.

Démonstration du théorème 3. — Il suffit de démontrer $\widetilde{\Delta}_n = 0$ pour $H_*(X)$ quel que soit X. Pour cela, soit η un projecteur

$$\eta = \prod_n \eta_n : C(X) \to Z(X)$$

qui définit la classe fondamentale choisie de $H^*(X, H_*(X))$ comme dans le chapitre 1, § 2.

$$\eta_n^* = \{\overline{\eta}_n\} \in H^n(X, H_n(X)), \quad \text{où} \quad \overline{\eta}_n = p \circ \eta_n \quad \text{et} \quad p : Z(X) \to H(X)$$

Alors l'image $\xi^\#$ de la classe

$$\xi^* = \{\overline{\eta}_n \smile \overline{\eta}_n\} \in H^{2n}(X, H_n(X) \otimes H_n(X))$$

par la projection du théorème des coefficients universels est une application

$$H_{2n}(X) \to H_n(X) \otimes H_n(X)$$

qui n'est autre que la composée Δ'

$$H_{2n}(X) \xrightarrow{\Delta} H_*(X) \otimes H_*(X) \to H_n(X) \otimes H_n(X),$$

car cela résulte de la définition de Δ à partir de la classe η^*. Or le théorème 2 entraîne que

$$\eta_n^{*2} = 0 \quad \text{dans} \quad H^{2n}(X, H_n(X)^{[n-1]})$$

d'où

$$f(\xi^*) = \eta_n^{*2} = 0$$

où f est défini par (1 *bis*), c'est-à-dire

$$f : H^{2n}(X, H_n(X) \otimes H_n(X)) \to H^{2n}(X, H_n(X)^{[n-1]})$$

Donc la composée

$$H_{2n}(X) \xrightarrow{\Delta'} H_n(X) \otimes H_n(X) \xrightarrow{*} H_n(X)^{[n-1]},$$

qui est égale à l'image de η_n^{*2} par la projection définie par le théorème des coefficients universels, est nulle, d'où

$$\widetilde{\Delta}_n = * \circ \Delta' = 0.$$

Exemple. — Considérons la coalgèbre $H_*(X, \mathbf{Z})$, où $X = \Omega(\mathbf{S}_{n+1})$ est l'espace des lacets d'une sphère de dimension impaire $n+1$, et désignons-la par

$${}^nC = H_*(X, \mathbf{Z}),$$

où n est pair; la comultiplication

$${}^nC_{2n} \to {}^nC_n \otimes {}^nC_n = \mathbf{Z}$$

n'est pas nulle. Mais on peut considérer aussi une telle coalgèbre C avec, cette fois, n impair; la structure de module et la comultiplication sont exactement celles de ${}^nC$, mais n est impair. Alors *cette coalgèbre* C *n'est pas réalisable.* En effet, l'homomorphisme

$$\widetilde{\Delta}_n : \mathbf{Z} = C_{2n} \xrightarrow{\Delta'} C_n \otimes C_n = \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} \xrightarrow{*} H_{2(n-1)}(\mathbf{Z}, n-1, \mathbf{Z})$$

n'est pas nul, car $\Delta'(1) = \alpha(1 \otimes 1)$ avec $\alpha \neq 0$, et de plus $1 * 1 \in H_{2(n-1)}(\mathbf{Z}, n-1, \mathbf{Z})$ est non nul aussi, puisque $n-1$ est pair.

§ 4. LA NOTION DE FIBRÉ *n*-TRIVIAL

Les résultats de cette section permettront de placer le théorème 1 dans un cadre un peu plus général, ainsi que le théorème sur la suite spectrale du fibré qu'on va traiter au chapitre V.

On dit qu'un fibré E, de base B et de fibre F, *est n-trivial* si le fibré induit sur le n^e squelette B^n de B est isomorphe au fibré trivial; alors on a :

Proposition 1. — Pour qu'un fibré E *de groupe structural* G *soit n-trivial, il faut et il suffit que le fibré principal associé à* E *soit obtenu par agrandissement du groupe structural à partir d'un fibré de groupe* $G^{[n-1]}$.

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer la proposition pour un fibré principal. Ensuite, la condition est suffisante : En effet, si le fibré E est obtenu par agrandissement du groupe structural à partir d'un fibré de groupe $G^{[n-1]}$, alors E est isomorphe au fibré induit par une application f de sa base B dans $\overline{W}(G)$ qui se factorise en une application f'

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & \overline{W}(G) \\ & \overline{W}(G^{[n-1]}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

D'autre part, une vérification directe de la définition de $\overline{W}(G)$ et le système de Postnikov montrent que

$$\overline{W}(G^{[n-1]}) = \overline{W}(G)^{[n]}.$$

Ainsi la composée

$$B^n \to B \xrightarrow{f} \overline{W}(G)$$

n'est autre que l'application qui envoie B^n sur le point-base de $\overline{W}(G)$, donc E est bien n-trivial. Inversement, supposons que le fibré E soit trivial au-dessus de B^n. En vertu du lemme qui va suivre, le fibré E est alors isomorphe au fibré induit par une application simpliciale de B dans $\overline{W}(G)$ qui envoie B^n au point-base de $\overline{W}(G)$, donc cette application se factorise comme le composé d'une application f' de B dans $\overline{W}(G^{[n-1]}) = \overline{W}(G)^{[n]}$ avec l'injection de $\overline{W}(G)^{[n]}$ dans $\overline{W}(G)$, d'où il résulte que E est obtenu par agrandissement du groupe structural à partir d'un fibré de groupe $G^{[n-1]}$.

c.q.f.d.

Lemme. — Soit B′ *un sous-ensemble simplicial de* B. *Si la restriction* X′ *du fibré* X *au-dessus de* B′ *est isomorphe au fibré induit par une application f' de* B′ *dans* $\overline{W}(G)$, *alors il existe une application simpliciale f de* B *dans* $\overline{W}(G)$ *qui prolonge f' et induit un fibré isomorphe à* X.

Démonstration. — Pour cela, nous nous référons à l'exposé 4, Séminaire Cartan 56-57, proposition 6 [4]. Ici par hypothèse, il existe un morphisme de fibrés G-principaux,

$$g' : X' \to W(G)$$

qui induit f', d'après la proposition 6 en question, g' peut se prolonger en un morphisme

$$g : X \to W(G)$$

alors l'application $f : B \to \overline{W}(G)$ induite par g prolonge f' et définit un isomorphisme de X sur le fibré image réciproque par f.

c.q.f.d.

D'ailleurs, on peut déduire aussi cette proposition 1 du théorème 1 de l'Appendice; en effet, il suffit d'appliquer ce théorème au système de Postnikov de G :

$$(1) \to G^{[n-1]} \to G \to G^{(n-1)} \to (1).$$

Par la proposition 1, on constate facilement que les théorèmes de ce paragraphe et celui du chapitre V, sont encore valables, si au lieu de supposer que le groupe structural est $(n-1)$-connexe on suppose plus généralement que le fibré est n-trivial. En effet, il suffit de remplacer les classes ξ qui interviennent dans l'énoncé du théorème 1, par les classes $\overline{\xi}$ que voici : Considérons d'abord les classes ξ' de $H^*(B, H_*(G^{[n-1]}))$ définies par un fibré de groupe structural $G^{[n-1]}$, qui, par agrandissement du groupe structural donne naissance au fibré donné. Alors les $\overline{\xi}$ sont définies comme l'image des ξ' par le morphisme canonique

$$H^*(B, H_*(G^{[n-1]})) \to H^*(B, H_*(G))$$

Il est nécessaire de remarquer que les classes $\overline{\xi}$ ainsi associées à un fibré n-trivial ne sont pas uniques, mais ceci n'empêche pas que les résultats restent valables.

Par exemple, le théorème 1 peut être énoncé comme :

Théorème 1 bis. — Pour tout fibré E, *trivial au-dessus de* B^n, *on a*

$$\eta^2 = 0,$$

chaque fois que la classe η *est l'image de la classe caractéristique d'un fibré de groupe* $G^{[n-1]}$ *obtenu par restriction du groupe structural de* E.

§ 5. APPENDICE

Considérons une suite exacte de groupes simpliciaux

$$(1) \to G'' \to G \to G' \to (1)$$

(on identifiera G'' à un sous-groupe de G). Il lui correspond les deux suites d'applications simpliciales

$$W(G'') \to W(G) \xrightarrow{f} W(G')$$
$$\overline{W}(G'') \to \overline{W}(G) \xrightarrow{\overline{f}} \overline{W}(G').$$

Alors, d'après H. Cartan (non publié), on a :

Théorème 1. — Les deux applications f et $\overline{f}$ sont fibrées.

(Il est clair alors que la fibre de f est $W(G'')$, et que la fibre de $\overline{f}$ est $\overline{W}(G'')$: on prend comme point-base de $\overline{W}(G)$ l'unique élément de degré 0, et comme point-base de $W(G) = G \times_\tau \overline{W}(G)$ le « produit » de l'élément neutre de G par le point-base de $\overline{W}(G)$.)

Dans le cas de l'application f, on démontrera un résultat plus fort que le théorème 1 :

Théorème 2. — Soient donnés $b \in W_n(G')$ *et des* $x_i \in W_{n-1}(G)$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant n$, *tels que*

$$f(x_i) = d_i b, \quad d_i x_j = d_{j-1} x_i \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{1}$$

Alors il existe $x \in W_n(G)$ *tel que*

$$d_i x = x_i \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad f(x) = b. \tag{2}$$

(ceci est une propriété de Kan « renforcée », puisque i parcourt l'intervalle $[0, n]$ sans aucune valeur d'exception).

Pour la démonstration, on aura besoin de deux lemmes :

Lemme 1. — Soient $a \in W_n(G)$ *et* $x_0 \in W_{n-1}(G)$ *tels que*

$$f(d_0 a) = f(x_0), \quad d_j(d_0 a) = d_j x_0 \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1. \tag{3}$$

Alors il existe $y \in W_n(G)$ *tel que*

$$f(y) = f(a), \quad d_0 y = x_0, \quad d_i y = d_i a \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4}$$

(la réciproque étant évidente.)

Lemme 2. — Soient $a \in W_n(G)$ *et* $z \in \overline{W}_n(G)$ *tels que*

$$\bar{f}(pa) = \bar{f}(z), \quad d_i(pa) = d_i z \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad i \neq k \ (0 \leqslant k \leqslant n); \tag{5}$$

alors il existe $y \in W_n(G)$ *tel que*

$$f(y) = f(a), \quad p(y) = z, \quad d_i y = d_i a \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad i \neq k \tag{6}$$

(la réciproque étant évidente).

(p désigne la projection $W(G) \to \overline{W}(G)$).

Démonstration du lemme 1. — Soit

$$a = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0), \qquad x_0 = (b_{n-1}, \ldots, b_0)$$

avec $a_i \in G_i$, $b_i \in G_i$.

Les conditions (3) expriment que $b_i = a_i$ pour $i \leqslant n-3$,

$$b_{n-1} = \gamma_{n-1}(d_0 a_n) a_{n-1}, \qquad b_{n-2} = \gamma_{n-2} a_{n-2},$$

avec $\gamma_{n-1} \in G''_{n-1}$, $\gamma_{n-2} \in G''_{n-2}$, et

$$\begin{cases} (d_0\gamma_{n-1})(d_0 d_0 a_n)(d_0 a_{n-1})\gamma_{n-2} = (d_0 d_0 a_n)(d_0 a_{n-1}) \\ d_i \gamma_{n-1} = 1 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1, \\ d_i \gamma_{n-2} = 1 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 0. \end{cases}$$

Pour y, il suffit alors de prendre

$$y = (a_n, \gamma'_{n-1} a_{n-2}, \gamma_{n-1} a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_0),$$

où $\gamma'_{n-1} \in G''_{n-1}$ est donné par

$$\gamma'_{n-1} = (d_0 a_n)^{-1} \gamma_{n-1} (d_0 a_n).$$

Démonstration du lemme 2. — On distinguera deux cas, suivant que $k=0$ ou $k\neq 0$.

Premier cas : $k=0$. — Soit $a=(a_n, \ldots, a_0)$, $a_i \in G_i$. Les conditions (5) expriment que

$$z=(\gamma_{n-1}a_{n-1}, \gamma_{n-2}a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_0),$$

avec $\gamma_{n-1}\in G''_{n-1}$, $\gamma_{n-2}\in G''_{n-2}$ tels que

$$\begin{cases} (d_0\gamma_{n-1})(d_0a_{n-1})\gamma_{n-2}=d_0a_{n-1} \\ d_i\gamma_{n-1}=1 \text{ pour } i\geqslant 1 \\ d_i\gamma_{n-2}=1 \text{ pour } i\geqslant 0 \end{cases}$$

Pour y, il suffit alors de prendre

$$y=(a_n, \gamma_{n-1}a_{n-1}, \gamma_{n-2}a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_0).$$

Deuxième cas : $k\neq 0$. — Soit toujours $a=(a_n, \ldots, a_0)$. Les conditions (5) expriment que $z=(\gamma_{n-1}a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0)$, avec $\gamma_{n-1}\in G''_{n-1}$ tel que $d_j\gamma_{n-1}=1$ pour $0\leqslant j\leqslant n-1$, $j\neq k-1$. Pour y, il suffit alors de prendre

$$y=(\gamma'_n a_n, \gamma_{n-1}a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0),$$

où $\gamma'_n\in G''_n$ est tel que

$$\begin{cases} d_0\gamma'_n=(d_0a_n)\gamma_{n-1}(d_0a_n)^{-1} \\ d_i\gamma'_n=1 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant n,\ i\neq k. \end{cases}$$

(Un tel γ'_n existe, parce que G'' satisfait à la condition de Kan.)

