PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

ALEXANDER GROTHENDIECK

Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 11 (1961), p. 5-167

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1961__11__5_0>

CHAPITRE O (*suite*) [1]

PRÉLIMINAIRES

§ 8. FONCTEURS REPRÉSENTABLES

8.1. Foncteurs représentables.

(8.1.1) Nous désignerons par $\boldsymbol{Ens}$ la catégorie des ensembles. Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie; pour deux objets X, Y de $\boldsymbol{C}$, nous poserons $h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$; pour tout morphisme $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ dans $\boldsymbol{C}$, nous désignerons par $h_{\mathrm{X}}(u)$ l'application $v \rightsquigarrow vu$ de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Y}', \mathrm{X})$ dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$. Il est immédiat qu'avec ces définitions, $h_{\mathrm{X}} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Ens}$ est un *foncteur contravariant*, c'est-à-dire un objet de la catégorie, notée $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ens})$, des foncteurs covariants de la catégorie $\boldsymbol{C}^0$, duale de la catégorie $\boldsymbol{C}$, dans la catégorie $\boldsymbol{Ens}$ (T, 1.7, *d)* et [29]).

(8.1.2) Soit maintenant $w : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ un morphisme dans $\boldsymbol{C}$; pour tout $\mathrm{Y} \in \boldsymbol{C}$ et tout $v \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) = h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$, on a $wv \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}') = h_{\mathrm{X}'}(\mathrm{Y})$; désignons par $h_w(\mathrm{Y})$ l'application $v \rightsquigarrow wv$ de $h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$ dans $h_{\mathrm{X}'}(\mathrm{Y})$. Il est immédiat que pour tout morphisme $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ dans $\boldsymbol{C}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}') \arrow[r, "h_{\mathrm{X}}(u)"] \arrow[d, "h_w(\mathrm{Y}')"'] & h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) \arrow[d, "h_w(\mathrm{Y})"] \\ h_{\mathrm{X}'}(\mathrm{Y}') \arrow[r, "h_{\mathrm{X}'}(u)"'] & h_{\mathrm{X}'}(\mathrm{Y}) \end{tikzcd}$$

est commutatif; autrement dit, h_w est un *morphisme fonctoriel* $h_{\mathrm{X}} \to h_{\mathrm{X}'}$ (T, 1.2), ou encore un morphisme dans la catégorie $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ens})$ (T, 1.7, *d)*). Les définitions de h_{X} et de h_w constituent donc la définition d'un *foncteur covariant canonique*

(8.1.2.1) $$h : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ens}).$$

(8.1.3) Soient X un objet de $\boldsymbol{C}$, F un foncteur contravariant de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ens}$ (objet de $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ens})$). Soit $g : h_{\mathrm{X}} \to \mathrm{F}$ un *morphisme fonctoriel* : pour tout $\mathrm{Y} \in \boldsymbol{C}$,

---

[1] Pour faciliter la recherche des références, on renverra désormais aux paragraphes du chapitre o publiés avec le chapitre I par le signe $\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$.

$g(\mathrm{Y})$ est donc une application $h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) \rightarrow \mathrm{F}(\mathrm{Y})$ telle que pour tout morphisme $u : \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{Y}'$ dans $\boldsymbol{C}$, le diagramme

(8.1.3.1)
$$\begin{array}{ccc} h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}') & \xrightarrow{h_{\mathrm{X}}(u)} & h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) \\ {\scriptstyle g(\mathrm{Y}')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(\mathrm{Y})} \\ \mathrm{F}(\mathrm{Y}') & \xrightarrow[\mathrm{F}(u)]{} & \mathrm{F}(\mathrm{Y}) \end{array}$$

soit commutatif. En particulier, on a une application $g(\mathrm{X}) : h_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) \rightarrow \mathrm{F}(\mathrm{X})$, d'où un élément

(8.1.3.2)
$$\alpha(g) = (g(\mathrm{X}))(1_{\mathrm{X}}) \in \mathrm{F}(\mathrm{X})$$

et par suite une application canonique

(8.1.3.3)
$$\alpha : \mathrm{Hom}(h_{\mathrm{X}}, \mathrm{F}) \rightarrow \mathrm{F}(\mathrm{X}).$$

Inversement, considérons un élément $\xi \in \mathrm{F}(\mathrm{X})$; pour tout morphisme $v : \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{X}$ dans $\boldsymbol{C}$, $\mathrm{F}(v)$ est une application $\mathrm{F}(\mathrm{X}) \rightarrow \mathrm{F}(\mathrm{Y})$; considérons l'application

(8.1.3.4)
$$v \rightsquigarrow (\mathrm{F}(v))(\xi)$$

de $h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$ dans $\mathrm{F}(\mathrm{Y})$; si on désigne par $(\beta(\xi))(\mathrm{Y})$ cette application,

(8.1.3.5)
$$\beta(\xi) : h_{\mathrm{X}} \rightarrow \mathrm{F}$$

est un *morphisme fonctoriel*, car on a pour tout morphisme $u : \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{Y}'$ dans $\boldsymbol{C}$, $(\mathrm{F}(vu))(\xi) = (\mathrm{F}(v) \circ \mathrm{F}(u))(\xi)$, ce qui vérifie la commutativité de (8.1.3.1) pour $g = \beta(\xi)$. On a ainsi défini une application canonique

(8.1.3.6)
$$\beta : \mathrm{F}(\mathrm{X}) \rightarrow \mathrm{Hom}(h_{\mathrm{X}}, \mathrm{F}).$$

Proposition **(8.1.4)**. — *Les applications* α *et* β *sont des bijections réciproques l'une de l'autre.*

Calculons $\alpha(\beta(\xi))$ pour $\xi \in \mathrm{F}(\mathrm{X})$; pour tout $\mathrm{Y} \in \boldsymbol{C}$, $(\beta(\xi))(\mathrm{Y})$ est l'application $g_1(\mathrm{Y}) : v \rightsquigarrow (\mathrm{F}(v))(\xi)$ de $h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$ dans $\mathrm{F}(\mathrm{Y})$. On a donc

$$\alpha(\beta(\xi)) = (g_1(\mathrm{X}))(1_{\mathrm{X}}) = (\mathrm{F}(1_{\mathrm{X}}))(\xi) = 1_{\mathrm{F}(\mathrm{X})}(\xi) = \xi.$$

Calculons maintenant $\beta(\alpha(g))$ pour $g \in \mathrm{Hom}(h_{\mathrm{X}}, \mathrm{F})$; pour tout $\mathrm{Y} \in \boldsymbol{C}$, $(\beta(\alpha(g)))(\mathrm{Y})$ est l'application $v \rightsquigarrow (\mathrm{F}(v))((g(\mathrm{X}))(1_{\mathrm{X}}))$; en vertu de la commutativité de (8.1.3.1), cette application n'est autre que $v \rightsquigarrow (g(\mathrm{Y}))((h_{\mathrm{X}}(v))(1_{\mathrm{X}})) = (g(\mathrm{Y}))(v)$ par définition de $h_{\mathrm{X}}(v)$, autrement dit, elle est égale à $g(\mathrm{Y})$, ce qui démontre la proposition.

(8.1.5) Rappelons qu'une *sous-catégorie* $\boldsymbol{C}'$ d'une catégorie $\boldsymbol{C}$ est définie par la condition que ses objets soient des objets de $\boldsymbol{C}$, et que si X', Y' sont deux objets de $\boldsymbol{C}'$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$ des morphismes $\mathrm{X}' \rightarrow \mathrm{Y}'$ *dans* $\boldsymbol{C}'$ est une partie de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$ des morphismes $\mathrm{X}' \rightarrow \mathrm{Y}'$ *dans* $\boldsymbol{C}$, l'application canonique de « composition des morphismes »

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(\mathrm{X}', \mathrm{Y}') \times \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(\mathrm{Y}', \mathrm{Z}') \rightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(\mathrm{X}', \mathrm{Z}')$$

étant la restriction de l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', Y') \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y', Z') \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', Z').$$

On dit que $\boldsymbol{C}'$ est une sous-catégorie *pleine* de $\boldsymbol{C}$ si $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(X', Y') = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', Y')$ pour tout couple d'objets de $\boldsymbol{C}'$. La sous-catégorie $\boldsymbol{C}''$ de $\boldsymbol{C}$ formée des objets de $\boldsymbol{C}$ isomorphes aux objets de $\boldsymbol{C}'$ est encore alors une sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{C}$, *équivalente* (T, 1.2) à $\boldsymbol{C}'$ comme on le vérifie sans peine.

Un foncteur covariant $F : \boldsymbol{C}_1 \rightarrow \boldsymbol{C}_2$ est dit *pleinement fidèle* si, pour tout couple d'objets X_1, Y_1 de $\boldsymbol{C}_1$, l'application $u \rightsquigarrow F(u)$ de $\mathrm{Hom}(X_1, Y_1)$ dans $\mathrm{Hom}(F(X_1), F(Y_1))$ est *bijective*; cela entraîne que la sous-catégorie $F(\boldsymbol{C}_1)$ de $\boldsymbol{C}_2$ est *pleine*. En outre, si deux objets X_1, X_1' ont même image X_2, il existe un isomorphisme unique $u : X_1 \rightarrow X_1'$ tel que $F(u) = 1_{X_2}$. Pour tout objet X_2 de $F(\boldsymbol{C}_1)$, soit alors $G(X_2)$ un des objets X_1 de $\boldsymbol{C}_1$ tel que $F(X_1) = X_2$ (G étant défini au moyen de l'axiome de choix); pour tout morphisme $v : X_2 \rightarrow Y_2$ dans $F(\boldsymbol{C}_1)$, $G(v)$ sera l'unique morphisme $u : G(X_2) \rightarrow G(Y_2)$ tel que $F(u) = v$; G est alors un *foncteur* de $F(\boldsymbol{C}_1)$ dans $\boldsymbol{C}_1$; FG est le foncteur identique dans $F(\boldsymbol{C}_1)$, et ce qui précède montre qu'il existe un isomorphisme de foncteurs $\varphi : \boldsymbol{1}_{\mathbf{C}_1} \rightarrow GF$ tel que F, G, φ et l'identité $\boldsymbol{1}_{F(\mathbf{C}_1)} \rightarrow FG$ définissent une *équivalence* de la catégorie $\boldsymbol{C}_1$ et de la sous-catégorie pleine $F(\boldsymbol{C}_1)$ de $\boldsymbol{C}_2$ (T, 1.2).

(8.1.6) Appliquons la prop. (8.1.4) au cas où le foncteur F est $h_{X'}$, X' étant un objet quelconque de $\boldsymbol{C}$; l'application $\beta : \mathrm{Hom}(X, X') \rightarrow \mathrm{Hom}(h_X, h_{X'})$ n'est autre ici que l'application $w \rightsquigarrow h_w$ définie dans (8.1.2); cette application étant *bijective*, on voit, avec la terminologie de (8.1.5), que :

Proposition **(8.1.7)**. — *Le foncteur canonique* $h : \boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ens})$ *est pleinement fidèle.*

(8.1.8) Soit F un foncteur contravariant de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ens}$; on dit que F est *représentable* s'il existe un objet $X \in \boldsymbol{C}$ tel que F soit *isomorphe* à h_X; il résulte de (8.1.7) que la donnée d'un $X \in \boldsymbol{C}$ et d'un isomorphisme de foncteurs $g : h_X \rightarrow F$ détermine X à un isomorphisme unique près. La prop. (8.1.7) signifie encore que h définit une *équivalence* de $\boldsymbol{C}$ et de la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ens})$ formée des *foncteurs contravariants représentables*. Il résulte d'ailleurs de (8.1.4) que la donnée d'un morphisme fonctoriel $g : h_X \rightarrow F$ équivaut à celle d'un élément $\xi \in F(X)$; dire que g est un *isomorphisme* équivaut pour ξ à la condition suivante : *pour tout objet* Y *de* $\boldsymbol{C}$ *l'application* $v \rightsquigarrow (F(v))(\xi)$ *de* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *dans* $F(Y)$ *est bijective*. Lorsque ξ vérifie cette condition, on dira que le couple (X, ξ) *représente* le foncteur représentable F. Par abus de langage, on dira aussi que l'objet $X \in \boldsymbol{C}$ représente F s'il existe $\xi \in F(X)$ tel que (X, ξ) représente F, autrement dit si h_X est isomorphe à F.

Soient F, F' deux foncteurs contravariants représentables de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ens}$, $h_X \rightarrow F$ et $h_{X'} \rightarrow F'$ deux isomorphismes de foncteurs. Alors il résulte de (8.1.6) qu'il y a une correspondance biunivoque canonique entre $\mathrm{Hom}(X, X')$ et l'ensemble $\mathrm{Hom}(F, F')$ des morphismes fonctoriels $F \rightarrow F'$.

(8.1.9) *Exemples. I : limites projectives.* La notion de foncteur contravariant représentable couvre en particulier la notion « duale » de la notion usuelle de « solution d'un problème universel ». Plus généralement, nous allons voir que la notion de *limite projective* est un cas particulier de celle de foncteur représentable. Rappelons que dans une catégorie $\mathbf{C}$, on définit un *système projectif* par la donnée d'un ensemble préordonné I, d'une famille $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ d'objets de $\mathbf{C}$, et, pour tout couple d'indices (α, β) tel que $\alpha \leqslant \beta$, d'un morphisme $u_{\alpha\beta} : A_\beta \to A_\alpha$. Une *limite projective* de ce système dans $\mathbf{C}$ est constituée par un objet B de $\mathbf{C}$ (noté $\varprojlim A_\alpha$), et, pour chaque $\alpha\in I$, un morphisme $u_\alpha : B \to A_\alpha$, tels que : 1° $u_\alpha = u_{\alpha\beta}u_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta$; 2° Pour tout objet X de $\mathbf{C}$ et toute famille $(v_\alpha)_{\alpha\in I}$ de morphismes $v_\alpha : X \to A_\alpha$, telle que $v_\alpha = u_{\alpha\beta}v_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta$, il existe un morphisme unique $v : X \to B$ (noté $\varprojlim v_\alpha$) tel que $v_\alpha = u_\alpha v$ pour tout $\alpha\in I$ (T, 1.8). Ceci s'interprète de la façon suivante : les $u_{\alpha\beta}$ définissent canoniquement des applications

$$\overline{u}_{\alpha\beta} : \mathrm{Hom}(X, A_\beta) \to \mathrm{Hom}(X, A_\alpha)$$

qui définissent un *système projectif* d'ensembles $(\mathrm{Hom}(X, A_\alpha), \overline{u}_{\alpha\beta})$, et (v_α) est par définition un élément de l'ensemble $\varprojlim_\alpha \mathrm{Hom}(X, A_\alpha)$; il est clair que $X \rightsquigarrow \varprojlim \mathrm{Hom}(X, A_\alpha)$ est un *foncteur contravariant* de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$, et l'existence de la limite projective B équivaut à dire que $(v_\alpha) \rightsquigarrow \varprojlim v_\alpha$ est un *isomorphisme* de foncteurs en X

$$\textbf{(8.1.9.1)} \qquad \varprojlim \mathrm{Hom}(X, A_\alpha) \simeq \mathrm{Hom}(X, B)$$

autrement dit que le foncteur $X \rightsquigarrow \varprojlim \mathrm{Hom}\,(X, A_\alpha)$ est *représentable*.

(8.1.10) *Exemples. II : Objet final.* Soient $\mathbf{C}$ une catégorie, $\{a\}$ un ensemble réduit à un seul élément. Considérons le foncteur contravariant $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$ qui, à tout objet X de $\mathbf{C}$ fait correspondre l'ensemble $\{a\}$ et à tout morphisme $X \to X'$ dans $\mathbf{C}$ l'unique application $\{a\} \to \{a\}$. Dire que ce foncteur est *représentable* signifie qu'il existe un objet $e\in\mathbf{C}$ tel que pour tout $Y\in\mathbf{C}$, $\mathrm{Hom}(Y, e) = h_e(Y)$ soit *réduit à un élément*; on dit que e est un *objet final* de $\mathbf{C}$, et il est clair que deux objets finaux de $\mathbf{C}$ sont isomorphes (ce qui permet de définir, en général à l'aide de l'axiome de choix, *un* objet final de $\mathbf{C}$ qu'on note alors $e_{\mathbf{C}}$). Par exemple, dans la catégorie $\mathbf{Ens}$, les objets finaux sont les ensembles réduits à un élément; dans la catégorie des *algèbres augmentées* sur un corps K (où les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres compatibles avec les augmentations), K est un objet final; dans la catégorie des S-*préschémas* (**I**, 2.5.1), S est un objet final.

(8.1.11) Pour deux objets X, Y d'une catégorie $\mathbf{C}$, posons $h'_X(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$ et pour tout morphisme $u : Y \to Y'$, soit $h_X(u)$ l'application $v \rightsquigarrow uv$ de $\mathrm{Hom}(X, Y)$ dans $\mathrm{Hom}(X, Y')$; h'_X est alors un *foncteur covariant* $\mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$, d'où l'on déduit comme dans (8.1.2) la définition d'un foncteur covariant canonique $h' : \mathbf{C}^0 \to \mathbf{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{Ens})$; un foncteur *covariant* F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$, autrement dit un objet de $\mathbf{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{Ens})$ est alors dit *représentable* s'il existe un objet $X\in\mathbf{C}$ (nécessairement unique à isomorphisme unique près) tel que F soit *isomorphe à* h'_X; nous laissons au lecteur le soin de développer les considérations « duales » des précédentes pour cette notion, qui couvre cette fois celle de *limite inductive*, et en particulier la notion usuelle de « solution de problème universel ».

8.2. Structures algébriques dans les catégories.

(8.2.1) Étant donnés deux foncteurs contravariants F, F′ de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ens}$, rappelons que pour tout objet $Y \in \boldsymbol{C}$, on pose $(F \times F')(Y) = F(Y) \times F'(Y)$, et pour tout morphisme $u : Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, on pose $(F \times F')(u) = F(u) \times F'(u)$ qui est l'application $(t, t') \rightsquigarrow (F(u)(t), F'(u)(t'))$ de $F(Y') \times F'(Y')$ dans $F(Y) \times F'(Y)$; $F \times F' : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Ens}$ est donc un *foncteur contravariant* (qui n'est autre d'ailleurs que le *produit* des objets F, F′ dans la catégorie $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ens})$). Étant donné un objet $X \in \boldsymbol{C}$, nous appellerons *loi de composition interne* sur X un *morphisme fonctoriel*

(8.2.1.1) $$\gamma_X : h_X \times h_X \to h_X.$$

Autrement dit (T, 1.2), pour tout objet $Y \in \boldsymbol{C}$, $\gamma_X(Y)$ est une application $h_X(Y) \times h_X(Y) \to h_X(Y)$ (donc par définition une *loi de composition interne* sur l'ensemble $h_X(Y)$) soumise à la condition que, pour tout morphisme $u : Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
h_X(Y') \times h_X(Y') \arrow[r, "h_X(u) \times h_X(u)"] \arrow[d, "\gamma_X(Y')"'] & h_X(Y) \times h_X(Y) \arrow[d, "\gamma_X(Y)"] \\
h_X(Y') \arrow[r, "h_X(u)"'] & h_X(Y)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif; cela signifie que pour les lois de composition $\gamma_X(Y)$ et $\gamma_X(Y')$, $h_X(u)$ est un *homomorphisme* de $h_X(Y')$ dans $h_X(Y)$.

De la même façon, étant donnés deux objets Z, X de $\boldsymbol{C}$, on appelle *loi de composition externe sur* X, *ayant* Z *comme domaine d'opérateurs*, un morphisme fonctoriel

(8.2.1.2) $$\omega_{X,Z} : h_Z \times h_X \to h_X.$$

On voit comme ci-dessus que pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, $\omega_{X,Z}(Y)$ est une loi de composition externe sur $h_X(Y)$, ayant $h_Z(Y)$ comme domaine d'opérateurs, et telle que pour tout morphisme $u : Y \to Y'$, $h_X(u)$ et $h_Z(u)$ forment un *dihomomorphisme* de $(h_Z(Y'), h_X(Y'))$ dans $(h_Z(Y), h_X(Y))$.

(8.2.2) Soit X′ un second objet de $\boldsymbol{C}$, et supposons donnée sur X′ une loi de composition interne $\gamma_{X'}$; nous dirons qu'un morphisme $w : X \to X'$ dans $\boldsymbol{C}$ est un *homomorphisme* pour ces lois de composition, si pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, $h_w(Y) : h_X(Y) \to h_{X'}(Y)$ est un *homomorphisme* pour les lois de composition $\gamma_X(Y)$ et $\gamma_{X'}(Y)$. Si X″ est un troisième objet de $\boldsymbol{C}$ muni d'une loi de composition interne $\gamma_{X''}$ et $w' : X' \rightarrow X''$ un morphisme dans $\boldsymbol{C}$ qui est un homomorphisme pour $\gamma_{X'}$ et $\gamma_{X''}$, il est clair que le morphisme $w'w : X \rightarrow X''$ est un homomorphisme pour les lois de composition γ_X et $\gamma_{X''}$. Un isomorphisme $w : X \xrightarrow{\sim} X'$ dans $\boldsymbol{C}$ est appelé *isomorphisme pour les lois de composition* γ_X et $\gamma_{X'}$ si w est un homomorphisme pour ces lois de composition, et si son morphisme réciproque w^{-1} est un homomorphisme pour les lois de composition $\gamma_{X'}$ et γ_X.

On définit de la même manière les *dihomomorphismes* pour les couples d'objets de $\boldsymbol{C}$ munis de lois de composition externes.

(8.2.3) Lorsqu'une loi de composition interne γ_X sur un objet $X \in \boldsymbol{C}$ est telle que $\gamma_X(Y)$ soit une loi de *groupe* sur $h_X(Y)$ pour *tout* $Y \in \boldsymbol{C}$, on dit que X, muni de cette loi, est un *$\boldsymbol{C}$-groupe* ou un *$\boldsymbol{C}$-objet en groupes*. On définit de même les *$\boldsymbol{C}$-anneaux*, *$\boldsymbol{C}$-modules*, etc.

(8.2.4) Supposons que le *produit* $X \times X$ d'un objet $X \in \boldsymbol{C}$ par lui-même existe dans $\boldsymbol{C}$; par définition, on a alors $h_{X \times X} = h_X \times h_X$ à un isomorphisme canonique près, puisqu'il s'agit d'un cas particulier de limite projective (8.1.9); une loi de composition interne sur X peut donc être considérée comme un morphisme fonctoriel $\gamma_X : h_{X \times X} \rightarrow h_X$, et détermine donc canoniquement (8.1.6) un élément $c_X \in \mathrm{Hom}(X \times X, X)$ tel que $h_{c_X} = \gamma_X$; dans ce cas, la donnée d'une loi de composition interne sur X est donc équivalente à celle d'un morphisme $X \times X \rightarrow X$; lorsque $\boldsymbol{C}$ est la catégorie ***Ens***, on retrouve la notion classique de loi de composition interne sur un ensemble. On a un résultat analogue pour une loi de composition externe lorsque le produit $Z \times X$ existe dans $\boldsymbol{C}$.

(8.2.5) Avec les notations précédentes, supposons en outre que $X \times X \times X$ existe dans $\boldsymbol{C}$; la caractérisation du produit comme objet représentant un foncteur (8.1.9) entraîne l'existence d'isomorphismes canoniques

$$(X \times X) \times X \xrightarrow{\sim} X \times X \times X \xrightarrow{\sim} X \times (X \times X);$$

si on identifie canoniquement $X \times X \times X$ à $(X \times X) \times X$, l'application $\gamma_X(Y) \times 1_{h_X(Y)}$ s'identifie à $h_{c_X \times 1_X}(Y)$ pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$. Il est par suite équivalent de dire que pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, la loi interne $\gamma_X(Y)$ est associative, ou que le diagramme d'applications

$$\begin{tikzcd} h_X(Y) \times h_X(Y) \times h_X(Y) \arrow[r, "\gamma_X(Y) \times 1"] \arrow[d, "1 \times \gamma_X(Y)"'] & h_X(Y) \times h_X(Y) \arrow[d, "\gamma_X(Y)"] \\ h_X(Y) \times h_X(Y) \arrow[r, "\gamma_X(Y)"'] & h_X(Y) \end{tikzcd}$$

est commutatif, ou que le diagramme de morphismes

$$\begin{tikzcd} X\times X\times X \arrow[r, "c_X\times 1_X"] \arrow[d, "1_X\times c_X"'] & X\times X \arrow[d, "c_X"] \\ X\times X \arrow[r, "c_X"'] & X \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(8.2.6) Sous les hypothèses de (8.2.5), si on veut exprimer que pour tout $Y\in\boldsymbol{C}$, la loi interne $\gamma_X(Y)$ est une loi de *groupe*, il faut d'une part exprimer qu'elle est associative, et de l'autre qu'il existe une application $\alpha_X(Y) : h_X(Y)\to h_X(Y)$ ayant les propriétés de l'*inverse* dans un groupe; comme pour tout morphisme $u : Y\to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, on a vu que $h_X(u)$ doit être un homomorphisme de groupes $h_X(Y')\to h_X(Y)$, on voit d'abord que $\alpha_X : h_X\to h_X$ doit être un *morphisme fonctoriel.* On peut d'autre part exprimer les propriétés caractéristiques de l'inverse $s\rightsquigarrow s^{-1}$ dans un groupe G sans faire intervenir l'élément neutre : il suffit d'écrire que les deux applications composées

$$(s, t)\rightsquigarrow(s, s^{-1}, t)\rightsquigarrow(s, s^{-1}t)\rightsquigarrow s(s^{-1}t)$$
$$(s, t)\rightsquigarrow(s, s^{-1}, t)\rightsquigarrow(s, ts^{-1})\rightsquigarrow(ts^{-1})s$$

sont égales à la seconde projection $(s, t)\rightsquigarrow t$ de $G\times G$ dans G. En vertu de (8.1.3), on a $\alpha_X=h_{a_X}$, où $a_X\in\mathrm{Hom}(X, X)$; la première condition précédente exprime alors que le morphisme composé

$$X\times X \xrightarrow{(1_X, a_X)\times 1_X} X\times X\times X \xrightarrow{1_X\times c_X} X\times X \xrightarrow{c_X} X$$

est la seconde projection $X\times X\to X$ dans $\boldsymbol{C}$, et la seconde condition se traduit de même.

(8.2.7) Supposons maintenant qu'il existe dans $\boldsymbol{C}$ un *objet final* $\boldsymbol{e}$ (8.1.10). Supposons toujours que $\gamma_X(Y)$ soit une loi de groupe sur $h_X(Y)$ pour tout $Y\in\boldsymbol{C}$, et désignons par $\eta_X(Y)$ l'élément neutre de $\gamma_X(Y)$. Comme, pour tout morphisme $u : Y\to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, $h_X(u)$ est un homomorphisme de groupes, on a $\eta_X(Y)=(h_X(u))(\eta_X(Y'))$; prenant en particulier $Y'=\boldsymbol{e}$, auquel cas u est l'unique élément ε de $\mathrm{Hom}(Y, \boldsymbol{e})$, on voit que l'élément $\eta_X(\boldsymbol{e})$ détermine complètement $\eta_X(Y)$ pour tout $Y\in\boldsymbol{C}$. Posons $e_X=\eta_X(X)$, élément neutre du groupe $h_X(X)=\mathrm{Hom}(X, X)$; la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} h_X(\boldsymbol{e}) \arrow[r, "h_X(\varepsilon)"] \arrow[d, "h_{e_X}(\boldsymbol{e})"'] & h_X(Y) \arrow[d, "h_{e_X}(Y)"] \\ h_X(\boldsymbol{e}) \arrow[r, "h_X(\varepsilon)"'] & h_X(Y) \end{tikzcd}$$

(cf. 8.1.2) montre que, dans l'ensemble $h_X(Y)$, l'application $h_{e_X}(Y)$ n'est autre que

$s \rightsquigarrow \eta_X(Y)$ transformant tout élément en l'élément neutre. On vérifie alors que le fait que $\eta_X(Y)$ soit élément neutre de $\gamma_X(Y)$ pour tout $Y \in C$ équivaut à dire que le morphisme composé

$$X \xrightarrow{(1_X, 1_X)} X \times X \xrightarrow{1_X \times e_X} X \times X \xrightarrow{c_X} X,$$

et l'analogue où on permute 1_X et e_X, sont tous deux *égaux à* 1_X.

(8.2.8) On pourrait bien entendu multiplier sans peine les exemples de structures algébriques dans les catégories. L'exemple des groupes a été traité avec assez de détails, mais par la suite nous laisserons généralement au lecteur le soin de développer des considérations analogues dans les exemples de structures algébriques que nous rencontrerons.

§ 9. ENSEMBLES CONSTRUCTIBLES

9.1. Ensembles constructibles.

Définition **(9.1.1)**. — *On dit qu'une application continue* $f : X \rightarrow Y$ *est quasi-compacte si pour tout ouvert quasi-compact* U *de* Y, $f^{-1}(U)$ *est quasi-compact. On dit qu'une partie* Z *d'un espace topologique* X *est rétrocompacte dans* X *si l'injection canonique* $Z \rightarrow X$ *est quasi-compacte, autrement dit si pour tout ouvert quasi-compact* U *de* X, $U \cap Z$ *est quasi-compact.*

Une partie *fermée* de X est rétrocompacte dans X, mais une partie quasi-compacte de X n'est pas nécessairement rétrocompacte dans X. Si X est quasi-compact, toute partie ouverte rétrocompacte dans X est quasi-compacte. Il est clair que toute réunion *finie* d'ensembles rétrocompacts dans X est rétrocompacte dans X, toute réunion finie d'ensembles quasi-compacts étant quasi-compacte. Toute intersection finie d'ouverts rétrocompacts dans X est un ouvert rétrocompact dans X. Dans un espace *localement noethérien* X, tout ensemble quasi-compact est un sous-espace noethérien, et par suite *toute partie* de X est rétrocompacte dans X.

Définition **(9.1.2)**. — *Étant donné un espace topologique* X, *on dit qu'une partie de* X *est constructible si elle appartient au plus petit ensemble de parties* $\mathfrak{F}$ *de* X *contenant toutes les parties ouvertes rétrocompactes de* $\mathfrak{F}$ *et stable par intersection finie et passage au complémentaire* (ce qui implique que $\mathfrak{F}$ est aussi *stable par réunion finie*).

Proposition **(9.1.3)**. — *Pour qu'une partie de* X *soit constructible, il faut et il suffit qu'elle soit réunion finie d'ensembles de la forme* $U \cap \complement V$, *où* U *et* V *sont des ouverts rétrocompacts dans* X.

Il est clair que la condition est suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, considérons l'ensemble $\mathfrak{G}$ des réunions finies d'ensembles de la forme $U \cap \complement V$ où U et V sont ouverts rétrocompacts dans X; il suffit de voir que tout complémentaire d'un ensemble de $\mathfrak{G}$ appartient à $\mathfrak{G}$. Soit donc $Z = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap \complement V_i)$, où I est fini, U_i et V_i ouverts rétrocompacts dans X; on a $\complement Z = \bigcap_{i \in I} (V_i \cup \complement U_i)$, donc Z est réunion finie d'ensembles qui sont intersections d'un certain nombre des V_i et d'un certain nombre de $\complement U_i$, donc de la forme

$V \cap \complement U$, où U est réunion d'un certain nombre des U_i et V intersection d'un certain nombre des V_i ; mais on a remarqué plus haut que les réunions et intersections finies d'ouverts rétrocompacts dans X sont des ouverts rétrocompacts dans X, d'où la conclusion.

Corollaire **(9.1.4).** — *Toute partie constructible de* X *est rétrocompacte dans* X.

Il suffit de montrer que si U et V sont ouverts rétrocompacts dans X, $U \cap \complement V$ est rétrocompact dans X; or, si W est ouvert quasi-compact dans X, $W \cap U \cap \complement V$ est fermé dans l'espace quasi-compact $W \cap U$, donc est quasi-compact.

En particulier :

Corollaire **(9.1.5).** — *Pour qu'une partie ouverte* U *de* X *soit constructible, il faut et il suffit qu'elle soit rétrocompacte dans* X. *Pour qu'une partie fermée* F *de* X *soit constructible, il faut et il suffit que l'ouvert* $\complement F$ *soit rétrocompact.*

(9.1.6) Un cas important est celui où toute partie ouverte quasi-compacte de X est rétrocompacte, autrement dit, où l'intersection de deux parties ouvertes quasi-compactes de X est quasi-compacte (cf. **I**, 5.5.6). Lorsque X lui-même est quasi-compact, cela signifie que les parties ouvertes rétrocompactes dans X sont identiques aux parties ouvertes quasi-compactes de X, et les parties constructibles de X aux réunions finies d'ensembles de la forme $U \cap \complement V$, où U et V sont ouverts quasi-compacts.

Corollaire **(9.1.7).** — *Pour qu'une partie d'un espace noethérien* X *soit constructible, il faut et il suffit qu'elle soit réunion finie de parties localement fermées de* X.

Proposition **(9.1.8).** — *Soient* X *un espace topologique,* U *une partie ouverte de* X.

(i) *Si* T *est une partie constructible de* X, $T \cap U$ *est une partie constructible de* U.

(ii) *Supposons en outre* U *rétrocompact dans* X. *Pour qu'une partie* Z *de* U *soit constructible dans* X, *il faut et il suffit qu'elle soit constructible dans* U.

(i) Utilisant (9.1.3), on est ramené à montrer que si T est ouvert rétrocompact dans X, $T \cap U$ est ouvert rétrocompact dans U, autrement dit, pour tout ouvert quasi-compact $W \subset U, T \cap U \cap W = T \cap W$ est quasi-compact, ce qui résulte aussitôt de l'hypothèse.

(ii) La condition étant nécessaire en vertu de (i), il reste à démontrer qu'elle est suffisante. Compte tenu de (9.1.3), il suffit de considérer le cas où Z est ouvert rétrocompact *dans* U, car il s'ensuivra alors que $U - Z$ est constructible dans X, et si Z, Z' sont deux ouverts rétrocompacts *dans* U, $Z \cap (U - Z')$ sera bien constructible dans X. Or, si W est ouvert quasi-compact dans X et Z ouvert rétrocompact dans U, on a $Z \cap W = Z \cap (W \cap U)$ et par hypothèse $W \cap U$ est ouvert quasi-compact dans U; donc $W \cap Z$ est bien quasi-compact, et par suite Z est ouvert rétrocompact dans X, et *a fortiori* constructible dans X.

Corollaire **(9.1.9).** — *Soient* X *un espace topologique,* $(U_i)_{i \in I}$ *un recouvrement fini de* X *formé d'ensembles ouverts rétrocompacts dans* X. *Pour qu'une partie* Z *de* X *soit constructible dans* X, *il faut et il suffit que pour tout* $i \in I$, $Z \cap U_i$ *soit constructible dans* U_i.

(9.1.10) Supposons en particulier que X soit quasi-compact et que tout point de X admette un système fondamental de voisinages ouverts rétrocompacts dans X (et *a fortiori* quasi-compacts); alors la condition pour une partie Z de X d'être constructible dans X est de nature *locale*, autrement dit, il faut et il suffit que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que $V \cap Z$ soit constructible dans V. En effet, si cette condition est vérifiée, il existe pour tout $x \in X$ un voisinage ouvert V de x *rétrocompact dans* X et tel que $V \cap Z$ soit constructible dans V, en vertu de l'hypothèse sur X et de (9.1.8, (i)); il suffit alors de recouvrir X par un nombre fini de ces voisinages, et d'appliquer (9.1.9).

Définition **(9.1.11)**. — *Soit* X *un espace topologique. On dit qu'une partie* T *de* X *est localement constructible dans* X *si, pour tout* $x \in X$, *il existe un voisinage ouvert* V *de* x *tel que* $T \cap V$ *soit constructible dans* V.

Il résulte aussitôt de (9.1.8, (i)) que si V est tel que $V \cap T$ soit constructible dans V, alors pour tout ouvert $W \subset V$, $W \cap T$ est constructible dans W. Si T est localement constructible dans X, alors, pour tout ouvert U de X, $T \cap U$ est localement constructible dans U, comme il résulte de la remarque précédente. Cette même remarque montre que l'ensemble des parties localement constructibles dans X est stable par réunion finie et intersection finie; il est clair, d'autre part, qu'il est aussi stable par passage aux complémentaires.

Proposition **(9.1.12)**. — *Soit* X *un espace topologique. Tout ensemble constructible dans* X *est localement constructible dans* X. *La réciproque est vraie si* X *est quasi-compact et si sa topologie admet une base formée d'ensembles rétrocompacts dans* X.

La première assertion résulte de la définition (9.1.11) et la seconde de (9.1.10).

Corollaire **(9.1.13)**. — *Soit* X *un espace topologique dont la topologie admet une base formée d'ensembles rétrocompacts dans* X. *Alors toute partie* T *localement constructible dans* X *est rétrocompacte dans* X.

En effet, soit U un ensemble ouvert quasi-compact dans X; $T \cap U$ est localement constructible dans U, donc constructible dans U en vertu de (9.1.12), et par suite quasi-compact en vertu de (9.1.4).

9.2. Ensembles constructibles dans les espaces noethériens.

(9.2.1) On a vu (9.1.7) que dans un espace noethérien X, les parties constructibles dans X sont les *réunions finies de parties localement fermées* de X.

L'image réciproque d'un ensemble constructible dans X par une application continue d'un espace noethérien X′ dans X est constructible dans X′. Si Y est une partie constructible d'un espace noethérien X, les parties de Y qui sont constructibles en tant que sous-espaces de Y sont identiques à celles qui sont constructibles en tant que sous-espaces de X.

Proposition **(9.2.2)**. — *Soient* X *un espace irréductible noethérien,* E *une partie constructible de* X. *Pour que* E *soit partout dense dans* X, *il faut et il suffit que* E *contienne une partie ouverte non vide de* X.

La condition est évidemment suffisante, tout ensemble ouvert non vide étant dense dans X. Inversement, soit $E=\bigcup_{i=1}^{n}(U_i\cap F_i)$ une partie constructible de X, les U_i étant ouverts non vides et les F_i fermés dans X; on a donc $\overline{E}\subset\bigcup_i F_i$. Par suite, si $\overline{E}=X$, X est égal à l'un des F_i, donc $E\supset U_i$, ce qui achève la démonstration.

Lorsque X admet un point générique x ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.2), la condition de (9.2.2) équivaut à la relation $x\in E$.

Proposition **(9.2.3)**. — *Soit* X *un espace noethérien. Pour qu'une partie* E *de* X *soit constructible, il faut et il suffit que, pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X, $E\cap Y$ *soit rare dans* Y *ou contienne une partie ouverte non vide de* Y.

La nécessité de la condition provient de ce que $E\cap Y$ doit être une partie constructible de Y et de (9.2.2), car une partie non dense de Y est nécessairement rare dans l'espace irréductible Y ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.1). Pour prouver que la condition est suffisante, appliquons le principe de récurrence noethérienne ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.2.2) à l'ensemble $\mathfrak{F}$ des parties fermées Y de X telles que $Y\cap E$ soit constructible (par rapport à Y ou par rapport à X, ce qui revient au même) : on peut donc supposer que pour toute partie fermée $Y\neq X$ de X, $E\cap Y$ est constructible. Supposons d'abord que X ne soit pas irréductible, et soient X_i ($1\leqslant i\leqslant m$) ses composantes irréductibles, nécessairement en nombre fini ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.2.5); par hypothèse, les $E\cap X_i$ sont constructibles, donc aussi leur réunion E. Supposons ensuite que X soit irréductible; alors, par hypothèse, ou bien E est rare, donc $\overline{E}\neq X$ et $E=E\cap\overline{E}$ est constructible; ou bien E contient un ouvert non vide U de E, donc est réunion de U et de $E\cap(X-U)$; mais $X-U$ est un ensemble fermé distinct de X, donc $E\cap(X-U)$ est constructible; E lui-même est par suite constructible, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(9.2.4)**. — *Soient* X *un espace noethérien,* (E_α) *une famille filtrante croissante de parties constructibles de* X, *telle que :*

1° X *est réunion de la famille* (E_α).

2° *Toute partie fermée irréductible de* X *est contenue dans l'adhérence d'un des* E_α.

Alors il existe un indice α *tel que* $X=E_\alpha$.

Lorsque toute partie fermée irréductible de X *admet un point générique, l'hypothèse* 2° *peut être supprimée.*

Appliquons le principe de récurrence noethérienne ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.2.2) à l'ensemble $\mathfrak{M}$ des parties fermées de X contenues dans l'un des E_α au moins; on peut donc supposer que toute partie fermée $Y\neq X$ de X est contenue dans un des E_α. La proposition est évidente si X n'est pas irréductible, car chacune des composantes irréductibles X_i de X ($1\leqslant i\leqslant m$) est contenue dans un E_{α_i}, et il existe un E_α contenant tous les E_{α_i}. Supposons donc X irréductible. Par hypothèse, il existe β tel que $X=\overline{E}_\beta$, donc (9.2.2) E_β contient un ouvert non vide U de X. Mais alors l'ensemble fermé $X-U$ est contenu dans un E_γ, et il suffit de prendre E_α contenant E_β et E_γ. Lorsque toute partie fermée irréductible Y de X admet un point générique y, il existe α tel que $y \in E_\alpha$, donc $Y = \overline{\{y\}} \subset \overline{E}_\alpha$, et la condition 2° est conséquence de 1°.

Proposition **(9.2.5)**. — *Soient* X *un espace noethérien, x un point de* X, E *une partie constructible de* X. *Pour que* E *soit un voisinage de x, il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X *contenant x,* $E \cap Y$ *soit dense dans* Y *(s'il existe un point générique y de* Y, *cela signifie aussi* (9.2.2) *que* $y \in E$).

La condition est évidemment nécessaire; prouvons qu'elle est suffisante. Appliquant le principe de récurrence noethérienne à l'ensemble $\mathfrak{M}$ des parties fermées Y de X contenant x et telles que $E \cap Y$ soit un voisinage de x dans Y, on peut supposer que toute partie fermée $Y \neq X$ de X contenant x appartient à $\mathfrak{M}$. Si X n'est pas irréductible, chacune des composantes irréductibles X_i de X contenant x est distincte de X, donc $E \cap X_i$ est un voisinage de x par rapport à X_i; par suite, E est un voisinage de x dans la réunion des composantes irréductibles de X contenant x, et comme cette réunion est un voisinage de x dans X, il en est de même de E. Si X est irréductible, E est dense dans X par hypothèse, donc contient une partie ouverte non vide U de X (9.2.2); la proposition est alors évidente si $x \in U$; sinon, x est par hypothèse intérieur à $E \cap (X - U)$ par rapport à $X - U$, donc l'adhérence dans X de $X - E$ ne contient pas x, et le complémentaire de cette adhérence est un voisinage de x contenu dans E, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(9.2.6)**. — *Soient* X *un espace noethérien,* E *une partie de* X. *Pour que* E *soit un ensemble ouvert dans* X, *il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X *rencontrant* E, $E \cap Y$ *contienne une partie ouverte non vide de* Y.

La condition est évidemment nécessaire; inversement, si elle est vérifiée, elle implique que E est constructible en vertu de (9.2.3). En outre, (9.2.5) montre que E est alors voisinage de chacun de ses points, d'où la conclusion.

9.3. Fonctions constructibles.

Définition **(9.3.1)**. — *Soit h une application d'un espace topologique* X *dans un ensemble* T. *On dit que h est constructible si $h^{-1}(t)$ est constructible pour tout $t \in T$, et vide sauf pour un nombre fini de valeurs de t; pour toute partie* S *de* T, $h^{-1}(S)$ *est alors constructible. On dit que h est localement constructible si tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert* V *tel que $h|V$ soit constructible.*

Toute fonction constructible est localement constructible; la réciproque est vraie quand X est quasi-compact et admet une base formée d'ensembles ouverts rétrocompacts dans X (en particulier quand X est noethérien).

Proposition **(9.3.2)**. — *Soit h une application d'un espace noethérien* X *dans un ensemble* T. *Pour que h soit constructible, il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X, *il existe une partie non vide* U *de* Y, *ouverte par rapport à* Y, *et dans laquelle h soit constante.*

La condition est nécessaire : en effet, par hypothèse, h ne prend dans Y qu'un nombre fini de valeurs t_i, et chacun des ensembles $h^{-1}(t_i) \cap Y$ est constructible dans Y (9.2.1); comme ils ne peuvent être tous des parties rares de l'espace Y, un d'eux au moins contient un ensemble ouvert non vide (9.2.3).

Pour voir que la condition est suffisante, appliquons le principe de récurrence noethérienne à l'ensemble $\mathfrak{M}$ des parties fermées Y de X telles que la restriction $h|Y$ soit constructible; on peut donc supposer que pour toute partie fermée $Y \neq X$ de X, $h|Y$ est constructible. Si X n'est pas irréductible, la restriction de h à chacune des composantes irréductibles X_i de X (en nombre fini) est donc constructible, et il résulte alors aussitôt de la définition (9.3.1) que h est constructible. Si X est irréductible, il existe par hypothèse une partie ouverte non vide U de X dans laquelle h est constante; d'autre part, la restriction de h à $X-U$ est constructible par hypothèse, et il en résulte aussitôt que h est constructible.

Corollaire **(9.3.3)**. — *Soit* X *un espace noethérien dans lequel toute partie fermée irréductible admet un point générique. Si h est une application de* X *dans un ensemble* T *telle que, pour tout* $t \in T$, $h^{-1}(t)$ *soit constructible, alors h est constructible.*

En effet, si Y est une partie fermée irréductible de X et y son point générique, $Y \cap h^{-1}(h(y))$ est constructible et contient y, donc (9.2.2) cet ensemble contient une partie ouverte non vide de Y, et il suffit d'appliquer (9.3.2).

Proposition **(9.3.4)**. — *Soient* X *un espace noethérien dans lequel toute partie fermée irréductible admet un point générique, h une application constructible de* X *dans un ensemble ordonné. Pour que h soit semi-continue supérieurement dans* X, *il faut et il suffit que pour tout* $x \in X$ *et toute générisation* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.2) x' *de* x, *on ait* $h(x') \leqslant h(x)$.

La fonction h ne prend qu'un nombre fini de valeurs; dire qu'elle est semi-continue supérieurement signifie donc que pour tout $x \in X$, l'ensemble E des $y \in X$ tels que $h(y) \leqslant h(x)$ est un voisinage de x. Par hypothèse, E est une partie constructible de X; d'autre part, dire qu'une partie fermée irréductible Y de X contient x signifie que son point générique y est une générisation de x; la conclusion résulte alors de (9.2.5).

§ 10. COMPLÉMENTS SUR LES MODULES PLATS

Pour les démonstrations des propriétés énoncées sans démonstration dans les n^os (10.1) et (10.2), nous renvoyons le lecteur à Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II et III.

10.1. Relations entre modules plats et modules libres.

(10.1.1) Soient A un anneau, $\mathfrak{J}$ un idéal de A, M un A-module; pour tout entier $p \geqslant 0$, on a un homomorphisme canonique de $(A/\mathfrak{J})$-modules

(10.1.1.1) $$\varphi_p : (M/\mathfrak{J}M) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (\mathfrak{J}^p/\mathfrak{J}^{p+1}) \to \mathfrak{J}^p M/\mathfrak{J}^{p+1} M$$

qui est évidemment *surjectif*. Nous désignerons par $\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{p \geqslant 0} \mathfrak{J}^p/\mathfrak{J}^{p+1}$ l'anneau gradué associé à A filtré par les $\mathfrak{J}^p$, par $\mathrm{gr}(M) = \bigoplus_{p \geqslant 0} \mathfrak{J}^p M/\mathfrak{J}^{p+1} M$ le gr(A)-module gradué associé à M filtré par les $\mathfrak{J}^p M$; on a donc $\mathrm{gr}_p(A) = \mathfrak{J}^p/\mathfrak{J}^{p+1}$, $\mathrm{gr}_p(M) = \mathfrak{J}^p M/\mathfrak{J}^{p+1} M$; les φ_p définissent un homomorphisme *surjectif* de gr(A)-modules gradués

(10.1.1.2) $$\varphi : \mathrm{gr}_0(M) \otimes_{\mathrm{gr}_0(A)} \mathrm{gr}(A) \to \mathrm{gr}(M).$$

(10.1.2) Supposons vérifiée l'*une* des hypothèses suivantes :

(i) $\mathfrak{J}$ est nilpotent;

(ii) A est noethérien, $\mathfrak{J}$ est contenu dans le radical de A, et M est de type fini.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) M est un A-module libre.

b) $M/\mathfrak{J}M = M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module libre, et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{J}) = 0$.

c) $M/\mathfrak{J}M$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module libre et l'homomorphisme canonique (10.1.1.2) est injectif (donc bijectif).

(10.1.3) Supposons que $A/\mathfrak{J}$ soit un *corps* (autrement dit que $\mathfrak{J}$ soit maximal), et que l'une des hypothèses (i), (ii) de (10.1.2) soit vérifiée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) M est un A-module libre.

b) M est un A-module projectif.

c) M est un A-module plat.

d) $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{J}) = 0$.

e) L'homomorphisme canonique (10.1.1.2) est bijectif.

Ce résultat s'appliquera en particulier dans les deux cas suivants :

(i) M est un module *quelconque* sur un anneau local A dont l'idéal maximal $\mathfrak{J}$ est *nilpotent* (par exemple un anneau local artinien).

(ii) M est un module *de type fini* sur un anneau *local noethérien.*

10.2. Critères locaux de platitude.

(10.2.1) Les hypothèses et notations étant celles de (10.1.1), considérons les conditions suivantes :

a) M est un A-module plat.

b) $M/\mathfrak{J}M$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module plat et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{J}) = 0$.

c) $M/\mathfrak{J}M$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module plat et l'homomorphisme canonique (10.1.1.2) est bijectif.

d) Pour tout $n \geqslant 1$, $M/\mathfrak{J}^n M$ est un $(A/\mathfrak{J}^n)$-module plat.

On a alors les implications

$$a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d$$

et si $\mathfrak{J}$ est *nilpotent*, les quatre conditions *a)*, *b)*, *c)*, *d)* sont *équivalentes*. Il en est de même si A est noethérien et en outre si M est *idéalement séparé*, c'est-à-dire que pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, le A-module $\mathfrak{a} \otimes_A M$ est *séparé* pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique.

(10.2.2) Soient A un anneau noethérien, B une A-algèbre commutative noethérienne, $\mathfrak{J}$ un idéal de A tel que $\mathfrak{J}B$ soit contenu dans le radical de B, M un B-*module* de type fini. Alors, lorsque M est considéré comme A-*module*, les conditions *a)*, *b)*, *c)*, *d)* de (10.2.1) sont *équivalentes*.

Ce résultat s'applique surtout lorsque A et B sont des anneaux *locaux* noethériens, l'homomorphisme $A \to B$ un homomorphisme *local*. Plus particulièrement, si $\mathfrak{J}$ est alors l'idéal *maximal* de A, on peut, dans les conditions *b)* et *c)*, supprimer l'hypothèse que $M/\mathfrak{J}M$ est plat, qui est automatiquement vérifiée, et la condition *d)* signifie que les modules $M/\mathfrak{J}^n M$ sont *libres* sur les $A/\mathfrak{J}^n$.

(10.2.3) Les hypothèses sur A, B, $\mathfrak{J}$, M étant celles formulées au début de (10.2.2), soient $\hat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, $\hat{M}$ le séparé complété de M pour la topologie $\mathfrak{J}B$-préadique. Alors, pour que M soit un A-module plat, il faut et il suffit que $\hat{M}$ soit un $\hat{A}$-module plat.

(10.2.4) Soient $\rho : A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de A, M, N deux B-modules de type fini, N étant supposé être A-*plat*. Soit $u : M \to N$ un B-homomorphisme. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) u est injectif et Coker (u) est un A-module plat.

b) $u \otimes 1 : M \otimes_A k \to N \otimes_A k$ est injectif.

(10.2.5) Soient $\rho : A \to B$, $\sigma : B \to C$ des homomorphismes locaux d'anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de A, M un C-module de type fini. On suppose que B est un A-module *plat* Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) M est un B-module plat.

b) M est un A-module plat, et $M \otimes_A k$ est un $(B \otimes_A k)$-module plat.

Proposition **(10.2.6)**. — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme local,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* B *contenu dans l'idéal maximal,* M *un* B-*module de type fini. Supposons que pour tout* $n \geqslant 0$, $M_n = M/\mathfrak{J}^{n+1}M$ *soit un* A-*module plat. Alors* M *est un* A-*module plat.*

Il faut prouver que pour tout homomorphisme injectif $u : N' \to N$ de A-modules de type fini, $v = 1 \otimes u : M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ est injectif. Or, $M \otimes_A N'$ et $M \otimes_A N$ sont des B-modules de type fini, donc séparés pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5) ; il suffit donc de prouver que l'homomorphisme $\hat{v} : (M \otimes_A N')^\wedge \to (M \otimes_A N)^\wedge$ pour les séparés complétés est injectif. Or, on a $\hat{v} = \varprojlim v_n$, où v_n est l'homomorphisme $1 \otimes u : M_n \otimes_A N' \to M_n \otimes_A N$; comme par hypothèse M_n est A-plat, v_n est injectif pour tout n, donc il en est de même de v, le foncteur $\varprojlim$ étant exact à gauche.

Corollaire **(10.2.7)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* B *un anneau local noethérien,* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme,* f *un élément de l'idéal maximal de* B, M *un* B-*module de type fini. Supposons que l'homothétie* $f_M : x \to fx$ *de* M *soit injective et que* M/fM *soit un* A-*module plat. Alors* M *est un* A-*module plat.*

Posons $M_i : f^i M$ pour $i \geqslant 0$; comme f_M est injective, M_i/M_{i+1} est isomorphe à M/fM, donc A-plat pour tout $i \geqslant 0$; de la suite exacte

$$0 \to M_i/M_{i+1} \to M/M_{i+1} \to M/M_i \to 0$$

on tire par récurrence sur i que M/M_i est A-*plat* pour tout $i \geqslant 0$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.1.2) ; on peut donc appliquer (10.2.6). On peut aussi raisonner directement comme suit : pour tout A-module N de type fini, $M \otimes_A N$ est un B-module de type fini; comme f appartient au radical $\mathfrak{n}$ de B, la topologie (f)-adique sur $M \otimes_A N$ est plus fine que la topologie $\mathfrak{u}$-adique, et on sait que cette dernière est *séparée* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.5). D'ailleurs, comme M/M_i est A-plat, on a $f^i(M\otimes_A N)=\mathrm{Im}(M_i\otimes_A N\rightarrow M\otimes_A N)=\mathrm{Ker}(M\otimes_A N\rightarrow (M/M_i)\otimes_A N)$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.1.2). Soient alors N un A-module de type fini, N′ un sous-module de N, $j: N'\rightarrow N$ l'injection canonique; dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M\otimes_A N' \arrow[r] \arrow[d, "1_M\otimes j"'] & (M/M_i)\otimes_A N' \arrow[d, "1_{M/M_i}\otimes j"] \\ M\otimes_A N \arrow[r] & (M/M_i)\otimes_A N \end{tikzcd}$$

$1_{M/M_i}\otimes j$ est injectif puisque M/M_i est A-plat; on en conclut que

$$\mathrm{Ker}(M\otimes_A N' \rightarrow M\otimes_A N)\subset \mathrm{Ker}(M\otimes_A N' \rightarrow (M/M_i)\otimes_A N')$$

quel que soit i; puisque l'intersection des seconds membres est réduite à 0 comme on l'a vu plus haut, il en est de même du premier membre, et par suite M est A-plat.

Proposition (**10.2.8**). — *Soient* A *un anneau noethérien réduit,* M *un* A*-module de type fini. On suppose que pour toute* A*-algèbre* B, *qui est un anneau de valuation discrète,* $M\otimes_A B$ *soit un* B*-module plat* (*donc libre* (10.1.3)). *Alors* M *est un* A*-module plat.*

On sait que pour que M soit plat, il faut et il suffit que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $M_\mathfrak{m}$ soit un $A_\mathfrak{m}$-module plat ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.3.3); on peut donc se borner au cas où A est *local* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 1.2.8). Soient alors $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, $\mathfrak{p}_i$ ($1\leqslant i\leqslant r$) ses idéaux premiers minimaux, k le corps résiduel $A/\mathfrak{m}$. On sait (**II**, 7.1.7) qu'il existe pour chaque i un anneau de valuation discrète B_i ayant même corps des fractions K_i que l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}_i$, et dominant ce dernier. Posons $M_i=M\otimes_A B_i$. Par hypothèse, M_i est libre sur B_i, donc on a, en désignant par k_i le corps résiduel de B_i

(**10.2.8.1**) $$\mathrm{rg}_{k_i}(M_i\otimes_{B_i}k_i)=\mathrm{rg}_{K_i}(M_i\otimes_{B_i}K_i)$$

Mais il est clair que l'homomorphisme composé $A\rightarrow A/\mathfrak{p}_i\rightarrow B_i$ est local, donc k est une extension de k, et l'on a $M_i\otimes_{B_i}k_i=M\otimes_A k_i=(M\otimes_A k)\otimes_k k_i$, et par ailleurs $M_i\otimes_{B_i}K_i=M\otimes_A K_i$. L'égalité (10.2.8.1) entraîne donc

$$\mathrm{rg}_k(M\otimes_A k)=\mathrm{rg}_{K_i}(M\otimes_A K_i) \qquad \text{pour } 1\leqslant i\leqslant r$$

et comme A est réduit, on sait que cette condition entraîne que M est un A-module *libre* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 7).

10.3. Existence d'extensions plates d'anneaux locaux.

Proposition (**10.3.1**). — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{J}$ *son idéal maximal,* $k=A/\mathfrak{J}$ *son corps résiduel. Soit* K *une extension du corps* k. *Il existe un homomorphisme local de* A *dans un anneau local noethérien* B, *tel que* $B/\mathfrak{J}B$ *soit* k*-isomorphe à* K, *et que* B *soit un* A*-module plat.*

Nous démontrerons cette proposition en plusieurs étapes.

(**10.3.1.1**) Supposons d'abord que $K=k(T)$, où T est une indéterminée. Dans l'anneau de polynômes $A'=A[T]$, considérons l'idéal premier $\mathfrak{J}'=\mathfrak{J}A'$ formé des polynômes ayant leurs coefficients dans l'idéal $\mathfrak{J}$; il est clair que $A'/\mathfrak{J}'$ est canoniquement isomorphe à $k[T]$. Montrons que l'anneau de fractions $B = A'_{\mathfrak{J}'}$ répond à la question; c'est évidemment un anneau local noethérien dont l'idéal maximal $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}B$. En outre, $B/\mathfrak{L} = (A'/\mathfrak{J}')_{\mathfrak{J}'} = (k[T])_{\mathfrak{J}'}$ n'est autre que le corps des fractions K de $k[T]$. Enfin, B est un A'-module plat et A' un A-module libre, donc B est un A-module plat $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.2.1)$.

(10.3.1.2) Supposons ensuite que $K = k(t) = k[t]$, où t est algébrique sur k; soit $f \in k[T]$ le polynôme minimal de t; il existe un polynôme unitaire $F \in A[T]$ dont l'image canonique dans $k[T]$ soit f. Posons encore $A' = A[T]$, et soit $\mathfrak{J}'$ l'idéal $\mathfrak{J}A' + (F)$ dans A'. Nous allons voir que l'anneau quotient $B = A'/(F)$ répond cette fois à la question. Tout d'abord, il est clair que B est un A-module *libre*, donc plat. L'anneau $A'/\mathfrak{J}'$ est isomorphe à $(A'/\mathfrak{J}A')/((\mathfrak{J}A' + (F))/\mathfrak{J}A') = k[T]/(f) = K$; l'image $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{J}'$ dans B est donc maximal et on a évidemment $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}B$. Enfin, B est un anneau semi-local, puisqu'il est un A-module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9), et ses idéaux maximaux sont en correspondance biunivoque avec ceux de $B/\mathfrak{J}B$ ([13], vol. I, p. 259); ce qui précède prouve donc que B est un anneau local.

Lemme **(10.3.1.3)**. — *Soit* $(A_\lambda, f_{\mu\lambda})$ *un système inductif filtrant d'anneaux locaux, tel que les* $f_{\mu\lambda}$ *soient des homomorphismes locaux; soit* $\mathfrak{m}_\lambda$ *l'idéal maximal de* A_λ, *et soit* $K_\lambda = A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda$. *Alors* $A' = \varinjlim A_\lambda$ *est un anneau local dont* $\mathfrak{m}' = \varinjlim \mathfrak{m}_\lambda$ *est l'idéal maximal, et* $K = \varinjlim K_\lambda$ *le corps résiduel. En outre, si* $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A_\mu$ *pour* $\lambda < \mu$, *on a* $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_\lambda A'$ *pour tout* λ. *Si, de plus, pour* $\lambda < \mu$, A_μ *est un* A_λ*-module plat, et si tous les* A_λ *sont noethériens, alors* A' *est noethérien et est un* A_λ*-module plat pour tout* λ.

Comme $f_{\mu\lambda}(\mathfrak{m}_\lambda) \subset \mathfrak{m}_\mu$ pour $\lambda < \mu$ par hypothèse, les $\mathfrak{m}_\lambda$ forment un système inductif, et sa limite $\mathfrak{m}'$ est évidemment un idéal de A'. En outre, si $x' \notin \mathfrak{m}'$, il existe λ tel que $x' = f_\lambda(x_\lambda)$ pour un $x_\lambda \in A_\lambda$ ($f_\lambda : A_\lambda \to A'$ désignant l'homomorphisme canonique); puisque $x' \notin \mathfrak{m}'$, on a nécessairement $x_\lambda \notin \mathfrak{m}_\lambda$, donc x_λ admet un inverse y_λ dans A_λ, et $y' = f_\lambda(y_\lambda)$ est l'inverse de x' dans A', ce qui prouve que A' est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}'$; l'assertion relative à K résulte aussitôt du fait que $\varinjlim$ est un foncteur exact. L'hypothèse $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A_\mu$ signifie que l'application canonique $\mathfrak{m}_\lambda \otimes_{A_\lambda} A_\mu \to \mathfrak{m}_\mu$ est surjective; la relation $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_\lambda A'$ résulte donc encore de l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ et du fait qu'il commute avec le produit tensoriel.

Supposons maintenant que pour $\lambda < \mu$, on ait $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A_\mu$ et que A_μ soit un A_λ-module plat. Alors A' est un A_λ-module plat pour tout λ, en vertu de $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.2.3)$; comme A' et A_λ sont des anneaux locaux et que $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_\lambda A'$, A' est même un A_λ-module *fidèlement plat* $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.6.2)$. Supposons enfin, en outre, les A_λ *noethériens*; les topologies $\mathfrak{m}_\lambda$-préadiques sont alors séparées $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 7.3.5)$; montrons qu'il en résulte d'abord que sur A' la topologie $\mathfrak{m}'$-adique est *séparée*. En effet, si $x' \in A'$ appartient à tous les $\mathfrak{m}'^n$ $(n > 0)$, il est l'image d'un $x_\mu \in A_\mu$ pour un certain indice μ, et comme l'image réciproque dans A_μ de $\mathfrak{m}'^n = \mathfrak{m}_\mu^n A'$ est $\mathfrak{m}_\mu^n$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.6.1)$, x_μ appartient à tous les $\mathfrak{m}_\mu^n$, donc $x_\mu = 0$ par hypothèse, et par conséquent $x' = 0$. Notons $\hat{A}'$ le complété de A' pour la topologie $\mathfrak{m}'$-adique; ce qui précède montre que l'on a $A' \subset \hat{A}'$. Nous allons montrer que $\hat{A}'$ est *noethérien* et A_λ*-plat* pour tout λ; il en résultera que $\hat{A}'$ est A'-plat $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.2.3)$, et comme $\mathfrak{m}'\hat{A}' \neq \hat{A}'$, $\hat{A}'$ est un A'-module fidèlement plat $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.6.2)$, d'où on conclura finalement que A' est *noethérien* $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.5.2)$, ce qui achèvera la démonstration du lemme.

On a $\hat{A}' = \varprojlim_n A'/\mathfrak{m}'^n$; en raison de ce que A' est A_λ-plat, on a

$$\mathfrak{m}'^n/\mathfrak{m}'^{n+1} = (\mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1}) \otimes_{A_\lambda} A' = (\mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1}) \otimes_{K_\lambda} (K_\lambda \otimes_{A_\lambda} A') = (\mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1}) \otimes_{K_\lambda} K;$$

comme $\mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1}$ est un K_λ-espace vectoriel de dimension finie, $\mathfrak{m}'^n/\mathfrak{m}'^{n+1}$ est un K-espace vectoriel de dimension finie pour tout $n \geqslant 0$. Il résulte donc de $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 7.2.12)$ et $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 7.2.8)$ que $\hat{A}'$ est *noethérien.* On sait en outre que l'idéal maximal de $\hat{A}'$ est $\mathfrak{m}'\hat{A}'$ et que $\hat{A}'/\mathfrak{m}'^n\hat{A}'$ est isomorphe à $A'/\mathfrak{m}'^n$; comme $A'/\mathfrak{m}'^n = (A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^n) \otimes_{A_\lambda} A'$, $A'/\mathfrak{m}'^n$ est un $(A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^n)$-module plat $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.2.1)$; le critère (10.2.2) est donc applicable à la A_λ-algèbre noethérienne $\hat{A}'$, et montre que $\hat{A}'$ est A_λ-*plat.* C.Q.F.D.

(10.3.1.4) Abordons maintenant le cas général. Il existe un ordinal γ et pour tout ordinal $\lambda \leqslant \gamma$ un sous-corps k_λ de K contenant k, tels que : 1° Pour tout $\lambda < \gamma$, $k_{\lambda+1}$ soit une extension de k_λ engendrée par un seul élément; 2° Pour tout ordinal μ sans prédécesseur, $k_\mu = \bigcup_{\lambda<\mu} k_\lambda$; 3° $K = k_\gamma$. Il suffit en effet de considérer une bijection $\xi \to t_\xi$ de l'ensemble des ordinaux $\xi \leqslant \beta$ (pour un β convenable) sur K, de définir k_λ par induction transfinie (pour $\lambda \leqslant \beta$) comme la réunion des k_μ pour $\mu < \lambda$ si λ n'a pas de prédécesseur, et, si $\lambda = \nu + 1$, comme $k_\nu(t_\xi)$, où ξ est le plus petit ordinal tel que $t_\xi \notin k_\nu$; γ est alors par définition le plus petit ordinal $\leqslant \beta$ tel que $k_\gamma = K$.

Cela étant, nous allons définir, par récurrence transfinie, une famille d'anneaux locaux noethériens A_λ pour $\lambda \leqslant \gamma$, et des homomorphismes locaux $f_{\mu\lambda} : A_\lambda \to A_\mu$ pour $\lambda \leqslant \mu$, vérifiant les conditions suivantes :

(i) $(A_\lambda, f_{\mu\lambda})$ est un système inductif et $A_0 = A$.

(ii) Pour tout λ, on a un k-isomorphisme $A_\lambda/\mathfrak{J}A_\lambda \xrightarrow{\sim} k_\lambda$.

(iii) Pour $\lambda \leqslant \mu$, A_μ est un A_λ-module plat.

Supposons donc les A_λ et les $f_{\mu\lambda}$ définis pour $\lambda < \mu < \xi$, et supposons en premier lieu que $\xi = \zeta + 1$, de sorte que $k_\xi = k_\zeta(t)$. Si t est transcendant sur k_ζ, on définit A_ξ suivant le procédé de (10.3.1.1) comme égal à $(A_\zeta[t])_{\mathfrak{J}A_\zeta[t]}$; $f_{\zeta\xi}$ est l'application canonique, et pour $\lambda < \zeta$, on prend $f_{\xi\lambda} = f_{\xi\zeta} \circ f_{\zeta\lambda}$; la vérification des conditions (i) à (iii) est alors immédiate, vu ce qui a été démontré en (10.3.1.1). Supposons ensuite t algébrique, et soient h son polynôme minimal dans $k_\zeta[T]$, H un polynôme unitaire de $A_\zeta[T]$ dont l'image dans $k_\zeta[T]$ est h; on prend alors A_ξ égal à $A_\zeta[T]/(H)$, les $f_{\xi\lambda}$ se définissant comme précédemment; la vérification des conditions (i) à (iii) résulte alors de ce qui a été vu en (10.3.1.2).

Supposons maintenant que ξ n'ait pas de prédécesseur; on prend alors pour A_ξ la limite inductive du système inductif d'anneaux locaux $(A_\lambda, f_{\mu\lambda})$ pour $\lambda < \xi$; $f_{\xi\lambda}$ est définie comme l'application canonique pour $\lambda < \xi$. Le fait que A_ξ soit local noethérien, que les $f_{\xi\lambda}$ soient des homomorphismes locaux, et les conditions (i) à (iii) pour $\lambda \leqslant \xi$

résultent alors de l'hypothèse de récurrence et du lemme (10.3.1.3). Cette construction faite, il est clair que l'anneau $B = A_\gamma$ vérifie l'énoncé de (10.3.1).

On notera qu'en vertu de (10.2.1, *c)*), on a un isomorphisme canonique

(10.3.1.5) $$\mathrm{gr}(A) \otimes_k K \simeq \mathrm{gr}(B).$$

D'autre part, on peut remplacer B par son complété $\mathfrak{J}$B-adique $\hat{B}$ sans changer les conclusions de (10.3.1), puisque $\hat{B}$ est un B-module plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.3), donc un A-module plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.2.1).

On a en outre démontré le

Corollaire **(10.3.2)**. — *Si* K *est une extension de degré fini, on peut supposer que* B *est une* A-*algèbre finie.*

§ 11. COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

11.1. Rappels sur les suites spectrales.

(11.1.1) Nous utiliserons dans la suite une notion de suite spectrale plus générale que celle définie dans (T, 2.4); gardant les notations de (T, 2.4), nous appellerons *suite spectrale* dans une catégorie abélienne $\mathbf{C}$ un système E formé des éléments suivants :

a) Une famille (E_r^{pq}) d'objets de $\mathbf{C}$ définis pour $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{Z}$ et $r \geqslant 2$.

b) Une famille de morphismes $d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p+r, q-r+1}$ tels que $d_r^{p+r, q-r+1} d_r^{pq} = 0$. On pose $Z_{r+1}(E_r^{pq}) = \mathrm{Ker}(d_r^{pq})$, $B_{r+1}(E_r^{pq}) = \mathrm{Im}(d_r^{p+r, q-r+1})$, de sorte que

$$B_{r+1}(E_r^{pq}) \subset Z_{r+1}(E_r^{pq}) \subset E_r^{pq}.$$

c) Une famille d'isomorphismes $\alpha_r^{pq} : Z_{r+1}(E_r^{pq})/B_{r+1}(E_r^{pq}) \simeq E_{r+1}^{pq}$.

On définit alors pour $k \geqslant r+1$, par récurrence sur k, les sous-objets $B_k(E_r^{pq})$ et $Z_k(E_r^{pq})$ comme images réciproques, par le morphisme canonique $E_r^{pq} \to E_r^{pq}/B_{r+1}(E_r^{pq})$ des sous-objets de ce quotient identifié par α_r^{pq} aux sous-objets $B_k(E_{r+1}^{pq})$ et $Z_k(E_{r+1}^{pq})$ respectivement. Il est clair que l'on a alors, à un isomorphisme près

(11.1.1.1) $$Z_k(E_r^{pq})/B_k(E_r^{pq}) = E_k^{pq} \qquad \text{pour } k \geqslant r+1$$

et, si on pose encore $B_r(E_r^{pq}) = 0$ et $Z_r(E_r^{pq}) = E_r^{pq}$, on a les relations d'inclusion

(11.1.1.2) $$0 = B_r(E_r^{pq}) \subset B_{r+1}(E_r^{pq}) \subset B_{r+2}(E_r^{pq}) \subset \ldots \\ \ldots \subset Z_{r+2}(E_r^{pq}) \subset Z_{r+1}(E_r^{pq}) \subset Z_r(E_r^{pq}) = E_r^{pq}.$$

Les autres éléments de la donnée de E sont alors :

d) Deux sous-objets $B_\infty(E_2^{pq})$ et $Z_\infty(E_2^{pq})$ de E_2^{pq} tels que l'on ait $B_\infty(E_2^{pq}) \subset Z_\infty(E_2^{pq})$ et, pour tout $k \geqslant 2$

$$B_k(E_2^{pq}) \subset B_\infty(E_2^{pq}) \qquad \text{et} \qquad Z_\infty(E_2^{pq}) \subset Z_k(E_2^{pq}).$$

On pose

(11.1.1.3) $$E_\infty^{pq} = Z_\infty(E_2^{pq})/B_\infty(E_2^{pq}).$$

e) Une famille (E^n) d'objets de $\mathbf{C}$, dont chacun est muni d'une *filtration décroissante* $(F^p(E^n))_{p\in\mathbf{Z}}$. On désigne comme d'ordinaire par $\mathrm{gr}(E^n)$ l'objet gradué associé à l'objet filtré E^n, somme directe des $\mathrm{gr}_p(E^n)=F^p(E^n)/F^{p+1}(E^n)$.

f) Pour tout couple $(p, q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, un isomorphisme $\beta^{pq} : E_\infty^{pq} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_p(E^{p+q})$.

La famille (E^n), sans les filtrations, est appelée l'*aboutissement* de la suite spectrale E.

Supposons que la catégorie $\mathbf{C}$ admette des sommes directes infinies, ou que pour tout $r\geqslant 2$ et tout $n\in\mathbf{Z}$, les couples (p, q) tels que $p+q=n$ et $E_r^{pq}\neq 0$ soient en nombre fini (il suffit qu'il en soit ainsi pour $r=2$). Alors les $E_r^{(n)}=\sum_{p+q=n} E_r^{pq}$ sont définis, et en désignant par $d_r^{(n)}$ le morphisme $E_r^{(n)}\rightarrow E_r^{(n+1)}$ dont la restriction à E_r^{pq} est d_r^{pq} pour chaque couple (p, q) tel que $p+q=n$, on a $d_r^{(n+1)}\circ d_r^{(n)}=0$, autrement dit $(E_r^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ est un *complexe* $E_r^{(\cdot)}$ dans $\mathbf{C}$, à opérateur de dérivation de degré $+1$, et il résulte de *c)* que $H^n(E_n^{(\cdot)})$ est *isomorphe à* $E_{r+1}^{(n)}$ pour tout $r\geqslant 2$.