On va maintenant aborder la démonstration des théorèmes 1 et 2.

On dira qu'une application est n-fibrée si elle satisfait à la condition de Kan pour l'entier n.

Proposition 1. — Si $\overline{f}$ est n-fibrée, alors f est n-fibrée.

Démonstration : soient donnés $b\in W_n(G')$ et des $x_i\in W_{n-1}(G)$ (pour $0\leqslant i\leqslant n$, $i\neq k$), satisfaisant à

(7) $$f(x_i)=d_ib \text{ pour } i\neq k,\ d_ix_j=d_{j-1}x_i \text{ pour } i<j,\ i\neq k, j\neq k.$$

On cherche un $x\in W_n(G)$ tel que

(8) $$d_ix=x_i \text{ pour } i\neq k,\ f(x)=b.$$

Soient $\overline{b}=pb\in\overline{W}_n(G')$, $\overline{x}_i=px_i\in\overline{W}_{n-1}(G)$. On a

$$\overline{f}(\overline{x}_i)=d_i\overline{b},\ d_i\overline{x}_j=d_{j-1}\overline{x}_i \text{ pour } i<j\ (i\neq k, j\neq k)$$

et puisque $\overline{f}$ est n-fibrée par hypothèse, il existe $y\in\overline{W}_n(G)$ tel que $d_iy=\overline{x}_i$ pour $i\neq k$, $\overline{f}(y)=\overline{b}$.

Soit $x'\in W_n(G)$ tel que $px'=y$. On a

$$p(fx')=pb,\ p(d_ix')=px_i \text{ pour } i\neq k.$$

La première de ces relations montre que $fx'=\alpha b$, avec $\alpha\in G''_n$. Soit $\gamma\in G_n$ ayant α pour image : soit $x''=\gamma^{-1}x'$: alors

$$f(x'')=b,\ d_ix''=\gamma_ix_i, \text{ avec } \gamma_i\in G_{n-1} \text{ pour } i\neq k.$$

Écrivons $d_i d_j x'' = d_{j-1} d_i x''$ pour $i<j, i \neq k, j \neq k$: on obtient, compte tenu de (7), $\gamma_i = \gamma_j$ pour $i<j$: donc tous les γ_i sont égaux. Soit γ leur valeur commune. Appliquons f à la relation $d_i x'' = \gamma x_i$: il vient :

$$d_i b = \gamma' f(x_i), \ \gamma' \text{ étant l'image de } \gamma \text{ dans } G'.$$

Compte tenu de (7), on trouve $\gamma' = 1$; donc $\gamma \in G''$. Alors

$$x = \gamma^{-1} x''$$

satisfait à (8), ce qui démontre la proposition.

Proposition 2. — Si f est n-fibrée, f est n-fortement fibrée (« n-fortement-fibrée » exprime la propriété du théorème 2 pour l'entier n).

Démonstration : Soient des données b et x_i satisfaisant à (1), comme dans le théorème 2. Puisque f est n-fibrée, il existe $x \in W_n(G)$ tel que

(2)′ $$d_i x = x_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad f(x) = b.$$

En vertu de (1), on a alors

(3)′ $$f(d_0 x) = f(x_0), \ d_j(d_0 x) = d_j x_0 \ \text{pour} \ 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Appliquons le lemme 1 : soit $y \in W_n(G)$ satisfaisant à (4). Alors

$$f(y) = b, \quad d_0 y = x_0, \quad d_i y = x_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

et l'existence d'un tel y prouve que f est n-fortement fibrée.

Proposition 3. — Si f est n-fibrée et n-fortement fibrée, alors $\overline{f}$ est $(n+1)$-fibrée.

Démonstration : soient $b \in \overline{W}_{n+1}(G')$ et $x_i \in \overline{W}_n(G)$ (pour $0 \leqslant i \leqslant n+1$, $i \neq k$), tels que

(9) $$\overline{f}(x_i) = d_i b \quad \text{pour} \quad i \neq k, \qquad d_i x_j = d_{j-1} x_i \quad \text{pour} \quad i<j, \ i \neq k, \ j \neq k.$$

On cherche un $x \in \overline{W}_{n+1}(G)$ tel que

(10) $$\overline{f}(x) = b, \quad d_i x = x_i \quad \text{pour} \quad i \neq k.$$

On va distinguer deux cas, suivant que $k=0$ ou $k \neq 0$.

Premier cas : $k=0$. — Notons ρ le relèvement canonique $\overline{W}(G) \to W(G)$, et $\lambda = d_0 \rho$ la bijection qui envoie $\overline{W}_{n+1}$ sur W_n. L'indice i prenant les valeurs de 1 à $n+1$, posons

$$\lambda x_i = y_{i-1}, \qquad \lambda b = c.$$

D'après (9), les données y_{i-1} et c satisfont à

$$\begin{cases} f(y_{i-1}) = d_{i-1} c & \text{pour} \quad 0 \leqslant i-1 \leqslant n, \\ d_{i-1} y_{j-1} = d_{j-2} y_{i-1} & \text{pour} \quad i-1 < j-1. \end{cases}$$

Puisque f est n-fortement fibrée, il existe un $y \in W_n(G)$ satisfaisant à

$$f(y) = c, \quad d_{i-1} y = y_{i-1} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i-1 \leqslant n.$$

Prenons $x = \lambda^{-1} y \in \overline{W}_{n+1}(G)$: alors x satisfait à (10), et la proposition est démontrée dans le cas où $k = 0$.

Deuxième cas : $k \neq 0$. — Pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $i \neq k$, posons encore $\lambda x_i = y_{i-1}$, et soit toujours $\lambda b = c$. Les conditions (9) se traduisent par

$$(11)\quad \begin{cases} f(y_{i-1}) = d_{i-1}c & \text{pour} \quad 0 \leqslant i-1 \leqslant n, \quad i-1 \neq k-1, \\ d_{i-1}y_{j-1} = d_{j-2}y_{i-1} & \text{pour} \quad i-1 < j-1, \quad i-1 \neq k-1, \quad j-1 \neq k-1 \\ py_{j-1} = d_{j-1}x_0 & \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1, \quad j \neq k \\ pc = \overline{f}(x_0). \end{cases}$$

Puisque f est n-fibrée, les deux premières relations (11) entraînent l'existence d'un $a \in W_n(G)$ tel que

$$f(a) = c, \quad d_{i-1}a = y_{i-1} \quad \text{pour} \quad i-1 \neq k-1.$$

Les deux dernières relations (11) entraînent alors

$$\overline{f}(pa) = \overline{f}(x_0), \quad d_j(pa) = d_j x_0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant n, \quad j \neq k-1.$$

Appliquons alors le lemme 2 (où k serait remplacé par $k-1$, et z par x_0) : on voit qu'il existe $y \in W_n(G)$ tel que

$$f(y) = c, \quad py = x_0, \quad d_j y = y_j \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant n, \quad j \neq k-1.$$

Prenons alors $x = \lambda^{-1} y \in \overline{W}_{n-1}(G)$: on vérifie que x satisfait à (10). La démonstration de la proposition 3 est ainsi achevée.

Il est clair que les théorèmes 1 et 2 résultent des propositions 1, 2 et 3, par récurrence sur n.

CHAPITRE IV

LE CAP ET CUP-PRODUIT GÉNÉRALISÉ

Dans ce chapitre, on va introduire quelques accouplements pour les modules d'homologie d'une coalgèbre différentielle graduée sur un anneau principal Λ. On commencera par quelques propriétés des modules d'homologie de Hom et $\otimes$. Ensuite, on donnera la définition des accouplements

$$\frown : H^*(C, H_*(A))\otimes H_*(C, H_*(M, K)) \to H_*(C, H_*(M, K))$$
$$\smile : H^*(C, H_*(A))\otimes H^*(C, H^*(M, K)) \to H^*(C, H^*(M, K))$$

où C est une coalgèbre différentielle graduée libre et M un m.d.g. sur l'algèbre différentielle graduée A, K un module sur Λ. Nous les appelons le cap-produit généralisé (resp. cup-produit généralisé); on donnera dans le § 4 une justification de cette définition et certaines propriétés dont on a besoin au chapitre V.

§ 1. PRÉLIMINAIRES

La notion de classe fondamentale, qu'on a définie au chapitre I, § 2, peut servir à la détermination du module d'homologie de Hom(X, A); elle donne lieu à quelques isomorphismes dont on aura besoin dans le paragraphe suivant.

Lemme 1. — Étant donnée une classe fondamentale θ^A *d'un* m.d.g. A, *et un* m.d.g. *projectif* X, *on a un isomorphisme canonique*

$$\theta^A : H^*(\mathrm{Hom}(X, A)) \to H^*(X, H_*(A)).$$

Démonstration. — D'abord on a par définition

$$H^*(X, H_*(A)) = H^*(\mathrm{Hom}(X, H_*(A)));$$

donc un cocycle

$$p : \bar{A} \to H_*(A)$$

dans la classe θ^A d'une résolution projective $(\bar{A}, f)$ de A, définit un morphisme de m.d.g.

$$\mathrm{Hom}(X, p) : \mathrm{Hom}(X, \bar{A}) \to \mathrm{Hom}(X, H_*(A))$$

et le morphisme f de la résolution projective définit un morphisme de m.d.g.

$$\mathrm{Hom}(X, f) : \mathrm{Hom}(X, \bar{A}) \to \mathrm{Hom}(X, A).$$

En passant à l'homologie, on obtient

$$\theta_1 : H_*(\mathrm{Hom}(X, \bar{A})) \to H_*(\mathrm{Hom}(X, H_*(A))$$
$$\theta_2 : H_*(\mathrm{Hom}(X, \bar{A})) \to H_*(\mathrm{Hom}(X, A))$$

où θ_1 est indépendant du choix de p dans θ^A, d'après le corollaire du § 1, chapitre I. Il reste à démontrer que θ_i $(i=1, 2)$ est un isomorphisme. Or, le cocycle p définit la suite exacte de m.d.g.

$$0 \to W \to \overline{A} \xrightarrow{p} H_*(A) \to 0$$

tel que

$$H_*(W) = 0,$$

puisque p_* est un isomorphisme

$$p_* : H_*(\overline{A}) \xrightarrow{\approx} H_*(A).$$

Donc, d'après le théorème 4.3 du chapitre XVII de [4], on a

$$H_*(\mathrm{Hom}(X, W)) = 0.$$

D'autre part, la suite des m.d.g.

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, W) \to \mathrm{Hom}(X, \overline{A}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(X, p)} \mathrm{Hom}(X, H_*(A)) \to 0$$

est exacte, puisque X est projectif. Alors la suite exacte d'homologie associée montre bien que

$$\theta_1 = \mathrm{Hom}(X, p)_*$$

est un isomorphisme. De même, on a la suite exacte des m.d.g.

$$0 \to W' \to \overline{A} \xrightarrow{f} A \to 0$$

puisque f est surjectif, donc W′ est acyclique, et le même raisonnement montre que

$$\theta_2 = \mathrm{Hom}(X, f)_*$$

est un isomorphisme.

C.q.f.d.

Lemme 2. — Soient A, B *et* C *trois* m.d.g. *Supposons* A *projectif. Alors une classe fondamentale de* B⊗C *définit un isomorphisme canonique*

$$H_*(A \otimes B \otimes C) \approx H_*(A, H_*(B \otimes C))$$

De même, une classe fondamentale de Hom(B, C) *définit un isomorphisme canonique*

$$H^*(\mathrm{Hom}(A \otimes B, C)) \approx H^*(A, H^*(\mathrm{Hom}(B, C)))$$

Démonstration. — Soit $(\overline{B \otimes C}, f)$ une résolution projective de B⊗C, et

$$p : \overline{B \otimes C} \to H_*(B \otimes C)$$

un cocycle dans la classe fondamentale. Alors, les morphismes de m.d.g.

$$1_A \otimes p : A \otimes \overline{B \otimes C} \to A \otimes H_*(B \otimes C)$$
$$1_A \otimes f : A \otimes \overline{B \otimes C} \to A \otimes B \otimes C$$

induisent des isomorphismes des modules d'homologie

$$H_*(A \otimes \overline{B \otimes C}) \underset{\approx}{\to} H_*(A \otimes H_*(B \otimes C)) = H_*(A, H_*(B \otimes C))$$
$$H_*(A \otimes \overline{B \otimes C}) \underset{\approx}{\to} H_*(A \otimes B \otimes C)$$

puisque p_* et f_* sont des isomorphismes, et que A est projectif; on obtient donc le premier isomorphisme du lemme. D'autre part, l'isomorphisme canonique

$$\psi : \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \underset{\approx}{\rightarrow} \mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$$

du lemme 2, § 1, chapitre I, définit un isomorphisme

$$\psi_* : H^*(\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))) \approx H^*(\mathrm{Hom}(A \otimes B, C)).$$

Alors, le second isomorphisme en question est une conséquence immédiate du lemme 1 appliqué aux m d.g. A et Hom(B, C).

c.q.f.d.

En particulier, si C est un module K sur Λ, et que B est projectif, on obtient :

Corollaire 1. — *Soient* A, B *deux* m.d.g. *projectifs, et* K *un module sur* Λ. *Alors chaque classe fondamentale de* B

$$\theta^B \in H^0(B \otimes \mathscr{K}, H_*(B, K))$$

où $\mathscr{K}$ *est une résolution projective ordinaire de* K, *détermine un isomorphisme*

$$H_*(A \otimes B \otimes K) \approx H_*(A, H_*(B, K)).$$

De même, chaque coclasse fondamentale de B

$$\omega^B \in H^0(H^*(B, K), \mathrm{Hom}(B, \mathscr{K})),$$

où $\mathscr{K}$ *est une résolution injective ordinaire de* K, *détermine un isomorphisme*

$$H^*(\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, K))) \approx H^*(A, H^*(B, K)).$$

Corollaire 2. — *La cohomologie* (resp. *homologie*) *du produit* $X \times Y$ *de deux espaces topologiques est isomorphe à la cohomologie de* X *à coefficients dans la cohomologie de* Y (resp. *homologie*).