(11.1.2) Un *morphisme* $u : E\rightarrow E'$ d'une suite spectrale E dans une suite spectrale $E'=(E_r'^{pq}, E'^n)$ consiste en des systèmes de morphismes $u_r^{pq} : E_r^{pq}\rightarrow E_r'^{pq}$, $u^n : E^n\rightarrow E'^n$, les u^n étant compatibles avec les filtrations de E^n et E'^n, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} E_r^{pq} & \xrightarrow{d_r^{pq}} & E_r^{p+r,q-r+1} \\ {\scriptstyle u_r^{pq}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_r^{p+r,q-r+1}} \\ E_r'^{pq} & \xrightarrow[d_r'^{pq}]{} & E_r'^{p+r,q-r+1} \end{array}$$

étant commutatifs; en outre, par passage aux quotients, u_r^{pq} donne un morphisme $\bar{u}_r^{pq} : Z_{r+1}(E_r^{pq})/B_{r+1}(E_r^{pq})\rightarrow Z_{r+1}(E_r'^{pq})/B_{r+1}(E_r'^{pq})$ et on doit avoir $\alpha_r'^{pq}\circ\bar{u}_r^{pq}=u_{r+1}^{pq}\circ\alpha_r^{pq}$; enfin, on doit avoir $u_2^{pq}(B_\infty(E_2^{pq}))\subset B_\infty(E_2'^{pq})$, $u_2^{pq}(Z_\infty(E_2^{pq}))\subset Z_\infty(E_2'^{pq})$; par passage aux quotients, u_2^{pq} donne alors un morphisme $u_\infty'^{pq} : E_\infty^{pq}\rightarrow E_\infty'^{pq}$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_\infty^{pq} & \xrightarrow{u_\infty'^{pq}} & E_\infty'^{pq} \\ {\scriptstyle \beta^{pq}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta'^{pq}} \\ \mathrm{gr}_p(E^{p+q}) & \xrightarrow[\mathrm{gr}_p(u^{p+q})]{} & \mathrm{gr}_p(E'^{p+q}) \end{array}$$

doit être commutatif.

Les définitions précédentes montrent, par récurrence sur r, que si les u_2^{pq} sont des *isomorphismes*, il en est de même des u_r^{pq} pour $r\geqslant 2$; *si l'on sait en outre* que $u_2^{pq}(B_\infty(E_2^{pq}))=B_\infty(E_2'^{pq})$ et $u_2^{pq}(Z_\infty(E_2^{pq}))=Z_\infty(E_2'^{pq})$ et que les u^n sont des *isomorphismes*, alors on peut conclure que u est un *isomorphisme*.

(11.1.3) Rappelons que si $(F^p(X))_{p\in \mathbf{Z}}$ est une *filtration* (décroissante) d'un objet $X\in \boldsymbol{C}$, on dit que cette filtration est *séparée* si $\inf(F^p(X)) = 0$, *discrète* s'il existe un p tel que $F^p(X) = 0$, *exhaustive* (ou *co-séparée*) si $\sup(F^p(X)) = X$, *co-discrète* s'il existe p tel que $F^p(X) = X$.

Nous dirons qu'une suite spectrale $E = (E_r^{pq}, E^n)$ est *faiblement convergente* si l'on a $B_\infty(E_2^{pq}) = \sup\limits_k (B_k(E_2^{pq}))$, $Z_\infty(E_2^{pq}) = \inf\limits_k(Z_k(E_2^{pq}))$ (autrement dit les objets $B_\infty(E_2^{pq})$ et $Z_\infty(E_2^{pq})$ sont déterminés par les données *a)* à *c)* de la suite spectrale E). Nous dirons que la suite spectrale E est *régulière* si elle est faiblement convergente et si en outre :

1° Pour tout couple (p, q), la suite décroissante $(Z_k(E_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ est *stationnaire*; l'hypothèse que E est faiblement convergente entraîne alors $Z_\infty(E_2^{pq}) = Z_k(E_2^{pq})$ pour k assez grand (dépendant de p et q).

2° Pour tout n, la filtration $(F^p(E^n))_{p\in\mathbf{Z}}$ de E^n est *discrète* et *exhaustive.*

On dit que la suite spectrale E est *co-régulière* si elle est faiblement convergente et si en outre :

3° Pour tout couple (p, q), la suite croissante $(B_k(E_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ est *stationnaire*, ce qui entraîne $B_\infty(E_2^{pq}) = B_k(E_2^{pq})$, et par suite $E_\infty^{pq} = \inf E_k^{pq}$.

4° Pour tout n, la filtration de E^n est *co-discrète.*

Enfin, on dit que E est *birégulière* si elle est à la fois régulière et co-régulière, autrement dit si on a les conditions suivantes :

a) Pour tout couple (p, q), les suites $(B_k(E_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ et $(Z_k(E_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ sont *stationnaires* et l'on a $B_\infty(E_2^{pq}) = B_k(E_2^{pq})$ et $Z_\infty(E_2^{pq}) = Z_k(E_2^{pq})$ pour k assez grand (ce qui entraîne $E_\infty^{pq} = E_k^{pq}$).

b) Pour tout n, la filtration $(F^p(E^n))_{p\in\mathbf{Z}}$ est *discrète* et *co-discrète* (ce qu'on exprime aussi en disant qu'elle est *finie*).

Les suites spectrales définies dans (T, 2.4) sont donc les suites spectrales birégulières.

(11.1.4) Supposons que dans la catégorie $\boldsymbol{C}$, les limites inductives filtrantes existent et que le foncteur $\varinjlim$ soit *exact* (ce qui équivaut à dire que l'axiome AB 5) de (T, 1.5) est vérifié (cf. T, 1.8)). La condition que la filtration $(F^p(X))_{p\in\mathbf{Z}}$ d'un objet $X\in\boldsymbol{C}$ est exhaustive s'écrit alors aussi $\varinjlim\limits_{p\to-\infty} F^p(X) = X$. Si une suite spectrale E est faiblement convergente, on a $B_\infty(E_2^{pq}) = \varinjlim\limits_{k\to\infty} B_k(E_2^{pq})$; si en outre $u : E\to E'$ est un morphisme de E dans une suite spectrale E' de $\boldsymbol{C}$ faiblement convergente, on a $u_2^{pq}(B_\infty(E_2^{pq})) = B_\infty(E_2'^{pq})$ en raison de l'exactitude de $\varinjlim$. De plus :

Proposition **(11.1.5)**. — *Soient $\boldsymbol{C}$ une catégorie abélienne dans laquelle les limites inductives filtrantes sont exactes, E, E' deux suites spectrales régulières de $\boldsymbol{C}$, $u : E\to E'$ un morphisme de suites spectrales. Si les u_2^{pq} sont des isomorphismes, il en est de même de u.*

Nous savons déjà (11.1.2) que les u_r^{pq} sont des isomorphismes et que

$$u_2^{pq}(B_\infty(E_2^{pq})) = B_\infty(E_2'^{pq});$$

l'hypothèse que E et E' sont régulières entraîne aussi $u_2^{pq}(Z_\infty(E_2^{pq}))=Z_\infty(E_2'^{pq})$, et comme u_2^{pq} est un isomorphisme, il en est de même de u_∞^{pq}; on en conclut donc que $\mathrm{gr}_p(u^{p+q})$ est aussi un isomorphisme. Mais comme les filtrations des E^n et des E'^n sont discrètes et exhaustives, cela entraîne que les u^n sont aussi des isomorphismes (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, th. 1).

(11.1.6) Il résulte de (11.1.1.2) et de la définition (11.1.1.3) que si, dans une suite spectrale E, on a $E_r^{pq}=0$, on a $E_k^{pq}=0$ pour $k\geqslant r$ et $E_\infty^{pq}=0$. On dit qu'une suite spectrale est *dégénérée* s'il existe un entier $r\geqslant 2$ et, pour tout entier $n\in\mathbf{Z}$, un entier $q(n)$ tel que $E_r^{n-q,q}=0$ *pour tout* $q\neq q(n)$. On déduit d'abord de la remarque précédente que l'on a aussi $E_k^{n-q,q}=0$ pour $k\geqslant r$ (y compris $k=\infty$) et $q\neq q(n)$. En outre, la définition de E_{r+1}^{pq} montre que l'on a $E_{r+1}^{n-q(n),q(n)}=E_r^{n-q(n),q(n)}$; si E est *faiblement convergente*, on a donc aussi $E_\infty^{n-q(n),q(n)}=E_r^{n-q(n),q(n)}$; autrement dit, pour tout $n\in\mathbf{Z}$, $\mathrm{gr}_p(E^n)=0$ pour $p\neq q(n)$ et $\mathrm{gr}_{q(n)}(E^n)=E_r^{n-q(n),q(n)}$. Si en outre la filtration de E^n est *discrète* et *exhaustive*, la suite E est *régulière* et on a $E^n=E_r^{n-q(n),q(n)}$ à un isomorphisme près.

(11.1.7) Supposons que dans la catégorie $\mathbf{C}$ les limites inductives filtrantes existent et soient exactes, et soit $(E_\lambda, u_{\mu\lambda})$ un système inductif (suivant un ensemble d'indices filtrant) de suites spectrales de $\mathbf{C}$. Alors la *limite inductive* de ce système inductif existe dans la catégorie additive des suites spectrales d'objets de $\mathbf{C}$: il suffit pour le voir de définir E_r^{pq}, d_r^{pq}, α_r^{pq}, $B_\infty(E_2^{pq})$, $Z_\infty(E_2^{pq})$, E^n, $F^p(E^n)$ et β^{pq} comme limites inductives respectives de $E_{r,\lambda}^{pq}$, $d_{r,\lambda}^{pq}$, $\alpha_{r,\lambda}^{pq}$, $B_\infty(E_{2,\lambda}^{pq})$, $Z_\infty(E_{2,\lambda}^{pq})$, E_λ^n, $F^p(E_\lambda^n)$ et β_λ^{pq}; la vérification des conditions de (11.1.1) résulte de l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ dans $\mathbf{C}$.

Remarque **(11.1.8)**. — Supposons que la catégorie $\mathbf{C}$ soit la catégorie des A-modules sur un anneau *noethérien* A (resp. sur un anneau A). Alors, les définitions de (11.1.1) montrent que si pour un r donné, les E_r^{pq} sont des A-modules *de type fini* (resp. de *longueur finie*), il en est de même de tous les modules E_s^{pq} pour $s\geqslant r$, ainsi que des E_∞^{pq}. Si en outre la filtration de l'aboutissement (E^n) est *discrète* et *co-discrète* pour tout n, on en conclut que chacun des E_n est aussi un A-module *de type fini* (resp. de *longueur finie*).

(11.1.9) Nous aurons à considérer des conditions assurant qu'une suite spectrale E est birégulière de façon « uniforme » en $p+q=n$. On utilisera alors le lemme suivant :

Lemme **(11.1.10)**. — *Soit* (E_r^{pq}) *une famille d'objets de* $\mathbf{C}$ *liés par les données* a), b), c) *de* (11.1.1). *Pour un entier fixé n, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe un entier* $r(n)$ *tel que pour* $r\geqslant r(n)$, $p+q=n$ *ou* $p+q=n-1$, *les morphismes* d_r^{pq} *soient tous nuls.*

b) *Il existe un entier* $r(n)$ *tel que pour* $p+q=n$ *ou* $p+q=n+1$, *on ait* $B_r(E_2^{pq})=B_s(E_2^{pq})$ *pour* $s\geqslant r\geqslant r(n)$.

c) *Il existe un entier* $r(n)$ *tel que pour* $p+q=n$ *ou* $p+q=n-1$, *on ait* $Z_r(E_2^{pq})=Z_s(E_2^{pq})$ *pour* $s\geqslant r\geqslant r(n)$.

d) *Il existe un entier* $r(n)$ *tel que pour* $p+q=n$, *on ait* $B_r(E_2^{pq})=B_s(E_2^{pq})$ *et* $Z_r(E_2^{pq})=Z_s(E_2^{pq})$ *pour* $s\geqslant r\geqslant r(n)$.

En effet, d'après les conditions *a)*, *b)*, *c)* de (11.1.1), dire que $Z_{r+1}(E_2^{pq}) = Z_r(E_2^{pq})$ équivaut à dire que $d_r^{pq}=0$, et dire que $B_r(E_2^{p+r,q-r+1}) = B_{r+1}(E_2^{p+r,q-r+1})$ équivaut aussi à dire que $d_r^{pq}=0$; le lemme résulte aussitôt de cette remarque.

11.2. La suite spectrale d'un complexe filtré.

(11.2.1) Étant donnée une catégorie abélienne $\mathbf{C}$, nous conviendrons de désigner par des notations telles que $K^{\bullet}$ les *complexes* $(K^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ d'objets de $\mathbf{C}$ dans lesquels l'opérateur de dérivation est de degré $+1$, par des notations telles que $K_{\bullet}$ les complexes $(K_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ d'objets de $\mathbf{C}$ dans lesquels l'opérateur de dérivation est de degré -1. A tout complexe $K^{\bullet}=(K^i)$ dont l'opérateur de dérivation d est de degré $+1$, on peut associer un complexe $K'_{\bullet}=(K'_i)$ en posant $K'_i=K^{-i}$, l'opérateur de dérivation $K'_i \to K'_{i-1}$ étant l'opérateur $d: K^{-i}\to K^{-i+1}$; et *vice versa*, ce qui permettra suivant les circonstances de considérer l'un ou l'autre type de complexes et de traduire tout résultat pour l'un des types en résultats pour l'autre. Nous désignerons de même par des notations telles que $K^{\bullet\bullet}=(K^{ij})$ (resp. $K_{\bullet\bullet}=(K_{ij})$) des *bicomplexes* d'objets de $\mathbf{C}$ dans lesquels les *deux* opérateurs de dérivation sont de degré $+1$ (resp. -1); on passe encore de l'un à l'autre type en changeant les signes des indices, et on a des notations et remarques analogues pour des multicomplexes quelconques. La notation $K^{\bullet}$ ou $K_{\bullet}$ sera aussi utilisée pour des *objets gradués* de $\mathbf{C}$, de type $\mathbf{Z}$, qui ne sont pas nécessairement des complexes (ou que l'on peut considérer comme tels pour des opérateurs de dérivation *nuls*); par exemple, nous écrirons $H^{\bullet}(K^{\bullet})=(H^i(K^{\bullet}))_{i\in\mathbf{Z}}$ la *cohomologie* d'un complexe $K^{\bullet}$ dont l'opérateur de dérivation est de degré $+1$, par $H_{\bullet}(K_{\bullet})=(H_i(K_{\bullet}))_{i\in\mathbf{Z}}$ l'*homologie* d'un complexe $K_{\bullet}$ dont l'opérateur de dérivation est de degré -1; quand on passe de $K^{\bullet}$ à $K'_{\bullet}$ par l'opération décrite ci-dessus, on a $H_i(K'_{\bullet})=H^{-i}(K^{\bullet})$.

Rappelons à ce propos que pour un complexe $K^{\bullet}$ (resp. $K_{\bullet}$), nous écrirons en général $Z^i(K^{\bullet})=\mathrm{Ker}(K^i\to K^{i+1})$ (« objet des cocycles ») et $B^i(K^{\bullet})=\mathrm{Im}(K^{i-1}\to K^i)$ (« objet des cobords ») (resp. $Z_i(K_{\bullet})=\mathrm{Ker}(K_i\to K_{i-1})$ (« objet des cycles ») et $B_i(K_{\bullet})=\mathrm{Im}(K_{i+1}\to K_i)$ (« objet des bords »)) de sorte que $H^i(K^{\bullet})=Z^i(K^{\bullet})/B^i(K^{\bullet})$ (resp. $H_i(K_{\bullet})=Z_i(K_{\bullet})/B_i(K_{\bullet})$).

Si $K^{\bullet}=(K^i)$ (resp. $K_{\bullet}=(K_i)$) est un complexe dans $\mathbf{C}$, et $T:\mathbf{C}\to\mathbf{C}'$ un foncteur de $\mathbf{C}$ dans une catégorie abélienne $\mathbf{C}'$, nous désignerons par $T(K^{\bullet})$ (resp. $T(K_{\bullet})$) le complexe $(T(K^i))$ (resp. $(T(K_i))$) dans $\mathbf{C}'$.

Nous ne revenons pas sur la définition des *∂-foncteurs* (T, 2.1), sauf pour signaler que nous dirons *aussi* ∂-foncteur au lieu de ∂^*-foncteur lorsque le morphisme ∂ diminue le degré d'une unité, le contexte devant chaque fois préciser ce point s'il peut y avoir doute.

Enfin, nous dirons qu'un *objet gradué* $(A_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{C}$ est *limité inférieurement* (resp. *supérieurement*) s'il existe i_0 tel que $A_i=0$ pour $i<i_0$ (resp. $i>i_0$).

(11.2.2) Soit $K^{\bullet}$ un complexe de $\mathbf{C}$ dont l'opérateur de dérivation d est de degré $+1$, et supposons-le muni d'une *filtration* $F(K^{\bullet})=(F^p(K^{\bullet}))_{p\in\mathbf{Z}}$ formé de sous-objets *gradués* de $K^\bullet$, autrement dit $F^p(K^\bullet)=(K^i \cap F^p(K^\bullet))_{i\in\mathbf{Z}}$; en outre, on suppose que $d(F^p(K^\bullet))\subset F^p(K^\bullet)$ pour tout $p\in\mathbf{Z}$. Rappelons alors rapidement comment on définit *fonctoriellement* une suite spectrale $E(K^\bullet)$ à partir de $K^\bullet$ (M, XV, 4 et G, I, 4.3). Pour $r\geqslant 2$, le morphisme canonique $F^p(K^\bullet)/F^{p+r}(K^\bullet)\to F^p(K^\bullet)/F^{p+1}(K^\bullet)$ définit un morphisme pour la cohomologie

$$H^{p+q}(F^p(K^\bullet)/F^{p+r}(K^\bullet))\to H^{p+q}(F^p(K^\bullet)/F^{p+1}(K^\bullet))$$

On désigne par $Z_r^{pq}(K^\bullet)$ l'image de ce morphisme. De même, de la suite exacte

$$0\to F^p(K^\bullet)/F^{p+1}(K^\bullet)\to F^{p-r+1}(K^\bullet)/F^{p+1}(K^\bullet)\to F^{p-r+1}(K^\bullet)/F^p(K^\bullet)\to 0$$

on déduit par la suite exacte de cohomologie un morphisme

$$H^{p+q-1}(F^{p-r+1}(K^\bullet)/F^p(K^\bullet))\to H^{p+q}(F^p(K^\bullet)/F^{p+1}(K^\bullet))$$

et on désigne par $B_r^{pq}(K^\bullet)$ l'image de ce morphisme; on montre que $B_r^{pq}(K^\bullet)\subset Z_r^{pq}(K^\bullet)$ et on prend $E_r^{pq}(K^\bullet)=Z_r^{pq}(K^\bullet)/B_r^{pq}(K^\bullet)$; nous ne préciserons pas la définition des d_r^{pq}, ni des α_r^{pq}.

On notera ici que tous les $Z_r^{pq}(K^\bullet)$ et $B_p^{pq}(K^\bullet)$, pour p, q fixés, sont des sous-objets du même objet $H^{p+q}(F^p(K^\bullet)/F^{p+1}(K^\bullet))$, que l'on note $Z_1^{pq}(K^\bullet)$; on pose $B_1^{pq}(K^\bullet)=0$, de sorte que les définitions précédentes pour $Z_r^{pq}(K^\bullet)$ et $B_r^{pq}(K^\bullet)$ s'appliquent aussi pour $r=1$; on pose encore $E_1^{pq}(K^\bullet)=Z_1^{pq}(K^\bullet)$. On définit encore les d_1^{pq} et α_1^{pq} de sorte que les conditions de (11.1.1) soient vérifiées pour $r=1$. On définit d'autre part les sous-objets $Z_\infty^{pq}(K^\bullet)$, image du morphisme

$$H^{p+q}(F^p(K^\bullet))\to H^{p+q}(F^p(K^\bullet)/F^{p+1}(K^\bullet))=E_1^{pq}(K^\bullet)$$

et $B_\infty^{pq}(K^\bullet)$, image du morphisme

$$H^{p+q-1}(K^\bullet/F^p(K^\bullet))\to H^{p+q}(F^p(K^\bullet)/F^{p+1}(K^\bullet))=E_1^{pq}(K^\bullet)$$

déduit comme ci-dessus d'une suite exacte de cohomologie. On prend pour $Z_\infty(E_2^{pq}(K^\bullet))$ et $B_\infty(E_2^{pq}(K^\bullet))$ les images canoniques dans $E_2^{pq}(K^\bullet)$ de $Z_\infty^{pq}(K^\bullet)$ et $B_\infty^{pq}(K^\bullet)$.

Enfin, on désigne par $F^p(H^n(K^\bullet))$ l'image dans $H^n(K^\bullet)$ du morphisme $H^n(F^p(K^\bullet))\to H^n(K^\bullet)$ provenant de l'injection canonique $F^p(K^\bullet)\to K^\bullet$; par la suite exacte de cohomologie, c'est aussi le noyau du morphisme $H^n(K^\bullet)\to H^n(K^\bullet/F^p(K^\bullet))$. On définit ainsi une filtration sur $E^n(K^\bullet)=H^n(K^\bullet)$; nous ne donnerons pas non plus ici la définition des isomorphismes β^{pq}.

(11.2.3) Le caractère *fonctoriel* de $E(K^\bullet)$ doit s'entendre de la façon suivante : étant donné deux complexes *filtrés* $K^\bullet$, $K'^\bullet$ de $\mathcal{C}$, et un morphisme de complexes $u : K^\bullet\to K'^\bullet$ *compatible avec les filtrations*, on en déduit de façon évidente les morphismes u_r^{pq} (pour $r\geqslant 1$) et u^n, et on montre que ces morphismes sont compatibles avec les d_r^{pq}, α_r^{pq} et β^{pq} au sens de (11.1.2), donc définissent bien un morphisme $E(u) : E(K^\bullet)\to E(K'^\bullet)$ de suites spectrales. En outre, on montre que si u et v sont des morphismes $K^\bullet\to K'^\bullet$ du type précédent, *homotopes d'ordre* $\leqslant k$, alors $u_r^{pq}=v_r^{pq}$ pour $r>k$ et $u^n=v^n$ pour tout n (M, XV, 3.1).

(11.2.4) Supposons que dans $\boldsymbol{C}$ les limites inductives filtrantes soient exactes. Alors, si la filtration $(F^p(K^\cdot))$ de $K^\cdot$ est *exhaustive*, il en est de même de la filtration $(F^p(H^n(K^\cdot)))$ pour tout n, car on a par hypothèse $K^\cdot = \varinjlim_{p\to -\infty} F^p(K^\cdot)$ et l'hypothèse sur $\boldsymbol{C}$ entraîne que la cohomologie commute aux limites inductives. En outre, on a, pour la même raison, $B_\infty(E_2^{pq}(K^\cdot)) = \sup_k B_k(E_2^{pq}(K^\cdot))$. On dit que la filtration $(F^p(K^\cdot))$ de $K^\cdot$ est *régulière* si pour tout n il existe un entier $u(n)$ tel que $H^n(F^p(K^\cdot)) = 0$ pour $p > u(n)$. Il en est ainsi en particulier lorsque la filtration de $K^\cdot$ est *discrète*. Lorsque la filtration de $K^\cdot$ est régulière et exhaustive, et que les limites inductives filtrantes dans $\boldsymbol{C}$ sont exactes, on montre (M, XV, 4) que la suite spectrale $E(K^\cdot)$ est *régulière*.

11.3. Les suites spectrales d'un bicomplexe.

(11.3.1) En ce qui concerne les conventions relatives aux bicomplexes, nous suivons celles de (T, 2.4) plutôt que celles de (M), les deux dérivations d', d'' (de degré $+1$) d'un tel bicomplexe $K^{\cdot\cdot} = (K^{ij})$ étant donc supposées *permutables*. Supposons vérifiées l'*une* des deux conditions suivantes : 1° Les *sommes directes infinies* existent dans $\boldsymbol{C}$; 2° Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il n'y a qu'un nombre *fini* de couples (p, q) tels que $p+q=n$ et $K^{pq} \neq 0$. Alors, le bicomplexe $K^{\cdot\cdot}$ définit un *complexe* (simple) $(K'^n)_{n\in\mathbf{Z}}$, avec $K'^n = \sum_{i+j=n} K^{ij}$, l'opérateur de dérivation d (de degré $+1$) de ce complexe étant donné par $dx = d'x + (-1)^i d''x$ pour $x \in K^{ij}$. Lorsque nous parlerons par la suite du *complexe* (simple) *défini par un bicomplexe* $K^{\cdot\cdot}$, il sera toujours sous-entendu que l'une des conditions précédentes est satisfaite. On adoptera des conventions analogues pour les multicomplexes.

On désigne par $K^{i,\cdot}$ (resp. $K^{\cdot,j}$) le complexe simple $(K^{ij})_{j\in\mathbf{Z}}$ (resp. $(K^{ij})_{i\in\mathbf{Z}}$), par $Z_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\cdot})$, $B_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\cdot})$, $H_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\cdot})$ (resp. $Z_{\mathrm{I}}^p(K^{\cdot,j})$, $B_{\mathrm{I}}^p(K^{\cdot,j})$, $H_{\mathrm{I}}^p(K^{\cdot,j})$) ses p^{es} objets des cocycles, des cobords et de cohomologie respectivement; la dérivation $d' : K^{i,\cdot} \to K^{i+1,\cdot}$ est un morphisme de complexes, qui donne donc un opérateur dans les cocycles, les cobords et la cohomologie,

$$\begin{aligned} d' &: Z_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\cdot}) \to Z_{\mathrm{II}}^p(K^{i+1,\cdot}) \\ d' &: B_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\cdot}) \to B_{\mathrm{II}}^p(K^{i+1,\cdot}) \\ d' &: H_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\cdot}) \to H_{\mathrm{II}}^p(K^{i+1,\cdot}) \end{aligned}$$

et il est clair que pour ces opérateurs, $(Z_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\cdot}))_{i\in\mathbf{Z}}$, $(B_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\cdot}))_{i\in\mathbf{Z}}$ et $(H_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\cdot}))_{i\in\mathbf{Z}}$ sont des complexes; nous désignerons le complexe $(H_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\cdot}))_{i\in\mathbf{Z}}$ par $H_{\mathrm{II}}^p(K^{\cdot\cdot})$, ses q^{es} objets de cocycles, de cobords et de cohomologie par $Z_{\mathrm{I}}^q(H_{\mathrm{II}}^p(K^{\cdot\cdot}))$, $B_{\mathrm{I}}^q(H_{\mathrm{II}}^p(K^{\cdot\cdot}))$ et $H_{\mathrm{I}}^q(H_{\mathrm{II}}^p(K^{\cdot\cdot}))$. On définit de même les complexes $H_{\mathrm{I}}^p(K^{\cdot\cdot})$ et leurs objets de cohomologie $H_{\mathrm{II}}^q(H_{\mathrm{I}}^p(K^{\cdot\cdot}))$. Rappelons d'autre part que $H^n(K^{\cdot\cdot})$ désigne le n^{e} objet de cohomologie du complexe *(simple)* défini par $K^{\cdot\cdot}$.

(11.3.2) Sur le complexe défini par un bicomplexe $K^{\cdot\cdot}$, on peut considérer deux filtrations canoniques $(F_{\mathrm{I}}^p(K^{\cdot\cdot}))$ et $(F_{\mathrm{II}}^p(K^{\cdot\cdot}))$ données par

(11.3.2.1) $$F_{\mathrm{I}}^p(K^{\cdot\cdot}) = \Big(\sum_{i+j=n,\, i\geqslant p} K^{ij}\Big)_{n\in\mathbf{Z}}, \qquad F_{\mathrm{II}}^p(K^{\cdot\cdot}) = \Big(\sum_{i+j=n,\, j\geqslant p} K^{ij}\Big)_{n\in\mathbf{Z}}$$

qui, par définition, sont bien des sous-objets gradués du complexe (simple) défini par $K^{\bullet\bullet}$, et font donc de ce complexe un complexe filtré; par ailleurs, il est clair que ces filtrations sont *exhaustives* et *séparées*.

Il correspond à chacune de ces filtrations une suite spectrale (11.2.2); nous désignerons par $'E(K^{\bullet\bullet})$ et $''E(K^{\bullet\bullet})$ les suites spectrales correspondant à $(F^p_{\mathrm{I}}(K^{\bullet\bullet}))$ et $(F^p_{\mathrm{II}}(K^{\bullet\bullet}))$ respectivement, dites *suites spectrales du bicomplexe* $K^{\bullet\bullet}$, et ayant toutes deux pour aboutissement la cohomologie $(H^n(K^{\bullet\bullet}))$. On montre en outre (M, XV, 6) que l'on a

(11.3.2.2) $$'E_2^{pq}(K^{\bullet\bullet}) = H^p_{\mathrm{I}}(H^p_{\mathrm{II}}(K^{\bullet\bullet})), \qquad ''E_2^{pq}(K^{\bullet\bullet}) = H^p_{\mathrm{II}}(H^p_{\mathrm{I}}(K^{\bullet\bullet})).$$

Tout morphisme $u : K^{\bullet\bullet} \to K'^{\bullet\bullet}$ de bicomplexes est *ipso facto* compatible avec les filtrations de même type de $K^{\bullet\bullet}$ et $K'^{\bullet\bullet}$, donc définit un morphisme pour chacune des deux suites spectrales; en outre, deux morphismes *homotopes* définissent une homotopie *d'ordre* $\leqslant 1$ des complexes (simples) filtrés correspondant, donc le *même* morphisme pour chacune des deux suites spectrales (M, XV, 6.1).

Proposition **(11.3.3)**. — *Soit* $K^{\bullet\bullet} = (K^{ij})$ *un bicomplexe dans une catégorie abélienne* $\mathbf{C}$.

(i) *S'il existe* i_0 *et* j_0 *tels que* $K^{ij} = 0$ *pour* $i < i_0$ *ou* $j < j_0$ (resp. $i > i_0$ *ou* $j > j_0$), *les deux suites spectrales* $'E(K^{\bullet\bullet})$ *et* $''E(K^{\bullet\bullet})$ *sont birégulières.*

(ii) *S'il existe* i_0 *et* i_1 *tels que* $K^{ij} = 0$ *pour* $i < i_0$ *ou* $i > i_1$ (resp. *s'il existe* j_0 *et* j_1 *tels que* $K^{ij} = 0$ *pour* $j < j_0$ *ou* $j > j_1$) *les deux suites spectrales* $'E(K^{\bullet\bullet})$ *et* $''E(K^{\bullet\bullet})$ *sont birégulières.*

Supposons en outre que dans $\mathbf{C}$ *les limites inductives filtrantes existent et soient exactes. Alors :*

(iii) *S'il existe* i_0 *tel que* $K^{ij} = 0$ *pour* $i > i_0$ (resp. *s'il existe* j_0 *tel que* $K^{ij} = 0$ *pour* $j < j_0$), *la suite* $'E(K^{\bullet\bullet})$ *est régulière.*

(iv) *S'il existe* i_0 *tel que* $K^{ij} = 0$ *pour* $i < i_0$ (resp. *s'il existe* j_0 *tel que* $K^{ij} = 0$ *pour* $j > j_0$), *la suite* $''E(K^{\bullet\bullet})$ *est régulière.*

La proposition résulte aussitôt des définitions (11.1.3) et de (11.2.4), ainsi que des observations suivantes relatives à la filtration F_{I} (et des observations analogues qu'on en déduit pour F_{II} en échangeant les rôles des deux indices dans $K^{\bullet\bullet}$) :

1° S'il existe i_0 tel que $K^{ij} = 0$ pour $i > i_0$, la filtration $F_{\mathrm{I}}(K^{\bullet\bullet})$ est *discrète*.

2° S'il existe i_0 tel que $K^{ij} = 0$ pour $i < i_0$, la filtration $F_{\mathrm{I}}(K^{\bullet\bullet})$ est *co-discrète*. On en déduit aussitôt qu'il en est de même de la filtration correspondante $F_{\mathrm{I}}(H^n(K^{\bullet\bullet}))$ pour tout n; en outre, la définition de B_r^{pq} correspondant à la filtration $F_{\mathrm{I}}(K^{\bullet\bullet})$ (11.2.2) montre que pour tout couple (p, q), la suite $(B_r^{pq})_{r \geqslant 2}$ est stationnaire.

3° S'il existe j_0 tel que $K^{ij} = 0$ pour $j < j_0$, on a

$$F_{\mathrm{I}}^{p+r}(K^{\bullet\bullet}) \cap \left(\sum_{i+j=n} K^{ij}\right) = 0$$

dès que $p + r + j_0 > n$, donc $Z_r^{pq} = Z_\infty(E_2^{pq})$ pour $r > q - j_0 + 1$; d'autre part, $H^n(F_{\mathrm{I}}^p(K^{\bullet\bullet})) = 0$ pour $p > n - j_0 + 1$.

4° S'il existe j_0 tel que $K^{ij} = 0$ pour $j > j_0$, on a

$$F_{\mathrm{I}}^{p-r+1}(K^{\bullet\bullet}) \cap \left(\sum_{i+j=n} K^{ij}\right) = \sum_{i+j=n} K^{ij}$$

dès que $p-r+1+j_0<n$, donc $B_r^{pq}=B_\infty(E_2^{pq})$ pour $r<j_0-q+1$; d'autre part, $H^n(F_I^p(K^{\bullet\bullet}))=H^n(K^{\bullet\bullet})$ pour $p+j_0<n-1$.

(11.3.4) Supposons que le bicomplexe $K^{\bullet\bullet}=(K^{ij})$ soit tel que $K^{ij}=0$ pour $i<0$ ou $j<0$. On sait qu'on peut alors définir pour tout $p\in\mathbf{Z}$ un « edge-homomorphisme » canonique

(11.3.4.1) $$'E_2^{p0}(K^{\bullet\bullet})\rightarrow H^p(K^{\bullet\bullet})$$

(M, XV, 6). Rappelons rapidement que cela est dû, d'une part à ce que l'on a dans la suite spectrale $'E(K^{\bullet\bullet})$, $Z_r^{p0}=Z_I^p(Z_{II}^0(K^{\bullet\bullet}))$ pour $2\leqslant r\leqslant+\infty$, et de l'autre au fait que $H^p(F_I^{p+1}(K^{\bullet\bullet}))=0$, si bien que l'isomorphisme $\beta^{p0}:{}'E_\infty^{p0}\simeq H^p(F_I^p)/H^p(F_I^{p+1})$ donne un homomorphisme $'E_\infty^{p0}\rightarrow H^p(F_I^p(K^{\bullet\bullet}))\rightarrow H^p(K^{\bullet\bullet})$; l'égalité de tous les Z_r^{p0} permet alors de définir des homomorphismes canoniques $'E_r^{p0}\rightarrow{}'E_s^{p0}$ pour $r\leqslant s$, et en particulier un homomorphisme $'E_2^{p0}\rightarrow{}'E_\infty^{p0}$, d'où par composition l'edge-homomorphisme $'E_2^{p0}\rightarrow H^p(K^{\bullet\bullet})$; en outre, on vérifie aussitôt que, à la classe mod. B_2^{p0} d'un élément $z\in Z_{II}^0(K^{\bullet\bullet})\subset K^{p0}$ tel que $d'z=0$, l'edge-homomorphisme ainsi défini fait correspondre dans $'E_\infty^{p0}$ la classe de z mod. B_∞^{p0}, puis à cette dernière la classe de cohomologie de z dans $H^p(K^{\bullet\bullet})$. On voit donc finalement que l'*edge-homomorphisme* (11.3.4.1) *provient, par passage à la cohomologie, de l'injection canonique* $Z_{II}^0(K^{\bullet\bullet})\rightarrow K^{\bullet\bullet}$ (où $K^{\bullet\bullet}$ est considéré comme complexe simple). On interprète naturellement de même l'edge-homomorphisme

(11.3.4.2) $$''E_2^{p0}(K^{\bullet\bullet})\rightarrow H^p(K^{\bullet\bullet})$$

comme provenant de l'injection canonique $Z_I^0(K^{\bullet\bullet})\rightarrow K^{\bullet\bullet}$.

(11.3.5) Soit maintenant $K_{\bullet\bullet}=(K_{ij})$ un bicomplexe de $\boldsymbol{C}$ dont les deux opérateurs de dérivation sont de degré -1. Nous écrirons alors $K_{i,\bullet}$ (resp. $K_{\bullet,j}$) le complexe simple $(K_{ij})_{j\in\mathbf{Z}}$ (resp. $(K_{ij})_{i\in\mathbf{Z}}$), $H_p^{II}(K_{i,\bullet})$ (resp. $H_p^I(K_{\bullet,j})$) son p^e objet d'homologie, $H_p^{II}(K_{\bullet\bullet})$ (resp. $H_p^I(K_{\bullet\bullet})$) le complexe $(H_p^{II}(K_{i,\bullet}))_{i\in\mathbf{Z}}$ (resp. $(H_p^I(K_{\bullet,j}))_{j\in\mathbf{Z}}$), $H_q^I(H_p^{II}(K_{\bullet\bullet}))$ (resp. $H_q^{II}(H_p^I(K_{\bullet\bullet}))$) son q^e objet d'homologie; notations analogues pour les objets des cycles et objets des bords; enfin, $H_n(K_{\bullet\bullet})$ désignera (lorsqu'il existe) le n^e objet d'homologie du complexe simple (à opérateur de dérivation de degré -1) défini par $K_{\bullet\bullet}$.