§ 2. LE CAP-PRODUIT GÉNÉRALISÉ

Soit C une coalgèbre différentielle graduée libre, et Π, Π', Π'' des modules sur Λ,

$$\nu : \Pi \otimes \Pi' \rightarrow \Pi''$$

un morphisme du module $\Pi \otimes \Pi'$ dans le module Π''. Alors dans la théorie [17] classique, on a des produits

$$\smile : H^p(C, \Pi) \otimes H^q(C, \Pi') \rightarrow H^{p+q}(C, \Pi''),$$
$$\frown : H^p(C, \Pi) \otimes H_q(C, \Pi') \rightarrow H_{q-p}(C, \Pi'').$$

Or, tout module Π est isomorphe à l'homologie d'un m.d.g. libre, en considérant, par exemple, une résolution projective de Π. Donc, il sera tout à fait naturel de regarder comment on peut introduire des produits dans le cas où les coefficients sont pris dans les homologies de m.d.g. Pour cela, désignons par

C une coalgèbre différentielle graduée libre, et

$$\Delta : C \to C \otimes C$$

son morphisme diagonal. Soient A, M et N trois m.d.g., avec un morphisme de m.d.g. de degré zéro

$$\mu : A \otimes M \to N,$$

et soit K un module sur Λ.

D'abord, on va définir un morphisme de m.d.g. :

$$\mathrm{Hom}(C, A) \otimes (C \otimes M \otimes K) \to C \otimes (A \otimes M \otimes K) \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même d'après le lemme 2, § 1, chapitre I, un morphisme

$$\mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C \otimes M \otimes K, C \otimes (A \otimes M \otimes K)).$$

Par définition, celui-ci sera le composé des morphismes de m.d.g.

$$\mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C, C) \otimes \mathrm{Hom}(C, A) \otimes \mathrm{Hom}(M \otimes K, M \otimes K) \to$$
$$\mathrm{Hom}(C \otimes C \otimes M \otimes K, C \otimes A \otimes M \otimes K) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Hom}(C \otimes M \otimes K, C \otimes A \otimes M \otimes K).$$

Autrement dit, à $f \in \mathrm{Hom}(C, A)$ on associe l'application composée

$$C \otimes M \otimes K \xrightarrow{\Delta \otimes 1} C \otimes C \otimes M \otimes K \xrightarrow{1_C \otimes f \otimes 1_{M \otimes K}} C \otimes A \otimes M \otimes K$$

(il faut faire attention aux conventions de signes déjà faites : $1 \otimes f \otimes 1$ transforme $c \otimes c' \otimes m \otimes k$ en $(-1)^{(\deg. c)(\deg. f)} c \otimes f(c') \otimes m \otimes k$). De même, on définit un morphisme

$$\mathrm{Hom}(C, A) \otimes \mathrm{Hom}(C, M \otimes K) \to \mathrm{Hom}(C, A \otimes M \otimes K) \tag{2}$$

qui est le composé des morphismes de m.d.g. :

$$\mathrm{Hom}(C, A) \otimes \mathrm{Hom}(C, M \otimes K) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}(C \otimes C, A \otimes M \otimes K)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}(\Delta, A \otimes M \otimes K)} \mathrm{Hom}(C, A \otimes M \otimes K)$$

où φ est le morphisme du lemme 1, § 1, chapitre I. Les composés de (1) et (2) avec μ sont des morphismes de m.d.g., d'où on déduit en passant à l'homologie, des morphismes :

$$H^k(\mathrm{Hom}(C, A)) \otimes H_i(C \otimes M \otimes K) \to H_{i-k}(C \otimes N \otimes K) \tag{1)'$$

$$H^k(\mathrm{Hom}(C, A)) \otimes H^i(\mathrm{Hom}(C, M \otimes K)) \to H^{i+k}(\mathrm{Hom}(C, N \otimes K)) \tag{2)'$$

qui ne dépendent que de la classe

$$\mu^* \in H^0(\mathrm{Hom}(A \otimes M, N))$$

définie par μ. On pose alors la

Définition 1. — Étant donné des classes fondamentales θ^A, θ^M, θ^N, et une classe μ^* comme ci-dessus, on appelle cap-produit généralisé associé à θ^A, θ^M, θ^N et μ^*, le morphisme

$$\frown : H^k(C, H_*(A)) \otimes H_i(C, H_*(M, K)) \to H_{i-k}(C, H_*(N, K))$$

déduit de (1)' *par transport de structure à l'aide des isomorphismes*

$$\begin{aligned} H^k(\mathrm{Hom}(C, A)) &\approx H^k(C, H_*(A)) \\ H_i(C\otimes M\otimes K) &\approx H_i(C, H_*(M, K)) \\ H_{i-k}(C\otimes N\otimes K) &\approx H_{i-k}(C, H_*(N, K)) \end{aligned}$$

définis par θ^A, θ^M *et* θ^N *respectivement* (cf. *Corollaire 1*, § 1). *De même, on appelle produit généralisé associé à* θ^A, θ^M, θ^N *et* μ^*, *le morphisme*

$$H^k(C, H_*(A))\otimes H^i(C, H_*(M, K)) \to H^{i+k}(C, H_*(N, K))$$

déduit de (2)' *par transport de structure à l'aide des classes fondamentales.*

Remarque. — Il faut rappeler les conventions d'écriture pour les degrés qu'on a déjà introduites au début du § 2, chapitre I : en notant

$$H_{t_*}(A)$$

le sous-module gradué de $H_*(A)$, formé des éléments de degré t de $H_*(A)$, alors $H^k(C, H_{t_*}(A))$, sous-module de $H^k(C, H_*(A))$, s'identifie à $H^{k+t}(C, H_t(A))$. En explicitant, on voit par exemple que le cap-produit $\frown$ envoie

$$H^n(C, H_i(A))\otimes H_m(C, H_j(M, K)) \quad \text{dans} \quad \sum_t H_{m-n-t}(C, H_{i+j+t}(N, K)).$$

Plus précisément, on va démontrer le lemme suivant :

Lemme 1. — *Le cap-produit* $\frown$ *envoie* $H^n(C, H_i(A))\otimes H_m(C, H_j(M, K))$ *dans*

$$H_{m-n}(C, H_{i+j}(N, K)) + H_{m-n-1}(C, H_{i+j+1}(N, K)) + H_{m-n-2}(C)\otimes H_{i+j+2}(N, K),$$

et la composante suivant $H_{m-n}(C, H_{i+j}(N, K))$ *n'est autre que le cap-produit ordinaire, relatif à l'application de Pontrjagin*

$$H_i(A)\otimes H_j(M, K) \to H_{i+j}(N, K)$$

définie par μ^*. *De même, le produit généralisé envoie* $H^n(C, H_i(A))\otimes H^m(C, H_j(M, K))$ *dans*

$$H^{n+m}(C, H_{i+j}(N, K)) + H^{n+m+1}(C, H_{i+j+1}(N, K)) + H^{n+m+2}(C, H_{i+j+2}(N, K)),$$

la composante dans $H^{n+m+2}(C, H_{i+j+2}(N, K))$ *étant dans l'image de*

$$H^{n+m+2}(C, Z_{i+j+2}(N, K)),$$

et la composante dans $H^{n+m}(C, H_{i+j}(N, K))$ *étant le cup-produit ordinaire.*

Remarque. — Il s'agit du cap-produit (resp. cup-produit) ordinaire, mais modifié quant aux signes.

En particulier, si $i=0$, $j=0$, et si les homologies de A, M, N sont nulles en degrés $\neq 0$, on voit immédiatement que $\frown$ s'identifie au cap-produit ordinaire; donc les produits définis ici constituent une *généralisation naturelle* des produits ordinaires.

Démonstration du lemme 1. — Pour simplifier l'écriture, on traite le cas $K=\Lambda$, et le cas général sera fait de la même manière. Remarquons d'abord que tout élément

$$\xi\in H^n(C, H_i(A)) = H^{n-i}(C, H_{i_*}(A))$$

provient d'un cycle f de $\mathrm{Hom}^{n-i}(C, A)$ qui s'annule sur C_t pour $t \neq n, n+1$. En effet, il existe un morphisme

$$\bar{f} : C_n \to Z_i(A)$$

tel que le composé de $\bar{f}$ avec la projection naturelle de $Z_i(A)$ dans $H_i(A)$ soit un cycle de la classe ξ, puisque C est libre. Servons-nous du relèvement ρ (remarque 1, § 2, chapitre I), et choisissons-en un pour C; alors $\bar{f}$ se prolonge en un cycle f de degré $n-i$:

$$\begin{cases} f_t = 0 \quad \text{pour} \quad t \neq n, n+1 \\ f_{n+1} = \begin{cases} 0 \quad \text{sur} \quad Z_{n+1}(C) \\ (-1)^{n-i} \rho \circ f \circ d \quad \text{sur l'image par } \rho \text{ de } D_n(C) \text{ dans } C_{n+1} \end{cases} \\ f_n = \bar{f}. \end{cases}$$

De même, tout élément de $H_m(C, H_j(M)) = H_{m+j}(C, H_{j*}(M))$ provient d'un cycle de

$$\delta \in C_m \otimes Z_j(M) + C_{m-1} \otimes M_{j+1}$$

puisque les suites suivantes sont exactes (car C est libre) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to C_m \otimes D_j & \longrightarrow & C_m \otimes Z_j & \longrightarrow & C_m \otimes H_j(A) \to 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_{m-1} \otimes M_{j+1} \to C_{m-1} \otimes D_j & \to & C_{m-1} \otimes Z_j & \to & C_{m-1} \otimes H_j(A) \to 0 \end{array}$$

Ceci entraîne que le morphisme $\Delta \otimes 1_M$ envoie δ dans

$$C_{m-n} \otimes C_n \otimes M_j + C_{m-n-1} \otimes (C_n \otimes M_{j+1} + C_{n+1} \otimes M_j) + C_{n-i-2} \otimes C_{n+1} \otimes M_{j+1}$$

plus des termes qui, par $1 \otimes f \otimes 1$, donnent zéro. Donc $(1 \otimes f \otimes 1) \circ (\Delta \otimes 1_M)$ envoie δ finalement dans

$$C_{m-n} \otimes (Z_i(A) \otimes Z_j(M)) + C_{m-n-1} \otimes [A_{i+1} \otimes Z_j(M) + Z_i(A) \otimes M_{j+1}] + C_{m-n-2} \otimes (A_{i+1} \otimes M_{j+1}),$$

et comme son image est un cycle de $C \otimes A \otimes M$, on en déduit immédiatement que la troisième composante est dans

$$Z_{m-n-2}(C) \otimes (A_{i+1} \otimes M_{j+1}).$$

En appliquant le morphisme μ et un cocycle p dans la classe fondamentale de N, θ^N, on voit que la troisième composante donne un élément de

$$H_{m-n-2}(C) \otimes H_{i+j+2}(N)$$

et que la seconde composante donne un élément de

$$H_{m-n-1}(C, H_{i+j+1}(N)).$$

D'autre part, comme la restriction de μ à $Z_i(A) \otimes Z_j(M)$ définit précisément l'application de Pontrjagin, on conclut que la première composante de $(1 \otimes f \otimes 1) \circ (\Delta \otimes 1_M)(\delta)$ est précisément le cap-produit ordinaire de ξ et $\{\delta\}$:

$$\xi \frown \{\delta\} \in H_{m-n}(C, H_{i+j}(N)).$$

Par le même raisonnement, on peut démontrer la seconde partie du lemme.

c.q.f.d.

Lemme 2. — Supposons que $H_*(A)$ *et* $H_*(M)$ *soient des modules projectifs; alors le cap-produit généralisé* $\frown$ (resp. *le produit*) *s'identifie au cap-produit ordinaire* $\frown$ (resp. *cup-produit ordinaire*) *relatif à l'application de Pontrjagin*

$$H_*(A) \otimes H_*(M, K) \to H_*(N, K)$$

définie par μ^*.

En particulier, les conditions sont automatiquement satisfaites si l'anneau de base Λ est un corps.

Démonstration. — Il existe un relèvement $\bar{\rho}$ de la suite exacte

$$o \to D_i(A) \to Z_i(A) \underset{\bar{\rho}}{\rightleftarrows} H_i(A) \to o$$

puisque $H_*(A)$ est projectif. Alors tout élément

$$\xi \in H^n(C, H_i(A)) = H^{n-i}(C, H_{i_*}(A))$$

provient d'un cycle f de $\mathrm{Hom}^{n-i}(C, A)$ qui s'annule sur C_t pour tout $t \neq n$. En effet, il suffit de définir f par

$$f_t = o,\ t \neq n;\ f_n = \bar{\rho} \circ \bar{\xi} : C_n \xrightarrow{\bar{\xi}} H_i(A) \xrightarrow{\bar{\rho}} Z_i(A) \xrightarrow{\text{injection}} A_i$$

où $\bar{\xi}$ est un cycle dans la classe ξ. De même, tout élément de $H_m(C, H_j(M))$ provient d'un cycle de

$$\delta \in C_m \otimes Z_j(M).$$

Donc les seconde et troisième composantes de $(1 \otimes f \otimes 1) \circ \Delta \otimes 1_M(\delta)$ sont nulles [cf. la démonstration du lemme 1], et le lemme 1 entraîne le résultat cherché.