Soit $K'^{\bullet\bullet}=(K'^{ij})$ avec $K'^{ij}=K_{-i,-j}$ le bicomplexe à opérateurs de dérivation de degrés $+1$ associé à $K_{\bullet\bullet}$; par définition, les *suites spectrales* de $K_{\bullet\bullet}$ sont celles de $K'^{\bullet\bullet}$, que l'on écrit $'E(K_{\bullet\bullet})$ et $''E(K_{\bullet\bullet})$, où l'on change toutefois les notations, en posant

$$'E_{pq}^r(K_{\bullet\bullet})={}'E_r^{-p,-q}(K'^{\bullet\bullet}),\quad ''E_{pq}^r(K_{\bullet\bullet})={}''E_r^{-p,-q}(K'^{\bullet\bullet})$$

pour $2\leqslant r\leqslant\infty$. Avec ces notations, on a

$$'E_{pq}^2(K_{\bullet\bullet})=H_p^I(H_q^{II}(K_{\bullet\bullet})),\quad ''E_{pq}^2(K_{\bullet\bullet})=H_p^{II}(H_p^I(K_{\bullet\bullet})).$$

Pour éviter des erreurs de signe, il sera en général préférable, pour les relations entre ces suites spectrales et leur aboutissement, de revenir au complexe $K'^{\bullet\bullet}$. Notons toutefois les critères correspondant à (11.3.3) :

(11.3.6) Les suites spectrales $'E(K_{\bullet\bullet})$ et $''E(K_{\bullet\bullet})$ sont *birégulières* dans les cas suivants : *a)* Il existe i_0 et j_0 tels que $K_{ij}=0$ pour $i>i_0$ ou pour $j>j_0$ (resp. pour $i<i_0$

ou pour $j<j_0$); *b)* Il existe i_0 et i_1 tels que $K_{ij}=0$ pour $i<i_0$ et $i>i_1$; *c)* Il existe j_0 et j_1 tels que $K_{ij}=0$ pour $j<j_0$ et $j>j_1$.

La suite $'E(K_{..})$ est *régulière* s'il existe i_0 tel que $K_{ij}=0$ pour $i<i_0$, ou s'il existe j_0 tel que $K_{ij}=0$ pour $j>j_0$.

La suite $''E(K_{..})$ est *régulière* s'il existe i_0 tel que $K_{ij}=0$ pour $i>i_0$, ou s'il existe j_0 tel que $K_{ij}=0$ pour $j<j_0$.

11.4. Hypercohomologie d'un foncteur par rapport à un complexe $K^\bullet$.

(11.4.1) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne; rappelons que l'on appelle *résolution droite* (ou *cohomologique*) d'un objet A de $\mathcal{C}$ un complexe d'objets de $\mathcal{C}$, dont l'opérateur de dérivation est de degré $+1$,

$$0\to L^0\to L^1\to L^2\dots$$

muni d'un morphisme $\varepsilon : A\to L^0$ dit *augmentation* de la résolution (et que l'on peut considérer comme un morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & 0 & \to & 0 & \to & \dots \\ & & {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & L^0 & \to & L^1 & \to & L^2 & \to & \dots) \end{array}$$

tel que la suite

$$0\to A\xrightarrow{\varepsilon} L^0\to L^1\to\dots$$

soit *exacte*; de même une *résolution gauche* (ou *homologique*) de A est un complexe $0\leftarrow L_0\leftarrow L_1\leftarrow\dots$ d'objets de $\mathcal{C}$ dont l'opérateur de dérivation est de degré -1, muni d'une augmentation $\varepsilon : L_0\to A$, de sorte que la suite

$$0\leftarrow A\xleftarrow{\varepsilon} L_0\leftarrow L_1\leftarrow\dots$$

soit *exacte*.

Lorsqu'une résolution droite $(L_i)_{i\geqslant 0}$ d'un objet A est telle que $L_i=0$ pour $i\geqslant n+1$, on dit que cette résolution est *de longueur* $\leqslant n$. On définit de même une résolution gauche de longueur $\leqslant n$. Une résolution qui est de longueur $\leqslant n$ pour un entier n est dite *finie*.

Une résolution de A est dite *projective* (resp. *injective*) si les objets de $\mathcal{C}$ autres que A qui la composent sont *projectifs* (resp. *injectifs*). Lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des modules (à gauche par exemple) sur un anneau, on dira de même qu'une résolution de A est *plate* (resp. *libre*) lorsque les modules autres que A qui la composent sont *plats* (resp. *libres*).

(11.4.2) Soit $K^\bullet=(K^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ un complexe d'objets de $\mathcal{C}$, dont l'opérateur de dérivation est de degré $+1$.

On appelle *résolution de Cartan-Eilenberg droite* de $K^\bullet$ le couple formé d'un bicomplexe $L^{\bullet\bullet}=(L^{ij})$ à opérateurs de dérivation de degré $+1$, avec $L^{ij}=0$ pour $j<0$, et d'un morphisme de complexes simples $\varepsilon : K^\bullet\to L^{\bullet,0}$, de façon que les conditions suivantes soient remplies :

(i) Pour chaque indice i, les suites

$$0 \to K^i \xrightarrow{\varepsilon} L^{i0} \to L^{i1} \to \dots$$
$$0 \to B^i(K^\bullet) \xrightarrow{\varepsilon} B^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,0}) \to B^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,1}) \to \dots$$
$$0 \to Z^i(K^\bullet) \xrightarrow{\varepsilon} Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,0}) \to Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,1}) \to \dots$$
$$0 \to H^i(K^\bullet) \xrightarrow{\varepsilon} H^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,0}) \to H^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,1}) \to \dots$$

sont exactes, autrement dit $(L^{i,\bullet})$, $(B^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet\bullet}))$, $(Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet\bullet}))$ et $(H^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet\bullet}))$ sont respectivement des *résolutions* de K^i, $B^i(K^\bullet)$, $Z^i(K^\bullet)$ et $H^i(K^\bullet)$.

(ii) Pour chaque j, le complexe simple $L^{\bullet,j}$ est *scindé*, autrement dit, les suites exactes

(11.4.2.1) $$0 \to B^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,j}) \to Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,j}) \to H^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,j}) \to 0$$

(11.4.2.2) $$0 \to Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,j}) \to L^{ij} \to B^{i+1}_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,j}) \to 0$$

sont *scindées*.

On prouve (M, XVII, 1.2) que si tout objet de $\boldsymbol{C}$ est sous-objet d'un objet injectif, tout complexe $K^\bullet$ de $\boldsymbol{C}$ admet une résolution de Cartan-Eilenberg *injective*, c'est-à-dire formée d'objets injectifs L^{ij} (la condition (ii) ci-dessus entraîne alors que les $B^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,j})$, $Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,j})$ et $H^i_{\mathrm{I}}(L^{\bullet,j})$ sont aussi des objets injectifs). En outre, pour tout morphisme $f: K^\bullet \to K'^\bullet$ de complexes de $\boldsymbol{C}$, toute résolution de Cartan-Eilenberg $L^{\bullet\bullet}$ de $K^\bullet$ et toute résolution *injective* de Cartan-Eilenberg $L'^{\bullet\bullet}$ de $K'^\bullet$, il existe un morphisme de bicomplexes $F: L^{\bullet\bullet} \to L'^{\bullet\bullet}$ compatible avec f et les augmentations, et si f et g sont deux morphismes homotopes de $K^\bullet$ dans $K'^\bullet$, les morphismes correspondants de $L^{\bullet\bullet}$ dans $L'^{\bullet\bullet}$ sont homotopes *(loc. cit.)*.

Lorsque $K^\bullet$ est *limité inférieurement* (resp. *supérieurement*), on peut prendre $L^{\bullet\bullet}$ tel que $L^{ij}=0$ pour $i<i_0$ (resp. $i>i_0$) si $K^i=0$ pour $i<i_0$ (resp. $i>i_0$) (M, XVII, 1.3).

Supposons d'autre part qu'il existe un entier n tel que tout objet de $\boldsymbol{C}$ admette une *résolution injective de longueur* $\leqslant n$; alors on peut supposer que l'on a $L^{ij}=0$ pour $j>n$ (M, XVII, 1.4).

(11.4.3) Soit maintenant T un *foncteur covariant additif* de $\boldsymbol{C}$ dans une catégorie abélienne $\boldsymbol{C}'$. Étant donnés un complexe $K^\bullet$ de $\boldsymbol{C}$ et une résolution de Cartan-Eilenberg *injective* $L^{\bullet\bullet}$ de $K^\bullet$, supposons que le complexe (simple) défini par le bicomplexe $T(L^{\bullet\bullet})$ existe (cf. 11.3.1); alors les deux suites spectrales $'E(T(L^{\bullet\bullet}))$ et $''E(T(L^{\bullet\bullet}))$ de ce bicomplexe sont dites *suites spectrales d'hypercohomologie* de T par rapport au complexe $K^\bullet$; en vertu de (11.4.2) et (11.3.2), elles ne dépendent effectivement que de $K^\bullet$ et non de la résolution de Cartan-Eilenberg injective $L^{\bullet\bullet}$ choisie; en outre, elles dépendent *fonctoriellement* de $K^\bullet$. Elles ont un même aboutissement $H^\bullet(T(L^{\bullet\bullet}))$ appelé encore l'*hypercohomologie* de T par rapport à $K^\bullet$, et noté $\mathbf{R}^\bullet T(K^\bullet)$. On montre que les termes E_2 des deux suites spectrales précédentes sont donnés par

(11.4.3.1) $$'E_2^{pq} = H^p(R^qT(K^\bullet))$$

(11.4.3.2) $$''E_2^{pq} = R^pT(H^q(K^\bullet))$$

R^pT désignant comme d'ordinaire le p^e *foncteur dérivé* de T pour $p \in \mathbf{Z}$; $R^qT(K^\bullet)$ désigne le complexe $(R^qT(K^i))_{i\in\mathbf{Z}}$. Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons désormais que tout objet de $\mathbf{C}$ est sous-objet d'un objet injectif de $\mathbf{C}$, de sorte que les résolutions de Cartan-Eilenberg injectives existent pour tout complexe de $\mathbf{C}$. Comme $L^{ij}=0$ pour $j<0$, les critères de (11.3.3) montrent que les *deux* suites spectrales d'hypercohomologie de T par rapport à $K^\bullet$ existent et sont *birégulières* dans chacun des deux cas suivants : 1° $K^\bullet$ est limité inférieurement; 2° Tout objet de $\mathbf{C}$ admet une résolution injective de longueur au plus égale à un entier n (indépendant de l'objet considéré). En effet, dans le premier cas, on peut supposer (11.4.2) qu'il existe i_0 tel que $L^{ij}=0$ pour $i<i_0$ et dans le second qu'il existe j_1 tel que $L^{ij}=0$ pour $j>j_1$; dans chacun des deux cas, il est clair en outre que pour n donné, il n'y a qu'un nombre fini de couples (i,j) tels que $L^{ij}\neq 0$ et $i+j=n$, ce qui établit nos assertions.

Lorsqu'on suppose que dans $\mathbf{C}'$ les limites inductives filtrantes existent et sont exactes (ce qui implique en particulier l'existence dans $\mathbf{C}'$ des sommes directes infinies), alors le complexe défini par le bicomplexe $T(L^{\bullet\bullet})$ existe, et le critère (11.3.3) montre que la suite $'E(T(L^{\bullet\bullet}))$ est toujours *régulière*.

Lorsque $K^\bullet$ est un complexe dont tous les termes K^i sont nuls sauf un seul K^{i_0}, $\mathbf{R}^nT(K^\bullet)$ est isomorphe à $R^{n-i_0}T(K^{i_0})$, ainsi qu'il résulte aussitôt des définitions en prenant une résolution de Cartan-Eilenberg $L^{\bullet\bullet}$ telle que $L^{ij}=0$ pour $i\neq i_0$.

Si $K^\bullet$ et $K'^\bullet$ sont deux complexes de $\mathbf{C}$, f, g deux morphismes *homotopes* de $K^\bullet$ dans $K'^\bullet$, alors les morphismes $\mathbf{R}^\bullet T(K^\bullet)\to\mathbf{R}^\bullet T(K'^\bullet)$ déduits de f et g sont identiques, et il en est de même pour les morphismes des suites spectrales de cohomologie.

Proposition **(11.4.5)**. — *Supposons que dans $\mathbf{C}'$ les limites inductives filtrantes existent et soient exactes. Si $R^nT(K^i)=0$ pour tout $n>0$ et tout $i\in\mathbf{Z}$, on a des isomorphismes fonctoriels*

$$\mathbf{R}^iT(K^\bullet) \simeq H^i(T(K^\bullet)) \quad (i\in\mathbf{Z}). \tag{11.4.5.1}$$

En effet, les seuls termes E_2 non nuls de la première suite spectrale (11.4.3.1) sont alors $'E_2^{p0}=H^p(T(K^\bullet))$; autrement dit, cette suite est *dégénérée*; comme elle est régulière (11.4.4), la conclusion résulte de (11.1.6).

(11.4.6) Considérons maintenant, par exemple, un *bifoncteur* covariant $(M,N)\to T(M,N)$ de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}'$ dans $\mathbf{C}''$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}''$ étant trois catégories abéliennes; on suppose, pour simplifier, T additif en chacun de ses arguments, et en outre que tout objet de $\mathbf{C}$ et tout objet de $\mathbf{C}'$ sont sous-objets d'un objet injectif, et que les limites inductives filtrantes existent dans $\mathbf{C}''$ et sont exactes. On définit alors l'*hypercohomologie* de T par rapport à deux complexes $K^\bullet$, $K'^\bullet$ de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ respectivement, à opérateurs de dérivation de degré $+1$, en prenant pour $K^\bullet$ (resp. $K'^\bullet$) une résolution de Cartan-Eilenberg injective $L^{\bullet\bullet}$ (resp. $L'^{\bullet\bullet}$); alors $T(L^{\bullet\bullet}, L'^{\bullet\bullet})$ est un quadricomplexe de $\mathbf{C}''$, que l'on considère comme *bicomplexe* de $\mathbf{C}''$ en prenant pour degrés de $T(L^{ij}, L'^{hk})$ les entiers $i+h$ et $j+k$. L'*hypercohomologie* de T par rapport à $K^\bullet$ et $K'^\bullet$ est par définition la cohomologie $H^\bullet(T(L^{\bullet\bullet}, L'^{\bullet\bullet}))$ de ce bicomplexe (autrement dit, celle du complexe simple associé) notée $\mathbf{R}^{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet})$; elle est l'aboutissement de deux suites spectrales dont les termes E_2 sont donnés par

(11.4.6.1) $$'\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{H}^p(\mathrm{R}^q\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet}))$$

(11.4.6.2) $$''\mathrm{E}_2^{pq} = \sum_{q'+q''=q} \mathrm{R}^p\mathrm{T}(\mathrm{H}^{q'}(\mathrm{K}^{\bullet}), \mathrm{H}^{q''}(\mathrm{K}'^{\bullet})) \qquad \text{(cf. M, XVII, 2).}$$

Ici $\mathrm{R}^q\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet})$ est le bicomplexe $(\mathrm{R}^q\mathrm{T}(\mathrm{K}^i, \mathrm{K}'^j))_{(i,j)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$ et le second membre de (11.4.6.1) est sa cohomologie quand on le considère comme complexe simple.

En outre, la première suite spectrale est toujours régulière, et les deux suites spectrales sont birégulières lorsqu'il existe n tel que tout objet de $\boldsymbol{C}$ et tout objet de $\boldsymbol{C}'$ admettent une résolution injective de longueur $\leqslant n$, ou lorsque $\mathrm{K}^{\bullet}$ *et* $\mathrm{K}'^{\bullet}$ sont limités inférieurement; dans ce dernier cas, on peut en outre omettre l'hypothèse que les limites inductives existent dans $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{C}'$.

Si $\mathrm{K}_1^{\bullet}$, $\mathrm{K}_1'^{\bullet}$ sont deux autres complexes de $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{C}'$ respectivement, f, g deux morphismes *homotopes* de $\mathrm{K}^{\bullet}$ dans $\mathrm{K}_1^{\bullet}$, f', g' deux morphismes *homotopes* de $\mathrm{K}'^{\bullet}$ dans $\mathrm{K}_1'^{\bullet}$, alors les morphismes $\mathbf{R}^{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet}) \to \mathbf{R}^{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}_1^{\bullet}, \mathrm{K}_1'^{\bullet})$ déduits de f et f' d'une part, de g et g' d'autre part, sont identiques, et il en est de même pour les morphismes des suites spectrales d'hypercohomologie.

On généralise aisément à un multifoncteur covariant additif quelconque.

Proposition **(11.4.7)**. — *Supposons que pour tout objet injectif* I *de* $\boldsymbol{C}$ (resp. I′ *de* $\boldsymbol{C}'$), $\mathrm{A}' \rightsquigarrow \mathrm{T}(\mathrm{I}, \mathrm{A}')$ (resp. $\mathrm{A} \rightsquigarrow \mathrm{T}(\mathrm{A}, \mathrm{I}')$) *soit un foncteur exact. Alors, avec les notations de* (11.4.6), *on a des isomorphismes canoniques*

(11.4.7.1) $$\mathbf{R}^{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet}) \simeq \mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\bullet\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet})) \simeq \mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathrm{L}'^{\bullet\bullet}))$$

où les deux derniers termes sont la cohomologie des complexes simples définis par les tricomplexes $\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\bullet\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet})$ *et* $\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathrm{L}'^{\bullet\bullet})$ *respectivement.*

Définissons par exemple le premier de ces isomorphismes. Le quadricomplexe $\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\bullet\bullet}, \mathrm{L}'^{\bullet\bullet}))$ peut être considéré comme un *bicomplexe*, en prenant comme degrés de $\mathrm{T}(\mathrm{L}^{ij}, \mathrm{L}'^{hk})$ les nombres $i+j+h$ et k. Comme pour chaque h, $\mathrm{L}'^{h,\bullet}$ est une *résolution* de K'^h, on a, pour ce bicomplexe, en vertu de l'hypothèse sur T, $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}^q(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\bullet\bullet}, \mathrm{L}'^{\bullet\bullet})) = 0$ pour $q \neq 0$ et $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}^0(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\bullet\bullet}, \mathrm{L}'^{\bullet\bullet})) = \mathrm{T}(\mathrm{L}^{\bullet\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet})$; la première suite spectrale de ce bicomplexe est donc *dégénérée*; comme $\mathrm{L}'^{hk} = 0$ pour $k < 0$, cette suite est en outre régulière (11.3.3), et la conclusion résulte donc de (11.1.6).

On a des résultats analogues pour un multifoncteur covariant en un nombre quelconque n d'arguments : dans le calcul de l'hypercohomologie, il n'est pas nécessaire de remplacer *tous* les complexes par une résolution de Cartan-Eilenberg, mais seulement $n-1$ d'entre eux, pourvu que, lorsqu'on fixe $n-1$ arguments quelconques en leur donnant pour valeurs des objets *injectifs*, le foncteur covariant en l'argument restant soit *exact*.

11.5. Passage à la limite inductive dans l'hypercohomologie.

Lemme **(11.5.1)**. — *Soit* $\mathrm{K}^{\bullet} = (\mathrm{K}^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ *un complexe de* $\boldsymbol{C}$, *et pour tout entier* $r \in \mathbf{Z}$, *soit* $\mathrm{K}_{(r)}^{\bullet}$ *le complexe tel que* $\mathrm{K}_{(r)}^i = 0$ *pour* $i < r$, $\mathrm{K}_{(r)}^i = \mathrm{K}^i$ *pour* $i \geqslant r$. *Soit* T *un foncteur covariant additif* *de C dans C', permutant aux limites inductives (on suppose que les limites inductives filtrantes existent et sont exactes dans C et C'). Alors* $\mathbf{R}^{\cdot}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot})$ *est isomorphe à la limite inductive* $\varinjlim \mathbf{R}^{\cdot}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}_{(r)})$ *lorsque r tend vers $-\infty$.*

La construction d'une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\mathrm{K}^{\cdot}$ se fait en choisissant *arbitrairement*, pour chaque i, une résolution injective $(\mathrm{X}_{\mathrm{B}}^{ij})_{j\geqslant 0}$ de $\mathrm{B}^i(\mathrm{K}^{\cdot})$ et une résolution injective $(\mathrm{X}_{\mathrm{H}}^{ij})_{j\geqslant 0}$ de $\mathrm{H}^i(\mathrm{K}^{\cdot})$; cela fait, la méthode de construction montre que la résolution injective $(\mathrm{L}^{ij})_{j\geqslant 0}$ de K^i et les opérateurs de dérivation $\mathrm{L}^{i,j}\rightarrow\mathrm{L}^{i+1,j}$ *ne dépendent que des résolutions* $(\mathrm{X}_{\mathrm{B}}^{i,\cdot})$, $(\mathrm{X}_{\mathrm{H}}^{i,\cdot})$ *et* $(\mathrm{X}_{\mathrm{B}}^{i+1,\cdot})$ (M, XVII, 1.2). Or, il est clair que l'on a $\mathrm{B}^i(\mathrm{K}^{\cdot}_{(r)})=\mathrm{B}^i(\mathrm{K}^{\cdot})$ et $\mathrm{H}^i(\mathrm{K}^{\cdot}_{(r)})=\mathrm{H}^i(\mathrm{K}^{\cdot})$ pour $i\geqslant r+1$. On a, d'autre part, pour chaque r, une injection canonique $\varphi^{\cdot}_{r-1,r}:\mathrm{K}^{\cdot}_{(r)}\rightarrow\mathrm{K}^{\cdot}_{(r-1)}$, $\varphi^{i}_{r-1,r}$ étant l'identité pour $i\neq r-1$. La remarque précédente montre que, si $\mathrm{L}^{\cdot\cdot}=(\mathrm{L}^{ij})$ est une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\mathrm{K}^{\cdot}$, on peut pour chaque r définir une résolution injective de Cartan-Eilenberg $\mathrm{L}^{\cdot\cdot}_{(r)}=(\mathrm{L}^{ij}_{(r)})$ de $\mathrm{K}^{\cdot}_{(r)}$ telle que $\mathrm{L}^{ij}_{(r)}=0$ pour $i<r$ et $\mathrm{L}^{ij}_{(r)}=\mathrm{L}^{ij}$ pour $i\geqslant r+1$. On peut d'autre part définir un morphisme de bicomplexes $\Phi^{\cdot\cdot}_{r-1,r}:\mathrm{L}^{\cdot\cdot}_{(r)}\rightarrow\mathrm{L}^{\cdot\cdot}_{(r-1)}$ correspondant à $\varphi^{\cdot}_{r-1,r}$, et la méthode de définition de ce morphisme *(loc. cit.)* montre encore qu'on peut le construire de sorte que $\Phi^{ij}_{r-1,r}$ soit l'identité pour $i\neq r$ et $i\neq r-1$. On a ainsi défini un système inductif $(\mathrm{L}^{\cdot\cdot}_{(r)})$ de bicomplexes de C, dont $\mathrm{L}^{\cdot\cdot}$ est évidemment la limite inductive lorsque r tend vers $-\infty$; en raison de la permutabilité des sommes directes et des limites inductives, le complexe simple associé à $\mathrm{L}^{\cdot\cdot}$ est aussi limite inductive du complexe simple associé à $\mathrm{L}^{\cdot\cdot}_{(r)}$. Comme T permute par hypothèse aux limites inductives et qu'il en est de même de la cohomologie (en raison de l'exactitude du foncteur $\varinjlim$), on a bien $\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\cdot\cdot}))=\varinjlim \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\cdot\cdot}_{(r)}))$ à un isomorphisme près.

Le lemme (11.5.1) permet d'étendre à des complexes $\mathrm{K}^{\cdot}$ quelconques, par passage à la limite inductive, des propriétés valables pour les complexes *limités inférieurement*. Comme premier exemple, nous prouverons :

Proposition **(11.5.2)**. — *Sous les hypothèses de* (11.5.1) *concernant C, C' et* T, $\mathbf{R}^{\cdot}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot})$ *est un foncteur cohomologique dans la catégorie abélienne des complexes de C.*

Montrons qu'on peut se ramener au cas des complexes *limités inférieurement* : si on a une suite exacte $0\rightarrow\mathrm{K}'^{\cdot}\rightarrow\mathrm{K}^{\cdot}\rightarrow\mathrm{K}''^{\cdot}\rightarrow 0$ de complexes, on en déduit évidemment pour chaque r une suite exacte $0\rightarrow\mathrm{K}'^{\cdot}_{(r)}\rightarrow\mathrm{K}^{\cdot}_{(r)}\rightarrow\mathrm{K}''^{\cdot}_{(r)}\rightarrow 0$, d'où par hypothèse, une suite exacte

$$\ldots\rightarrow\mathbf{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{K}'^{\cdot}_{(r)})\rightarrow\mathbf{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}_{(r)})\rightarrow\mathbf{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{K}''^{\cdot}_{(r)})\xrightarrow{\partial}\mathbf{R}^{n+1}\mathrm{T}(\mathrm{K}'^{\cdot}_{(r)})\rightarrow\ldots$$

ces suites exactes formant un système inductif; le lemme (11.5.1) et l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ démontrent que l'on a une suite exacte

$$\ldots\rightarrow\mathbf{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{K}'^{\cdot})\rightarrow\mathbf{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot})\rightarrow\mathbf{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{K}''^{\cdot})\xrightarrow{\partial}\mathbf{R}^{n+1}\mathrm{T}(\mathrm{K}'^{\cdot})\rightarrow\ldots$$

Pour traiter le cas des complexes limités inférieurement, on peut se borner à ceux tels que $\mathrm{K}^i=0$ pour $i<0$; ils forment évidemment une *catégorie abélienne* $\boldsymbol{K}$.

Lemme **(11.5.2.1)**. — *Dans $\boldsymbol{K}$, soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des complexes* $\mathrm{Q}^{\cdot}=(\mathrm{Q}^i)_{i\geqslant 0}$ *ayant les* *propriétés suivantes :* 1° *Tout* Q^i *est un objet injectif de* $\boldsymbol{C}$; 2° *Pour tout* $i \geqslant 0$, *on a* $Z^i(Q^\bullet) = B^i(Q^\bullet)$, *et* $Z^i(Q^\bullet)$ *est facteur direct de* Q^i. *Alors :*

(i) *Tout* $Q^\bullet \in \mathfrak{I}$ *est un objet injectif de* $\boldsymbol{K}$.

(ii) *Tout objet de* $\boldsymbol{K}$ *est isomorphe à un sous-complexe d'un complexe appartenant à* $\mathfrak{I}$.

(i) Soient $A^\bullet = (A^i)$ un objet de $\boldsymbol{K}$, $A'^\bullet = (A'^i)$ un sous-objet de $A^\bullet$, $Q^\bullet = (Q^i)$ un objet de $\mathfrak{I}$, et supposons donné un morphisme $f = (f^i) : A'^\bullet \rightarrow Q^\bullet$, qu'il s'agit de prolonger en un morphisme $g = (g^i) : A^\bullet \rightarrow Q^\bullet$. Nous utiliserons le langage de la catégorie des modules pour simplifier (cf. [27]).

Identifions Q à $B^i(Q^\bullet) \oplus B^{i+1}(Q^\bullet)$; procédons par récurrence sur i, et supposons donc les g^j définis pour $j < i$, compatibles avec les opérateurs de dérivation $d^j : A^j \rightarrow A^{j+1}$ et $d'^j : Q^j \rightarrow Q^{j+1}$ pour $j < i-1$ et tels en outre que : 1° $g^{i-1}(Z^{i-1}(A^\bullet)) \subset Z^{i-1}(Q^\bullet)$; 2° Si on pose $C^j = (d^j)^{-1}(A'^{j+1})$ pour tout j, alors $d'^{i-1} \circ g^{i-1}$ coïncide avec $f^i \circ d^{i-1}$ sur C^{i-1}. Le morphisme $f^i : A'^i \rightarrow Q^i$ donne par composition avec les projections deux morphismes $f'^i : A'^i \rightarrow B^i(Q^\bullet)$ et $f''^i : A'^i \rightarrow B^{i+1}(Q^\bullet)$. Comme $d'^{i-1} \circ g^{i-1}$ applique A^{i-1} dans $B^i(Q^\bullet)$ et s'annule dans $Z^{i-1}(A^\bullet)$, il définit un morphisme $h^i : B^i(A^\bullet) \rightarrow B^i(Q^\bullet)$, et puisque $d'^{i-1} \circ g^{i-1}$ coïncide avec $f^i \circ d^{i-1}$ sur C^{i-1}, h^i coïncide avec f'_i dans $B^i(A^\bullet) \cap A'^i$. Comme $B^i(Q^\bullet)$, facteur direct de Q^i, est injectif, il y a un morphisme $g'^i : A^i \rightarrow B^i(Q^\bullet)$ qui coïncide avec h^i dans $B^i(A^\bullet)$ et avec f'^i dans A'^i. Considérons d'autre part le morphisme $f''^{i+1} \circ d^i : C^i \rightarrow B^{i+1}(Q^\bullet)$, qui s'annule dans $Z^i(A^\bullet)$; comme $B^{i+1}(Q^\bullet)$ est injectif, il y a un morphisme $g''^i : A^i \rightarrow B^{i+1}(Q^\bullet)$, qui coïncide avec $f''^{i+1} \circ d^i$ dans C^i et avec 0 dans $Z^i(A^\bullet)$. Il suffit alors de prendre $g^i = g'^i + g''^i$ pour pouvoir poursuivre la récurrence.

(ii) Pour plonger $A^\bullet = (A^i)$ dans un complexe appartenant à $\mathfrak{I}$, on prend pour chaque $i \geqslant 1$ un objet injectif Q'^i de $\boldsymbol{C}$ tel qu'il existe une injection $f'^i : A^i \rightarrow Q'^i$. Posons alors $Q^i = 0$ pour $i < 0$, $Q^0 = Q'^1$ et $Q^i = Q'^i \oplus Q'^{i+1}$ pour $i \geqslant 1$, avec l'opérateur de dérivation évident. Posons $f^i = f'^i + (f'^{i+1} \circ d^i)$ pour tout i (avec $f'^i = 0$ pour $i \leqslant 0$); il est immédiat que f^i est injectif pour tout i, et que les f^i sont compatibles avec les opérateurs de dérivation.

Corollaire (**11.5.2.2**). — *Tout objet* $K^\bullet$ *de* $\boldsymbol{K}$ *admet une résolution droite formée d'objets de* $\mathfrak{I}$. *Si* $L^{\bullet\bullet}$ *est une telle résolution, pour toute résolution* $L'^{\bullet\bullet}$ *de* $K^\bullet$, *formée d'objets de* $\boldsymbol{K}$, *il y a un morphisme de bicomplexes* $F : L'^{\bullet\bullet} \rightarrow L^{\bullet\bullet}$ *compatible avec les augmentations, et deux tels morphismes* F, F' *sont homotopes.*

Ce n'est autre que (M, V, 1.1 *a)*) appliqué à la catégorie abélienne $\boldsymbol{K}$.

(**11.5.2.3**) Ces préliminaires étant posés, considérons une résolution de Cartan-Eilenberg injective $L'^{\bullet\bullet}$ de $K^\bullet$ et une résolution $L^{\bullet\bullet}$ de $K^\bullet$ formée d'objets de $\mathfrak{I}$, et montrons que l'on a un isomorphisme $H^\bullet(T(L'^{\bullet\bullet})) \simeq H^\bullet(T(L^{\bullet\bullet}))$. On déduit en effet de (11.5.2.2) un morphisme de bicomplexes $T(L'^{\bullet\bullet}) \rightarrow T(L^{\bullet\bullet})$, et par suite un morphisme ${}'E(T(L'^{\bullet\bullet})) \rightarrow {}'E(T(L^{\bullet\bullet}))$ des premières suites spectrales de ces bicomplexes. Comme en vertu de (11.3.3), ces suites spectrales sont *régulières*, il suffit (11.1.5) de voir que le morphisme précédent est un isomorphisme pour les termes E_2, ou encore que $H^q_{II}(T(L'^{i,\bullet}))$ est égal à $R^qT(K^i)$; comme $L'^{i,\bullet}$ est une résolution droite de K^i, on est ramené à prouver le

Lemme **(11.5.2.4).** — *Si* $L^\bullet = (L^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ *est une résolution droite d'un objet* A *de* $\boldsymbol{C}$ *telle que* $R^nT(L^i) = 0$ *pour tout* $i\in\mathbf{Z}$ *et tout* $n>0$, *alors on a* $H^\bullet T(L^\bullet) = R^\bullet T(A)$.

C'est un cas particulier de (T, 2.5.2).

(11.5.2.5) La démonstration de (11.5.2) se termine maintenant de façon immédiate, car $L'^{\bullet\bullet}$ est une résolution injective de $K^\bullet$ *dans la catégorie abélienne* $\boldsymbol{K}$, autrement dit, $K^\bullet \rightsquigarrow H^\bullet(T(L'^{\bullet\bullet}))$ n'est autre que le foncteur cohomologique *dérivé droit* de T dans la catégorie $\boldsymbol{K}$ (T, 2.3).

Proposition **(11.5.3).** — *Sous les hypothèses de* (11.5.1) *concernant* $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$ *et* T, *soit* $L^{\bullet\bullet} = (L^{ij})$ *un bicomplexe tel que* $L^{ij} = 0$ *pour* $j<0$ *et que, pour tout* i, $L^{i,\bullet}$ *soit une résolution de* K^i; *supposons enfin que* $R^nT(L^{ij}) = 0$ *pour tout couple* (i, j) *et tout* $n>0$. *Alors il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathbf{R}^\bullet T(K^\bullet) \simeq H^\bullet(T(L^{\bullet\bullet}))). \tag{11.5.3.1}$$

Soit $L^{\bullet\bullet}_{(r)} = (L^{ij}_{(r)})$ le bicomplexe tel que $L^{ij}_{(r)} = 0$ pour $i<r$, $L^{ij}_{(r)} = L^{ij}$ pour $i\geqslant r$; il est immédiat que $L^{\bullet\bullet}$ est limite inductive de $L^{\bullet\bullet}_{(r)}$ pour r tendant vers $-\infty$; en vertu de l'hypothèse sur T et de (11.5.1), il suffit donc de prouver la proposition lorsque $K^\bullet$ est limité inférieurement, par exemple $K^i = 0$ pour $i<0$, et $L^{ij} = 0$ pour $i<0$. Soit alors $L'^{\bullet\bullet} = (L'^{ij})$ une résolution droite de $K^\bullet$ formée d'objets de $\mathfrak{J}$ (11.5.2.2); il y a un morphisme de bicomplexes $L^{\bullet\bullet} \to L'^{\bullet\bullet}$ compatible avec les augmentations, d'où un morphisme $'E(T(L^{\bullet\bullet})) \to {}'E(T(L'^{\bullet\bullet}))$ pour les premières suites spectrales; le lemme (11.5.2.4) montre, comme dans (11.5.2.3), que ce morphisme est un *isomorphisme*, d'où la conclusion.

Remarque **(11.5.4).** — Les raisonnements précédents prouvent que les conclusions de (11.5.2) et (11.5.3) sont valables dans la catégorie des complexes $K^\bullet$ *limités inférieurement, sans supposer que* T *permute aux limites inductives filtrantes*. En outre, quand on considère seulement la catégorie $\boldsymbol{K}$ des complexes $K^\bullet$ tels que $K^i = 0$ pour $i<0$, la caractérisation de $\mathbf{R}^\bullet T(K^\bullet)$ comme le système des *foncteurs dérivés droits* de T dans $\boldsymbol{K}$ montre que ce foncteur cohomologique est *universel* (T, 2.3).

Un autre cas où (11.5.2) est valable sans faire d'hypothèse supplémentaire sur T est le cas où il existe un entier $m>0$ tel que tout objet de $\boldsymbol{C}$ admette une résolution injective *de longueur* $\leqslant m$. En effet, dans la démonstration de (11.5.1), toutes les résolutions injectives d'objets de $\boldsymbol{C}$ qui interviennent peuvent être prises de longueur $\leqslant m$, d'où il résulte aussitôt que les termes de degré total n du bicomplexe $T(L^{\bullet\bullet}_{(r)})$ sont *égaux à ceux de* $T(L^{\bullet\bullet})$ et en nombre *fini*, dès que r est assez grand, ce qui entraîne que pour tout n, $H^n(T(L^{\bullet\bullet})) = H^n(T(L^{\bullet\bullet}_{(r)}))$ dès que r est assez grand. Avec les notations de (11.5.2), on a donc aussi $\mathbf{R}^nT(K^\bullet_{(r)}) = \mathbf{R}^nT(K^\bullet)$ pour r assez grand (dépendant de n) et de même pour $K'^\bullet$ et $K''^\bullet$, d'où la conclusion. De la même manière, (11.5.3) est valable sans condition supplémentaire sur T lorsque $\boldsymbol{C}$ vérifie l'hypothèse précédente et que l'on suppose que les résolutions $L^{i,\bullet}$ sont de longueur $\leqslant m$.

(11.5.5) Le résultat de (11.5.2) se généralise aux multifoncteurs covariants. Considérons par exemple la situation de (11.4.6), où l'on suppose que dans $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$ et $\boldsymbol{C}''$

les limites inductives filtrantes existent et sont exactes, et que T commute aux limites inductives. Alors $\mathbf{R}^{\cdot}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{K}'^{\cdot})$ est un bifoncteur *cohomologique* en chacun des complexes $\mathrm{K}^{\cdot}$, $\mathrm{K}'^{\cdot}$; pour le voir, on se ramène comme dans (11.5.2) au cas où $\mathrm{K}^{\cdot}$ et $\mathrm{K}'^{\cdot}$ sont limités inférieurement; prenant alors pour $\mathrm{K}^{\cdot}$ et $\mathrm{K}'^{\cdot}$ des résolutions injectives du type décrit dans (11.5.2.2), on est ramené à la propriété générale démontrée dans (M, V, 4.1).

(11.5.6) De même, les résultats de (11.4.7) et (11.5.3) se généralisent comme suit. Supposons (sous les hypothèses de (11.5.5)) que l'on ait deux bicomplexes $\mathrm{L}^{\cdot\cdot} = (\mathrm{L}^{ij})$, $\mathrm{L}'^{\cdot\cdot} = (\mathrm{L}'^{ij})$ tels que $\mathrm{L}^{ij} = 0$ et $\mathrm{L}'^{ij} = 0$ pour $j < 0$, que pour tout i, $\mathrm{L}^{i,\cdot}$ soit une résolution de K^i et $\mathrm{L}'^{i,\cdot}$ une résolution de K'^i, et enfin que $\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{L}^{ij}, \mathrm{L}'^{hk}) = 0$ pour $n > 0$ et pour tout système d'indices (i, j, h, k). Alors on a un isomorphisme fonctoriel en $\mathrm{K}^{\cdot}$ et $\mathrm{K}'^{\cdot}$

$$(11.5.6.1) \qquad \mathbf{R}^{\cdot}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{K}'^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\cdot\cdot}, \mathrm{L}'^{\cdot\cdot}))$$

Cela s'établit comme dans (11.5.3) en se ramenant au cas où $\mathrm{K}^{\cdot}$ et $\mathrm{K}'^{\cdot}$ sont limités inférieurement.

Supposons en outre que pour tout couple (i, j) et pour tout couple (h, k), les foncteurs $\mathrm{A} \rightsquigarrow \mathrm{T}(\mathrm{A}, \mathrm{L}'^{hk})$ et $\mathrm{A}' \rightsquigarrow \mathrm{T}(\mathrm{L}^{ij}, \mathrm{A}')$ soient exacts dans $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{C}'$ respectivement. Alors on a aussi des isomorphismes fonctoriels

$$(11.5.6.2) \qquad \mathbf{R}^{\cdot}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{K}'^{\cdot}) \sim \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\cdot\cdot}, \mathrm{K}'^{\cdot})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{L}'^{\cdot\cdot})).$$

La démonstration est semblable à celle de (11.4.7).

(11.5.7) On notera encore que les résultats de (11.5.5) et (11.5.6) sont valables sans supposer que T permute aux limites inductives, pourvu que l'on se restreigne aux complexes $\mathrm{K}^{\cdot}$, $\mathrm{K}'^{\cdot}$ limités inférieurement, ou que l'on suppose que tout objet de $\boldsymbol{C}$ (resp. $\boldsymbol{C}'$) admet une résolution injective de longueur bornée, et que dans (11.5.6) les bicomplexes $\mathrm{L}^{\cdot\cdot}$ et $\mathrm{L}'^{\cdot\cdot}$ ont leur second degré limité supérieurement.

11.6. Hyperhomologie d'un foncteur par rapport à un complexe $\mathrm{K}_{\bullet}$.

(11.6.1) Soient $\boldsymbol{C}$ une catégorie abélienne, $\mathrm{K}_{\bullet} = (\mathrm{K}_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ un complexe d'objets de $\boldsymbol{C}$, dont l'opérateur de dérivation est de degré -1. Une ***résolution de Cartan-Eilenberg gauche*** de $\mathrm{K}_{\bullet}$ est formée d'un bicomplexe $\mathrm{L}_{\bullet\bullet} = (\mathrm{L}_{ij})$ à opérateurs de dérivation de degré -1 avec $\mathrm{L}_{ij} = 0$ pour $j < 0$, et d'un morphisme de complexes simples $\varepsilon : \mathrm{L}_{\bullet,0} \rightarrow \mathrm{K}_{\bullet}$, de façon que les conditions obtenues à partir de celles de (11.4.2) par « renversement des flèches » soient remplies. Si tout objet de $\boldsymbol{C}$ est quotient d'un objet projectif, tout complexe $\mathrm{K}_{\bullet}$ de $\boldsymbol{C}$ admet une résolution de Cartan-Eilenberg *projective*, c'est-à-dire formée d'objets projectifs L_{ij}, avec des propriétés fonctorielles semblables à celles de (11.4.2). En outre, si $\mathrm{K}_{\bullet}$ est limité inférieurement (resp. supérieurement), on peut supposer que $\mathrm{L}_{ij} = 0$ pour $i < i_0$ (resp. $i > i_0$) si $\mathrm{K}_i = 0$ pour $i < i_0$ (resp. $i > i_0$). Si tout objet de $\boldsymbol{C}$ admet une résolution projective de longueur $\leqslant n$, on peut supposer que $\mathrm{L}_{ij} = 0$ pour $j > n$.

(11.6.2) Supposons que T soit un *foncteur covariant additif* de $\boldsymbol{C}$ dans une catégorie abélienne $\boldsymbol{C}'$. La définition de l'*hyperhomologie* $\mathbf{L}_\bullet \mathrm{T}(\mathrm{K}_\bullet)$ et des *suites spectrales d'hyperhomologie* de T par rapport à un complexe $\mathrm{K}_\bullet$ de $\boldsymbol{C}$ (lorsqu'elles existent) se fait encore à partir de (11.4.3) par « renversement des flèches », les termes E^2 des deux suites spectrales ainsi obtenues étant

(11.6.2.1) $$'\mathrm{E}^2_{pq} = \mathrm{H}_p(\mathrm{L}_q\mathrm{T}(\mathrm{K}_\bullet))$$

(11.6.2.2) $$''\mathrm{E}^2_{pq} = \mathrm{L}_p\mathrm{T}(\mathrm{H}_q(\mathrm{K}_\bullet))$$

où $\mathrm{L}_p\mathrm{T}$ désigne le p^{e} dérivé de T pour $p \geqslant 0$, et 0 pour $p<0$, $\mathrm{L}_q\mathrm{T}(\mathrm{K}_\bullet)$ le complexe $(\mathrm{L}_q\mathrm{T}(\mathrm{K}_i))_{i\in\mathbf{Z}}$.

Les propriétés de l'hyperhomologie ne se déduisent pas toutes par simple « renversement des flèches » de celles de l'hypercohomologie (à moins qu'on ne fasse des hypothèses supplémentaires du type AB 5*) de T, 1.5 sur la catégorie $\boldsymbol{C}'$) en raison des conditions de *régularité* des deux suites spectrales précédentes, auxquelles il faut cette fois appliquer les critères de (11.3.4). Ces derniers montrent que lorsqu'on suppose que dans $\boldsymbol{C}'$ les limites inductives filtrantes existent et sont exactes, alors le complexe défini par le bicomplexe $\mathrm{T}(\mathrm{L}_{\bullet\bullet})$ existe, et la *seconde* suite spectrale $''\mathrm{E}(\mathrm{T}(\mathrm{L}_{\bullet\bullet}))$ est cette fois *régulière*. Si l'on suppose, soit que $\mathrm{K}_\bullet$ soit limité inférieurement, soit qu'il existe un entier n tel que tout objet de $\boldsymbol{C}$ admette une résolution projective de longueur $\leqslant n$, alors les *deux* suites spectrales d'hyperhomologie existent (sans hypothèse sur $\boldsymbol{C}'$) et sont *birégulières*.

Proposition **(11.6.3)**. — *Soient* $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$ *deux catégories abéliennes,* T *un foncteur covariant additif de* $\boldsymbol{C}$ *dans* $\boldsymbol{C}'$. *Alors :*

(i) *L'hyperhomologie* $\mathbf{L}_\bullet\mathrm{T}(\mathrm{K}_\bullet)$ *est un foncteur homologique dans la catégorie abélienne des complexes de* $\boldsymbol{C}$ *limités inférieurement.*

(ii) *Soit* $\mathrm{K}_\bullet$ *un complexe de* $\boldsymbol{C}$ *limité inférieurement. Si* $\mathrm{L}_n\mathrm{T}(\mathrm{K}_i) = 0$ *pour tout* $n>0$ *et tout* $i\in\mathbf{Z}$, *on a des isomorphismes fonctoriels*

(11.6.3.1) $$\mathbf{L}_i\mathrm{T}(\mathrm{K}_\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_i(\mathrm{T}(\mathrm{K}_\bullet)) \qquad (i\in\mathbf{Z}).$$

(iii) *Soit* $\mathrm{K}_\bullet$ *un complexe de* $\boldsymbol{C}$ *limité inférieurement. Soit* $\mathrm{L}_{\bullet\bullet} = (\mathrm{L}_{ij})$ *un bicomplexe tel que* $\mathrm{L}_{ij} = 0$ *pour* $j<0$ *et que, pour tout* i, $\mathrm{L}_{i,\bullet}$ *soit une résolution de* K_i; *supposons enfin que* $\mathrm{L}_n\mathrm{T}(\mathrm{L}_{ij}) = 0$ *pour tout couple* (i, j) *et tout* $n>0$. *Alors il existe un isomorphisme fonctoriel*

(11.6.3.2) $$\mathbf{L}_\bullet\mathrm{T}(\mathrm{K}_\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_\bullet(\mathrm{T}(\mathrm{L}_{\bullet\bullet}))$$

Les démonstrations se font comme celles de (11.5.2), (11.4.5) et (11.5.3) dans le cas des complexes limités inférieurement. Nous laissons les détails de ces raisonnements au lecteur.

(11.6.4) On a des résultats tout à fait analogues pour les *multifoncteurs* covariants additifs en chacun des arguments. Par exemple pour un bifoncteur T, on a les deux suites spectrales d'hyperhomologie de termes E^2 donnés par

(11.6.4.1) $$'E^2_{pq} = H_p(L_q T(K_\bullet, K'_\bullet))$$

(11.6.4.2) $$''E^2_{pq} = \sum_{q'+q''=q} L_p(H_{q'}(K_\bullet), H_{q''}(K'_\bullet)).$$

Ici encore, c'est la *seconde* suite spectrale qui est régulière, les deux suites étant birégulières lorsqu'il s'agit de complexes $K_\bullet$, $K'_\bullet$ limités inférieurement, ou quand les objets des catégories abéliennes que l'on considère ont des résolutions projectives de longueur fixée.

En outre :

Proposition (**11.6.5**). — *Soient* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}''$ *trois catégories abéliennes,* T *un bifoncteur covariant biadditif de* $\mathbf{C}\times\mathbf{C}'$ *dans* $\mathbf{C}''$.

(i) $\mathbf{L}_\bullet T(K_\bullet, K'_\bullet)$ *est un bifoncteur homologique en chacun des complexes limités inférieurement* $K_\bullet$, $K'_\bullet$ *(formés respectivement d'objets de* $\mathbf{C}$ *et d'objets de* $\mathbf{C}'$*).*

(ii) *Supposons* $K_\bullet$ *et* $K'_\bullet$ *limités inférieurement. Soient* $L_{\bullet\bullet} = (L_{ij})$, $L'_{\bullet\bullet} = (L'_{ij})$ *deux bicomplexes tels que* $L_{ij} = 0$ *et* $L'_{ij} = 0$ *pour* $j < 0$, *que pour tout* i, $L_{i,\bullet}$ *soit une résolutiou de* K_i *et* $L'_{i,\bullet}$ *une résolution de* K'_i, *et enfin que* $L_n T(L_{ij}, L'_{hk}) = 0$ *pour* $n > 0$ *et tout système* (i, j, h, k). *Alors on a un isomorphisme fonctoriel*

(11.6.5.1) $$\mathbf{L}_\bullet T(K_\bullet, K'_\bullet) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(T(L_{\bullet\bullet}, L'_{\bullet\bullet})).$$

(iii) *Supposons en outre que pour tout couple* (i, j) *et tout couple* (h, k), *les foncteurs* $A \rightsquigarrow T(A, L'_{hk})$ *et* $A' \rightsquigarrow T(L_{ij}, A')$ *soient exacts dans* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{C}'$ *respectivement. Alors on a des isomorphismes fonctoriels*

(11.6.5.2) $$\mathbf{L}_\bullet T(K_\bullet, K'_\bullet) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(T(L_{\bullet\bullet}, K'_\bullet)) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(T(K_\bullet, L'_{\bullet\bullet})).$$

Les démonstrations sont analogues à celles de (11.5.5) et (11.5.6).

11.7. Hyperhomologie d'un foncteur par rapport à un bicomplexe $K_{\bullet\bullet}$.

(**11.7.1**) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie abélienne dans laquelle tout objet est quotient d'un objet projectif. Considérons un bicomplexe $K_{\bullet\bullet} = (K_{ij})$ formé d'objets de $\mathbf{C}$, et dont les deux degrés sont *limités inférieurement*; on peut toujours se borner au cas où $K_{ij} = 0$ pour $i < 0$ ou $j < 0$, et c'est ce que nous ferons désormais. On peut considérer $K_{\bullet\bullet}$ comme un complexe (simple) formé d'objets $K_{i,\bullet} = (K_{ij})_{j\geqslant 0}$ de la catégorie abélienne $\mathbf{K}$ des complexes à degrés positifs d'objets de $\mathbf{C}$. Il résulte du lemme (11.5.2.1) (ou plutôt du lemme « dual » obtenu par « renversement des flèches ») et de (M, V, 2.2) que $K_{\bullet\bullet}$ admet une *résolution projective de Cartan-Eilenberg* dans la catégorie $\mathbf{K}$; une telle résolution est un *tricomplexe* $M_{\bullet\bullet\bullet} = (M_{ijk})$ de $\mathbf{C}$, à degrés tous $\geqslant 0$, formé d'objets projectifs, tel que pour tout i, $M_{i,\bullet\bullet}$, $B^{\mathrm{I}}_i(M_{\bullet\bullet\bullet})$, $Z^{\mathrm{I}}_i(M_{\bullet\bullet\bullet})$, $H^{\mathrm{I}}_i(M_{\bullet\bullet\bullet})$ constituent des *résolutions projectives* de $K_{i,\bullet}$, $B^{\mathrm{I}}_i(K_{\bullet\bullet})$, $Z^{\mathrm{I}}_i(K_{\bullet\bullet})$, $H^{\mathrm{I}}_i(K_{\bullet\bullet})$ respectivement dans la catégorie $\mathbf{K}$; en particulier, pour tout couple (i, j), $M_{ij,\bullet}$ est une *résolution projective* de K_{ij} dans $\mathbf{C}$.

Proposition (**11.7.2**). — *Soit* T *un foncteur covariant additif de* $\mathbf{C}$ *dans une catégorie abélienne* $\mathbf{C}'$. *Avec les notations de* (11.7.1), *l'homologie* $H_\bullet(T(M_{\bullet\bullet\bullet}))$ *du complexe simple associé au tricomplexe* $T(M_{\bullet\bullet\bullet})$ *est canoniquement isomorphe à l'hyperhomologie* $\mathbf{L}_\bullet T(K_{\bullet\bullet})$ *du complexe* *simple associé à* $K_{\bullet\bullet}$ (11.6.2), *et est l'aboutissement commun de six suites spectrales birégulières notées* ${}^{(t)}E$ (*avec* $t = a, b, a', b', c$ *ou* d), *dont les termes* E^2 *sont donnés par les formules*

$$\begin{aligned}
{}^{(a)}E^2_{pq} &= L_pT(H_q(K_{\bullet\bullet}))\\
{}^{(b)}E^2_{pq} &= H_p(\mathbf{L}^{\mathrm{II}}_qT(K_{\bullet\bullet}))\\
{}^{(a')}E^2_{pq} &= \mathbf{L}_pT(H^{\mathrm{I}}_q(K_{\bullet\bullet}))\\
{}^{(b')}E^2_{pq} &= H_p(L_qT(K_{\bullet\bullet}))\\
{}^{(c)}E^2_{pq} &= \mathbf{L}_pT(H^{\mathrm{II}}_q(K_{\bullet\bullet}))\\
{}^{(d)}E^2_{pq} &= H_p(\mathbf{L}^{\mathrm{I}}_qT(K_{\bullet\bullet}))
\end{aligned}$$

(On rappelle que nous utilisons la notation $F(A_\bullet)$ pour désigner le complexe des objets $F(A_i)$ pour tout complexe $A_\bullet = (A_i)$; par exemple $\mathbf{L}^{\mathrm{II}}_qT(K_{\bullet\bullet})$ désigne le complexe $(\mathbf{L}^{\mathrm{II}}_qT(K_{i,\bullet}))_{i\geqslant 0}$, où $\mathbf{L}^{\mathrm{II}}_qT(K_{i,\bullet})$ est l'hyperhomologie d'indice q du foncteur T par rapport au complexe simple $K_{i,\bullet}$.)

Désignons par $L_\bullet$ le complexe simple associé à $K_{\bullet\bullet}$, de sorte que $L_i = \bigoplus_{r+s=i} K_{rs}$, et posons $N_{ij} = \bigoplus_{r+s=i} M_{rsj}$; il est clair que pour chaque i, $N_{i,\bullet}$ est une *résolution projective* de L_i dans $\boldsymbol{C}$; il résulte donc de (11.6.3) et (11.6.4) que l'on a un isomorphisme fonctoriel $\mathbf{L}_\bullet T(L_\bullet) \simeq H_\bullet(T(N_{\bullet\bullet}))$; comme le complexe simple associé au bicomplexe $T(N_{\bullet\bullet})$ est aussi associé au tricomplexe $T(M_{\bullet\bullet\bullet})$, cela prouve la première assertion de l'énoncé.

En outre, $\mathbf{L}_\bullet T(L_\bullet)$ est l'aboutissement des deux suites spectrales d'hyperhomologie (11.6.2) de T relativement au complexe simple $L_\bullet$, qui ne sont autres que les suites ${}^{(b')}E$ et ${}^{(a)}E$ respectivement.

Considérons maintenant $M_{\bullet\bullet\bullet}$ comme un bicomplexe $U_{\bullet\bullet}$ avec $U_{ij} = \bigoplus_{r+s=j} M_{irs}$; $H_\bullet(T(M_{\bullet\bullet\bullet}))$ est encore l'aboutissement des deux suites spectrales du bicomplexe $T(U_{\bullet\bullet})$. Or, pour tout i, $M_{i,\bullet\bullet}$ est un bicomplexe vérifiant les conditions de (11.6.3) relativement au complexe simple $K_{i,\bullet}$; donc $H^{\mathrm{II}}_q(T(U_{i,\bullet})) = \mathbf{L}^{\mathrm{II}}_qT(K_{i,\bullet})$, et la première suite spectrale de $T(U_{\bullet\bullet})$ n'est autre que ${}^{(b)}E$. D'autre part, pour tout r, $M_{\bullet,r,\bullet}$ est une résolution de Cartan-Eilenberg du complexe simple $K_{\bullet,r}$; le calcul fait dans (M, XV, 2) montre que $H^{\mathrm{I}}_q(T(M_{\bullet,rs})) = T(H^{\mathrm{I}}_q(M_{\bullet,rs}))$, d'où $H^{\mathrm{I}}_q(T(U_{\bullet,j})) = \bigoplus_{r+s=j} T(H^{\mathrm{I}}_q(M_{\bullet,rs}))$; autrement dit, le complexe simple $H^{\mathrm{I}}_q(T(U_{\bullet\bullet}))$ n'est autre que le complexe simple associé au bicomplexe $T(H^{\mathrm{I}}_q(M_{\bullet\bullet\bullet})$. Or, pour tout q, $H^{\mathrm{I}}_q(M_{\bullet\bullet\bullet})$ est une résolution *projective* du complexe simple $H^{\mathrm{I}}_q(K_{\bullet\bullet})$ dans la catégorie $\boldsymbol{K}$; appliquant (11.6.3), on voit que l'on a

$$H^{\mathrm{II}}_p(T(H^{\mathrm{I}}_q(M_{\bullet\bullet\bullet}))) = \mathbf{L}_pT(H^{\mathrm{I}}_q(K_{\bullet\bullet})),$$

et on obtient ainsi la suite ${}^{(a')}E$. Enfin, les suites ${}^{(c)}E$ et ${}^{(d)}E$ s'obtiennent en intervertissant les rôles des indices i et j dans la définition du tricomplexe $M_{\bullet\bullet\bullet}$ et en appliquant à ce nouveau tricomplexe les raisonnements qui précèdent.

On dit que $\mathbf{L}_\bullet T(K_{\bullet\bullet})$ est l'*hyperhomologie* de T relative au *bicomplexe* $K_{\bullet\bullet}$.

Remarques **(11.7.3)**. — (i) Il résulte de (11.6.3) que $\mathbf{L}_\bullet T(K_{\bullet\bullet})$ est un *foncteur homologique* dans la catégorie des bicomplexes $K_{\bullet\bullet}$ de $\boldsymbol{C}$ limités inférieurement en chacun de leurs degrés.

(ii) Soit $M_{\bullet\bullet\bullet}$ un tricomplexe de $\boldsymbol{C}$ tel que pour chaque couple (r, s), $M_{rs,\bullet}$ soit une *résolution* de K_{rs} et que $L_n T(M_{ijk}) = 0$ pour tous les triplets (i, j, k) et tout $n > 0$. Alors on a un isomorphisme $\mathbf{L}_\bullet T(K_{\bullet\bullet}) \cong H_\bullet(T(M_{\bullet\bullet\bullet}))$; en effet, avec les notations de la démonstration de (11.7.2), $N_{i,\bullet}$ est une résolution de L_i telle que $L_n T(N_{ij}) = 0$ pour $n > 0$ et tout couple (i, j), et il suffit d'appliquer (11.6.3, (iii)).

(iii) On généralise aussitôt les résultats de (11.7.2) aux multifoncteurs covariants; par exemple, soient $\boldsymbol{C}'$ une seconde catégorie abélienne dans laquelle tout objet est quotient d'un objet projectif, $K'_{\bullet\bullet}$ un bicomplexe de $\boldsymbol{C}'$ dont les deux degrés sont limités inférieurement, et T un bifoncteur covariant additif de $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}'$ dans une catégorie abélienne $\boldsymbol{C}''$. Si $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont les complexes simples associés à $K_{\bullet\bullet}$ et $K'_{\bullet\bullet}$ respectivement, on définit l'hyperhomologie de T par rapport aux deux bicomplexes $K_{\bullet\bullet}$, $K'_{\bullet\bullet}$ comme l'hyperhomologie $\mathbf{L}_\bullet T(L_\bullet, L'_\bullet)$; appliquant (11.6.4) et (11.6.5), on a de même que dans (11.7.2) six suites spectrales aboutissant à cette hyperhomologie, et que nous laissons le soin d'écrire au lecteur.

11.8. Compléments sur la cohomologie des complexes simpliciaux.

(11.8.1) Soient A un ensemble fini, $\Sigma(A)$ l'ensemble des suites finies $\sigma = (\alpha_0, \ldots, \alpha_h)$ d'éléments de A (« simplexes » de A); on pose $|\sigma| = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_h\}$; on rappelle que le complexe de chaînes $C_\bullet(A)$ est le groupe abélien libre gradué engendré par les éléments de $\Sigma(A)$, $(\alpha_0, \ldots, \alpha_h)$ étant de *degré h*, avec une différentielle définie par $d(\alpha_0, \ldots, \alpha_h) = \sum_{j=0}^{h} (-1)^j (\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_h)$. Le sous-groupe $D_\bullet(A)$ de $C_\bullet(A)$ engendré par les chaînes $\sigma = (\alpha_0, \ldots, \alpha_h)$ pour lesquelles deux des α_i sont égaux, et par les chaînes $\pi(\sigma) - \varepsilon_\pi . \sigma$, où pour toute permutation π, $\pi(\sigma) = (\alpha_{\pi(0)}, \ldots, \alpha_{\pi(h)})$ et ε_π est la signature de π, est un sous-complexe de $C_\bullet(A)$ dont les éléments sont dits chaînes *dégénérées*; on pose $L_\bullet(A) = C_\bullet(A)/D_\bullet(A)$, et on a un homomorphisme naturel de complexes $p : C_\bullet(A) \to L_\bullet(A)$. On définit d'autre part un homomorphisme de complexes $j : L_\bullet(A) \to C_\bullet(A)$ de la façon suivante : on ordonne totalement A; à la classe mod. $D_\bullet(A)$ d'un simplexe $\sigma = (\alpha_0, \ldots, \alpha_h)$, on fait correspondre 0 si deux des α_i sont égaux, et la suite $(\beta_0, \ldots, \beta_h)$ des α_i rangés *dans l'ordre croissant* dans le cas contraire. Il est clair que $p \circ j$ est l'*identité* de $L_\bullet(A)$.

(11.8.2) Soit B un second ensemble fini; si d', d'' sont les différentielles de $C_\bullet(A)$ et $C_\bullet(B)$, le complexe produit tensoriel $C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B)$ peut être considéré comme le groupe abélien libre engendré par les éléments de $\Sigma(A) \times \Sigma(B)$, avec la différentielle $d(\sigma, \tau) = (d'\sigma, \tau) + (-1)^{h+1}(\sigma, d''\tau)$ si $\operatorname{Card} |\sigma| = h + 1$.

Les homomorphismes naturels $C_\bullet(A) \to L_\bullet(A)$, $C_\bullet(B) \to L_\bullet(B)$ définissent un homomorphisme $p : C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B) \to L_\bullet(A) \otimes L_\bullet(B)$, ce dernier produit tensoriel étant isomorphe à $(C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B)) / (C_\bullet(A) \otimes D_\bullet(B) + D_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B))$. De même, à l'aide des homomorphismes $L_\bullet(A) \to C_\bullet(A)$ et $L_\bullet(B) \to C_\bullet(B)$ définis dans (11.8.1) (à l'aide d'ordres totaux sur A et B), on définit un homomorphisme $j : L_\bullet(A) \otimes L_\bullet(B) \to C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B)$ tel que $p \circ j$ soit l'identité.

Avec ces notations :

Proposition (**11.8.3**). — *Il existe une homotopie* $h : C_\bullet(A)\otimes C_\bullet(B)\rightarrow C_\bullet(A)\otimes C_\bullet(B)$, *telle que* $h(\sigma, \tau)$ *soit combinaison linéaire de couples de simplexes* (σ_i, τ_i) *avec* $|\sigma_i|\subset|\sigma|, |\tau_i|\subset|\tau|$, *et que l'on ait pour* $f = j\circ p$,

(**11.8.3.1**) $$f - 1 = h\circ d + d\circ h.$$

Il suffit de définir h sur chaque couple (σ, τ) de simplexes, en raisonnant par récurrence sur la somme des degrés de σ et τ, car on peut prendre $h = 0$ lorsque cette somme est 0. Soit $\omega = f(\sigma, \tau) - (\sigma, \tau) - h(d(\sigma, \tau))$; en vertu de l'hypothèse de récurrence et de la définition de d, on a $\omega\in C_\bullet(|\sigma|)\otimes C_\bullet(|\tau|)$. On a

$$d\omega = f(d(\sigma, \tau)) - d(\sigma, \tau) - d(h(d(\sigma, \tau))) = h(d(d(\sigma, \tau))) = 0$$

en vertu de (11.8.3.1) et de l'hypothèse de récurrence. Or, on a $H_q(C_\bullet(A)) = 0$ pour $q > 0$ (G, I, 3.7.4), donc aussi $H_q(C_\bullet(A)\otimes C_\bullet(B)) = 0$ pour $q > 0$, en vertu de la formule de Künneth (G, I, 5.5.2). Appliquant cette remarque en remplaçant A par $|\sigma|$ et B par $|\tau|$, on voit qu'il existe un élément ω' de $C_\bullet(|\sigma|)\otimes C_\bullet(|\tau|)$ tel que $\omega = d\omega'$; prenant $h(\sigma, \tau) = \omega'$, on vérifie (11.8.3.1) pour le couple (σ, τ) et la récurrence peut se poursuivre.

(**11.8.4**) Les notations étant celles de (11.8.2), nous poserons $(\sigma, \tau)\leqslant(\sigma', \tau')$ si $|\sigma|\subset|\sigma'|$ et $|\tau|\subset|\tau'|$. Un *système de coefficients* $\mathscr{S}$ sur $\Sigma(A)\times\Sigma(B)$ est constitué par une famille $(\Gamma_{\sigma,\tau})$ de groupes abéliens, où $\Gamma_{\sigma,\tau}$ ne dépend que des ensembles $|\sigma|$ et $|\tau|$, et une famille d'homomorphismes $\Gamma_{\sigma,\tau}\rightarrow\Gamma_{\sigma',\tau'}$ pour $(\sigma, \tau)\leqslant(\sigma', \tau')$, formant un *système inductif* pour cette relation de préordre. On définit alors un *complexe de cochaînes* $C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ comme l'ensemble des familles $\lambda = (\lambda(\sigma, \tau))$, où (σ, τ) parcourt $\Sigma(A)\times\Sigma(B)$, avec $\lambda(\sigma, \tau)\in\Gamma_{\sigma,\tau}$ pour tout couple (σ, τ). La différentielle est donnée de la façon suivante : si $d(\sigma, \tau) = \sum_i \pm(\sigma_i, \tau_i)$, on a $|\sigma_i|\subset|\sigma|$, $|\tau_i|\subset|\tau|$ pour tout i, et l'on prend

$$d\lambda(\sigma, \tau) = \sum_i \pm\lambda_i(\sigma_i, \tau_i),$$

où $\lambda_i(\sigma_i, \tau_i)$ désigne l'image canonique de $\lambda(\sigma_i, \tau_i)$ dans $\Gamma_{\sigma,\tau}$.

Nous dirons qu'une cochaîne $\lambda\in C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ est *bi-alternée* si $\lambda(\sigma, \tau) = 0$ lorsque l'un des deux simplexes σ, τ a deux termes égaux, et si l'on a $\lambda(\pi(\sigma), \tau) = \varepsilon_\pi\lambda(\sigma, \tau)$ et $\lambda(\sigma, \pi'(\tau)) = \varepsilon_{\pi'}\lambda(\sigma, \tau)$ pour des permutations quelconques π, π' des indices. Il est clair que ces cochaînes engendrent un *sous-complexe* $L^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ de $C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$.

Proposition (**11.8.5**). — *L'injection canonique* $L^\bullet(A, B; \mathscr{S})\rightarrow C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ *définit un isomorphisme pour la cohomologie de ces deux complexes.*

Notons que si p et j ont le sens défini dans (11.8.2), les applications ${}^tp : \lambda\rightarrow\lambda\circ p$ et ${}^tj : \lambda\rightarrow\lambda\circ j$ sont définies dans $L^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ et $C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ respectivement, la première n'étant autre que l'injection canonique. Comme ${}^tj\circ{}^tp$ est l'identité, il suffit de démontrer que ${}^tp\circ{}^tj$ est homotope à l'identité; or, d'après (11.8.3), ${}^th : \lambda\rightarrow\lambda\circ h$ est *définie* dans $C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ et on peut donc transposer l'identité (11.8.3.1), qui fournit le résultat cherché.

(11.8.6) La proposition (11.8.5) ramène le calcul de la cohomologie de $L^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ à celui de la cohomologie de $C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$. Rappelons d'autre part que cette dernière est, en vertu du th. d'Eilenberg-Zilber (G, I, 3.10.2), canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe de cochaînes défini comme suit : on forme le complexe de chaînes $P_\bullet(A, B)$, constitué par les combinaisons linéaires des $(\sigma, \tau) \in \Sigma(A) \times \Sigma(B)$ tels que σ et τ aient *le même degré*; la différentielle de ce complexe est donnée par $d : (\sigma, \tau) \rightsquigarrow \sum_{j,k} (-1)^{j+k}(\sigma_j, \tau_k)$ si $d\sigma = \sum_j (-1)^j \sigma_j$ et $d\tau = \sum_k (-1)^k \tau_k$; on a alors deux homomorphismes canoniques de complexes

$$f : P_\bullet(A, B) \to C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B), \qquad g : C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B) \to P_\bullet(A, B),$$

et on démontre *(loc. cit.)* qu'il y a des *homotopies* h, h' telles que

$$f \circ g - 1 = d \circ h + h \circ d \qquad \text{et} \qquad g \circ f - 1 = d \circ h' + h' \circ d.$$

En outre, on a $f(\sigma, \tau) \in C_\bullet(|\sigma|) \otimes C_\bullet(|\tau|)$ et $g(\sigma, \tau) \in P_\bullet(|\sigma|, |\tau|)$ et les homotopies h, h' *peuvent être prises telles que* $h(\sigma, \tau) \in C_\bullet(|\sigma|) \otimes C_\bullet(|\tau|)$ *et* $h'(\sigma, \tau) \in P_\bullet(|\sigma|, |\tau|)$. Ce point provient de ce que la définition de $h(\sigma, \tau)$ et $h'(\sigma, \tau)$ peut se faire par *récurrence* sur la somme des degrés de σ et τ, et de ce que les $H^q(C_\bullet(|\sigma|) \otimes C_\bullet(|\tau|))$ et $H^q(P_\bullet(|\sigma|, |\tau|))$ sont *nuls* pour $q > 0$ *(loc. cit.)*; on raisonne alors comme dans (11.8.3) et la conclusion en résulte.

On définit alors $P^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ comme l'ensemble des familles $\lambda = (\lambda(\sigma, \tau))$ où (σ, τ) parcourt les couples dont les termes ont même degré, avec $\lambda(\sigma, \tau) \in \Gamma_{\sigma,\tau}$, et comme on a $d\sigma = \sum_j (-1)^j \sigma_j \in C_\bullet(|\sigma|)$ et $d\tau = \sum_k (-1)^k \tau_k \in C_\bullet(|\tau|)$,

$$d\lambda(\sigma, \tau) = \Sigma(-1)^{j+k} \lambda(\sigma_j, \tau_k)$$

est défini et donne la différentielle du complexe $P^\bullet(A, B; \mathscr{S})$. Cela étant, les applications ${}^t f : \lambda \to \lambda \circ f$, ${}^t g : \lambda \to \lambda \circ g$, ${}^t h : \lambda \to \lambda \circ h$ et ${}^t h' : \lambda \to \lambda \circ h'$ sont toutes *définies* en vertu des remarques qui précèdent; ${}^t f \circ {}^t g$ et ${}^t g \circ {}^t f$ sont donc homotopes à l'identité, d'où l'isomorphisme cherché entre la cohomologie de $C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ et celle de $P^\bullet(A, B; \mathscr{S})$.

Remarque **(11.8.7)**. — Le même raisonnement que dans (11.8.3), mais appliqué à $C_\bullet(A)$ et $L_\bullet(A)$, montre que si j et p sont définis comme dans (11.8.1), $f = j \circ p$ vérifie encore une relation (11.8.3.1), avec $|h(\sigma)| \subset |\sigma|$, d'où on déduit comme dans (11.8.5) un isomorphisme de la cohomologie de $L^\bullet(A; \mathscr{S})$ sur celle de $C^\bullet(A; \mathscr{S})$, ces deux complexes étant définis de façon évidente. C'est le résultat dont la démonstration est esquissée dans (G, I, 3.8.1).

(11.8.8) Reprenons maintenant les notations et hypothèses de (11.8.2), et considérons un *complexe* $\mathscr{S}^\bullet = (\mathscr{S}^k)$ *de systèmes de coefficients* sur $\Sigma(A) \times \Sigma(B)$: pour chaque (σ, τ), les $\Gamma^k_{\sigma,\tau}$ forment donc un complexe de groupes abéliens ($k \in \mathbf{Z}$), et on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^k_{\sigma,\tau} & \to & \Gamma^{k+1}_{\sigma,\tau} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma^k_{\sigma',\tau'} & \to & \Gamma^{k+1}_{\sigma',\tau'} \end{array}$$

pour $(\sigma, \tau) \leqslant (\sigma', \tau')$. Alors on vérifie aussitôt que $C^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet) = (C^h(A, B; \mathscr{S}^k))_{(h,k)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$ est un *bicomplexe* de groupes abéliens, et $L^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet) = (L^h(A, B; \mathscr{S}^k))$ en est un sous-bicomplexe.

Proposition **(11.8.9)**. — *L'injection canonique* $L^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet) \to C^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet)$ *définit un isomorphisme pour la cohomologie de ces deux bicomplexes.*

Posons $C^{\bullet\bullet} = C^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet)$ et $L^{\bullet\bullet} = L^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet)$ pour simplifier, et notons que puisque $C^{hk} = L^{hk} = 0$ pour $h<0$, les secondes suites spectrales de ces bicomplexes sont *régulières* (11.3.3); l'homomorphisme $L^{\bullet\bullet} \to C^{\bullet\bullet}$ fournit donc un morphisme de suites spectrales $''E(L^{\bullet\bullet}) \to {}''E(C^{\bullet\bullet})$ qui, pour les termes E_2, se réduit à

(11.8.9.1) $$H^p_{II}(H^q_I(L^{\bullet\bullet})) \to H^p_{II}(H^q_I(C^{\bullet\bullet})).$$

Mais pour tout $k\in\mathbf{Z}$, il résulte de (11.8.3) que l'homomorphisme $H^q_I(L^{\bullet,k}) \to H^q_I(C^{\bullet,k})$ est *bijectif*; la conclusion résulte donc de (11.1.5).