C.q.f.d.

Ceci étant, revenons maintenant à l'étude d'une propriété analogue à celle des produits classiques.

Lemme 3. — Soit C *une coalgèbre différentielle graduée libre, associative, et* A *une algèbre différentielle graduée associative, alors l'algèbre*

$$H^*(C, H_*(A))$$

et aussi associative par rapport au produit généralisé.

En effet, il suffit de remarquer la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & C\otimes C \arrow[r] & (C\otimes C)\otimes C \arrow[r, "(f\otimes g)\otimes h"] & (A\otimes A)\otimes A \arrow[r] & A\otimes A \arrow[dr] & \\
C \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & A \\
 & C\otimes C \arrow[r] & C\otimes(C\otimes C) \arrow[r, "f\otimes(g\otimes h)"] & A\otimes(A\otimes A) \arrow[r] & A\otimes A \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où f, g et h sont des éléments de $\mathrm{Hom}(C, A)$.

Supposons maintenant que M soit un module différentiel gradué sur l'algèbre différentielle graduée A, c'est-à-dire qu'on ait $N = M$ et que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes A)\otimes M \arrow[r, "*"] \arrow[dd, leftrightarrow] & A\otimes M \arrow[dr, "\mu"] & \\
& & M \\
A\otimes(A\otimes M) \arrow[r, "\mu"] & A\otimes M \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Alors, ceci entraîne la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& C\otimes C\otimes M \arrow[r] & C\otimes(C\otimes C)\otimes M \arrow[r, "1\otimes(f\otimes g)\otimes 1"] & C\otimes(A\otimes A)\otimes M \arrow[r] & C\otimes A\otimes M \arrow[dr] & \\
C\otimes M \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & C\otimes M \\
& C\otimes C\otimes M \arrow[r] & (C\otimes C)\otimes C\otimes M \arrow[r, "(1\otimes f)\otimes(g\otimes 1)"'] & (C\otimes A)\otimes(A\otimes M) \arrow[r] & C\otimes A\otimes M \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On en déduit :

Lemme 4. — Soit C *une coalgèbre différentielle graduée libre associative, et* M *un module différentiel gradué sur l'algèbre différentielle graduée* A; *alors*

$$H_*(C, H_*(M, K))$$

est un module sur l'algèbre $H^*(C, H_*(A))$ *par rapport au produit* $\frown$.

Enfin, on a la propriété fonctorielle de Steenrod :

Lemme 5. — Soit $\Gamma : C_1 \to C_2$ *un morphisme de coalgèbres différentielles graduées. Alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
H_*(C_1, H_*(M, K) \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma_*"'] & \mathrm{Hom}(H^*(C_1, H_*(A)), H_*(C_1, H_*(N, K)) \arrow[d, "\Gamma_\#"] \\
H_*(C_2, H_*(M, K)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H^*(C_2, H_*(A)), H_*(C_2, H_*(N, K))
\end{tikzcd}$$

où $\Gamma_\#$ *est défini par*

$$\Gamma_\#(\varphi) = \Gamma_* \circ \varphi \circ \Gamma^*$$

Démonstration. — En effet, ceci est une conséquence immédiate de la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C_1\otimes M \arrow[r] \arrow[d] & C_1\otimes C_1\otimes M \arrow[r, "f\circ\Gamma"] & C_1\otimes A\otimes M \arrow[r] & C_1\otimes N \arrow[d, "\Gamma\otimes 1_N"] \\
C_2\otimes M \arrow[r] & C_2\otimes C_2\otimes M \arrow[r, "f"] & C_2\otimes A\otimes M \arrow[r] & C_2\otimes N.
\end{tikzcd}$$

Remarque. — Dans un autre travail, nous verrons que le cap-produit $\frown$ (resp. le cup-produit $\smile$) peut être calculé à l'aide des opérations classiques, en utilisant les foncteurs dérivés Ext et Tor, comme Thomas a fait dans [18] pour le « functional cup-product ».

§ 3. LE CUP-PRODUIT GÉNÉRALISÉ

Remarquons que la donnée de l'application

$$\mu : A \otimes M \to N$$

équivaut à la donnée d'un morphisme de m.d.g. : $A \to \mathrm{Hom}(M, N)$ d'après le lemme 2 de § 1. Chapitre I. Donc, on a, d'après le lemme 3 du § 1, chapitre I :

$$A \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(N, K), \mathrm{Hom}(M, K)).$$

ou encore :

$$\bar{\mu} : A \otimes \mathrm{Hom}(N, K) \to \mathrm{Hom}(M, K).$$

Considérons le morphisme de m.d.g.

$$(1) \qquad \mathrm{Hom}(C, A) \otimes \mathrm{Hom}(C, \mathrm{Hom}(N, K)) \to \mathrm{Hom}(C, \mathrm{Hom}(M, K))$$

défini par l'application diagonale Δ de C et par $\bar{\mu}$:

$$\mathrm{Hom}(C, A) \otimes \mathrm{Hom}(C, \mathrm{Hom}(N, K)) \to \mathrm{Hom}(C \otimes C, A \otimes \mathrm{Hom}(N, K)) \xrightarrow{s \circ \Delta}$$
$$\mathrm{Hom}(C, A \otimes \mathrm{Hom}(N, K)) \xrightarrow{\bar{\mu}} \mathrm{Hom}(C, \mathrm{Hom}(M, K))$$

où s est le morphisme de la Remarque 1 du § 1, chapitre I.

Cela induit le morphisme :

$$(1)' \quad H^k(\mathrm{Hom}(C, A)) \otimes H^i(\mathrm{Hom}(C, \mathrm{Hom}(N, K))) \to H^{k+i}(\mathrm{Hom}(C, \mathrm{Hom}(M, K)))$$

qui ne dépend que de la classe

$$\mu^* \in H^0(\mathrm{Hom}(A \otimes M, N)),$$

alors on pose :

Définition 2. — On appelle cup-produit généralisé *associé aux coclasses fondamentales* ω^M, ω^N *et la classe fondamentale* θ^A, *et* μ^* *le morphisme*

$$\smile : H^k(C, H_*(A)) \otimes H^i(C, H^*(N, K)) \to H^{k+i}(C, H^*(M, K))$$

déduit de (1)' *par transport de structure à l'aide des isomorphismes*

$$H^k(\mathrm{Hom}(C, A)) \cong H^k(C, H_*(A))$$
$$H^i(\mathrm{Hom}(C, \mathrm{Hom}(N, K))) \cong H^i(C, H^*(N, K))$$
$$H^{k+i}(\mathrm{Hom}(C, \mathrm{Hom}(M, K))) \cong H^{k+1}(C, H^*(M, K))$$

définis par θ^A, ω^N *et* ω^M *respectivement d'après le Corollaire 1 du § 1.*

On peut démontrer, de la même manière pour le cap-produit, que les lemmes 1 à 5 du § 2 sont encore valables pour le cup-produit généralisé. Par exemple, on a :

Lemme 1. — Le cup-produit par un élément de $H^n(C, H_i(A))$ *envoie* $H^m(C, H^j(N, K))$ *dans*

$$H^{n+m}(C, H^{j-i}(M, K)) + H^{n+m+1}(C, H^{j-i-1}(M, K)) + H^{n+m+2}(C, H^{j-i-2}(M, K)),$$

et la composante suivant le premier de ces trois termes est le cup-produit ordinaire, relatif à l'application de Pontrjagin

$$H_i(A) \otimes H^j(N, K) \to H^{j-i}(M, K)$$

déduite de l'application $\bar{\mu}$ *ci-dessus. En plus, si* $H_*(A)$ *et* $H^*(N, K)$ *sont des modules projectifs sur* Λ, *alors le cup-produit généralisé* $\smile$ *s'identifie au cup-produit ordinaire.*

Lemme 2. — Soit $\Gamma : C_1 \to C_2$ *un morphisme de coalgèbre différentielle graduée, alors le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} H^*(C_2, H_*(A)) \otimes H^*(C_2, H^*(N, K)) & \xrightarrow{\smile} & H^*(C_2, H^*(M, K)) \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma^*} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma^*} \\ H^*(C_1, H_*(A)) \otimes H^*(C_1, H^*(N, K)) & \xrightarrow{\smile} & H^*(C_1, H^*(M, K)) \end{array}$$

est commutatif.

§ 4. UNE PROPRIÉTÉ DE LA FILTRATION

Soit p un entier donné, désignons par

$$C^p = \sum_{i \leqslant p} C_i, \qquad C/C^p \approx \sum_{i > p} C_i.$$

la sous-coalgèbre différentielle graduée de C, et le m.d.g. quotient ainsi défini. Considérons le morphisme de m.d.g.

$$(1)^* \qquad \mathrm{Hom}(C/C^{k-1}, A) \otimes (C^p \otimes M \otimes K) \to C^{p-k} \otimes (A \otimes M \otimes K)$$

induit par (1) du § 2; à $f \in \mathrm{Hom}(C/C^{k-1}, A)$ il associe l'application $(1 \otimes f \otimes 1) \circ \widetilde{\Delta}$:

$$\begin{array}{ccccc} C^p \otimes M \otimes K & \xrightarrow{\widetilde{\Delta}} & C^{p-k} \otimes C/C^{k-1} \otimes M \otimes K & \xrightarrow[1 \otimes f \otimes 1]{} & C^{p-k} \otimes A \otimes M \otimes K \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \\ C^p \otimes C^p \otimes M \otimes K & \xrightarrow{p} & C^p \otimes C/C^{k-1} \otimes M \otimes K & & \end{array}$$

où p et j sont les morphismes canoniques, et $\widetilde{\Delta}$ est le morphisme de m.d.g. qui rend le diagramme commutatif. Le morphisme $(1)^*$ induit pour tout entier $n<p$, un morphisme de m.d.g.

$$(1)^{**} \qquad \mathrm{Hom}(C/C^{k-1}, A)\otimes(C^p/C^{p-n}\otimes M\otimes K) \to C^{p-k}/C^{p-n-k}\otimes(A\otimes M\otimes K).$$

Choisissons une fois pour toutes des classes fondamentales θ^A, θ^M, θ^N et μ^*; alors, par transport de structure, les morphismes $(1)^*$ et $(1)^{**}$ induisent les accouplements relatifs aux classes choisies

$$\frown' : H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H_*(C^p, H_*(M, K)) \to H_*(C^{p-k}, H_*(N, K))$$
$$\frown'' : H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H_*(C^p/C^{p-n}, H_*(M, K)) \to H_*(C^{p-k}/C^{p-n-k}, H_*(N, K))$$

Dans ce paragraphe, on se propose d'établir quelques relations entre ces accouplements et le cap-produit généralisé associé aux classes choisies. En effet, d'après la définition même de $\frown'$, on a la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H_*(C^p, H_*(M, K)) \arrow[r, "\frown'"] \arrow[d, "p^*\otimes J_*"] & H_*(C^{p-k}, H_*(N, K)) \arrow[d, "J_*"] \\
H^*(C, H_*(A))\otimes H_*(C, H_*(M, K)) \arrow[r, "\frown"] & H_*(C, H_*(N, K))
\end{tikzcd}$$

où p^*, J_* sont induits par les morphismes canoniques

$$p : C \to C/C^{k-1} \qquad J : C^p \to C.$$

Donc le lemme 1, § 2 entraîne la commutativité du diagramme

$$(1) \quad \begin{tikzcd}
H_*(C^p, H_*(M, K)) \arrow[r, "\beta\frown'"] \arrow[d, "J_*"] & H_*(C^{p-k}, H_*(N, K)) \arrow[d, "J_*"] \\
\sum\limits_{i\leq p} H_i(C, H_*(M, K)) \arrow[r, "p^*\beta\frown"] & \sum\limits_{i\leq p-k} H_i(C, H_*(N, K))
\end{tikzcd}$$

où $\beta\in H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))$, et comme la restriction de J_* au sous-module

$$\sum_{i\leq p-k} H_i(C, H_*(M, K)) \quad \text{de} \quad H_*(C^p, H_*(M, K))$$

est l'application évidente, on a la commutativité

(1)

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{i\leqslant p-1} H_i(C, H_*(M, K)) \arrow[r, "p^*\beta\frown"] \arrow[d] & \sum\limits_{i\leqslant p-k-1} H_i(C, H_*(N, K)) \arrow[d] \\
H_*(C^p, H_*(M, K)) \arrow[r, "\beta\frown'"] & H_*(C^{p-k}, H_*(N, K))
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales désignent les injections naturelles.

D'autre part, on a les deux diagrammes commutatifs, d'après les définitions :

(2)

$$\begin{tikzcd}
H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H_*(C^p, H_*(M, K)) \arrow[r, "\frown'"] \arrow[d] & H_*(C^{p-k}, H_*(N, K)) \arrow[d] \\
H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H_*(C^p/C^{p-n}, H_*(M, K)) \arrow[r, "\frown''"] & H_*(C^{p-k}/C^{p-n-k}, H_*(N, K))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H_*(C^p/C^{p-n}, H_*(M, K)) \arrow[r, "\frown''"] \arrow[d] & H_*(C^{p-k}/C^{p-n-k}, H_*(N, K)) \arrow[d] \\
H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H_*(C^{p'}/C^{p'-n}, H_*(M, K)) \arrow[r, "\frown''"] & H_*(C^{p'-k}/C^{p'-n-k}, H_*(N, K))
\end{tikzcd}$$

où $p'\geqslant p$, et où les flèches verticales désignent les morphismes canoniques.