(11.8.10) De même, avec les notations de (11.8.6), on a des homomorphismes canoniques de bicomplexes $C^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet) \to P^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet)$ (avec des notations évidentes), et le même raisonnement que dans (11.8.9), basé cette fois sur (11.8.6), montre que cet homomorphisme donne encore un *isomorphisme* en cohomologie.

11.9. Un lemme sur les complexes de type fini.

Proposition **(11.9.1)**. — *Soient* $\mathbf{C}$ *une catégorie abélienne,* $\mathbf{K}'$ *et* $\mathbf{K}''$ *des parties de l'ensemble des objets de* $\mathbf{C}$, *telles que* $\mathbf{K}'' \subset \mathbf{K}'$, *et vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Pour tout objet* $A'\in\mathbf{K}'$ *et tout épimorphisme* $u : A\to A'$ *dans* $\mathbf{C}$, *il existe un objet* $B\in\mathbf{K}''$ *et un morphisme* $v : B\to A$ *tels que uv soit un épimorphisme.*

(ii) *Pour tout couple d'objets* $A\in\mathbf{K}'$, $B\in\mathbf{K}'$ *et tout épimorphisme* $u : A\to B$, $\operatorname{Ker}(u)$ *appartient à* $\mathbf{K}'$.

(iii) *Le produit de deux objets de* $\mathbf{K}''$ *appartient à* $\mathbf{K}''$.

Soit $P_\bullet = (P_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ *un complexe dans* $\mathbf{C}$, *tel que* $H_i(P_\bullet)\in\mathbf{K}'$ *pour tout i, et qu'il existe d tel que* $H_i(P_\bullet) = 0$ *pour* $i<d$. *Alors il existe un complexe* $Q_\bullet = (Q_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ *dans* $\mathbf{C}$ *tel que* $Q_i\in\mathbf{K}''$ *pour tout i et* $Q_i = 0$ *pour* $i<d$, *et un morphisme* $u : Q_\bullet \to P_\bullet$ *de complexes tel que le morphisme correspondant* $H_\bullet(Q_\bullet) \to H_\bullet(P_\bullet)$ *soit un isomorphisme.*

Démontrons d'abord la conséquence suivante de la propriété (i) :

(i *bis*) *Soient* $u : C\to B$ *un épimorphisme dans* $\mathbf{C}$, A *un objet de* $\mathbf{K}'$, $v : A\to B$ *un morphisme dans* $\mathbf{C}$; *il existe alors un objet* $D\in\mathbf{K}''$, *un épimorphisme* $u' : D\to A$ *et un morphisme* $v' : D\to C$ *tels que le diagramme*

(11.9.1.1)
$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{u'} & A \\ {\scriptstyle v'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ C & \xrightarrow[u]{} & B \end{array}$$

soit commutatif.

Considérons en effet le produit fibré $C\times_B A$ dans $\mathbf{C}$ et les projections canoniques $p : C\times_B A\to C$, $q : C\times_B A\to A$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} C \times_B A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd} \tag{11.9.1.2}$$

On sait ([27], p. 1-12) que le conoyau de q est le quotient de A par $v^{-1}(u(C))$; comme u est un épimorphisme, $u(C)=B$ et $v^{-1}(u(C))=A$, donc q est un épimorphisme; il suffit alors d'appliquer (i) à l'épimorphisme $q : C\times_B A \to A$: il y a un objet $D \in \boldsymbol{K}''$ et un morphisme $w : D \to C \times_B A$ tels que qw soit un épimorphisme; on prendra $u'=qw$, $v'=pw$.

Cela étant, pour démontrer la proposition, procédons par récurrence. Supposons, pour un $i \geqslant d-1$, construits, pour $j \leqslant i$, les objets Q_j, les morphismes $d_j : Q_j \to Q_{j-1}$ et les morphismes $u_j : Q_j \to P_j$ de sorte que $Q_j = 0$ pour $j<d$, que $d_{j-1} \circ d_j = 0$ et $d_j \circ u_j = u_{j-1} \circ d_j$ pour $j \leqslant i$; en outre, nous supposons vérifiées les conditions suivantes :

(I_i) On a $Q_j \in \boldsymbol{K}''$ pour $j \leqslant i$ et $B_j(Q_\bullet) \in \boldsymbol{K}'$ pour $j<i$.

(II_i) Pour $j<i$, l'homomorphisme $H_j(Q_\bullet) \to H_j(P_\bullet)$ déduit de la famille $(u_k)_{k \leqslant i}$ est un *isomorphisme*.

(III_i) Le morphisme composé $v_i : Z_i(Q_\bullet) \to Z_i(P_\bullet) \to H_i(P_\bullet)$ (où la flèche de gauche est la restriction de u_i et la flèche de droite le morphisme canonique) est un ***épimorphisme.***

Notons que, d'après (ii), $Z_i(Q_\bullet)$, noyau de l'épimorphisme $Q_i \to B_{i-1}(Q_\bullet)$, appartient à $\boldsymbol{K}'$ en vertu de l'hypothèse (I_i). On tire encore de (ii) que $N_i = \mathrm{Ker}\,(v_i)$ appartient aussi à $\boldsymbol{K}'$, compte tenu de l'hypothèse (III_i). En vertu de (i *bis*), il existe un $Q'_{i+1} \in \boldsymbol{K}''$, un épimorphisme $d'_{i+1} : Q'_{i+1} \to N_i$ et un morphisme $u'_{i+1} : Q'_{i+1} \to P_{i+1}$, tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Q'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] \arrow[d, "u'_{i+1}"'] & N_i \arrow[d, "u_i"] \\ P_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"'] & B_i(P_\bullet) \end{tikzcd} \tag{11.9.1.3}$$

soit commutatif.

Comme le morphisme canonique $Z_{i+1}(P_\bullet) \to H_{i+1}(P_\bullet)$ est un épimorphisme et que $H_{i+1}(P_\bullet) \in \boldsymbol{K}'$ par hypothèse, il résulte de (i) qu'il existe un objet $Q''_{i+1} \in \boldsymbol{K}''$ et un morphisme $u''_{i+1} : Q''_{i+1} \to Z_{i+1}(P_\bullet)$ tels que le composé $Q''_{i+1} \to Z_{i+1}(P_\bullet) \to H_{i+1}(P_\bullet)$ soit un épimorphisme. Si on prend $d''_{i+1} : Q''_{i+1} \to N_i$ égal à 0, le diagramme

$$\begin{tikzcd} Q''_{i+1} \arrow[r, "d''_{i+1}"] \arrow[d, "u''_{i+1}"'] & N_i \arrow[d, "u_i"] \\ Z_{i+1}(P_\bullet) \arrow[r, "d_{i+1}"'] & P_i \end{tikzcd} \tag{11.9.1.4}$$

est commutatif, la flèche horizontale inférieure étant 0. Prenons alors $Q_{i+1}=Q'_{i+1}\times Q''_{i+1}$, qui appartient à $\boldsymbol{K}''$ en vertu de (iii), et $d_{i+1}=d'_{i+1}+d''_{i+1}$, $u_{i+1}=u'_{i+1}+u''_{i+1}$. Comme $d_{i+1}(Q_{i+1})=d'_{i+1}(Q_{i+1})=N_i\subset Z_i(Q_.)$, on a $d_{i+1}\circ d_i=0$ et, avec les notations usuelles, $B_i(Q_.)=N_i$, ce qui vérifie (I_{i+1}). La commutativité des diagrammes (11.9.1.3) et (11.9.1.4) montre que $d_{i+1}\circ u_{i+1}=u_i\circ d_{i+1}$. Par définition de N_i, le morphisme $H_i(Q_.)=Z_i(Q_.)/N_i\rightarrow H_i(P_.)$ déduit du système des u_k $(k\leqslant i+1)$ est le morphisme déduit de v_i par passage aux quotients, donc c'est un isomorphisme puisque v_i est un épimorphisme, d'où (II_{i+1}). Enfin, on a $Q''_{i+1}\subset Z_{i+1}(Q_.)$ par définition; le choix de u''_{i+1} montre que le morphisme $v_{i+1}:Z_{i+1}(Q_.)\rightarrow Z_{i+1}(P_.)\rightarrow H_{i+1}(P_.)$ est un épimorphisme, sa restriction à Q''_{i+1} l'étant déjà, d'où (III_{i+1}). La récurrence peut donc se poursuivre, et la proposition est démontrée.

Corollaire **(11.9.2)**. — *Soient* A *un anneau noethérien (non nécessairement commutatif),* $P_.=(P_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ *un complexe de* A*-modules à droite. On suppose que les* $H_i(P_.)$ *sont des* A*-modules de type fini et qu'il existe d tel que* $H_i(P_.)=0$ *pour* $i<d$. *Alors il existe un complexe* $Q_.=(Q_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ *formé de* A*-modules à droite libres de rang fini, tel que* $Q_i=0$ *pour* $i<d$, *et un homomorphisme* $u:Q_.\rightarrow P_.$ *de complexes, tel que l'homomorphisme* $H_.(Q_.)\rightarrow H_.(P_.)$ *correspondant à u soit bijectif.*

On applique (11.9.1) en prenant pour $\boldsymbol{C}$ la catégorie des A-modules à droite, pour $\boldsymbol{K}'$ (resp. $\boldsymbol{K}''$) l'ensemble des A-modules de type fini (resp. l'ensemble des A-modules libres de rang fini); la vérification des conditions (i), (ii) et (iii) de (11.9.1) est immédiate, compte tenu de l'hypothèse que A est noethérien.

Remarques **(11.9.3)**. — (i) Sous les conditions de (11.9.2), supposons en outre que les P_i soient des A-modules à droite *plats*. Alors, pour tout A-module à gauche M, l'homomorphisme de complexes $u\otimes 1:Q_.\otimes_A M\rightarrow P_.\otimes_A M$ définit encore un *isomorphisme* $H_.(Q_.\otimes_A M)\xrightarrow{\sim} H_.(P_.\otimes_A M)$ de l'homologie comme nous le verrons au chap. III.

(ii) La conclusion de (11.9.2) n'est plus nécessairement exacte lorsqu'on ne suppose pas A *noethérien*; en effet, en l'appliquant à un complexe réduit à 0 sauf pour un seul terme, on en conclurait que tout A-module à gauche de type fini admet une *résolution* par des modules libres de type fini, ce qui n'est pas vrai en général (cf. Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, exerc. 6).

Toutefois, au lieu de supposer A noethérien, on peut supposer seulement que les $H_i(P_.)$ ont une ∞-présentation finie (cf. chap. IV).

11.10. Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un complexe de modules de longueur finie.

(11.10.1) Soient A un anneau (non nécessairement commutatif),

$$M^{\bullet}:0\rightarrow M^0\rightarrow M^1\rightarrow\ldots\rightarrow M^n\rightarrow 0 \tag{11.10.1.1}$$

un *complexe* de A-modules à gauche de *longueur finie*. On appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* de ce complexe le nombre

(11.10.1.2) $$\chi(\mathrm{M}^\bullet) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{long} \mathrm{M}^i.$$

Proposition **(11.10.2)**. — *Pour tout complexe fini* $\mathrm{M}^\bullet$ *de* A-*modules à gauche de longueur finie, on a* $\chi(\mathrm{M}^\bullet)=\chi(\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{M}^\bullet))$ ($\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{M}^\bullet)$ *étant considéré comme un complexe pour la dérivation triviale*). *En particulier, si la suite* (11.10.1.1) *est exacte, on a* $\chi(\mathrm{M}^\bullet)=0$.

Posons pour abréger $\mathrm{B}^i=\mathrm{B}^i(\mathrm{M}^\bullet)$, $\mathrm{Z}^i=\mathrm{Z}^i(\mathrm{M}^\bullet)$, $\mathrm{H}^i=\mathrm{H}^i(\mathrm{M}^\bullet)=\mathrm{Z}^i/\mathrm{B}^i$; les B^i, Z^i, H^i sont de longueur finie. Des suites exactes

$$0\to\mathrm{B}^i\to\mathrm{Z}^i\to\mathrm{H}^i\to 0$$
$$0\to\mathrm{Z}^i\to\mathrm{M}^i\to\mathrm{B}^{i+1}\to 0$$

on tire les relations

$$\operatorname{long}(\mathrm{Z}^i)=\operatorname{long}(\mathrm{H}^i)+\operatorname{long}(\mathrm{B}^i)$$
$$\operatorname{long}(\mathrm{M}^i)=\operatorname{long}(\mathrm{Z}^i)+\operatorname{long}(\mathrm{B}^{i+1})$$

d'où

$$\operatorname{long}(\mathrm{M}^i)-\operatorname{long}(\mathrm{H}^i)=\operatorname{long}(\mathrm{B}^{i+1})+\operatorname{long}(\mathrm{B}^i)$$

Multiplions cette relation par $(-1)^i$ et faisons la somme des relations obtenues pour $0\leqslant i\leqslant n$; en notant que $\mathrm{B}^0=\mathrm{B}^{n+1}=0$, il vient l'égalité cherchée.

Corollaire **(11.10.3)**. — *Soit* $\mathrm{E}=(\mathrm{E}_r^{pq})$ *une suite spectrale dans la catégorie des modules sur un anneau* A. *On suppose que les* E_2^{pq} *sont des* A-*modules de longueur finie et qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples* (p, q) *tels que* $\mathrm{E}_2^{pq}\neq 0$. *Alors les caractéristiques d'Euler-Poincaré* $\chi(\mathrm{E}_r^{(\bullet)})$ *de tous les complexes* $\mathrm{E}_r^{(\bullet)}=(\mathrm{E}_r^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ (11.1.1) *sont toutes égales. Si, en outre, la suite* E *est faiblement convergente et si on pose* $\mathrm{E}_\infty^{(n)}=\bigoplus_{p+q=n}\mathrm{E}_\infty^{pq}$ *pour tout* $n\in\mathbf{Z}$, *on a aussi* $\chi(\mathrm{E}_\infty^{(\bullet)})=\chi(\mathrm{E}_2^{(\bullet)})$, $\mathrm{E}_\infty^{(\bullet)}=(\mathrm{E}_\infty^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ *étant considéré comme un complexe à dérivation triviale.*

Notons d'abord que si $\mathrm{E}_2^{pq}=0$, on a $\mathrm{E}_r^{pq}=0$ pour $2\leqslant r\leqslant+\infty$, donc tous les complexes $\mathrm{E}_r^{(\bullet)}$ sont finis et formés de A-modules de longueur finie; la relation $\chi(\mathrm{E}_r^{(\bullet)})=\chi(\mathrm{E}_{r+1}^{(\bullet)})$ pour tout r fini résulte donc de (11.10.2) et de l'isomorphie entre $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{E}_r^{(\bullet)})$ et $\mathrm{E}_{r+1}^{(\bullet)}$ (en tant que complexes à dérivation triviale). L'hypothèse que les E_r^{pq} sont de longueur finie entraîne que pour tout couple (p, q), les suites $(\mathrm{B}_k(\mathrm{E}_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ et $(\mathrm{Z}_k(\mathrm{E}_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ sont stationnaires; l'hypothèse que E est faiblement convergente et que $\mathrm{E}_2^{pq}=0$, sauf pour un nombre fini de couples (p, q), entraîne donc qu'il existe un entier $r\geqslant 2$ tel que $\mathrm{E}_\infty^{pq}=\mathrm{E}_r^{pq}$ pour tout couple (p, q); d'où l'assertion relative à $\chi(\mathrm{E}_\infty^{(\bullet)})$.

§ 12. COMPLÉMENTS SUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX

12.1. Cohomologie des faisceaux de modules sur les espaces annelés.

(12.1.1) Soit $(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ un espace annelé. Rappelons que pour tout $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module $\mathscr{F}$, on définit la *cohomologie* $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}, \mathscr{F})$, qui est un *foncteur cohomologique universel* (T, 2.2) de la catégorie $\mathbf{C}(\mathrm{X})$ des $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Modules dans la catégorie des groupes abéliens; c'est le foncteur dérivé du foncteur exact à gauche $\mathscr{F}\to\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{F})$. Le foncteur $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ est isomorphe à la restriction à la catégorie $\mathbf{C}(X)$ du foncteur cohomologique défini de même sur la catégorie des *faisceaux de groupes abéliens* sur X (G, II, 7.2.1).

(12.1.2) Posons $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Comme tout élément de A définit un endomorphisme du groupe abélien $\Gamma(X, \mathcal{F})$, il définit par fonctorialité un endomorphisme de ∂-foncteur de $H^\bullet(X, \mathcal{F})$; ces endomorphismes définissent sur chacun des $H^p(X, \mathcal{F})$ une structure de A-*module*, et l'opérateur ∂ est A-linéaire. En outre, pour deux entiers positifs quelconques p, q, et deux $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, on a un homomorphisme de A-modules, dit *cup-produit*

(12.1.2.1)
$$H^p(X, \mathcal{F}) \otimes_A H^q(X, \mathcal{G}) \to H^{p+q}(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})$$

(G, II, 6.6). Ces homomorphismes font de la somme directe S des $H^p(X, \mathcal{O}_X)$ (pour $p \geqslant 0$) une A-*algèbre graduée anticommutative* et de la somme directe des $H^p(X, \mathcal{F})$ un S-*module gradué*.

Pour tout *recouvrement ouvert* $\mathfrak{U}$ de X, nous désignerons toujours par $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ (contrairement à (G, II, 5.1)) le complexe des cochaînes *alternées* du nerf de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans le système de coefficients $\Gamma(U_\sigma, \mathcal{F})$. Il est clair que $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ est un A-*module gradué*, donc les groupes de cohomologie $H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ de ce complexe sont munis d'une structure de A-*module*; en outre, les applications canoniques $H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F})$ (G, II, 5.4) sont A-*linéaires*.

(12.1.3) Soit $(X', \mathcal{O}_{X'})$ un second espace annelé, et soit $f = (\psi, \theta)$ un morphisme de X' dans X.

Posons $A' = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$; le ψ-morphisme θ définit canoniquement un homomorphisme d'anneaux $A \to A'$. Soient $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module, $\mathcal{F}'$ un $\mathcal{O}_{X'}$-Module; pour tout *f-morphisme* $u : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.4.1), nous allons voir qu'on peut définir pour tout $p \geqslant 0$, un *di-homomorphisme*

(12.1.3.1)
$$u_p : H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X', \mathcal{F}').$$

En effet, comme ψ^* est exact dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X, $\mathcal{F} \rightsquigarrow H^\bullet(X', \psi^*(\mathcal{F}))$ est un ∂-foncteur dans cette catégorie, et on sait qu'on a un homomorphisme canonique de ∂-foncteurs

(12.1.3.2)
$$H^\bullet(X, \mathcal{F}) \to H^\bullet(X', \psi^*(\mathcal{F}))$$

uniquement déterminé par la condition de se réduire à l'homomorphisme canonique $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X', \psi^*(\mathcal{F}))$ en degré 0 (T, 3.2.2). En outre, tout élément de A détermine un endomorphisme μ de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ et un endomorphisme μ' de $\Gamma(X', \psi^*(\mathcal{F}))$ tels que le diagramme

(12.1.3.3)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{F}) & \to & \Gamma(X', \psi^*(\mathcal{F})) \\ \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\mu'} \\ \Gamma(X, \mathcal{F}) & \to & \Gamma(X', \psi^*(\mathcal{F})) \end{array}$$

soit commutatif; par la propriété d'unicité de prolongement des morphismes pour les foncteurs cohomologiques universels (T, 2.2), on en déduit des prolongements uniques de μ et μ' à la cohomologie rendant commutatifs les diagrammes analogues à (12.1.3.3), ce qui signifie que (12.1.3.2) est un homomorphisme de A-*modules*. Notons maintenant que l'on a $f^*(\mathscr{F})=\psi^*(\mathscr{F})\otimes_{\psi^*(\mathcal{O}_X)}\mathcal{O}_{X'}$, et que l'on a donc un di-homomorphisme canonique $\psi^*(\mathscr{F})\rightarrow f^*(\mathscr{F})$ du $\psi^*(\mathcal{O}_X)$-Module $\psi^*(\mathscr{F})$ dans le $\mathcal{O}_{X'}$-Module $f^*(\mathscr{F})$. Par fonctorialité, on en déduit donc un di-homomorphisme fonctoriel

(12.1.3.4) $$H^p(X', \psi^*(\mathscr{F}))\rightarrow H^p(X', f^*(\mathscr{F}))$$

les anneaux correspondants étant A et A'; en composant ce di-homomorphisme avec (12.1.3.2), on obtient un di-homomorphisme canonique *fonctoriel* en $\mathscr{F}$

(12.1.3.5) $$\theta_p : H^p(X, \mathscr{F})\rightarrow H^p(X', f^*(\mathscr{F})).$$

Enfin, par fonctorialité, on déduit de l'homomorphisme $u^\# : f^*(\mathscr{F})\rightarrow\mathscr{F}'$ un homomorphisme de A'-modules $H^p(X', f^*(\mathscr{F}))\rightarrow H^p(X', \mathscr{F}')$, qui, composé avec (12.1.3.5), donne (12.1.3.1).

Soit $f'=(\psi', \theta') : X''\rightarrow X'$ un second morphisme d'espaces annelés, $f''=f\circ f'$ le morphisme composé. Compte tenu de la permutabilité du foncteur ψ'^* et du produit tensoriel ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.3.3), on vérifie aussitôt que le composé du di-homomorphisme $H^p(X', f^*(\mathscr{F}))\rightarrow H^p(X'', f'^*(f^*(\mathscr{F})))$ et de (12.1.3.5) est le di-homomorphisme correspondant $H^p(X, \mathscr{F})\rightarrow H^p(X'', f''^*(\mathscr{F}))$.

(12.1.4) Une définition directe de l'homomorphisme (12.1.3.2) peut s'obtenir de la façon suivante : on considère une résolution injective $\mathscr{L}^\bullet=(\mathscr{L}^i)$ de $\mathscr{F}$ formée de faisceaux de groupes abéliens sur X; comme le foncteur ψ^* est exact, $\psi^*(\mathscr{L}^\bullet)$ est une ***résolution*** de $\psi^*(\mathscr{F})$ formée de faisceaux sur X'. Si $\mathscr{L}'^\bullet=(\mathscr{L}'^i)$ est une résolution injective de $\psi^*(\mathscr{F})$ dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X', il y a donc un morphisme $\psi^*(\mathscr{L}^\bullet)\rightarrow\mathscr{L}'^\bullet$ de complexes de faisceaux de groupes abéliens, compatible avec les augmentations (M, V, 1.1.*a*)), bien déterminé à une homotopie près. On en déduit des homomorphismes

$$\Gamma(X, \mathscr{L}^\bullet)\rightarrow\Gamma(X', \psi^*(\mathscr{L}^\bullet))\rightarrow\Gamma(X', \mathscr{L}'^\bullet)$$

de complexes de groupes abéliens, dont le composé, par passage à la cohomologie donne un morphisme de ∂-foncteurs $H^\bullet(X, \mathscr{F})\rightarrow H^\bullet(X', \psi^*(\mathscr{F}))$; comme il coïncide avec (12.1.3.2) en degré 0, il lui est identique (T, 2.2).

Considérons maintenant un *recouvrement ouvert* $\mathfrak{U}=(U_\alpha)$ de X, et soit $\mathfrak{U}'=(f^{-1}(U_\alpha))$ le recouvrement ouvert de X', image réciproque de $\mathfrak{U}$. Les homomorphismes canoniques $\Gamma(V, \mathscr{F})\rightarrow\Gamma(f^{-1}(V), f^*(\mathscr{F}))$ pour tout ouvert V de X définissent aussitôt (cf. G, II, 5.1) un homomorphisme de complexes $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\rightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}', f^*(\mathscr{F}))$, d'où des homomorphismes canoniques

(12.1.4.1) $$\theta_p : H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\rightarrow H^p(\mathfrak{U}', f^*(\mathscr{F})).$$

En outre, on a des diagrammes commutatifs

$$(12.1.4.2)\qquad \begin{tikzcd} \mathrm{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, "\theta_p"] \arrow[d] & \mathrm{H}^p(\mathfrak{U}', f^*(\mathscr{F})) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \arrow[r, "\theta_p"'] & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', f^*(\mathscr{F})) \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les homomorphismes canoniques de (G, II, 5.2). Pour établir la commutativité de (12.1.4.2), considérons le complexe de faisceaux de cochaînes (alternées) de $\mathscr{F}$ relatives à $\mathfrak{U}$, $\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, tel que $\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}))=\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ (G, II, 5.2). Les homomorphismes canoniques $\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{F})\rightarrow\Gamma(f^{-1}(\mathrm{V}), \psi^*(\mathscr{F}))$ définissent alors un ψ-morphisme $\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\rightarrow\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}', \psi^*(\mathscr{F}))$, et on a, avec les notations ci-dessus, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(\mathrm{X}', \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}', \psi^*(\mathscr{F}))) \arrow[d] & \\ \Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{L}^\bullet) \arrow[r] & \Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{L}^\bullet)) \arrow[r] & \Gamma(\mathrm{X}', \mathscr{L}'^\bullet) \end{tikzcd}$$

qui, en passant à la cohomologie, donne des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^p(\mathfrak{U}', \psi^*(\mathscr{F})) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \arrow[r] & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{F})) \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les homomorphismes canoniques de (G, II, 5.2). Il suffit alors de combiner ces diagrammes avec les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^p(\mathfrak{U}', \psi^*(\mathscr{F})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^p(\mathfrak{U}', f^*(\mathscr{F})) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{F})) \arrow[r] & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', f^*(\mathscr{F})) \end{tikzcd}$$

qui proviennent de l'homomorphisme $\psi^*(\mathscr{F}) \to f^*(\mathscr{F})$ et du caractère fonctoriel des homomorphismes canoniques de (G, II, 5.2), pour obtenir la commutativité de (12.1.4.2).

On notera que si $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $A' = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$, l'homomorphisme (12.1.4.3) est un di-homomorphisme de modules correspondant aux anneaux A et A'. On a une propriété de *transitivité* de (12.1.4.1) pour le composé de deux morphismes, analogue à la transitivité de (12.1.3.5). Enfin, notons que dans les définitions précédentes, au lieu d'une résolution injective $\mathscr{L}^\bullet$ de $\mathscr{F}$, on aurait aussi bien pu partir d'une résolution telle que $H^p(X, \mathscr{L}^i) = 0$ pour tout i et tout $p > 0$ (G, II, 4.7.1).

(12.1.5) Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ trois $\mathcal{O}_X$-Modules, et considérons un $\mathcal{O}_X$-homomorphisme $u : \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G} \to \mathscr{H}$, qui donne pour la cohomologie des homomorphismes

(12.1.5.1)
$$H^p(X, \mathscr{F}) \otimes_A H^q(X, \mathscr{G}) \to H^{p+q}(X, \mathscr{H})$$

déduits du cup-produit (12.1.2.1). Montrons qu'avec les hypothèses et notations de (12.1.3), on a des diagrammes commutatifs

(12.1.5.2)
$$\begin{tikzcd} H^p(X, \mathscr{F}) \otimes_A H^q(X, \mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+q}(X, \mathscr{H}) \arrow[d] \\ H^p(X', f^*(\mathscr{F})) \otimes_{A'} H^q(X', f^*(\mathscr{G})) \arrow[r] & H^{p+q}(X', f^*(\mathscr{H})) \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales proviennent des homomorphismes canoniques (12.1.3.5). Pour cela, rappelons que (12.1.5.1) peut s'obtenir en partant des résolutions *canoniques* (G, II, 4.3) $\mathscr{L}^\bullet$, $\mathscr{M}^\bullet$, $\mathscr{N}^\bullet$ de $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ respectivement (qui sont formées de $\mathcal{O}_X$-Modules), de l'application linéaire $\mathscr{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{M}^\bullet \to \mathscr{N}^\bullet$ de complexes de $\mathcal{O}_X$-Modules correspondant à u, qui fournit un homomorphisme de complexes de A-modules $\Gamma(X, \mathscr{L}^\bullet) \otimes_A \Gamma(X, \mathscr{M}^\bullet) \to \Gamma(X, \mathscr{N}^\bullet)$, et en passant à la cohomologie des homomorphismes $H^p(\Gamma(X, \mathscr{L}^\bullet)) \otimes_A H^q(\Gamma(X, \mathscr{M}^\bullet)) \to H^{p+q}(\Gamma(X, \mathscr{N}^\bullet))$ (G, II, 6.6). Or, on a évidemment un diagramme commutatif

(12.1.5.3)
$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, \mathscr{L}^\bullet) \otimes_A \Gamma(X, \mathscr{M}^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathscr{N}^\bullet) \arrow[d] \\ \Gamma(X', \psi^*(\mathscr{L}^\bullet)) \otimes_{\Gamma(X', \psi^*(\mathcal{O}_X))} \Gamma(X', \psi^*(\mathscr{M}^\bullet)) \arrow[r] & \Gamma(X', \psi^*(\mathscr{N}^\bullet)) \end{tikzcd}$$

qui donne en passant à la cohomologie des diagrammes commutatifs

(12.1.5.4)
$$\begin{tikzcd}
H^p(X, \mathscr{F}) \otimes_A H^p(X, \mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+q}(X, \mathscr{H}) \arrow[d] \\
H^p(\Gamma(X', \psi^*(\mathscr{L}^\bullet))) \otimes_{\Gamma(X', \psi^*(\mathcal{O}_X))} H^q(\Gamma(X', \psi^*(\mathscr{M}^\bullet))) \arrow[r] & H^{p+q}(\Gamma(X', \psi^*(\mathscr{N}^\bullet))).
\end{tikzcd}$$

Mais comme $\psi^*(\mathscr{L}^\bullet)$, $\psi^*(\mathscr{M}^\bullet)$ et $\psi^*(\mathscr{N}^\bullet)$ sont des *résolutions* de $\psi^*(\mathscr{F})$, $\psi^*(\mathscr{G})$, $\psi^*(\mathscr{H})$ respectivement, on a un diagramme commutatif (G, II, 6.6.1)

(12.1.5.5)
$$\begin{tikzcd}
H^p(\Gamma(X', \psi^*(\mathscr{L}^\bullet))) \otimes_{\Gamma(X', \psi^*(\mathcal{O}_X))} H^q(\Gamma(X', \psi^*(\mathscr{M}^\bullet))) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+q}(\Gamma(X', \psi^*(\mathscr{N}^\bullet))) \arrow[d] \\
H^p(X', \psi^*(\mathscr{F})) \otimes_{\Gamma(X', \psi^*(\mathcal{O}_X))} H^q(X', \psi^*(\mathscr{G})) \arrow[r] & H^{p+q}(X', \psi^*(\mathscr{H}))
\end{tikzcd}$$

Enfin, par fonctorialité, on a un diagramme commutatif

(12.1.5.6)
$$\begin{tikzcd}
H^p(X', \psi^*(\mathscr{F})) \otimes_{\Gamma(X', \psi^*(\mathcal{O}_X))} H^q(X', \psi^*(\mathscr{G})) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+q}(X', \psi^*(\mathscr{H})). \arrow[d] \\
H^p(X', f^*(\mathscr{F})) \otimes_{A'} H^q(X', f^*(\mathscr{G})) \arrow[r] & H^{p+q}(X', f^*(\mathscr{H}))
\end{tikzcd}$$

et par combinaison des trois diagrammes (12.1.5.4), (12.1.5.5) et (12.1.5.6), on obtient le diagramme commutatif (12.1.5.2) cherché.

Remarque (**12.1.6**). — Avec les notations de (12.1.3), supposons que l'on ait un diagramme commutatif

(12.1.6.1)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{F} & \xrightarrow{r} & \mathscr{G} & \xrightarrow{s} & \mathscr{H} & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow & & \\ 0 & \to & \mathscr{F}' & \xrightarrow[r']{} & \mathscr{G}' & \xrightarrow[s']{} & \mathscr{H}' & \to & 0 \end{array}$$

où r, s sont des homomorphismes de $\mathscr{O}_X$-Modules, r', s' des homomorphismes de $\mathscr{O}_{X'}$-Modules, u, v, w des f-morphismes et les lignes sont *exactes*. On en déduit alors un diagramme commutatif

(12.1.6.2)
$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F}) & \to & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{G}) & \to & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{H}) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{H}^{p+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}) & \to \ldots \\ & {\scriptstyle u_p}\downarrow & & {\scriptstyle v_p}\downarrow & & {\scriptstyle w_p}\downarrow & & {\scriptstyle u_{p+1}}\downarrow & \\ \ldots \to & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{F}') & \to & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{G}') & \to & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{H}') & \xrightarrow[\partial]{} & \mathrm{H}^{p+1}(\mathrm{X}', \mathscr{F}') & \to \ldots \end{array}$$

En effet, (12.1.6.1) se factorise en

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{H} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \psi^*(\mathscr{F}) & \to & \psi^*(\mathscr{G}) & \to & \psi^*(\mathscr{H}) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathscr{F}' & \longrightarrow & \mathscr{G}' & \longrightarrow & \mathscr{H}' & \to & 0 \end{array}$$

où la ligne du milieu est *exacte* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.7.2) et il suffit d'utiliser le fait que (12.1.3.2) est un homomorphisme de ∂-foncteurs et que les $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{F}')$ forment un ∂-foncteur en $\mathscr{F}'$.

(**12.1.7**) Les hypothèses et notations étant celles de (12.1.3), considérons maintenant le cas où $\mathscr{F} = f_*(\mathscr{F}') = \psi_*(\mathscr{F}')$; nous allons voir que le di-homomorphisme défini dans (12.1.3)

(12.1.7.1)
$$\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, f_*(\mathscr{F}')) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{F}')$$

peut s'obtenir (à un automorphisme près de $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{F}')$) comme *edge-homomorphisme d'une suite spectrale* du foncteur composé $\mathscr{F}' \rightsquigarrow \Gamma(\mathrm{X}', \psi_*(\mathscr{F}'))$ (T, 2.4). La description de l'homomorphisme (12.1.7.1) donnée dans (12.1.4) montre ici qu'on peut obtenir cet homomorphisme de la façon suivante : on considère des résolutions injectives $\mathscr{L}^\bullet$ et $\mathscr{L}'^\bullet$ de $\psi_*(\mathscr{F}')$ et de $\mathscr{F}'$ respectivement, puis on prend un homomorphisme de complexes $v : \psi^*(\mathscr{L}^\bullet) \to \mathscr{L}'^\bullet$ « au-dessus » de l'homomorphisme canonique $\psi^*(\psi_*(\mathscr{F}')) \to \mathscr{F}'$;

on note ensuite que l'on a $\Gamma(X', \mathscr{L}'^{\bullet}) = \Gamma(X, \psi_*(\mathscr{L}'^{\bullet}))$ et que l'homomorphisme composé

$$\Gamma(X, \mathscr{L}^{\bullet}) \to \Gamma(X', \psi^*(\mathscr{L}^{\bullet})) \xrightarrow{\Gamma(v)} \Gamma(X', \mathscr{L}'^{\bullet})$$

n'est autre que

(12.1.7.2) $$\Gamma(v^\flat) : \Gamma(X, \mathscr{L}^{\bullet}) \to \Gamma(X, \psi_*(\mathscr{L}'^{\bullet}))$$

($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.7.1), et (12.1.7.1) s'obtient par passage à la cohomologie dans (12.1.7.2). D'autre part, les suites spectrales du foncteur composé $\mathscr{F}' \rightsquigarrow \Gamma(X, \psi_*(\mathscr{F}'))$ s'obtiennent en considérant une résolution injective de Cartan-Eilenberg $\mathscr{M}^{\bullet\bullet} = (\mathscr{M}^{ij})$ du complexe $\psi_*(\mathscr{L}'^{\bullet})$ dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X; les suites spectrales en question sont celles du bicomplexe $\Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet})$ (qui sont birégulières puisque $\mathscr{M}^{ij} = 0$ pour $i < 0$ ou $j < 0$). Or, la première suite spectrale de ce bicomplexe *dégénère*, car les faisceaux $\psi_*(\mathscr{L}'^{i})$ sont flasques (G, II, 3.1.1), donc $\mathrm{H}^q_{\mathrm{II}}(\Gamma(X, \mathscr{M}^{i,\bullet})) = \mathrm{H}^q(\psi_*(\mathscr{L}'^{i})) = 0$ pour $q > 0$ (G, II, 4.4.3); on a donc des edge-homomorphismes *bijectifs* (11.1.6)

(12.1.7.3) $${}'\mathrm{E}_2^{i0} = \mathrm{H}^i(\mathrm{H}^0_{\mathrm{II}}(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet}))) \to \mathrm{H}^i(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet}))$$

et on sait (11.3.4) que cet homomorphisme provient, par passage à la cohomologie, de l'augmentation

(12.1.7.4) $$\Gamma(X, \psi_*(\mathscr{L}'^{\bullet})) \to \Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet})$$

laquelle provient elle-même de l'augmentation $\eta : \psi_*(\mathscr{L}'^{\bullet}) \to \mathscr{M}^{\bullet\bullet}$. D'autre part, pour la seconde suite spectrale, on a des edge-homomorphismes

(12.1.7.5) $${}''\mathrm{E}_2^{i0} = \mathrm{H}^i(\mathrm{H}^0_{\mathrm{I}}(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet})) \to \mathrm{H}^i(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet}))$$

provenant (11.3.4) par passage à la cohomologie, de l'homomorphisme de complexes $\mathrm{Z}^0_{\mathrm{I}}(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet})) \to \Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet})$. Or, comme ψ_* est exact à gauche, la suite

$$0 \to \psi_*(\mathscr{F}') \to \psi_*(\mathscr{L}'^0) \to \psi_*(\mathscr{L}'^1)$$

est exacte; par définition d'une résolution de Cartan-Eilenberg (11.4.2), on peut donc prendre $\mathrm{B}^0_{\mathrm{I}}(\mathscr{M}^{\bullet\bullet}) = 0$, $\mathrm{Z}^0_{\mathrm{I}}(\mathscr{M}^{\bullet\bullet}) = \mathscr{L}^{\bullet}$; comme le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}^0 \arrow[r, "i^0"] & \mathscr{M}^{00} \\
\psi_*(\mathscr{F}') \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon'"'] \arrow[ur, "\varepsilon''"] & \psi_*(\mathscr{L}'^0) \arrow[u, "\eta^0"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif, l'injection de complexes $i : \mathscr{L}^{\bullet} \to \mathscr{M}^{\bullet\bullet}$ est compatible avec les augmentations ε et ε''. On a ainsi deux homomorphismes de complexes de $\mathscr{L}^{\bullet}$ dans $\mathscr{M}^{\bullet\bullet}$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}^{\bullet} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "v^\flat"'] & & \mathscr{M}^{\bullet\bullet} \\
& \psi_*(\mathscr{L}'^{\bullet}) \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

compatibles avec les augmentations ε et ε''; comme $\mathscr{L}^{\bullet}$ est une *résolution* injective et que $\mathscr{M}^{\bullet\bullet}$ est formée de faisceaux injectifs, il résulte de (M, V, 1.1 *a)*) que ces deux homomorphismes sont *homotopes*; il en est donc de même des deux homomorphismes correspondants $\Gamma(X, \mathscr{L}^{\bullet}) \to \Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet})$, et en passant à la cohomologie, on obtient donc le *même* homomorphisme; en d'autres termes, on a bien montré que le edge-homomorphisme (12.1.7.5), qui s'écrit $H^p(X, \psi_*(\mathscr{F}')) \to H^p(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet}))$ est composé de (12.1.7.1) et de (12.1.7.3), qui s'écrit $H^p(X', \mathscr{F}') \to H^p(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet}))$ et qu'on a vu être un *isomorphisme*; d'où notre assertion.