On va maintenant démontrer la commutativité du diagramme suivant :

(3)

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{p-n+1\leqslant i\leqslant p-1} H_i(C, H_*(M, K)) \arrow[r, "\overline{p^*\beta\frown}"] \arrow[d, dash] & \sum\limits_{p-n-k+1\leqslant i\leqslant p-k-1} H_i(C, H_*(N, K)) \arrow[d] \\
H_*(C^p/C^{p-n}, H_*(M, K)) \arrow[r, "\beta\frown''"] & H_*(C^{p-k}/C^{p-n-k}, H_*(N, K))
\end{tikzcd}$$

où $\overline{p^*\beta\frown}$ est le composé de la restriction de $p^*\beta\frown$ au sous-module $\sum\limits_{p-n+1\leqslant i\leqslant p} H_i(C, H_*(M, K))$ (cf. (1)) avec la projection canonique de $\sum\limits_{i\leqslant p-k-1} H_i(C, H_*(N, K))$ sur le module quotient $\sum\limits_{p-n-k+1\leqslant i\leqslant p-k-1} H_i(C, H_*(N, K))$; les flèches verticales désignent les injections naturelles. En effet, d'après les diagrammes (1) et (2), on sait déjà que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{p-n+1\leqslant i\leqslant p-1} H_i(C, H_*(M, K)) \arrow[r, "p^*\beta\frown"] \arrow[d] & \sum\limits_{i\leqslant p-k-1} H_i(C, H_*(N, K)) \arrow[d] \\
H_*(C^p, H_*(M, K)) \arrow[r, "\beta\frown'"] \arrow[d] & H_*(C^{p-k}, H_*(N, K)) \arrow[d] \\
H_*(C^p/C^{p-n}, H_*(M, K)) \arrow[r, "\beta\frown''"] & H_*(C^{p-k}/C^{p-n-k}, H_*(N, K))
\end{tikzcd}$$

et comme l'application composée des deux flèches verticales de droite

$$\sum_{i\leqslant p-k-1} H_i(C, H_*(N, K)) \to H_*(C^{p-k}/C^{p-n-k}, H_*(N, K))$$

s'annule sur les $H_i(C, H_*(M, K)$ pour $i\leqslant p-n-k$, on obtient bien, par passage au quotient, le diagramme commutatif cherché (3).

Maintenant, on va étudier le cas du cup-produit. Pour cela, choisissons en plus des coclasses fondamentales ω^M et ω^N, et considérons le morphisme de m.d.g.

$(4)^*$ $\quad \mathrm{Hom}(C/C^{k-1}, A)\otimes \mathrm{Hom}(C^{p-k}, \mathrm{Hom}(N, K)) \to \mathrm{Hom}(C^p, \mathrm{Hom}(M, K))$

défini par le composé

$$\mathrm{Hom}(C/C^{k-1}, A)\otimes\mathrm{Hom}(C^{p-k}, \mathrm{Hom}(N, K)) \to \mathrm{Hom}(C/C^{k-1}\otimes C^{p-k}, A\otimes\mathrm{Hom}(N, K)) \xrightarrow{s\circ\tilde{\Delta}}$$
$$\mathrm{Hom}(C^p, A\otimes\mathrm{Hom}(N, K)) \xrightarrow{\bar{\mu}} \mathrm{Hom}(C^p, \mathrm{Hom}(M, K))$$

où s est le morphisme défini dans la remarque du § 1, chapitre I, et $\widetilde{\Delta}$ celui de $(1)^*$. Le morphisme $(4)^*$ induit pour tout entier $n<p$ un morphisme de m.d.g.

$(4)^{**}$

$$\mathrm{Hom}(C/C^{k-1}, A)\otimes\mathrm{Hom}(C^{p-k}/C^{p-n-k}, \mathrm{Hom}(N, K)) \to \mathrm{Hom}(C^p/C^{p-n}, \mathrm{Hom}(N, K))$$

Alors, par transport de structure à l'aide des classes fondamentales choisies, on obtient les accouplements suivants :

$$(4)\quad \begin{aligned} &\smile' : H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H^*(C^{p-k}, H^*(N, K)) \to H^*(C^p, H^*(M, K)) \\ &\smile'' : H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H^*(C^{p-k}/C^{p-n-k}, H_*(N, K)) \to H^*(C^p/C^{p-n}, H^*(M, K)) \end{aligned}$$

et on peut démontrer, par le même raisonnement qu'on vient d'indiquer, que les trois diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
H^*(C, H^*(N, K)) \arrow[r, "\smile"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(H^*(C, H_*(A)), H^*(C, H^*(M, K))) \arrow[d] \\
H^*(C^{p-k}, H^*(N, K)) \arrow[r, "\smile'"] & \mathrm{Hom}(H^*(C/C^{k-1}, H_*(A)), H^*(C^p, H^*(M, K)))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H^*(C^{p-k}/C^{p-n-k}, H^*(N, K)) \arrow[r, "\smile''"] \arrow[d] & H^*(C^p/C^{p-n} ; H^*(M, K)) \arrow[d] \\
H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H(C^{p-k}, H^*(N, K)) \arrow[r, "\smile'"] & H^*(C^p, H^*(M, K))
\end{tikzcd} \tag{5}$$

$$\begin{tikzcd}
H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H^*(C^{p'-k}/C^{p'-n-k}, H^*(N, K)) \arrow[r, "\smile''"] \arrow[d] & H^*(C^{p'}/C^{p'-n}; H^*(M, K)) \arrow[d] \\
H^*(C/C^{k-1}, H_*(A))\otimes H^*(C^{p-k}/C^{p-n-k}, H^*(N, K)) \arrow[r, "\smile'"] & H^*(C^p/C^{p-n}, H^*(M, K))
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales désignent les morphismes canoniques, et $p'\geqslant p$.

Enfin, on a la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{p-n-k+2\leqslant i\leqslant p-k} H^i(C, H^*(N, K)) \arrow[r, "\overline{p^*\beta\smile}"] \arrow[d] & \sum\limits_{p-n+2\leqslant i\leqslant p} H^i(C, H^*(M, K)) \arrow[d] \\
H^*(C^{p-k}/C^{p-n-k}, H^*(N, K)) \arrow[r, "\beta\smile''"] & H^*(C^p/C^{p-n}, H^*(M, K))
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des injections canoniques, et $\overline{p^*\beta\smile}$ est le composé de la restriction du cup-produit $p^*\beta\smile$, sur le sous-module $\sum\limits_{p-n-k+2\leqslant i\leqslant p-k} H^i(C, H^*(N, K))$ dont l'image est dans le sous-module $\sum\limits_{p-n+2\leqslant i} H^i(C, H^*(M, K))$; avec la projection canonique

$$\sum_{p-n+2\leqslant i} H^i(C, H^*(M, K)) \to \sum_{p-n+2\leqslant i\leqslant p} H^i(C, H^*(N, M)) = \sum_{p-n+2\leqslant i} H^i(C, H^*(M, K))\Big/ \sum_{p+1\leqslant i} H^i(C, H^*(M, K)).$$

Cela résulte du diagramme (5) et du fait que le morphisme canonique

$$H^*(C, H^*(M, K)) \to H^*(C^p, H^*(M, K))$$

s'annule sur le sous-module $\sum\limits_{p+1\leqslant i} H^i(C, H^*(M, K))$; et il est égal à l'injection canonique sur le sous-module $\sum\limits_{p\geqslant i} H^i(C, H^*(M, K))$.

CHAPITRE V

LA SUITE SPECTRALE D'UN FIBRÉ n-TRIVIAL

Dans ce paragraphe, on se propose de généraliser un résultat de Fadell-Hurewicz [9]; en bref, on détermine les termes

$$E^r \qquad (2 \leqslant r \leqslant 2n+1)$$

et les différentielles

$$d_r \qquad (2 \leqslant r \leqslant 2n)$$

de la suite spectrale pour un fibré n-trivial, au moyen du cap-produit généralisé et de certaines classes de cohomologie de la base à coefficients dans l'homologie du groupe structural.

§ 1. ÉNONCÉ DU RÉSULTAT

Considérons un fibré n-trivial $\mathscr{E}$ de base $\mathscr{B}$, fibre $\mathscr{F}$, et de groupe structural $\mathscr{G}$. Soit K un module sur l'anneau de base Λ principal; choisissons une fois pour toutes une classe fondamentale pour $\mathscr{G}$ et une classe fondamentale pour $\mathscr{F}$:

$$\theta^{\mathscr{G}} \in \mathrm{H}^0(\mathscr{G}, \mathrm{H}_*(\mathscr{G}))\,; \qquad \theta^{\mathscr{F}} \in \mathrm{H}^0(\mathscr{F} \otimes \mathscr{K}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K})),$$

où $\mathscr{K}$ est une résolution projective de K. Alors l'opération de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{F}$ définit

$$\mu^* \in \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}) \otimes \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{F}), \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{F}))),$$

d'où un cap-produit associé à $\theta^{\mathscr{G}}$, $\theta^{\mathscr{F}}$ et μ^* (cf. § 2, chapitre IV) :

$$\frown : \mathrm{H}^*(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{G})) \otimes \mathrm{H}_*(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K})) \to \mathrm{H}_*(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K})).$$

D'autre part, soit

$$\mathscr{E}'$$

un fibré principal de groupe structural $\mathscr{G}' = \mathscr{G}^{[n-1]}$ (la fibre du $(n-1)^{\mathrm{e}}$ système de Postnikov de $\mathscr{G}$, cf. § 1, chapitre III) de base $\mathscr{B}$ tel que le fibré principal associé à $\mathscr{E}$ soit obtenu par agrandissement du groupe structural à partir de $\mathscr{E}'$ (cf. proposition 1, § 4, chapitre IV). Or le classifiant

$$\mathscr{B}' = \overline{\mathrm{W}}(\mathscr{G}') = \overline{\mathrm{W}}(\mathscr{G}^{[n-1]})$$

est n-connexe, donc on a la transgression

$$t^k : \mathrm{H}^{k-1}(\mathscr{G}', \Pi) \underset{\approx}{\to} \mathrm{H}^k(\mathscr{B}', \Pi) \qquad (k \leqslant 2n)$$

du fibré universel, où Π est un module de coefficients. En particulier, si on prend $\Pi = H_{k-1}(\mathscr{G}')$, on obtient

$$t^k : H^{k-1}(\mathscr{G}', H_{k-1}(\mathscr{G}')) \underset{\approx}{\to} H^k(\mathscr{B}', H_{k-1}(\mathscr{G}')).$$

Choisissons une classe fondamentale pour $\mathscr{G}'$

$$\theta^{\mathscr{G}'} \in H^0(\mathscr{G}', H_*(\mathscr{G}'))$$

et désignons par

$$\theta_*^{\mathscr{G}} : H^*(\mathscr{B}, H_*(\mathscr{G})) \underset{\approx}{\to} H^*(\mathrm{Hom}(C^N(\mathscr{B}), C^N(\mathscr{G})))$$
$$\theta_*^{\mathscr{G}'} : H^*(\mathscr{B}, H_*(\mathscr{G}')) \underset{\approx}{\to} H^*(\mathrm{Hom}(C^N(\mathscr{B}), C^N(\mathscr{G}')))$$

les isomorphismes du lemme 1, § 1, chapitre IV, définis par $\theta^{\mathscr{G}}$ et $\theta^{\mathscr{G}'}$, et désignons par ξ' l'élément de $H^1(\mathscr{B}', H_*(\mathscr{G}'))$:

$$\xi' = \sum_{n<k\leqslant 2n} t^k(\theta_{k-1}^{\mathscr{G}'}).$$

Posons la définition suivante.

Définition. — *On appelle* classe caractéristique *du fibré n-trivial* $\mathscr{E}$ *relativement à la restriction* $\mathscr{E}'$ *du groupe structural, et à la classe fondamentale* $\theta^{\mathscr{G}}$ *l'élément*

$$\xi = \sum_{n<k\leqslant 2n} \xi^k \in \sum_{n<k\leqslant 2n} H^k(\mathscr{B}, H_{k-1}(\mathscr{G}))$$

défini par

$$\xi = (\theta_*^{\mathscr{G}})^{-1} \circ j_* \circ (\theta_*^{\mathscr{G}'}) \circ \psi_*(\xi')$$

(ξ^k une k^e classe caractéristique) où

$$\psi_* : H^*(\mathscr{B}') \to H^*(\mathscr{B})$$

désigne le morphisme induit par une application de $\mathscr{B}$ *dans* $\mathscr{B}'$ *qui induit le fibré principal* $\mathscr{E}'$, *et*

$$j_* : H^*(\mathrm{Hom}(C^N(\mathscr{B}), C^N(\mathscr{G}'))) \to H^*(\mathrm{Hom}(C^N(\mathscr{B}), C^N(\mathscr{G})))$$

le morphisme induit par l'injection canonique j de $\mathscr{G}'$ *dans* $\mathscr{G}$. (On peut montrer que ξ est indépendant de $\theta^{\mathscr{G}'}$).

Remarque. — ξ n'est pas unique, il dépend du choix du fibré principal $\mathscr{E}'$ dont l'agrandissement est le fibré principal du fibré $\mathscr{E}$.

Pour tout entier $r \geqslant 2$, soit

$$\xi \frown_p^r : \sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} H_i(\mathscr{B}, H_*(\mathscr{F}, K)) \to \sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} H_i(\mathscr{B}, H_*(\mathscr{F}, K)) \ (^1)$$

l'endomorphisme induit par le cap-produit $\xi \frown$ sur le module quotient

$$\sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} H_i(\mathscr{B}, H_*(\mathscr{F}, K)) = \sum_{i\leqslant p} H_i(\mathscr{B}, H_*(\mathscr{F}, K)) \Big/ \sum_{j\leqslant p-r} H_j(\mathscr{B}, H_*(\mathscr{F}, K))$$

d'après le lemme 1, § 2, chapitre IV.

(1) La convention d'écriture du § 2 du chapitre I n'est plus observée.

Enfin, désignons par

$$\Gamma_p^r : \sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K})) \to \mathrm{H}_p(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$$

$$\mathrm{L}_p^r : \mathrm{H}_{p-r+1}(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K})) \to \sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$$

les projection et injection évidentes.

Alors on a :

Théorème 1. — *Pour* $2\leqslant r\leqslant 2n+1$, *le terme* E_p^r *de la suite spectrale d'un fibré n-trivial se calcule comme suit :*

$$\mathrm{E}_p^r \cong \mathrm{Z}_p^r/\mathrm{D}_p^r,$$

où Z_p^r *est l'image par* Γ_p^r *du noyau de* $\xi\frown_p^r$:

$$\mathrm{Z}_p^r = \Gamma_p^r(\mathrm{Ker}\, \xi\frown_p^r),$$

et D_p^r *est le sous-module de* $\mathrm{H}_p(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$ *formé des éléments dont l'image par* L_{p+r-1}^r *dans* $\sum_{p\leqslant i\leqslant p+r-1} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$ *appartient à l'image de l'endomorphisme* $\xi\frown_{p+r-1}^r$:

$$\mathrm{D}_p^r = (\mathrm{L}_{p+r-1}^r)^{-1}(\mathrm{Im}\, \xi\frown_{p+r-1}^r).$$

Considérons maintenant le morphisme composé

$$(\xi\frown_p^{r+1})\circ j : \sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K})) \xrightarrow{j} \sum_{p-r\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K})) \xrightarrow{\xi\frown_p^{r+1}} \sum_{p-r\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$$

de l'inclusion évidente j avec l'endomorphisme $\xi\frown_p^{r+1}$; alors on a :

Théorème 2. — *Pour* $2\leqslant r\leqslant 2n$, *la restriction de* $(\xi\frown_p^{r+1})\circ j$ *au sous-module* $\mathrm{Ker}\, \xi\frown_p^r$ *de* $\sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}_i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$ *a son image dans le sous-module* Z_{p-r}^r *de* $\mathrm{H}_{p-r}(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$; *ainsi elle induit un morphisme*

$$\xi\frown_r^{\#} : \mathrm{Z}_p^r \to \mathrm{Z}_{p-r}^r/\mathrm{D}_{p-r}^r$$

qui, par passage au quotient, donne précisément la différentielle d_r :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E}_p^r \arrow[r, "d_r"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{E}_{p-r}^r \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Z}_p^r/\mathrm{D}_p^r \arrow[r, "\xi\frown_r^{\#}"] & \mathrm{Z}_{p-r}^r/\mathrm{D}_{p-r}^r
\end{tikzcd}$$

de la suite spectrale d'un fibré n-trivial.

Remarque 1. — Le terme $\mathrm{E}_{p,q}^r$, $2\leqslant r\leqslant 2n+1$, ne dépend que des k-ièmes classes caractéristiques pour $k\leqslant r-1$, et l'opérateur différentiel d_r (pour $2\leqslant r\leqslant 2n$) ne dépend que des k-ièmes classes caractéristiques pour $k\leqslant r$.

§ 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Remarquons d'abord qu'il suffit de traiter le cas

$$\mathscr{G}' = \mathscr{G}.$$

Ceci résulte du fait que la suite spectrale d'un fibré ne dépend pas de l'agrandissement du groupe structural, et que $\xi\frown$, relatif à $\theta^{\mathscr{G}}$ et $\psi_* o t(\theta^{\mathscr{G}'})\frown$, relatif à $\theta^{\mathscr{G}'}$ (cf. Définition § 1) définissent le même endomorphisme de $\mathrm{H}_*(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$ d'après la définition du $\frown$ et le diagramme commutatif évident (cf. § 2, chap. IV)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B}), \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}'))\otimes\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B})\otimes\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B})\otimes\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{F}) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B}), \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}))\otimes\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B})\otimes\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{F}) \arrow[r] & \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B})\otimes\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{F}).
\end{tikzcd}$$

Ensuite, il suffit de démontrer le cas simplicial [15], c'est-à-dire le produit tordu

$$\mathscr{E} = \mathscr{B} \times_\tau \mathscr{F} \text{ (1)}.$$

Pour cela, désignons par :

$\mathrm{C} = \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B})$ la coalgèbre différentielle graduée des chaînes normalisées de la base à coefficients dans Λ.

$\mathrm{C}^p = \sum_{i \leqslant p} \mathrm{C}_i$ la sous-coalgèbre de C ainsi définie;

$\mathrm{A} = \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G})$ l'algèbre différentielle graduée des chaînes normalisées du groupe structural à coefficients dans Λ;

$\mathrm{M} = \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{F}, \mathrm{K})$ le m.d.g. des chaînes normalisées de la fibre, à coefficients dans K;

f, la cochaîne fondamentale associée à $\mathscr{B} \times_\tau \mathscr{F}$; (cf. Définition, § 1, chapitre II).

$\mathrm{C}\otimes_\tau\mathrm{M}$ le m.d.g. muni de la différentielle $d_{\mathrm{C}} + d_{\mathrm{M}} + \mathbf{f}\frown$, d'après le théorème 2 du chapitre II, soit enfin

$$\mathrm{F}^{p,r} = \mathrm{C}^p\otimes_\tau\mathrm{M}/\mathrm{C}^{p-r}\otimes_\tau\mathrm{M}$$

le m.d.g. quotient ainsi obtenu. Dans tout ce qui suit, on suppose $r \leqslant 2n+1$.

Ceci étant, rappelons que, d'après Cartan-Eilenberg [5], la suite spectrale de $\mathscr{E}$ peut être définie de la manière suivante : pour $r \geqslant 2$, on a

$$\mathrm{E}_p^r = \mathrm{Im}[\mathrm{H}_*(\mathrm{F}^{p,r}) \to \mathrm{H}_p(\mathrm{C}, \mathrm{H}_*(\mathrm{M}))]/\mathrm{Ker}[\mathrm{H}_p(\mathrm{C}, \mathrm{H}_*(\mathrm{M})) \to \mathrm{H}_*(\mathrm{F}^{p+r-1,r})]$$

(1) Conformément à la notation classique [16], on écrit la fibre du fibré à droite de sa base.

Si $r \leqslant n+1$, on a

$$F^{p,r} = C^p/C^{p-r} \otimes M$$

muni de la différentielle usuelle du produit tensoriel de deux m.d.g. On en déduit aussitôt que

$$E_p^r = H_p(C, H_*(M)) \qquad \text{pour } 2 \leqslant r \leqslant n+1,$$

ce qui prouve le théorème 1 dans ce cas.

Supposons désormais $n+1 < r \leqslant 2n+1$. On a la suite exacte de m.d.g. :

$$(1) \qquad 0 \to F^{p-n-1,\, r-n-1} \to F^{p,r} \to F^{p,n+1} \to 0.$$

Puisque

$$\mathbf{f}_i = 0 \qquad \text{pour } i \leqslant n,$$

on a

$$F^{p-n-1,\, r-n-1} = C^{p-n-1}/C^{p-r} \otimes M, \quad F^{p,n+1} = C^p/C^{p-n-1} \otimes M$$

où la différentielle est la différentielle usuelle d'un produit tensoriel de m.d.g. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_*(F^{p,r}) \arrow[r] \arrow[dr] & H_*(C^p/C^{p-n-1} \otimes M) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g_p"] & H_*(C^{p-n-1}/C^{p-r} \otimes M) \arrow[r] & \dots \\
& & E_p^2 = H_p(C, H_*(M)) & &
\end{tikzcd}$$

dont la première ligne provient de la suite exacte d'homologie de (1). Il entraîne que

$$\operatorname{Im}\,[H_*(F^{p,r}) \to H_p(C, H_*(M))] = g_p(\operatorname{Ker} \varphi).$$

D'autre part, le diagramme dual

$$\begin{tikzcd}
& & E_p^2 = H_p(C, H_*(M)) \arrow[d, "h_p"'] \arrow[dr] & & \\
\dots \arrow[r] & H_*(C^{p+r-1}/C^{p+r-n-2} \otimes M) \arrow[r, "\varphi"] & H_*(C^{p+r-n-2}/C^{p-1} \otimes M) \arrow[r] & H_*(F^{p+r-1,r}) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

dont la seconde ligne provient de la suite exacte d'homologie de (1) en remplaçant p par $p+r-1$, montre que

$$\operatorname{Ker}\,[H_p(C, H_*(M)) \to H_*(F^{p+r-1,r})] = (h_p)^{-1}(\operatorname{Im} \varphi).$$

On a ainsi démontré :

Lemme 1. — Pour $n+1 < r \leqslant 2n+1$, *le terme* E_p^r *de la suite spectrale est donné par*

$$E_p^r = \overline{Z}_p^r / \overline{D}_p^r$$

où $\overline{Z}_p^r$ *est l'image dans* $H_p(C, H_*(M))$ *du noyau de*

$$\varphi : H_*(C^p/C^{p-n-1}\otimes M) \to H_*(C^{p-n-1}/C^{p-r}\otimes M),$$

et $\overline{D}_p^r$ *est le sous-module de* $H_p(C, H_*(M))$ *formé des éléments dont l'image dans*

$$H_*(C^{p+r-n-2}/C^{p-1}\otimes M)$$

appartient à l'image de $H_*(C^{p+r-1}/C^{p+r-n-2}\otimes M)$ *par* φ.

Ainsi, le problème revient à interpréter le morphisme φ. Pour cela, considérons le cycle

$$f\in Z_{-1}(\mathrm{Hom}(C, A))$$

défini par

$$(2) \qquad \begin{cases} f_i = \mathbf{f}_i, & i \leqslant 2n \\ f_i = 0, & i \geqslant 2n+2 \\ f_{2n+1} = \mathbf{f}_{2n+1}\circ\rho\circ d \end{cases}$$

où

$$\rho : D_{2n}(C) \to C_{2n+1}$$

est un relèvement quelconque de la suite exacte

$$0 \to Z_{2n+1}(C) \to C_{2n+1} \to D_{2n}(C) \to 0.$$

Ce cycle f induit un cycle (cf. § 4, chapitre IV)

$$C^p\otimes M \xrightarrow{\Delta\otimes 1_M} C^p\otimes C^p\otimes M \xrightarrow{f} C^{p-n-1}\otimes A\otimes M \xrightarrow{*} C^{p-n-1}\otimes M$$

d'où, par passage au quotient, le cycle

$$(3) \qquad \overline{f} : C^p/C^{p-n-1}\otimes M \to C^{p-n-1}/C^{p-r}\otimes M$$

qui, en fait, est déterminé par la connaissance des f_i pour $i \leqslant 2n$. Soit $\overline{\rho}$ l'injection évidente

$$\overline{\rho} : C^p/C^{p-n-1}\otimes M = \sum_{p-n\leqslant i\leqslant p} C_i\otimes M \to \sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} C_i\otimes M$$

qui est un relèvement de la suite exacte (1). Alors on a

$$d\circ\overline{\rho} - \overline{\rho}\circ d = \overline{d} + \overline{f} : C^p/C^{p-n-1}\otimes M \to C^{p-n-1}/C^{p-r}\otimes M,$$

où $\overline{d}$ est le cycle de degré -1, induit par la différentielle de C

$$\overline{d} : C^p/C^{p-n-1}\otimes M \xrightarrow[\text{projection}]{} C_{p-n}\otimes M \xrightarrow[d_C\otimes 1]{} C_{p-n-1}\otimes M \xrightarrow[\text{injection}]{} C^{p-n-1}/C^{p-r}\otimes M.$$

Autrement dit, on a (avec les notations du § 3, chapitre 1)

$$F^{p,r} = C^{p-n-1}/C^{p-r}\otimes M +_{\overline{d}+\overline{f}} C^p/C^{p-n-1}\otimes M;$$

donc φ est induit précisément par ce cycle $\overline{d}+\overline{f}$:

$$\varphi = (\overline{d}+\overline{f})_* : H_*(C^p/C^{p-n-1}\otimes M) \to H_*(C^{p-n-1}/C^{p-r}\otimes M)$$

D'autre part, soit $\theta^{\mathrm{M}} = \theta^{\mathscr{F}} \in \mathrm{H}^*(\mathscr{M}, \mathrm{H}_*(\mathrm{M}))$ (où $\mathscr{M} = \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{K}$, $\mathscr{K}$ une résolution projective de K) la classe fondamentale déjà choisie. Le choix d'un cocycle de $\mathrm{Hom}(\mathscr{M}, \mathrm{H}_*(\mathrm{M}))$ dans la classe de θ^{M} induit des isomorphismes

$$\mathrm{H}_*(\mathrm{C}^p/\mathrm{C}^q \otimes \mathrm{M}) \to \mathrm{H}_*(\mathrm{C}^p/\mathrm{C}^q, \mathrm{H}_*(\mathrm{M}))$$

qui ne dépendent pas du cocycle choisi (chapitre IV, § 1, corollaire 1). Par transport de structure, les applications $\overline{d}_*$ et $\overline{f}_*$ deviennent respectivement des applications

$$\overline{\overline{d}}_* \text{ et } \overline{\overline{f}}_* : \mathrm{H}_*(\mathrm{C}^p/\mathrm{C}^{p-n-1}, \mathrm{H}_*(\mathrm{M})) \to \mathrm{H}_*(\mathrm{C}^{p-n-1}/\mathrm{C}^{p-r}, \mathrm{H}_*(\mathrm{M})).$$

Or, l'application $\overline{\overline{f}}_*$ n'est autre que le morphisme

$$(4) \qquad \beta_1 = \widetilde{\beta} \frown'' : \mathrm{H}_*(\mathrm{C}^p/\mathrm{C}^{p-n-1}, \mathrm{H}_*(\mathrm{M})) \to \mathrm{H}_*(\mathrm{C}^{p-n-1}/\mathrm{C}^{p-r}, \mathrm{H}_*(\mathrm{M}))$$

défini par l'accouplement $\frown''$ du § 4, chapitre IV relativement à θ^{A}, θ^{M} et μ^*, avec la classe de cohomologie

$$\widetilde{\beta} = \widetilde{f}^*(\theta^{\mathrm{A}}) \in \mathrm{H}^*(\mathrm{C}/\mathrm{C}^n, \mathrm{H}_*(\mathrm{A})),$$

où $\widetilde{f}$ désigne le cycle de $\mathrm{Hom}(\mathrm{C}/\mathrm{C}^n, \mathrm{A})$ obtenu par f en passant au quotient (puisque f_i s'annule sur C_i pour $i \leqslant n$). Cela résulte de la définition même de cet accouplement.