12.2. Images directes supérieures.

(12.2.1) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés, $f = (\psi, \theta)$ un morphisme de X dans Y, qui définit le foncteur *image directe* $f_* : \boldsymbol{C}(X) \to \boldsymbol{C}(Y)$, identique d'ailleurs à la restriction à $\boldsymbol{C}(X)$ du foncteur ψ_* défini dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X. Ce dernier foncteur est additif et exact à gauche, et comme tout faisceau de groupes abéliens sur X est isomorphe à un sous-faisceau d'un faisceau *injectif* de groupes abéliens, on définit les *foncteurs dérivés* droits $\mathscr{F} \rightsquigarrow R^p\psi_*(\mathscr{F})$ du foncteur ψ_*; les $R^p\psi_*(\mathscr{F})$ sont des faisceaux de groupes abéliens sur Y, et les $R^p\psi_*$ forment un *foncteur cohomologique universel* (T, 2.3).

En outre, le faisceau $R^p\psi_*(\mathscr{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau $V \rightsquigarrow H^p(f^{-1}(V), \mathscr{F})$ (T, 3.7.2). Si maintenant on suppose que $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-*Module*, $H^p(f^{-1}(V), \mathscr{F})$ est naturellement muni d'une structure de $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$-module, donc de $\Gamma(V, \psi_*(\mathcal{O}_X))$-module, et la donnée de l'homomorphisme $\theta : \mathcal{O}_Y \to \psi_*(\mathcal{O}_X)$ permet d'en déduire une structure de $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$-module. Pour les structures ainsi définies, il est clair que la restriction d'un ouvert V à un ouvert $V' \subset V$ définit un di-homomorphisme, et cela permet donc de définir sur chacun des $R^p\psi_*(\mathscr{F})$ une structure de $\mathcal{O}_Y$-*Module*; c'est ce $\mathcal{O}_Y$-Module que nous noterons $R^pf_*(\mathscr{F})$, R^pf_* étant ainsi défini comme un foncteur additif de $\boldsymbol{C}(X)$ dans $\boldsymbol{C}(Y)$. En outre, les R^pf_* forment un ∂-*foncteur*, car si $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-Modules, la description des $R^p\psi_*$ et de la structure de $\mathcal{O}_Y$-Module sur $R^p\psi_*(\mathscr{F})$ donnée ci-dessus montre aussitôt que l'homomorphisme $\partial : R^p\psi_*(\mathscr{F}'') \to R^{p+1}\psi_*(\mathscr{F}')$ est dans ce cas un homomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-*Modules*. Enfin, les R^pf_* s'identifient aux foncteurs *dérivés* droits de f_* : en effet, tout $\mathcal{O}_X$-Module admet une résolution *injective* formée de $\mathcal{O}_X$-Modules, et comme une telle résolution est formée de faisceaux *flasques* de groupes abéliens (G, II, 7.1), elle peut servir à calculer les $R^p\psi_*(\mathscr{F})$, puisque $R^n\psi_*(\mathscr{G}) = 0$ pour $n \geqslant 1$ et pour tout faisceau *flasque* $\mathscr{G}$ (T, 2.4.1, Remarque 3, et cor. de la prop. 3.3.2). On conclut donc que les R^pf_* forment un *foncteur cohomologique universel de* $\boldsymbol{C}(X)$ *dans* $\boldsymbol{C}(Y)$ (T, 2.3).

(12.2.2) Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux $\mathcal{O}_X$-Modules. Avec les notations de (12.2.1), pour tout ouvert V de Y, on a l'homomorphisme de cup-produit (12.1.2.1)

$$H^p(f^{-1}(V), \mathscr{F}) \otimes_{\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X)} H^q(f^{-1}(V), \mathscr{G}) \to H^{p+q}(f^{-1}(V), \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})$$

et il résulte aussitôt de la définition du cup-produit (G, II, 6.6) que ces homomorphismes commutent au passage de V à un sous-espace ouvert V′ de V. D'autre part, on a un homomorphisme d'anneaux

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(V, \psi_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$$

provenant de θ, d'où un homomorphisme canonique de produits tensoriels

$$H^p(f^{-1}(V), \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)} H^q(f^{-1}(V), \mathcal{G}) \to H^p(f^{-1}(V), \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X)} H^q(f^{-1}(V), \mathcal{G})$$

qui est lui aussi compatible avec la restriction de V′ à V. Par composition, on obtient donc un homomorphisme de $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$-modules, qui définit un homomorphisme canonique fonctoriel en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ pour les faisceaux associés aux préfaisceaux considérés :

(12.2.2.1) $$R^p f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} R^q f_*(\mathcal{G}) \to R^{p+q} f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}).$$

On notera que pour $p=q=0$, cet homomorphisme se réduit à ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.2.2.1).

Proposition **(12.2.3)**. — *Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{F}$ et tout $\mathcal{O}_Y$-Module localement libre de rang fini $\mathcal{L}$, on a des isomorphismes canoniques fonctoriels*

(12.2.3.1) $$R^p f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} R^p f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{L})).$$

L'homomorphisme (12.2.3.1) s'obtient en composant l'homomorphisme, cas particulier de (12.2.2.1) :

(12.2.3.2) $$R^p f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*(f^*(\mathcal{L})) \to R^p f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{L}))$$

avec l'homomorphisme du premier membre de (12.2.3.1) dans celui de (12.2.3.2), provenant de l'homomorphisme canonique ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.4.3.2). Pour vérifier que (12.2.3.1) est un isomorphisme lorsque $\mathcal{L}$ est localement libre, on peut aussitôt se ramener au cas $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y$, la question étant locale sur Y, et les foncteurs envisagés étant additifs en $\mathcal{L}$. Mais alors, la proposition se ramène, vu la définition de (12.2.2.1), à la vérification du fait que l'homomorphisme correspondant de préfaisceaux est bijectif, ce qui est immédiat en vertu de la relation $f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$.

(12.2.4) Soient $(Z, \mathcal{O}_Z)$ un troisième espace annelé, $g : Y \to Z$ un morphisme d'espaces annelés. On sait (G, II, 7.1 et 3.1.1) que pour tout $\mathcal{O}_X$-Module injectif $\mathcal{G}$, $f_*(\mathcal{G})$ est un faisceau flasque de groupes abéliens, et par suite (12.2.1) on a $R^p g_*(f_*(\mathcal{G})) = 0$ pour tout $p > 0$. Il s'ensuit (T, 2.4.1) que la *suite spectrale de Leray* des foncteurs composés est applicable au foncteur composé $g_* f_*$: il y a une suite spectrale *birégulière* dont l'aboutissement est le foncteur $R^{\bullet} h_*$, où $h = g \circ f$, et dont le terme E_2 est donné par

(12.2.4.1) $$E_2^{pq} = R^p g_*(R^q f_*(\mathcal{F})).$$

(12.2.5) Sous les conditions de (12.2.4), nous allons définir directement des homomorphismes canoniques de $\mathcal{O}_Z$-Modules

(12.2.5.1) $$R^n g_*(f_*(\mathcal{F})) \to R^n h_*(\mathcal{F})$$

(12.2.5.2) $$R^n h_*(\mathcal{F}) \to g_*(R^n f_*(\mathcal{F}))$$

qu'on pourrait identifier aux « edge-homomorphismes » de la suite spectrale de Leray (cf. (12.1.7)). Il suffit d'opérer sur les préfaisceaux auxquels sont associés les faisceaux images supérieures (12.2.1). Pour cela, considérons un ouvert quelconque W de Z et son image réciproque $g^{-1}(\mathrm{W})$ dans Y; on a un di-homomorphisme canonique

$$\text{(12.2.5.3)} \qquad \mathrm{H}^n(g^{-1}(\mathrm{W}), f_*(\mathscr{F})) \to \mathrm{H}^n(f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{W})), f^*(f_*(\mathscr{F})))$$

les anneaux correspondants étant $\Gamma(g^{-1}(\mathrm{W}), \mathcal{O}_\mathrm{Y})$ et $\Gamma(h^{-1}(\mathrm{W}), \mathcal{O}_\mathrm{X})$; d'autre part, l'homomorphisme canonique ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.4.3.3) fournit par fonctorialité des homomorphismes canoniques

$$\text{(12.2.5.4)} \qquad \mathrm{H}^n(h^{-1}(\mathrm{W}), f^*(f_*(\mathscr{F}))) \to \mathrm{H}^n(h^{-1}(\mathrm{W}), \mathscr{F})$$

qui sont des homomorphismes de $\Gamma(h^{-1}(\mathrm{W}), \mathcal{O}_\mathrm{X})$-modules. Compte tenu de l'homomorphisme d'anneaux $\Gamma(\mathrm{W}, \mathcal{O}_\mathrm{Z}) \to \Gamma(g^{-1}(\mathrm{W}), \mathcal{O}_\mathrm{Y})$, on voit qu'en composant (12.2.5.4) et (12.2.5.3), on obtient un homomorphisme de préfaisceaux, qui fournit l'homcmorphisme de faisceaux (12.2.5.1).

La définition de (12.2.5.2) est encore plus simple; par définition, $\mathrm{R}^n h_*(\mathscr{F})$ est associé au préfaisceau $\mathrm{W} \rightsquigarrow \mathrm{H}^n(f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{W})), \mathscr{F})$ et $\mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F})$ au préfaisceau $\mathrm{V} \rightsquigarrow \mathrm{H}^n(f^{-1}(\mathrm{V}), \mathscr{F})$; on a donc un homomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^n(f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{W})), \mathscr{F}) \to \Gamma(g^{-1}(\mathrm{W}), \mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F})),$$

et il est immédiat que ces homomorphismes définissent un homomorphisme de préfaisceaux, qui à son tour définit (12.2.5.2).

(12.2.6) Sous les hypothèses de (12.2.4), soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ trois $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Modules et $u : \mathscr{F} \otimes \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ un $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-homomorphisme. On a alors des diagrammes commutatifs

$$\text{(12.2.6.1)} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{R}^p g_*(f_*(\mathscr{F})) \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Z}} \mathrm{R}^q g_*(f_*(\mathscr{G})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}^{p+q} g_*(f_*(\mathscr{H})) \arrow[d] \\ \mathrm{R}^p h_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Z}} \mathrm{R}^q h_*(\mathscr{G}) \arrow[r] & \mathrm{R}^{p+q} h_*(\mathscr{H}) \end{tikzcd}$$

et

$$\text{(12.2.6.2)} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{R}^p h_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Z}} \mathrm{R}^q h_*(\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}^{p+q} h_*(\mathscr{H}) \arrow[d] \\ g_*(\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F})) \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Z}} g_*(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{G})) \arrow[r] & g_*(\mathrm{R}^{p+q} f_*(\mathscr{H})) \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales proviennent de (12.2.2.1) (la dernière combinée avec ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.2.2.1)) et les flèches verticales des homomorphismes (12.2.5.1) et (12.2.5.2) respectivement.

Il suffit en effet de le vérifier pour les homomorphismes correspondants de préfaisceaux; si on revient aux définitions données dans (12.2.2) et (12.2.5) pour ces homomorphismes, on est aussitôt ramené, pour (12.2.6.1), aux diagrammes commutatifs (12.1.5.2); la vérification est encore plus simple pour (12.2.6.2).

12.3. Compléments sur les foncteurs Ext de faisceaux.

(12.3.1) Considérons un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$; nous ne reviendrons pas sur la définition et les principales propriétés des bifoncteurs $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_X}(X; \mathcal{F}, \mathcal{G})$ de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules dans celle des $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-modules, et $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules dans elle-même, ni sur la suite spectrale birégulière $\mathrm{E}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ qui les relie (T, 4.2 et G, II, 7.3).

(12.3.2) On définit de la même manière que dans (M, XIV, 1) la notion d'*extension* d'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{F}$ par un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{G}$ et la loi de composition entre classes d'extensions équivalentes : les raisonnements faits pour les modules s'adaptent en effet de façon évidente à une catégorie abélienne quelconque. La seconde démonstration de (M, XIV, 1.1), qui n'utilise que l'existence de plongements dans les objets injectifs, est alors encore valable pour la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules, et montre donc que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(X; \mathcal{F}, \mathcal{G})$ s'identifie canoniquement au *groupe abélien des classes d'extensions de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$.*

Proposition **(12.3.3)**. — *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé tel que le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ soit cohérent. Alors, pour tout couple de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et tout $p \geqslant 0$, $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent.*

Notons que les $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ forment un foncteur cohomologique contravariant en $\mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F}$ est cohérent, il existe pour tout p et tout point $x \in X$ un voisinage ouvert U de X et une suite exacte de $(\mathcal{O}_X|U)$-Modules

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{L}_{p-1} \to \ldots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F}|U \to 0$$

où chacun des $\mathcal{L}_i$ $(0 \leqslant i \leqslant p-1)$ est isomorphe à un $\mathcal{O}_X^{n_i}|U$ et $\mathcal{R}$ est cohérent : cela résulte par récurrence sur p de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.2) et ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4), vu l'hypothèse que $\mathcal{O}_X$ est cohérent.

Notons maintenant que, pour $p \geqslant 1$, on a $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{L}|U, \mathcal{G}|U) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{L}|U$ soit isomorphe à un $\mathcal{O}_X^n|U$ (T, 4.2.3); le raisonnement de (M, V, 7.2) s'applique donc au foncteur cohomologique contravariant $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)$, et donne une suite exacte

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{L}_{p-1}, \mathcal{G}|U) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{R}, \mathcal{G}|U) \to \mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U) \to 0$$

et comme les deux premiers termes de cette suite sont des $(\mathcal{O}_X|U)$-Modules cohérents ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.5), il en est de même du troisième ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4).

Proposition **(12.3.4)**. — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme* plat *d'espaces annelés, et soient* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *deux* $\mathcal{O}_Y$*-Modules.*

(i) *Il existe un homomorphisme de bifoncteurs cohomologiques*

$$f^*(\mathscr{E}xt^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \rightrightarrows \mathscr{E}xt^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G})) \tag{12.3.4.1}$$

se réduisant en degré 0 *à l'homomorphisme canonique* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.4.6).

(ii) *Il existe un morphisme canonique de suites spectrales*

$$E(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to E(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G})) \tag{12.3.4.2}$$

qui, pour les termes E_2, *se réduit aux homomorphismes*

$$H^p(Y, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to H^p(X, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))) \tag{12.3.4.3}$$

déduits de (12.3.4.1) *et de* (12.1.3.1).

(i) Comme f^* est un foncteur exact dans la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-Modules ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.7.2), les foncteurs $\mathscr{G} \rightsquigarrow f^*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$ et $\mathscr{G} \rightsquigarrow \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))$ sont exacts à gauche; on déduit canoniquement de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.4.6) un homomorphisme de leurs foncteurs dérivés. Pour calculer ces derniers, on prend une résolution injective $\mathscr{L}^{\bullet} = (\mathscr{L}^i)$ de $\mathscr{G}$, et on a donc des morphismes $\mathscr{H}^p(f^*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\bullet}))) \to \mathscr{H}^p(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{L}^{\bullet})))$ de cohomologies de complexes de faisceaux. D'ailleurs, en vertu de l'exactitude de f^*, on a $\mathscr{H}^p(f^*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\bullet}))) = f^*(\mathscr{H}^p(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\bullet}))) = f^*(\mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$ par définition. D'autre part, l'exactitude de f^* entraîne que $f^*(\mathscr{L}^{\bullet})$ est une *résolution* de $f^*(\mathscr{G})$; si $\mathscr{L}'^{\bullet} = (\mathscr{L}'^i)$ est une résolution injective de $f^*(\mathscr{G})$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules, il y a donc un homomorphisme de complexes $f^*(\mathscr{L}^{\bullet}) \to \mathscr{L}'^{\bullet}$, déterminé à une homotopie près, et qui définit par suite un homomorphisme bien déterminé en cohomologie; composant cet homomorphisme avec l'homomorphisme défini plus haut, on obtient (12.3.4.1).

(ii) Avec les notations précédentes, on a un homomorphisme de complexes de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-Modules $f^*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\bullet})) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), \mathscr{L}'^{\bullet})$. Soit $\mathscr{M}^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg du complexe $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\bullet})$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-Modules; alors, en vertu de l'exactitude du foncteur f^*, $f^*(\mathscr{M}^{\bullet\bullet})$ est une résolution de Cartan-Eilenberg du complexe $f^*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\bullet}))$; si $\mathscr{M}'^{\bullet\bullet}$ est une résolution injective de Cartan-Eilenberg du complexe $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), \mathscr{L}'^{\bullet}))$, il y a donc (11.4.2), un homomorphisme (déterminé à homotopie près) $f^*(\mathscr{M}^{\bullet\bullet}) \to \mathscr{M}'^{\bullet\bullet}$ compatible avec l'homomorphisme considéré ci-dessus, autrement dit un f-morphisme $\mathscr{M}^{\bullet\bullet} \to \mathscr{M}'^{\bullet\bullet}$ de bicomplexes de faisceaux. On en déduit un di-homomorphisme $\Gamma(Y, \mathscr{M}^{\bullet\bullet}) \to \Gamma(X, \mathscr{M}'^{\bullet\bullet})$ de bicomplexes de modules, déterminé à homotopie près, et un morphisme bien déterminé de suites spectrales (11.3.2), qui n'est autre que le morphisme (12.3.4.2) cherché, la caractérisation de (12.3.4.3) se déduisant aussitôt des définitions.

Proposition **(12.3.5)**. — *Sous les hypothèses de* (12.3.4), *supposons en outre le faisceau d'anneaux* $\mathcal{O}_Y$ *cohérent; alors, pour tout* $\mathcal{O}_Y$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$, *les homomorphismes canoniques* (12.3.4.1) *sont bijectifs.*

La question étant locale sur Y, on peut supposer qu'il existe une suite exacte $0 \to \mathscr{R} \to \mathcal{O}_Y^n \to \mathscr{F} \to 0$, et $\mathscr{R}$ est alors aussi un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.3.4). Pour prouver que les homomorphismes

$$f^*(\mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))$$

sont bijectifs, raisonnons par récurrence sur p, la proposition résultant de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.7.6.1) lorsque $p=0$. Or, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
f^*(\mathscr{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^n, \mathscr{G})) \arrow[r] \arrow[d] & f^*(\mathscr{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{R}, \mathscr{G})) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & f^*(\mathscr{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \arrow[r] \arrow[d] & f^*(\mathscr{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^n, \mathscr{G})) \arrow[d] \\
\mathscr{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, f^*(\mathscr{G})) \arrow[r] & \mathscr{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{R}), f^*(\mathscr{G})) \arrow[r, "\partial"] & \mathscr{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G})) \arrow[r] & \mathscr{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, f^*(\mathscr{G}))
\end{tikzcd}$$

puisque $f^*(\mathcal{O}_Y)=\mathcal{O}_X$; comme f^* est exact, les deux lignes sont exactes. En outre, on a $\mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^n, \mathscr{G})=0$ pour tout $p>0$ et de même $\mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, f^*(\mathscr{G}))=0$ pour tout $p>0$ (T, 4.2.3). Vu l'hypothèse de récurrence, les deux premières flèches verticales du diagramme précédent sont des isomorphismes, et les termes de droite sont 0, donc $f^*(\mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))$ est un isomorphisme.

12.4. Hypercohomologie du foncteur image directe.

(12.4.1) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés, $f: X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés. On peut prendre l'*hypercohomologie* de f_* par rapport à un complexe *quelconque* de $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathscr{K}^\bullet = (\mathscr{K}^i)_{i \in \mathbf{Z}}$ (11.4.4), car dans la catégorie abélienne des $\mathcal{O}_Y$-Modules, les limites inductives filtrantes existent et sont exactes (T, 3.1.1). Les $\mathcal{O}_Y$-Modules d'hypercohomologie $\mathbf{R}^p f_*(\mathscr{K}^\bullet)$ se noteront aussi $\mathcal{H}^p(f, \mathscr{K}^\bullet)$ ou $\mathcal{H}^p_f(\mathscr{K}^\bullet)$. Rappelons que $\mathcal{H}^\bullet(f, \mathscr{K}^\bullet)$ est la cohomologie du bicomplexe de $\mathcal{O}_Y$-Modules $f_*(\mathscr{L}^{\bullet\bullet})$, où $\mathscr{L}^{\bullet\bullet}$ est une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\mathscr{K}^\bullet$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules; $\mathcal{H}^\bullet(f, \mathscr{K}^\bullet)$ est l'aboutissement de deux suites spectrales $'\mathscr{E}(f, \mathscr{K}^\bullet)$ et $''\mathscr{E}(f, \mathscr{K}^\bullet)$ dont les termes E_2 sont donnés par

(12.4.1.1) $$'\mathscr{E}_2^{pq} = \mathscr{H}^p(\mathscr{H}^q(f, \mathscr{K}^\bullet))$$

(12.4.1.2) $$''\mathscr{E}_2^{pq} = \mathscr{H}^p(f, \mathscr{H}^q(\mathscr{K}^\bullet)) \ (= \mathrm{R}^p f_*(\mathscr{H}^q(\mathscr{K}^\bullet)))$$

On a, dans ces formules, adopté la notation générale $\mathrm{T}(\mathrm{A}^\bullet)$ pour le transformé d'un complexe par un foncteur (11.2.1), et on écrit $\mathscr{H}^p(f, \mathscr{F})$ au lieu de $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F})$ pour un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F}$. Rappelons encore que la suite $'\mathscr{E}(f, \mathscr{K}^\bullet)$ est toujours *régulière*; les deux suites spectrales $'\mathscr{E}(f, \mathscr{K}^\bullet)$ et $''\mathscr{E}(f, \mathscr{K}^\bullet)$ sont *birégulières* lorsque $\mathscr{K}^\bullet$ est limité inférieurement, ou lorsqu'il existe un entier m tel que tout $\mathcal{O}_X$-Module admette une résolution flasque de longueur $\leqslant m$ (11.4.4).

(12.4.2) Nous désignerons de même par $\mathbf{H}^\bullet(X, \mathscr{K}^\bullet)$ l'hypercohomologie du foncteur Γ par rapport à un complexe $\mathscr{K}^\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-Modules; les $\mathbf{H}^p(X, \mathscr{K}^\bullet)$ sont donc des $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-modules. On peut d'ailleurs considérer $\mathbf{H}^\bullet(X, \mathscr{K}^\bullet)$ comme un cas particulier de $\mathcal{H}^\bullet(f, \mathscr{K}^\bullet)$, où f est un morphisme de $(X, \mathcal{O}_X)$ sur un espace annelé réduit à un point muni de l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Pour tout ouvert V de X, nous écrirons $\mathbf{H}^\bullet(V, \mathscr{K}^\bullet)$ au lieu de $\mathbf{H}^\bullet(V, \mathscr{K}^\bullet|V)$.

Proposition **(12.4.3)**. — *Pour tout entier $p \in \mathbf{Z}$, le $\mathcal{O}_Y$-Module $\mathcal{H}^p(f, \mathscr{K}^\bullet)$ est canoniquement isomorphe au faisceau associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow \mathbf{H}^p(f^{-1}(U), \mathscr{K}^\bullet)$ sur* Y.

En effet, avec les notations de (12.4.1), le faisceau de cohomologie $\mathscr{H}^p(f_*(\mathscr{L}^{\bullet\bullet}))$ est associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow H^p(\Gamma(U, f_*(\mathscr{L}^{\bullet\bullet}))) = H^p(\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{L}^{\bullet\bullet}))$. Mais il est clair que $\mathscr{L}^{\bullet\bullet}|f^{-1}(U)$ est une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\mathscr{K}^\bullet|f^{-1}(U)$ (T, 3.1.3), donc $H^p(\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{L}^{\bullet\bullet})) = \mathbf{H}^p(f^{-1}(U), \mathscr{K}^\bullet)$ par définition.

Proposition **(12.4.4)**. — *L'hypercohomologie $\mathcal{H}^\bullet(f, \mathscr{K}^\bullet)$ est un foncteur cohomologique en $\mathscr{K}^\bullet$ dans chacun des cas suivants :*

a) *$\mathscr{K}^\bullet$ varie dans la catégorie des complexes limités inférieurement.*

b) *Il existe un entier m tel que tout $\mathcal{O}_X$-Module admette une résolution flasque de longueur $\leqslant m$.*

c) X *est un espace noethérien.*

Les cas *a)* et *b)* sont des cas particuliers de (11.5.4). D'autre part, le cas *c)* se déduit de (11.5.2), car on sait que dans ce cas, le foncteur f_* permute aux limites inductives (G, II, 3.10.1).

(12.4.5) Considérons maintenant un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ de X, et pour tout complexe de *préfaisceaux* $\mathscr{K}^\bullet = (\mathscr{K}^j)$ sur X, le bicomplexe $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^\bullet)$, dont le composant d'indices (i, j) est $C^i(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^j)$, groupe des i-cochaînes alternées du nerf de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathscr{K}^j$ (G, II, 5.1). Nous dirons que la cohomologie de ce bicomplexe est l'*hypercohomologie* du recouvrement $\mathfrak{U}$ à coefficients dans $\mathscr{K}^\bullet$, et nous la noterons $\mathbf{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^\bullet) = H^\bullet(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^\bullet))$. La suite spectrale de Leray d'un recouvrement (T, 3.8.1 et G, II, 5.9.1) se généralise comme suit à l'hypercohomologie :

Proposition **(12.4.6)**. — *Soit $\mathscr{K}^\bullet = (\mathscr{K}^i)$ un complexe de $\mathcal{O}_X$-Modules. Il existe un foncteur spectral régulier en $\mathscr{K}^\bullet$ ayant pour aboutissement l'hypercohomologie $\mathbf{H}^\bullet(X, \mathscr{K}^\bullet)$, et dont le terme* E_2 *est donné par*

(12.4.6.1) $$E_2^{pq} = \mathbf{H}^p(\mathfrak{U}, h^q(\mathscr{K}^\bullet))$$

où $h^q(\mathscr{K}^\bullet)$ désigne le complexe de préfaisceaux $V \rightsquigarrow H^q(V, \mathscr{K}^\bullet)$ sur X. *La suite spectrale précédente est birégulière si $\mathscr{K}^\bullet$ est limité inférieurement.*

Considérons une résolution injective de Cartan-Eilenberg $\mathscr{L}^{\bullet\bullet}$ de $\mathscr{K}^\bullet$, et le tricomplexe $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{\bullet\bullet}) = (C^i(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{jk}))$; considérons d'abord ce tricomplexe comme un bicomplexe pour les degrés i et $j+k$. Comme i ne prend que des valeurs $\geqslant 0$, la seconde suite spectrale de ce bicomplexe est régulière (11.3.3) et dégénérée, car on a $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{jk}) = 0$ pour tout $q>0$, les $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathscr{L}^{jk}$ étant des faisceaux flasques (G, II, 5.2.3). On a par suite (11.1.6) un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^n(\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{\bullet\bullet})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{L}^{\bullet\bullet}))$ (en vertu de (G, II, 5.2.2)), donc par définition (12.4.2) un isomorphisme $\mathrm{H}^n(\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{\bullet\bullet})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{K}^\bullet)$. Considérons d'autre part le tricomplexe $\mathrm{C}^\bullet(\mathrm{U}, \mathrm{L}^{\bullet\bullet})$ comme un bicomplexe pour les degrés $i+j$ et k. Comme k ne prend que des valeurs $\geqslant 0$, la première suite spectrale de ce bicomplexe est toujours régulière; elle est birégulière si $\mathscr{L}^{jk}=0$ pour $j<j_0$, c'est-à-dire lorsque $\mathscr{K}^\bullet$ est limité inférieurement (11.3.3). Cette suite spectrale est la suite cherchée; en effet, pour tout j, $\mathscr{L}^{j,\bullet}$ est une résolution injective de $\mathscr{K}^j$; par suite, $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{j,\bullet}))$ n'est autre que le complexe de cochaînes $\mathrm{C}^i(\mathfrak{U}, h^q(\mathscr{K}^j))$, ce qui termine la démonstration.

Corollaire **(12.4.7).** — *Si, pour tout simplexe σ du nerf de $\mathfrak{U}$, et pour tout entier i, on a $\mathrm{H}^q(\mathrm{U}_\sigma, \mathscr{K}^i)=0$ pour $q>0$, alors on a un isomorphisme canonique*

(12.4.7.1) $$\mathbf{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^\bullet(\mathrm{X}, \mathscr{K}^\bullet).$$

En effet, l'hypothèse entraîne que $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, h^q(\mathscr{K}^j))=0$ pour $q>0$, donc $\mathrm{E}_2^{pq}=0$ pour $q>0$; la suite (12.4.6.1) étant dégénérée et régulière, la conclusion résulte de la définition (12.4.5) de $\mathbf{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^\bullet)$ et de (11.1.6).

(12.4.8) Soit $(\mathrm{X}', \mathcal{O}_{\mathrm{X}'})$ un second espace annelé, et soit $f=(\psi, \theta)$ un morphisme de X' dans X. Par la même méthode que dans (12.1.3) et (12.1.4), on définit un di-homomorphisme pour l'hypercohomologie d'un complexe $\mathscr{K}^\bullet$ de $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Modules

(12.4.8.1) $$\mathbf{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{K}^\bullet) \to \mathbf{H}^p(\mathrm{X}', f^*(\mathscr{K}^\bullet)).$$

On part d'une résolution injective de Cartan-Eilenberg $\mathscr{L}^{\bullet\bullet}$ de $\mathscr{K}^\bullet$, et comme ψ^* est exact, $\psi^*(\mathscr{L}^{\bullet\bullet})$ est une résolution de Cartan-Eilenberg de $\psi^*(\mathscr{K}^\bullet)$ dans la catégorie des $\psi^*(\mathcal{O}_\mathrm{X})$-Modules; il y a alors un morphisme $\psi^*(\mathscr{L}^{\bullet\bullet}) \to \mathscr{L}'^{\bullet\bullet}$, où $\mathscr{L}'^{\bullet\bullet}$ est une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\psi^*(\mathscr{K}^\bullet)$, et on en déduit un morphisme pour la cohomologie : $\mathbf{H}^\bullet(\mathrm{X}, \mathscr{K}^\bullet) \to \mathbf{H}^\bullet(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{K}^\bullet))$; par composition avec le morphisme déduit par fonctorialité de $\psi^*(\mathscr{K}^\bullet) \to f^*(\mathscr{K}^\bullet)$, on obtient le morphisme (12.4.8.1) cherché.

Partant de (12.4.8.1) et de (12.4.3), on peut alors, en raisonnant comme dans (12.2.5), définir, pour deux morphismes $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ d'espaces annelés, des homomorphismes pour l'hypercohomologie d'un complexe $\mathscr{K}^\bullet$ de $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Modules

(12.4.8.2) $$\mathcal{H}^n(g, f_*(\mathscr{K}^\bullet)) \to \mathcal{H}^n(h, \mathscr{K}^\bullet)$$

(12.4.8.3) $$\mathcal{H}^n(h, \mathscr{K}^\bullet) \to g_*(\mathcal{H}^n(f, \mathscr{K}^\bullet)).$$

Nous laissons au lecteur le détail des définitions.

§ 13. LIMITES PROJECTIVES EN ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

13.1. La condition de Mittag-Leffler.

(13.1.1) Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie abélienne dans laquelle les produits infinis existent (axiome AB 3*) de T, 1.5)); alors la borne inférieure d'une famille de sous-objets d'un objet de $\boldsymbol{C}$ existe, et tout système projectif d'objets de $\boldsymbol{C}$ admet une limite projective, qui est un foncteur exact à gauche du système projectif considéré (T, 1.8). Soit $(\mathrm{A}_\alpha, f_{\alpha\beta})$

un système projectif d'objets de $\mathbf{C}$ dont l'ensemble d'indices I est *filtrant* à droite; soient $A = \varprojlim A_\alpha$ et pour tout $\alpha \in I$, soit $f_\alpha : A \to A_\alpha$ le morphisme canonique. Pour tout $\alpha \in I$, les $f_{\alpha\beta}(A_\beta)$ pour $\alpha \leqslant \beta$ forment une famille filtrante décroissante de sous-objets de A_α; le sous-objet $A'_\alpha = \inf_{\beta \geqslant \alpha} f_{\alpha\beta}(A_\beta)$ est dit sous-objet des « images universelles » dans A_α; il est clair que $f_\alpha(A) \subset A'_\alpha$ et $f_{\alpha\beta}(A'_\beta) \subset A'_\alpha$ pour $\alpha \leqslant \beta$; donc $(A'_\alpha, f_{\alpha\beta}|A'_\beta)$ est un système projectif et $A = \varprojlim A'_\alpha$.

(13.1.2) Étant donné un système projectif $(A_\alpha, f_{\alpha\beta})$ dans $\mathbf{C}$, on appelle *condition de Mittag-Leffler* la condition suivante :

(ML) *Pour tout indice* α, *il existe* $\beta \geqslant \alpha$ *tel que, pour tout* $\gamma \geqslant \beta$, *on ait* $f_{\alpha\gamma}(A_\gamma) = f_{\alpha\beta}(A_\beta)$.

Il est clair que si les $f_{\alpha\beta}$ sont des *épimorphismes*, la condition (ML) est vérifiée. Inversement, si (ML) est vérifiée, et si pour tout $\alpha \in I$, A'_α est le sous-objet des « images universelles » dans A_α, la restriction de $f_{\alpha\beta}$ à A'_β est un *épimorphisme* $A'_\beta \to A'_\alpha$ pour $\alpha \leqslant \beta$: en effet, si $\gamma \geqslant \beta$ est tel que $f_{\beta\delta}(A_\delta) = f_{\beta\gamma}(A_\gamma)$ pour $\delta \geqslant \gamma$, on a $A'_\beta = f_{\beta\gamma}(A_\gamma)$ et cela entraîne d'autre part $f_{\alpha\delta}(A_\delta) = f_{\alpha\gamma}(A_\gamma)$ pour $\delta \geqslant \gamma$, donc $A'_\alpha = f_{\alpha\gamma}(A_\gamma) = f_{\alpha\beta}(A'_\beta)$.

Notons aussi que la condition (ML) est vérifiée lorsque les objets A_α sont *artiniens* dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire que toute famille de sous-objets de A_α admet un élément minimal : un élément minimal de la famille filtrante décroissante $(f_{\alpha\beta}(A_\beta))$ de sous-objets de A_α est en effet alors nécessairement le plus petit de ces sous-objets.

Remarque **(13.1.3)**. — La condition (ML) peut se formuler également lorsque $\mathbf{C}$ est par exemple la catégorie des ensembles; on peut alors encore définir le sous-ensemble des « images universelles » de A_α et les remarques faites à ce sujet dans (13.1.1) et (13.1.2) restent valables.