Maintenant on va expliciter $\overline{\overline{d}}_*$; observons que

$$\mathrm{H}_*(\mathrm{C}^p/\mathrm{C}^q, \mathrm{H}_*(\mathrm{M})) = \mathrm{Z}'_{q+1} + \sum_{q+2 \leqslant i \leqslant p-1} \mathrm{H}_i + \mathrm{Z}_p, \quad q+1 < p,$$

où on note, pour abréger,

$$\mathrm{H}_i = \mathrm{H}_i(\mathrm{C}, \mathrm{H}_*(\mathrm{M})), \quad \mathrm{Z}_p = \mathrm{Z}_p(\mathrm{C} \otimes \mathrm{H}_*(\mathrm{M}));$$
$$\mathrm{Z}'_{q+1} = \mathrm{C}_{q+1} \otimes \mathrm{H}_*(\mathrm{M}) / \mathrm{D}_{q+1}(\mathrm{C} \otimes \mathrm{H}_*(\mathrm{M})).$$

Il est évident que

$$\overline{\overline{d}}_* : \mathrm{Z}'_{p-n} + \sum_{p-n+1 \leqslant i \leqslant p-1} \mathrm{H}_i + \mathrm{Z}_p \to \mathrm{Z}'_{p-r+1} + \sum_{p-r+2 \leqslant i \leqslant p-n+2} \mathrm{H}_i + \mathrm{Z}_{p-n-1}$$

s'annule sur H_i pour $p-n+1 \leqslant i \leqslant p-1$ et sur Z_p, et envoie Z'_{p-n} dans Z_{p-n-1} par l'application induite par

$$d_{\mathrm{C}} \otimes 1 : \mathrm{C} \otimes \mathrm{H}_*(\mathrm{M}) \to \mathrm{C} \otimes \mathrm{H}_*(\mathrm{M}).$$

L'image de D se compose donc du sous-module D_{p-n-1} formé des « bords » de Z_{p-n-1}.

D'après le lemme 1, nous devons calculer l'image $\overline{\mathrm{Z}}_p^r$, dans $\mathrm{H}_p(\mathrm{C}, \mathrm{H}_*(\mathrm{M}))$, du noyau de

$$\overline{d}_* + \overline{f}_* : \mathrm{H}_*(\mathrm{C}^p/\mathrm{C}^{p-n-1} \otimes \mathrm{M}) \to \mathrm{H}_*(\mathrm{C}^{p-n-1}/\mathrm{C}^{p-r} \otimes \mathrm{M}).$$

C'est aussi l'image, par la projection naturelle

$$\mathrm{Z}'_{p-n} + \sum_{p-n+1 \leqslant i \leqslant p-1} \mathrm{H}_i + \mathrm{Z}_p \to \mathrm{H}_p$$

du noyau de $\overline{\overline{d}}_* + \overline{\overline{f}}_*$. D'ailleurs $\overline{\overline{f}}_*$ s'annule sur Z'_{p-n} pour des raisons de degré ($f_i = 0$

pour $i \leqslant n$ et $r \leqslant 2n+1$). Alors, compte tenu de l'interprétation de $\bar{\bar{d}}_*$ qu'on vient d'indiquer, on voit que $\bar{Z}_p^r$ est l'image, dans H_p du noyau de l'application composée :

$$\sum_{p-n+1 \leqslant i \leqslant p-1} H_i + Z_p \xrightarrow{\gamma_1} H_*(C^p/C^{p-n-1}, H_*(M)) \xrightarrow{\beta_1} H_*(C^{p-n-1}/C^{p-r}, H_*(M)) \xrightarrow{\lambda_1} H_*(C^{p-n}/C^{p-r}, H_*(M))$$

où γ_1 est l'injection naturelle, β_1 le morphisme (4), et λ_1 est induit par l'inclusion naturelle

$$C^{p-n-1}/C^{p-r} \to C^{p-n}/C^{p-r}.$$

Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \sum\limits_{p-n+1 \leqslant i \leqslant p-1} H_i + Z_p \arrow[dl, "\gamma_1"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
H_*(C^p/C^{p-n-1}, H_*(M)) \arrow[r, "\lambda_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & H_*(C^{p+1}/C^{p-n}, H_*(M)) \arrow[d, "\beta_1"] & \sum\limits_{p-n+1 \leqslant i \leqslant p} H_i \arrow[l, "\gamma_2"'] \arrow[d, "\beta_2"] \\
H_*(C^{p-n-1}/C^{p-r}, H_*(M)) \arrow[r, "\lambda_1"] & H_*(C^{p-n}/C^{p-r}, H_*(M)) & \sum\limits_{p-r+1 \leqslant i \leqslant p-n-1} H_i \arrow[l, "\gamma_3"']
\end{tikzcd} \tag{5}$$

où ε désigne la projection naturelle, γ_2 et γ_3 sont les injections naturelles, et où λ_2 est induit par l'application naturelle

$$C^p/C^{p-n-1} \to C^{p+1}/C^{p-n};$$

β_1 a été défini par la formule (4) (pour p, on applique la même définition pour $p+1$).

Enfin, β_2 est le morphisme induit par le cap-produit $\beta\frown$ en passant au quotient, β désignant la classe de cohomologie définie par (cf. § 4, chapitre IV)

$$\beta = f^*(\theta^A) \in H^*(C, H_*(A)) \qquad \beta_2 = \overline{\beta\frown}$$

La commutativité du diagramme (5) résulte des diagrammes (2) et (3) du § 4, chapitre IV.

Or, le noyau de $\lambda_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_1$ est égal au noyau de $\gamma_3 \circ \beta_2 \circ \varepsilon$; son image $\bar{Z}_p^r$ dans H_p est donc égale à l'image par la projection naturelle

$$\sum_{p-n+1 \leqslant i \leqslant p} H_i \to H_p$$

du noyau de $\gamma_3 \circ \beta_2$. Comme γ_3 est une injection, $\bar{Z}_p^r$ est l'image dans H_p du noyau du $\beta_2 = \overline{\beta\frown}$, par la projection naturelle. C'est aussi l'image dans H_p du noyau de

$$\beta\frown_p^r : \sum_{p-r+1 \leqslant i \leqslant p} H_i \to \sum_{p-r+1 \leqslant i \leqslant p} H_i$$

puisque la classe de cohomologie β de $H^*(C, H_*(A))$ est nulle en degrés $j \leqslant n$, et que $r \leqslant 2n+1$.

Un raisonnement dual montre que $\overline{\mathrm{D}}_p^r$ est le sous-module de H_p formé des éléments dont l'image dans $\sum_{p \leqslant i \leqslant p+r-1} \mathrm{H}_i$ appartient à l'image de

$$\beta^{\frown r}_{p+r-1} : \sum_{p \leqslant i \leqslant p+r-1} \mathrm{H}_i \to \sum_{p \leqslant i \leqslant p+r-1} \mathrm{H}_i.$$

Compte tenu du lemme 1, il reste, pour terminer la démonstration du théorème 1, à prouver ceci :

Pour $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$, la k^{e} classe caractéristique ξ^k d'un fibré n-trivial par rapport à la classe fondamentale θ^{A} du groupe structural est égale à

$$\beta^k = f^*(\theta^{\mathrm{A}}_{k-1}) = \xi^k. \tag{6}$$

Or, cela résulte de la définition de § 1 et du lemme suivant :

Lemme 2. — Soit $\mathscr{G}$ un groupe $(n-1)$-connexe, et soit f la cochaîne fondamentale de son fibré universel

$$\mathrm{W}(\mathscr{G}) = \mathscr{B} \times_\tau \mathscr{G}$$

où $\mathscr{B} = \overline{\mathrm{W}}(\mathscr{G})$ est le classifiant de $\mathscr{G}$. Alors, pour $k \leqslant 2n$, la transgression

$$t^k : \mathrm{H}^{k-1}(\mathscr{G}, \mathrm{K}) \to \mathrm{H}^k(\mathscr{B}, \mathrm{K})$$

(qui est nulle pour $k \leqslant n$) est induite par

$$\mathrm{Hom}(f, \mathrm{K}) : \mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}), \mathrm{K}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B}), \mathrm{K}).$$

(Rappelons que $\mathrm{Hom}(f_k, \mathrm{K}) : \mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}), \mathrm{K}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B}), \mathrm{K})$ transforme les cobords en cobords pour $k \leqslant 2n+1$, et les cocycles en cocycles pour $k \leqslant 2n$).

Pour démontrer ce lemme, il suffit de se rappeler l'une des définitions de la transgression, que voici : étant donné un cocycle u de $\mathrm{Z}^{k-1}(\mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}), \mathrm{K}))$, on choisit une $(k-1)$-cochaîne du fibré qui induise ce cocycle et dont le cobord soit un cocycle v de la base. Ici, on prend comme cochaînes du fibré les éléments de $\mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B}) \otimes_\tau \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}), \mathrm{K})$, la différentielle étant

$$\mathrm{Hom}(d_{\mathscr{B}}, \mathrm{K}) + \mathrm{Hom}(d_{\mathscr{G}}, \mathrm{K}) + \mathrm{Hom}(\hat{f}, \mathrm{K}),$$

où $\hat{f}$ désigne le morphisme déduit par la cochaîne fondamentale f, d'après la formule (1) du § 2 du chapitre IV. Identifions $\mathrm{Z}^{k-1}(\mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}), \mathrm{K}))$ à un sous-module de $\mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B}) \otimes_\tau \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}), \mathrm{K})$; $\mathrm{Hom}(d_{\mathscr{B}}, \mathrm{K})$ et $\mathrm{Hom}(d_{\mathscr{G}}, \mathrm{K})$ sont nuls sur ce sous-module, et tout revient à montrer que la restriction de $\mathrm{Hom}(\hat{f}, \mathrm{K})$ à $\mathrm{Z}^{k-1}(\mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}), \mathrm{K}))$ n'est autre que la composée

$$\mathrm{Z}^{k-1}(\mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}), \mathrm{K})) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}_{k-1}(\mathscr{G}), \mathrm{K}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f_k, \mathrm{K})} \mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}_k(\mathscr{B}), \mathrm{K}) \xrightarrow{i} \mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{B}) \otimes_\tau \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathscr{G}), \mathrm{K}), \qquad \text{où} \quad k \leqslant 2n,$$

i désignant l'injection canonique. Il suffit pour cela de remonter à la définition du (1) de § 2 du chapitre IV, en remarquant que $\mathscr{B}$ est n-connexe.

c.q.f.d.

§ 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Remarquons d'abord que la définition de l'opérateur différentiel de la suite spectrale donnée par Cartan-Eilenberg, et le diagramme commutatif déduit de (1) de § 2

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & C^{p-n-1}/C^{p-r}\otimes M \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F^{p-r,1} \arrow[r] \arrow[d] & F^{p,r+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & F^{p,r} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{p-n-1}/C^{p-r-1}\otimes M \arrow[r] \arrow[d] & F^{p,r+1} \arrow[r] & C^{p}/C^{p-n-1}\otimes M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & C^{p-n-1}/C^{p-r}\otimes M \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

impliquent le fait suivant : pour tout élément

$$\delta=\{x\}\in\overline{Z}_p^r=Z_p^r, \qquad x\in Z_p$$

choisissons un ω de $\sum\limits_{p-n+1\leqslant i\leqslant p-1} H_i+Z_p$, tel que le $\omega_1=\gamma_1^r(\omega)$ (cf. le diagramme (5) de § 2, où on ajoute « r » en indice à γ_1 pour éviter une confusion) soit dans le noyau de β_1^r et que l'image par la projection évidente de ω soit égale à x; alors $\beta_1^{r+1}\circ\gamma_1^{r+1}(\omega)$ se trouve dans le sous-module Z'_{p-r} et en plus

$$d_r(\{\delta\})=\{\beta_1^{r+1}\circ\gamma_1^{r+1}(\omega)\}.$$

Donc la commutativité du diagramme (5) entraîne

$$\begin{aligned}
d_r(\{\delta\})&=\{\beta_1^{r+1}\circ\gamma_1^{r+1}(\omega)\}\\
&=\{\lambda_1^{r+1}\circ\beta_1^{r+1}\circ\gamma_1^{r+1}(\omega)\}\\
&=\{\gamma_3^{r+1}\circ\beta_3^{r+1}\circ\varepsilon(\omega)\}\\
&=\{\beta_3^{r+1}(\omega')\}
\end{aligned}$$

où $\omega'=\varepsilon(\omega)$, élément de $\sum\limits_{p-n+1\leqslant i\leqslant p} H_i$; alors la formule (6) du § 2 démontre le théorème 2, puisque $\xi^i=0$ pour $i\leqslant n$.

c.q.f.d.

§ 4. CAS DE LA COHOMOLOGIE

Revenons à la situation du § 1, et choisissons une classe fondamentale $\theta^{\mathscr{G}}$ et une coclasse fondamentale $\omega^{\mathscr{F}}$ (cf. Remarque § 2, chapitre I) et considérons le cup-produit associé à $\theta^{\mathscr{G}}$, $\omega^{\mathscr{F}}$ et μ^*

$$\smile\,: H^*(\mathscr{B}, H_*(\mathscr{G}))\otimes H^*(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}, K)) \to H^*(\mathscr{B}, H^*(\mathscr{F}, K)).$$

L'endomorphisme induit par le cup-produit par la classe caractéristique ξ définit, par passage au quotient

$$\sum_{p\leqslant i\leqslant p+r-1} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K})) = \sum_{i\geqslant p} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))\Big/ \sum_{i\geqslant p+r} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K})),$$

une application

$$\xi\smile^p_r : \sum_{p\leqslant i\leqslant p+r-1} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K})) \rightarrow \sum_{p\leqslant i\leqslant p+r-1} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$$

Et puis, on désigne par

$$\Gamma^p_r : \sum_{p\leqslant i\leqslant p+r-1} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K})) \rightarrow \mathrm{H}^p(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$$

$$\mathrm{L}^p_r : \mathrm{H}^{p+r-1}(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K})) \rightarrow \sum_{p\leqslant i\leqslant p+r-1} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$$

les projection et injection évidentes. Alors on a

Théorème 3. — Pour $2\leqslant r\leqslant 2n+1$, *le terme* E^p_r *de la suite spectrale cohomologique d'un fibré n-trivial se calcule comme suit :*

$$\mathrm{E}^p_r \cong \mathrm{Z}^p_r/\mathrm{D}^p_r$$

où Z^p_r *est l'image par* Γ^p_r *du noyau de* $\xi\smile^p_r$:

$$\mathrm{Z}^p_r = \Gamma^p_r(\mathrm{Ker}\,\xi\smile^p_r),$$

et D^p_r *est le sous-module de* $\mathrm{H}^p(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$ *formé des éléments dont l'image par* L^{p-r+1}_r *dans* $\sum_{p-r+1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$ *appartient à l'image de l'endomorphisme* $\xi\smile^{p-r+1}_r$:

$$\mathrm{D}^p_r = (\mathrm{L}^{p-r+1}_r)^{-1}(\mathrm{Im}\,\xi\smile^{p-r+1}_r).$$

Considérons maintenant le morphisme

$$(\xi\smile^p_{r+1})\circ j : \sum_{p\leqslant i\leqslant p+r-1} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K})) \xrightarrow{j} \sum_{p\leqslant i\leqslant p+r} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K})) \xrightarrow{\xi\smile^p_{r+1}} \sum_{p\leqslant i\leqslant p+r} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K})),$$

composé de l'inclusion évidente j avec l'endomorphisme $\xi\smile^p_{r+1}$; alors on a :

Théorème 4. — Pour $2\leqslant r\leqslant 2n$, *la restriction de* $(\xi\smile^p_{r+1})\circ j$ *au sous-module* $\mathrm{Ker}\,\xi\smile^p_r$ *de* $\sum_{p\leqslant i\leqslant p+r-1} \mathrm{H}^i(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$ *a son image dans le sous-module* Z^{p+r}_r *de* $\mathrm{H}^{p+r}(\mathscr{B}, \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$; *ainsi elle induit un morphisme*

$$\xi\smile^r_\sharp : \mathrm{Z}^r_p \rightarrow \mathrm{Z}^{p+r}_r/\mathrm{D}^{p+r}_r$$

qui, par passage au quotient, donne précisément la différentielle d^r de la suite spectrale cohomologique

$$\begin{tikzcd}
E_r^p \arrow[r, "d^r"] \arrow[d, "\wr"'] & E_r^{p+r} \arrow[d, "\wr"'] \\
Z_r^p/D_r^p \arrow[r, "\xi \smile_{\#}^{r}"'] & Z_r^{p+r}/D_r^{p+r}
\end{tikzcd}$$

d'un fibré n-trivial.

Démonstration du théorème 3. — Remarquons d'abord que la notion de somme tordue de deux m.d.g. avec différentielle de degré $+1$ se définit comme dans le cas où la différentielle est de degré -1 : le cycle tordant est alors de degré $+1$. De plus, il est évident que le dual, par rapport à K, d'une somme tordue est la somme tordue de leurs duals. Ainsi, étant donné la somme tordue des m.d.g. A et B de degré -1 :

$$0 \to B \to B +_\delta A \to A \to 0,$$

on a

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, K) \to \mathrm{Hom}(A, K) +_{\mathrm{Hom}(\delta, K)} \mathrm{Hom}(B, K) \to \mathrm{Hom}(B, K) \to 0$$
$$\mathrm{Hom}(B +_\delta A, K) \approx \mathrm{Hom}(A, K) +_{\mathrm{Hom}(\delta, K)} \mathrm{Hom}(B, K).$$

Ceci étant, revenons aux notations du § 2, sauf $M = C^N(\mathscr{F})$; d'après la définition de la suite spectrale cohomologique donnée par Cartan-Eilenberg, et le diagramme des suites exactes des m.d.g.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & \mathrm{Hom}(F^{p+r-1,r}, K) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N^{p+r-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(C \otimes_\tau M, K) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathrm{Hom}(C^{p+r-1} \otimes_\tau M, K) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N^{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(C \otimes_\tau M, K) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C^p \otimes_\tau M, K) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & N^{p+r-1,r} \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

(où N sont les m.d.g. ainsi obtenus), le terme E_r^p peut être défini comme suit : pour $r \geqslant 2$, on a :

$$E_r^p = \mathrm{Im}\,[H^*(\mathrm{Hom}(F^{p+r-1,r}, K)) \to H^p(C, H^*(M, K))]/\mathrm{Ker}[H^p(C, H^*(M, K)) \to H^*(\mathrm{Hom}(F^{p,r}, K))]$$

Or, on sait déjà que

$$F^{p+r-1,r} = C^{p+r-n-2}/C^{p-1}\otimes M +_{\bar d+\bar f} C^{p+r-1}/C^{p+r-n-2}\otimes M$$

d'où on déduit que

$$\mathrm{Hom}(F^{p+r-1,r}, K) = \mathrm{Hom}(C^{p+r-1}/C^{p+r-n-2}\otimes M, K) +_{\mathrm{Hom}(\bar d+\bar f, K)} \mathrm{Hom}(C^{p+r-n-2}/C^{p-1}\otimes M, K)$$

Alors, la suite exacte de cohomologie

$$\begin{array}{l} \to H^*(\mathrm{Hom}(F^{p+r-1,r}, K)) \to H^*(\mathrm{Hom}(C^{p+r-n-2}/C^{p-1}\otimes M, K)) \xrightarrow{\bar\varphi} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H^*(\mathrm{Hom}(C^{p+r-1}/C^{p+r-n-2}\otimes M, K)) \to \\ \qquad\qquad \searrow \qquad\qquad \downarrow \bar g \\ \qquad\qquad\qquad\qquad H^p(C, H^*(M, K)) \end{array}$$

entraîne qu'on a

$$\mathrm{Im}[H^*(\mathrm{Hom}(F^{p+r-1,r}, K)) \to H^p(C, H^*(M, K))] = \bar g(\mathrm{Ker}\,\bar\varphi)$$
$$\bar\varphi = (\mathrm{Hom}(\bar d+\bar f, K))^*.$$

De même, la suite exacte de la cohomologie

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad H^p(C, H^*(M, K)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \bar h \qquad\qquad \searrow \\ \to H^*(\mathrm{Hom}(C^{p-n-1}/C^{p-r}\otimes M, K)) \xrightarrow{\bar\varphi} H^*(\mathrm{Hom}(C^p/C^{p-n-1}\otimes M, K)) \to H^*(\mathrm{Hom}(F^{p,r}, K)) \to \end{array}$$

entraîne qu'on a

$$\mathrm{Ker}\,[H^p(C, H^*(M, K)) \to H^*(\mathrm{Hom}(F^{p,r}, K))] = (\bar h)^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar\varphi).$$

Ensuite, les diagrammes commutatifs (5) et (6) du § 4, chapitre IV, permettent de faire le même raisonnement qu'au § 2, et enfin de démontrer

$$\bar g(\mathrm{Ker}\,\bar\varphi) = \Gamma^p_r(\mathrm{Ker}\,\beta\smile^p_r)$$
$$(\bar h)^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar\varphi) = (L^{p-r+1}_r)^{-1}(\mathrm{Im}\,\beta\smile^{p-r+1}_r)$$

et le (6) du § 2 achève la démonstration du théorème 3. Par le même raisonnement qu'au § 3, on peut ensuite démontrer le théorème 4.

c.q.f.d.

§ 5. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES A ET B. (Cf. Introduction)

Supposons maintenant que l'anneau de base soit un corps et le groupe $\mathcal{G}$ soit $(n-1)$-connexe. Ceci entraîne, d'une part, l'unicité des classes fondamentales, donc aussi l'unicité de la k^e classe caractéristique

$$\xi^k \in H^k(\mathcal{B}, H_{k-1}(\mathcal{G})) \qquad \text{pour } k \leq 2n,$$

d'un fibré n-trivial $\mathscr{E}$. D'autre part, le lemme 2 du § 2 du chapitre IV montre que le cap-produit généralisé $\frown$ (resp. le cup-produit généralisé $\smile$) s'identifie au cap-produit ordinaire $\frown$ (resp. au cup-produit ordinaire $\smile$) relatif aux applications de Pontrjagin :

$$\mathrm{H}_*(\mathscr{G})\otimes\mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K}) \to \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K})$$
$$\mathrm{H}_*(\mathscr{G})\otimes\mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K}) \to \mathrm{H}^*(\mathscr{F}, \mathrm{K})$$

Donc, dans ce cas-là, on peut remplacer le $\frown$ (resp. $\smile$) par $\frown$ (resp. $\smile$) dans les théorèmes du § 1 et § 4. De plus, pour le cap-produit ordinaire et le cup-produit ordinaire, $\mathrm{H}_*(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{F}, \mathrm{K}))$ est un module bigradué sur l'algèbre bigraduée $\mathrm{H}^*(\mathscr{B}, \mathrm{H}_*(\mathscr{G}))$. On peut donc énoncer le résultat sous la forme des théorèmes A et B.

Remarque. — Les termes $\mathrm{E}^r_{p,q}$ $(2 \leqslant r \leqslant 2n+1)$ déterminent à un isomorphisme près, les modules d'homologie $\mathrm{H}_r(\mathscr{E})$ d'un fibré n-trivial pour $r \leqslant 2n+1$, puisque les extensions successives [12] définies par la filtration sont triviales.

En outre, si la base $\mathscr{B}$ est de dimension $\leqslant 2n+1$ et n-connexe, l'homologie d'un fibré quelconque sur $\mathscr{B}$ se calcule (à un isomorphisme près) à l'aide de la classe caractéristique; en effet

$$\mathrm{E}^r = \mathrm{E}^\infty \approx \mathrm{H}_*(\mathscr{E})$$

Par exemple, les variétés de dimension impaire obtenues par Milnor et Kervaire en tuant les groupes d'homotopie sont dans ce cas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. Adams, *Proc. Cambridge Philo. Society*, vol. 57, p. 189-199, 1961.
[2] M. G. Barratt, V. K. A. M. Gugenheim et J. C. Moore, *American Jour. of Math.*, 81, 1959, p. 639-657.
[3] E. H. Brown, *Annals of Math.*, 69, 1959, p. 223-246.
[4] H. Cartan, *Séminaire (1953-1954)*, 1956-1957.
[5] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton, 1956.
[6] A. Dold, *Annals of Math.*, 68, 1958, p. 54-80.
[7] S. Eilenberg et S. Maclane, *Annals of Math. Soc.*, 58, 1953, p. 55-106, et 60, 1954, p. 49-139.
[8] S. Eilenberg et J. A. Zilber, *Annals of Math.*, 51, 1950, p. 499-513, et *American Jour. of Math.*, 75, 1953, p. 200-204.
[9] E. Fadell et W. Hurewicz, *Annals of Math.*, 68, 1958, p. 314-346.
[10] R. Godement, *Théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.
[11] V. K. A. M. Gugenheim, *Illinois J. Math.*, 4, 1960, p. 292-311.
[12] A. Heller, *Illinois Jour. Math.*, 5, 1961, p. 412-420.
[13] D. M. Kan et G. W. Whitehead, *Proc. of American Math. Soc.*, 12, 1961, p. 24-26.
[14] J. Leray, *Jour. Math. Pures Appli.*, 29, 1950, p. 1-139.
[15] J. C. Moore, *Notes on homotopy Theory*, Princeton, 1956; *Symposium Inter. de Topologia Algebrica*, 1958, p. 232-247; *Séminaire Notes*, Princeton, 1958.
[16] J.-P. Serre, *Annals of Math.*, 54, 1951, p. 425-504.
[17] N. Steenrod, *Annals of Math.*, vol. 50, 1949, p. 954-988.
[18] E. Thomas, *Lectures of Dep. Math. University of California*, June 1961.

Manuscrit reçu le 1er novembre 1961.
Révisé le 10 février 1962.