13.2. La condition de Mittag-Leffler pour les groupes abéliens.

Proposition **(13.2.1)**. — *Soit*

$$0 \to A_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} C_\alpha \to 0$$

une suite exacte de systèmes projectifs de groupes abéliens (relatifs à un même ensemble filtrant d'indices I*).*

(i) *Si* (B_α) *vérifie* (ML), *il en est de même de* (C_α).

(ii) *Si* (A_α) *et* (C_α) *vérifient* (ML), *il en est de même de* (B_α).

Soient $(f_{\alpha\beta})$, $(g_{\alpha\beta})$, $(h_{\alpha\beta})$ les systèmes d'homomorphismes définissant les systèmes projectifs (A_α), (B_α), (C_α) respectivement.

(i) Supposons que $g_{\alpha\beta}(B_\beta) = g_{\alpha\lambda}(B_\lambda)$ pour $\lambda \geqslant \beta$; comme v_β et v_λ sont surjectives, on a $h_{\alpha\beta}(C_\beta) = v_\alpha(g_{\alpha\beta}(B_\beta)) = v_\alpha(g_{\alpha\lambda}(B_\lambda)) = h_{\alpha\lambda}(C_\lambda)$ pour $\lambda \geqslant \beta$.

(ii) Soit $\alpha \in I$, et soit $\beta \geqslant \alpha$ un indice tel que pour $\lambda \geqslant \beta$, on ait $f_{\alpha\beta}(A_\beta) = f_{\alpha\lambda}(A_\lambda)$; soit d'autre part $\gamma \geqslant \beta$ un indice tel que, pour $\lambda \geqslant \gamma$, on ait $h_{\beta\gamma}(C_\gamma) = h_{\beta\lambda}(C_\lambda)$. Soit alors y_α un élément de $g_{\alpha\gamma}(B_\gamma)$; on a donc $y_\alpha = g_{\alpha\gamma}(y_\gamma)$ avec $y_\gamma \in B_\gamma$; posons $y_\beta = g_{\beta\gamma}(y_\gamma)$, de sorte que $v_\beta(y_\beta) = h_{\beta\gamma}(v_\gamma(y_\gamma))$. Pour tout $\lambda \geqslant \gamma$, il existe par hypothèse $y_\lambda \in B_\lambda$ tel que $h_{\beta\gamma}(v_\gamma(y_\gamma)) = h_{\beta\lambda}(v_\lambda(y_\lambda)) = v_\beta(g_{\beta\lambda}(y_\lambda))$, d'où $v_\beta(y_\beta - g_{\beta\lambda}(y_\lambda)) = 0$, et par suite il existe $x_\beta \in A_\beta$

tel que $y_\beta = g_{\beta\lambda}(y_\lambda) + u_\beta(x_\beta)$. On en déduit $y_\alpha = g_{\alpha\lambda}(y_\lambda) + u_\alpha(f_{\alpha\beta}(x_\beta))$; mais comme $\lambda \geqslant \beta$, il existe $x_\lambda \in A_\lambda$ tel que $f_{\alpha\beta}(x_\beta) = f_{\alpha\lambda}(x_\lambda)$, et finalement $y_\alpha = g_{\alpha\lambda}(y_\lambda + u_\lambda(x_\lambda)) \in g_{\alpha\lambda}(B_\lambda)$, ce qui achève la démonstration.

Proposition **(13.2.2)**. — *Soit* I *un ensemble ordonné filtrant ayant une partie cofinale* dénombrable. *Soit*

$$0 \to A_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} C_\alpha \to 0$$

une suite exacte de systèmes projectifs de groupes abéliens ayant I *pour ensemble d'indices. Si* (A_α) *satisfait à la condition* (ML), *la suite*

$$0 \to \varprojlim A_\alpha \to \varprojlim B_\alpha \to \varprojlim C_\alpha \to 0$$

est exacte.

Tout revient à prouver que l'homomorphisme $v = \varprojlim v_\alpha : \varprojlim B_\alpha \to \varprojlim C_\alpha$ est surjectif. Soit $z = (z_\alpha)$ un élément de $\varprojlim C_\alpha$, et posons $E_\alpha = v_\alpha^{-1}(z_\alpha)$; il est clair que les E_α forment un système projectif d'ensembles non vides pour les restrictions des homomorphismes $g_{\alpha\beta} : B_\beta \to B_\alpha$. Montrons que ce système projectif vérifie la condition (ML); identifiant A_α à une partie de B_α par u_α, pour tout $\alpha \in I$, il existe $\beta \geqslant \alpha$ tel que $g_{\alpha\beta}(A_\beta) = g_{\alpha\lambda}(A_\lambda)$ pour $\lambda \geqslant \beta$; montrons que l'on a aussi $g_{\alpha\beta}(E_\beta) = g_{\alpha\lambda}(E_\lambda)$ pour $\lambda \geqslant \beta$. En effet, prenons un $y_\lambda \in E_\lambda$ et posons $y_\beta = g_{\beta\lambda}(y_\lambda), y_\alpha = g_{\alpha\lambda}(y_\lambda)$; soit $y'_\alpha \in g_{\alpha\beta}(E_\beta)$, de sorte que $y'_\alpha = g_{\alpha\beta}(y'_\beta)$ pour un $y'_\beta \in E_\beta$; on a $y'_\beta - y_\beta = x_\beta \in A_\beta$, et par hypothèse il existe $x_\lambda \in A_\lambda$ tel que $g_{\alpha\beta}(x_\beta) = g_{\alpha\lambda}(x_\lambda)$; donc

$$y'_\alpha = g_{\alpha\beta}(y_\beta) + g_{\alpha\beta}(x_\beta) = g_{\alpha\lambda}(y_\lambda) + g_{\alpha\lambda}(x_\lambda) = g_{\alpha\lambda}(y_\lambda + x_\lambda) \in g_{\alpha\lambda}(E_\lambda),$$

ce qui démontre notre assertion. Cela étant, on sait (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. II, 3^e^ éd., § 3, th. 1) que sous les hypothèses faites sur I, un système projectif d'ensembles non vides vérifiant (ML) a une limite projective non vide; par suite, il existe un point $y = (y_\alpha) \in \varprojlim E_\alpha$, et comme $v_\alpha(y_\alpha) = z_\alpha$ par définition pour tout α, on a $z = v(y)$, C.Q.F.D.

Proposition **(13.2.3)**. — *Les hypothèses sur* I *étant celles de* (13.2.2), *soit* $(K^\bullet_\alpha)_{\alpha \in I}$ *un système projectif de complexes de groupes abéliens* $K^\bullet_\alpha = (K^n_\alpha)_{n \in \mathbf{Z}}$ *dont l'opérateur de dérivation est de degré* $+1$. *Pour chaque* n, *il existe un homomorphisme canonique fonctoriel*

(13.2.3.1) $$h_n : H^n(\varprojlim K^\bullet_\alpha) \to \varprojlim H^n(K^\bullet_\alpha).$$

Si, pour tout degré n, *le système projectif de groupes abéliens* $(K^n_\alpha)_{\alpha \in I}$ *vérifie* (ML), *alors tous les homomorphismes* h_n *sont surjectifs. Si en outre, pour un degré* n, *le système projectif* $(H^{n-1}(K^\bullet_\alpha))_{\alpha \in I}$ *vérifie* (ML), *l'homomorphisme* h_n *est bijectif.*

Posons, pour tout n, $K^n = \varprojlim K^n_\alpha$; la définition des homomorphismes h_n provient de la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \to & K^{n-1} & \to & K^n & \longrightarrow & K^{n+1} & \to & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \to & K^{n-1}_\alpha & \to & K^n_\alpha & \longrightarrow & K^{n+1}_\alpha & \to & \dots
\end{array}$$

les opérateurs de dérivation dans $K^{\bullet}$ étant limites projectives des opérateurs correspondants dans les $K^{\bullet}_{\alpha}$.

Considérons les suites exactes

$$(*_n) \qquad 0 \to B^n(K^{\bullet}_{\alpha}) \to Z^n(K^{\bullet}_{\alpha}) \to H^n(K^{\bullet}_{\alpha}) \to 0$$

$$(**_n) \qquad 0 \to Z^{n-1}(K^{\bullet}_{\alpha}) \to K^{n-1}_{\alpha} \to B^n(K^{\bullet}_{\alpha}) \to 0$$

L'hypothèse et la prop. (13.2.1, (i)) montrent que le système projectif $(B^n(K^{\bullet}_{\alpha}))_{\alpha\in I}$ vérifie (ML) pour tout n; il résulte donc de (13.2.2) que la suite

$$(***_n) \qquad 0 \to \varprojlim_{\alpha} B^n(K^{\bullet}_{\alpha}) \to \varprojlim_{\alpha} Z^n(K^{\bullet}_{\alpha}) \to \varprojlim_{\alpha} H^n(K^{\bullet}_{\alpha}) \to 0$$

est exacte. Or il est clair que $\varprojlim B^n(K^{\bullet}_{\alpha})$ s'identifie à un sous-groupe de K^{n+1} contenant $B^n(K^{\bullet})$ et que $\varprojlim Z^n(K^{\bullet}_{\alpha})$ s'identifie à un sous-groupe de $Z^n(K^{\bullet})$; par suite, h_n est surjective. Si maintenant, on suppose en outre que le système projectif $(H^{n-1}(K^{\bullet}_{\alpha}))_{\alpha\in I}$ vérifie (ML), les suites exactes $(*_{n-1})$ et la prop. (13.2.1, (ii)) montrent que le système projectif $(Z^{n-1}(K^{\bullet}_{\alpha}))_{\alpha\in I}$ vérifie (ML); mais alors, (13.2.2) appliquée aux suites exactes $(**_n)$ montre que la suite

$$0 \to \varprojlim_{\alpha} Z^{n-1}(K^{\bullet}_{\alpha}) \to K^{n-1} \xrightarrow{u} \varprojlim_{\alpha} B^n(K^{\bullet}_{\alpha}) \to 0$$

est exacte; comme $\varprojlim B^n(K^{\bullet}_{\alpha}) \supset B^n(K^{\bullet})$, et que la composée de l'injection $\varprojlim B^n(K^{\bullet}_{\alpha}) \to K^n$ et de u est l'opérateur de dérivation $K^{n-1} \to K^n$, le fait que u soit surjectif entraîne $\varprojlim B^n(K^{\bullet}_{\alpha}) = B^n(K^{\bullet})$, donc h_n est injective. C.Q.F.D.

Remarques **(13.2.4)**. — (i) Le raisonnement de (13.2.2) (cf. Bourbaki, *loc. cit.*) montre que la conclusion de cette proposition reste valable lorsqu'on suppose seulement que les A_{α} peuvent être munis de structures d'espaces *métrisables complets*, dans lesquels les translations sont des homéomorphismes, que les applications $f_{\alpha\beta} : A_{\beta} \to A_{\alpha}$ définissant le système projectif (A_{α}) sont *uniformément continues* pour les distances considérées, et enfin que le système (A_{α}) vérifie la condition

(ML') *Pour tout indice* α, *il existe* $\beta \geqslant \alpha$ *tel que pour tout* $\gamma \geqslant \beta$, $f_{\alpha\gamma}(A_{\gamma})$ *est dense dans* $f_{\alpha\beta}(A_{\beta})$.

Cela permet d'apporter un complément analogue à (13.2.3) : supposons que $K^n_{\alpha} = 0$ pour $n < 0$ et pour tout α; supposons de plus que $(K^n_{\alpha})_{\alpha\in I}$ vérifie (ML) pour $n \geqslant 0$ et que les $A_{\alpha} = H^0(K^{\bullet}_{\alpha})$ puissent être munis de structures d'espaces métriques vérifiant les propriétés ci-dessus. Alors les conclusions de (13.2.3) sont inchangées pour $n \geqslant 2$, et en outre h_1 est *bijectif*, car le raisonnement de (13.2.2) montre encore que $(B^1(K^{\bullet}_{\alpha}))_{\alpha\in I}$ vérifie (ML), que la suite $(***_1)$ est exacte, et enfin, en vertu de ce qui précède, que $\varprojlim B^1(K^{\bullet}_{\alpha}) = B^1(K^{\bullet})$. On a ainsi établi entre autres les assertions de (T, 3.10.2).

(ii) Il est possible d'introduire les foncteurs dérivés à droite $\varinjlim^{(n)}$ du foncteur $\varinjlim$, et d'obtenir des énoncés plus complets que les précédents [28].

13.3. Application : cohomologie d'une limite projective de faisceaux.

Proposition (**13.3.1**). — *Soient* X *un espace topologique,* $(\mathscr{F}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *un système projectif de faisceaux de groupes abéliens sur* X, *et soit* $\mathscr{F}=\varprojlim \mathscr{F}_k$. *On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

(i) *Il existe une base* $\mathfrak{B}$ *de la topologie de* X *telle que, pour tout* $U\in\mathfrak{B}$ *et tout* $i\geqslant 0$, *le système projectif* $(H^i(U, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{N}}$ *vérifie* (ML).

(ii) *Pour tout* $x\in X$ *et tout* $i>0$, *on a* $\varinjlim_U (\varprojlim_k H^i(U, \mathscr{F}_k))=0$ *lorsque* U *parcourt l'ensemble des voisinages de* x *appartenant à* $\mathfrak{B}$.

(iii) *Les homomorphismes* $u_{hk}: \mathscr{F}_k\rightarrow\mathscr{F}_h$ $(h\leqslant k)$ *définissant le système projectif* $(\mathscr{F}_k)$ *sont surjectifs.*

Dans ces conditions, pour tout $i>0$, *l'homomorphisme canonique*

$$h_i : H^i(X, \mathscr{F}) \rightarrow \varprojlim_k H^i(X, \mathscr{F}_k)$$

est surjectif; si en outre, pour une valeur de i, *le système projectif* $(H^{i-1}(X, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{N}}$ *vérifie* (ML), h_i *est bijectif.*

a) Nous allons d'abord supposer que les $\mathscr{F}_k$ sont *flasques* ainsi que les *noyaux* $\mathscr{N}_{hk}$ des u_{hk}; nous allons montrer alors que la condition (iii) de l'énoncé entraîne que $H^i(X, \mathscr{F})=0$ pour $i>0$. Il suffira de prouver que pour *tout* ouvert U de X et tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de U par des ouverts de U, on a $H^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F})=0$ pour $i>0$. Il en résultera en effet tout d'abord que pour la cohomologie de Čech, on a $\check{H}^i(U, \mathscr{F})=0$ pour tout $i>0$, puis (en vertu de (G, II, 5.9.2) appliqué à l'ensemble de tous les ouverts de X) que $H^i(X, \mathscr{F})=0$ pour tout $i>0$. Comme les $\mathscr{F}_k$ sont flasques, on a $H^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k)=0$ pour $i>0$ (G, II, 5.2.3); considérons pour chaque k le complexe $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k)$ des cochaînes alternées du nerf du recouvrement $\mathfrak{U}$ (G, II, 5.1), qui forment évidemment un système projectif de complexes de groupes abéliens. Montrons que toutes les applications $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k)\rightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_h)$ $(h\leqslant k)$ sont *surjectives*. Il suffit évidemment, par définition, de montrer que pour tout ouvert V de X, l'application $\Gamma(V, \mathscr{F}_k)\rightarrow\Gamma(V, \mathscr{F}_h)$ est surjective; mais la suite $0\rightarrow\mathscr{N}_{hk}\rightarrow\mathscr{F}_k\rightarrow\mathscr{F}_h\rightarrow 0$ étant exacte par hypothèse, donne la suite exacte de cohomologie

$$\Gamma(V, \mathscr{F}_k)\rightarrow\Gamma(V, \mathscr{F}_h)\rightarrow H^1(V, \mathscr{N}_{hk})=0$$

puisque $\mathscr{N}_{hk}$ est flasque. Le système projectif $(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{N}}$ vérifie donc (ML); il en est de même de $(H^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{N}}$ pour tout $i\geqslant 0$, car cela est trivial pour $i>0$, et comme $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k)=\Gamma(U, \mathscr{F}_k)$ (G, II, 5.2.2), la condition (ML) est aussi remplie pour $i=0$ d'après ce qui précède. On peut donc appliquer (13.2.3), qui montre que $H^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F})=\varprojlim_k H^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k)=0$ pour tout $i>0$.

b) Passons au cas général, et considérons pour chaque $k\in\mathbf{N}$, la *résolution canonique* $\mathscr{C}^\bullet(X, \mathscr{F}_k)=(\mathscr{C}^i(X, \mathscr{F}_k))_{i\geqslant 0}$ de $\mathscr{F}_k$ par des faisceaux flasques (G, II, 4.3). Pour chaque $i\geqslant 0$, il est clair que $(\mathscr{C}^i(X, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{N}}$ est un système projectif de faisceaux flasques; montrons qu'il satisfait aux conditions de *a)*. En effet, si $\mathcal{N}_{hk}$ est le noyau de u_{hk} pour $h \leqslant k$, la suite $0 \to \mathcal{N}_{hk} \to \mathcal{F}_k \to \mathcal{F}_h \to 0$ est exacte d'après (iii), et notre assertion résulte de ce que le foncteur $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{C}^i(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ est exact (G, II, 4.3). Soit $\mathcal{G}^i = \varprojlim_k \mathcal{C}^i(\mathrm{X}, \mathcal{F}_k)$; on a donc $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathcal{G}^i) = 0$ pour $j > 0$ et $i \geqslant 0$ en vertu de *a)*. Nous allons montrer que $\mathcal{G}^\bullet = (\mathcal{G}^i)_{i \geqslant 0}$ est une *résolution* du faisceau $\mathcal{F}$; comme $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathcal{G}^\bullet) = 0$ pour $j > 0$, la cohomologie $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ sera égale à $\mathrm{H}^\bullet(\Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{G}^\bullet))$ (G, II, 4.7.1).

Il est clair que, par passage à la limite projective, on déduit des suites exactes

$$0 \to \mathcal{F}_k \to \mathcal{C}^0(\mathrm{X}, \mathcal{F}_k) \to \mathcal{C}^1(\mathrm{X}, \mathcal{F}_k) \to \dots$$

un complexe de faisceaux de groupes abéliens

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}^0 \to \mathcal{G}^1 \to \dots$$

Pour prouver notre assertion, il faut établir que $\mathcal{H}^i(\mathcal{G}^\bullet) = 0$ pour $i > 0$. Ce faisceau est engendré par le préfaisceau $\mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{G}^\bullet))$ (G, II, 4.1); or, le complexe $\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{G}^\bullet)$ est la limite projective du système projectif de complexes de groupes abéliens $(\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{C}^\bullet(\mathrm{X}, \mathcal{F}_k)))_{k \in \mathbf{N}}$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 3.2.6). On a vu dans *a)* que pour chaque $i \geqslant 0$, les applications $\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{C}^i(\mathrm{X}, \mathcal{F}_k)) \to \Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{C}^i(\mathrm{X}, \mathcal{F}_h))$ $(h \leqslant k)$ sont *surjectives*; d'autre part, on a $\mathrm{H}^i(\mathrm{U}, \mathcal{F}_k) = \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{C}^\bullet(\mathrm{X}, \mathcal{F}_k)))$, la résolution canonique $\mathcal{C}^\bullet(\mathrm{U}, \mathcal{F}_k|\mathrm{U})$ étant induite sur U par $\mathcal{C}^\bullet(\mathrm{X}, \mathcal{F}_k)$; en vertu de l'hypothèse (i), pour tout $\mathrm{U} \in \mathfrak{B}$, on peut appliquer (13.2.3) au système projectif de complexes $(\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{C}^\bullet(\mathrm{X}, \mathcal{F}_k)))_{k \in \mathbf{N}}$, et on a donc $\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{G}^\bullet)) = \varprojlim_k \mathrm{H}^i(\mathrm{U}, \mathcal{F}_k)$ pour tout $i \geqslant 0$. L'hypothèse (ii) prouve bien alors, par définition, que les faisceaux $\mathcal{H}^i(\mathcal{G}^\bullet)$ sont nuls pour $i > 0$.

On a alors pour tout $i \geqslant 0$, $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathcal{F}) = \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{G}^\bullet))$ et

$$\Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{G}^\bullet) = \varprojlim_k \Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{C}^\bullet(\mathrm{X}, \mathcal{F}_k)).$$

On vient de remarquer que les applications $\Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{C}^i(\mathrm{X}, \mathcal{F}_k)) \to \Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{C}^i(\mathrm{X}, \mathcal{F}_h))$ $(h \leqslant k)$ sont toutes surjectives; la conclusion résulte donc encore de (13.2.3).

Remarques **(13.3.2)**. — (i) L'énoncé (13.3.1) n'a d'intérêt que pour $i > 0$, puisque pour $i = 0$, h_i est toujours un isomorphisme sans hypothèse ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 3.2.6).

(ii) Les conditions (i) et (ii) de (13.3.1) seront en particulier vérifiées si $\mathrm{H}^i(\mathrm{U}, \mathcal{F}_k) = 0$ pour tout k, tout $i > 0$ et tout $\mathrm{U} \in \mathfrak{B}$, et si pour $\mathrm{U} \in \mathfrak{B}$, les applications $\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{F}_k) \to \Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{F}_h)$ sont *surjectives*. Ce sera le cas le plus fréquent d'application de (13.3.1).

13.4. Condition de Mittag-Leffler et objets gradués associés aux systèmes projectifs.

(13.4.1) Soit $\mathbf{A} = (\mathrm{A}_k, u_{kh})_{k \in \mathbf{Z}}$ un système projectif dans une catégorie abélienne $\boldsymbol{C}$; nous dirons qu'il est *limité inférieurement* s'il existe k_0 tel que $\mathrm{A}_k = 0$ pour $k < k_0$.

Nous définirons sur chaque A_k une *filtration* $(\mathrm{F}^p(\mathrm{A}_k))_{p \in \mathbf{Z}}$ par les formules

(13.4.1.1)
$$\begin{cases} \mathrm{F}^p(\mathrm{A}_k) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}_k \to \mathrm{A}_{p-1}) & \text{pour } p \leqslant k+1 \\ \mathrm{F}^p(\mathrm{A}_k) = 0 & \text{pour } p \geqslant k+1 \end{cases}$$

On a donc par hypothèse $F^{k_0}(A_k)=A_k$ et $F^{k+1}(A_k)=0$, autrement dit la filtration considérée est *finie* (11.1.3). Les objets gradués associés à cette filtration sont donc

$$\mathrm{gr}^p(A_k)=\mathrm{Ker}(A_k\to A_{p-1})/\mathrm{Ker}(A_k\to A_p)$$

et par suite, $\mathrm{gr}^p(A_k)$ est isomorphe à l'image par $A_k\to A_p$ de $\mathrm{Ker}(A_k\to A_{p-1})$; en vertu de la transitivité des morphismes définissant un système projectif, on a donc

(13.4.1.2) $$\mathrm{gr}^p(A_k)=\mathrm{Ker}(A_p\to A_{p-1})\cap \mathrm{Im}(A_k\to A_p)$$

mais comme, en vertu de (13.4.1.1), on a $\mathrm{Ker}(A_p\to A_{p-1})=\mathrm{gr}^p(A_p)$, on a aussi

(13.4.1.3) $$\mathrm{gr}^p(A_k)=\mathrm{gr}^p(A_p)\cap \mathrm{Im}(A_k\to A_p).$$

Les définitions précédentes montrent en outre que l'on a pour $k\leqslant h$

$$u_{kh}(F^p(A_h))\subset F^p(A_k)$$

et par suite que les $\mathrm{gr}^p(u_{kh})$ définissent un *système projectif* $(\mathrm{gr}^p(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ pour tout $p\in\mathbf{Z}$.

(13.4.2) Nous dirons que le système projectif $\mathbf{A}$ est *essentiellement constant* si les morphismes $A_{k+1}\to A_k$ sont des *isomorphismes* pour k assez grand. Nous dirons que le système projectif $\mathbf{A}$ est *strict* si les morphismes $A_i\to A_j$ $(j\leqslant i)$ sont des *épimorphismes*. Lorsque $\mathbf{A}$ est strict, il résulte de (13.4.1.3) que pour $p\leqslant k\leqslant h$, le morphisme canonique $\mathrm{gr}^p(A_h)\to\mathrm{gr}^p(A_k)$ est un *isomorphisme*, autrement dit, le système projectif $(\mathrm{gr}^p(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ est essentiellement constant. La suite des objets $\mathrm{gr}^p(A_p)$ (identifiés à $\varprojlim_k \mathrm{gr}^p(A_k)$ pour tout p) se note alors $\mathrm{gr}^\bullet(\mathbf{A})$ et s'appelle *l'objet gradué associé au système projectif strict* $\mathbf{A}=(A_k)$.

Si l'on suppose maintenant que le système projectif $\mathbf{A}$ (limité inférieurement) vérifie (ML), on sait (13.1.2) que le système projectif $\mathbf{A}'=(A'_k)$ des objets d'« images universelles » est *strict*, et il est par ailleurs limité inférieurement; l'objet gradué $\mathrm{gr}^\bullet(\mathbf{A}')$ associé à $\mathbf{A}'$ est alors encore appelé l'objet gradué *associé à* $\mathbf{A}$ et noté $\mathrm{gr}^\bullet(\mathbf{A})$.

Proposition **(13.4.3)**. — *Soit* $\mathbf{A}=(A_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ *un système projectif limité inférieurement dans une catégorie abélienne* $\mathbf{C}$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathbf{A}$ *vérifie la condition* (ML).

b) *Pour tout* $p\in\mathbf{Z}$, *le système projectif* $(\mathrm{gr}^p(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ *est essentiellement constant.*

En outre, lorsque ces conditions sont satisfaites, on a pour tout $p\in\mathbf{Z}$ *un isomorphisme canonique*

(13.4.3.1) $$\mathrm{gr}^p(\mathbf{A})\xrightarrow{\sim}\varprojlim_k \mathrm{gr}^p(A_k).$$

Il résulte aussitôt de (13.4.1.2) que *a)* implique *b)*; la même formule appliquée au système projectif $\mathbf{A}'$ (notations de (13.4.2)) donne l'isomorphisme (13.4.3.1) par définition. Pour $k\leqslant h$, posons $A_{kh}=\mathrm{Im}(A_h\to A_k)$; si $k\leqslant h\leqslant j$, on a $A_{kj}\subset A_{kh}\subset A_k$. Munissons A_{kh} de la filtration induite par $(F^p(A_k))$; on vérifie aussitôt, en vertu de la transitivité des morphismes définissant $\mathbf{A}$, que cette filtration est aussi la filtration quotient de $(F^p(A_h))$; par suite, on a

(13.4.3.2) $$\mathrm{gr}^p(A_{kh})=\mathrm{Im}(\mathrm{gr}^p(A_h)\to\mathrm{gr}^p(A_k)).$$

Cela étant, supposons *b)* vérifiée; pour tout $p \in \mathbf{Z}$, et tout $k \geqslant p$, il existe un entier $L(p, k)$ tel que le second membre de (13.4.3.2) soit constant pour $h \geqslant L(p, k)$; comme $\mathrm{gr}^p(A_k) = 0$ pour $p < k_0$, il n'y a (pour k donné) qu'un nombre fini de $L(p, k)$ non nuls lorsque p parcourt l'ensemble des entiers $\leqslant k$. Soit $L(k) = m$ le plus grand de ces entiers; pour tout $h \geqslant m$, on a $A_{kh} \subset A_{km}$, et par définition de m, l'injection canonique $A_{kh} \rightarrow A_{km}$ définit un *isomorphisme* $\mathrm{gr}^\bullet(A_{kh}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^\bullet(A_{km})$; comme les filtrations sont *finies*, on en conclut que l'injection précédente est elle-même bijective (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, th. 1), ce qui prouve que $\mathbf{A}$ vérifie (ML).

(13.4.4) Supposons que dans C la limite projective $A = \varprojlim A_k$ existe. Dans les définitions de (13.4.1), on peut alors remplacer A_k par A, et la filtration ainsi définie sur A est encore telle que

(13.4.4.1) $$\mathrm{gr}^p(A) = \mathrm{gr}^p(A_p) \cap \mathrm{Im}(A \rightarrow A_p).$$

Corollaire **(13.4.5)**. — *Supposons que* C *soit la catégorie des groupes abéliens. Si le système projectif* $\mathbf{A}$ *vérifie* (ML) *et si* $A = \varprojlim_k A_k$, *on a pour tout* $p \in \mathbf{Z}$ *un isomorphisme canonique*

(13.4.5.1) $$\mathrm{gr}^p(A) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathrm{gr}^p(A_k).$$

En effet, on a $\mathrm{Im}(A_k \rightarrow A_p) = \mathrm{Im}(A \rightarrow A_p)$ dès que k est assez grand (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. II, 3^e^ éd., § 3, n° 5, th. 1), et la conclusion résulte de (13.4.1.3) et (13.4.4.1).

13.5. Limites projectives de suites spectrales de complexes filtrés.

(13.5.1) Soient C une catégorie abélienne, $X^\bullet$ un complexe d'objets de C muni d'une *filtration* $(F^p(X^\bullet))_{p \in \mathbf{Z}}$ telle que $F^{p_0}(X^\bullet) = X^\bullet$ pour un indice p_0. Considérons pour chaque $k \in \mathbf{Z}$ le complexe $X_k^\bullet = X^\bullet / F^{k+1}(X^\bullet)$; il est canoniquement muni de la filtration formée des $F^p(X_k^\bullet) = F^p(X^\bullet)/F^{k+1}(X^\bullet)$ pour $p \leqslant k$ et des $F^p(X_k^\bullet) = 0$ pour $p \geqslant k+1$. En outre, on a des morphismes canoniques $X_{k+1}^\bullet \rightarrow X_k^\bullet$, qui font de $\mathbf{X}^\bullet = (X_k^\bullet)_{k \in \mathbf{Z}}$ un *système projectif de complexes filtrés d'objets de* C. On notera que ce système projectif est *strict* et tel que $X_k^\bullet = 0$ pour $k < p_0$.

(13.5.2) Considérons plus généralement un système projectif *strict* $\mathbf{X}^\bullet = (X_k^\bullet)_{k \in \mathbf{Z}}$ de complexes d'objets de C, *limité inférieurement*; considérons sur chaque $X_k^\bullet$ la filtration définie dans (13.4.1) (en se plaçant dans la catégorie abélienne des complexes de C limités inférieurement). Les $X_k^\bullet \rightarrow X_p^\bullet$ $(p \leqslant k)$ deviennent des morphismes de complexes *filtrés*, à filtrations finies. Le caractère fonctoriel des suites spectrales des complexes filtrés (11.2.3) montre que les morphismes de définition du système projectif $\mathbf{X}^\bullet$ fournissent des morphismes faisant de $E(\mathbf{X}^\bullet) = (E(X_k^\bullet))$ un *système projectif de suites spectrales*.

Lemme **(13.5.3)**. — *Supposons que le système projectif* $\mathbf{X}^\bullet = (X_k^\bullet)_{k \in \mathbf{Z}}$ *de complexes filtrés soit obtenu comme dans* (13.5.2). *Alors :*

a) *Pour* $r \geqslant p - p_0$, *on a* $B_r^{pq}(X_k^\bullet) = B_\infty^{pq}(X_k^\bullet)$ *pour tout* $k \in \mathbf{Z}$.

b) *Pour* $k+1 \leqslant p+r$, *on a* $Z_r^{pq}(X_k^\bullet) = Z_\infty^{pq}(X_k^\bullet)$.

c) *Pour* $k+1 \geqslant p+r$, *les morphismes* $Z_r^{pq}(X_h^\bullet) \rightarrow Z_r^{pq}(X_k^\bullet)$ *et* $B_r^{pq}(X_h^\bullet) \rightarrow B_r^{pq}(X_h^\bullet)$ *sont des isomorphismes pour tout* $h \geqslant k$.

Ces trois propriétés résultent aussitôt des définitions de (11.2.2), en tenant compte de ce que $F^{p-r+1}(X_k^\bullet)=X_k^\bullet$ pour $p-r<p_0$.

(13.5.4) Supposons vérifiées les hypothèses de (13.5.3). Alors, pour p, q, r fixés (r fini), les systèmes projectifs $(Z_r^{pq}(X_k^\bullet))_{k\in\mathbf{Z}}$, $(B_r^{pq}(X_k^\bullet))_{k\in\mathbf{Z}}$, $(E_r^{pq}(X_k^\bullet))_{k\in\mathbf{Z}}$ sont *essentiellement constants*; on désignera par $Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$, $B_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ et $E_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)=Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)/B_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ leurs limites projectives respectives. Les $Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ et $B_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ s'identifient canoniquement à des sous-objets de $E_1^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$. La définition des d_r^{pq} (M, XV, 1) montre que ces morphismes (relatifs aux $X_k^\bullet$) sont aussi essentiellement constants, et par suite définissent des morphismes

$$d_r^{pq} : E_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet) \to E_r^{p+r,q-r+1}(\mathbf{X}^\bullet) \tag{13.5.4.1}$$

tels que $d_r^{p+r,q-r+1}\circ d_r^{pq}=0$; en outre, on a des isomorphismes canoniques de $\operatorname{Ker}(d_r^{pq})$ sur $Z_{r+1}^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)/B_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ et de $\operatorname{Im}(d_r^{pq})$ sur $B_{r+1}^{p+r,q-r+1}(\mathbf{X}^\bullet)/B_r^{p+r,q-r+1}(\mathbf{X}^\bullet)$.

Lemme **(13.5.5)**. — *Sous les hypothèses de* (13.5.3), *on a, pour* $s\geqslant r>p-p_0$, *un monomorphisme canonique*

$$i : E_s^{pq}(\mathbf{X}^\bullet) \to E_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet) \tag{13.5.5.1}$$

et un isomorphisme canonique

$$j_r : E_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet) \xrightarrow{\sim} E_\infty^{pq}(X_{p+r-1}^\bullet) \tag{13.5.5.2}$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E_s^{pq}(\mathbf{X}^\bullet) \arrow[r, "j_s"] \arrow[d, "i"'] & E_\infty^{pq}(X_{p+s-1}^\bullet) \arrow[d] \\ E_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet) \arrow[r, "j_r"'] & E_\infty^{pq}(X_{p+r-1}^\bullet) \end{tikzcd} \tag{13.5.5.3}$$

soit commutatif (la flèche verticale de droite provenant du morphisme $X_{p+s-1}^\bullet\to X_{p+r-1}^\bullet$).

L'existence de i provient de ce que $B_r^{pq}(X_k^\bullet)=B_\infty^{pq}(X_k^\bullet)$ pour $r>p-p_0$ (13.5.3, *a)*); on a $Z_r^{pq}(X_k^\bullet)=Z_\infty^{pq}(X_k^\bullet)$ pour $k+1\leqslant p+r$ (13.5.3, *b)*), d'où en particulier $Z_r^{pq}(X_{p+r-1}^\bullet)=Z_\infty^{pq}(X_{p+r-1}^\bullet)$ et d'autre part $Z_r^{pq}(X_{p+r-1}^\bullet)$ et $B_r^{pq}(X_{p+r-1}^\bullet)$ s'identifient canoniquement à $Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ et $B_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ en vertu de (13.5.3, *c)*), d'où l'existence de j_r et la commutativité de (13.5.5.1).

Corollaire **(13.5.6)**. — *Sous les hypothèses de* (13.5.3), *si l'une des limites projectives* $\varprojlim_r E_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$, $\varprojlim_k E_\infty^{pq}(X_k^\bullet)$ *existe, il en est de même de l'autre, et on a un isomorphisme canonique*

$$j_\infty : \varprojlim_r E_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k E_\infty^{pq}(X_k^\bullet). \tag{13.5.6.1}$$

En outre, pour que le système projectif $(E_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet))_{r\in\mathbf{Z}}$ *soit essentiellement constant* (13.4.2), *il faut et il suffit que le système projectif* $(E_\infty^{pq}(X_k^\bullet))_{k\in\mathbf{Z}}$ *le soit.*

(13.5.7) On note $B_\infty^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ et $Z_\infty^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ les sous-objets de $E_1^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ égaux respectivement à $B_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ pour $r>p-p_0$ et à $\inf_r Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$ (quand ce dernier existe), de sorte que $\varprojlim_r E_r^{pq}(\mathbf{X}^\bullet)$

s'identifie canoniquement à $E_\infty^{pq}(\mathbf{X}^\cdot) = Z_\infty^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)/B_\infty^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$. On remarquera que les objets $Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$, $B_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$, $E_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ $(1 \leqslant r \leqslant +\infty)$ et d_r^{pq} dépendent *fonctoriellement* du système projectif $\mathbf{X}^\cdot$ soumis aux restrictions de (13.5.5), et que les morphismes définis dans (13.5.5) et (13.5.6) sont fonctoriels.

13.6. Suite spectrale d'un foncteur relative à un objet muni d'une filtration finie.

(13.6.1) Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories abéliennes, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur additif covariant. Supposons que tout objet de $\mathcal{C}$ soit isomorphe à un sous-objet d'un objet injectif, de sorte que les foncteurs dérivés droits R^pT $(p \geqslant 0)$ existent.

Lemme **(13.6.2)**. — *Soit* A *un objet de* $\mathcal{C}$, *muni d'une filtration* finie $(F^i(A))_{i\in\mathbf{Z}}$. *Il existe une résolution injective* $X^\cdot = (X^j)_{j\geqslant 0}$ *de* A *munie d'une filtration finie* $(F^i(X^\cdot))_{i\in\mathbf{Z}}$ *telle que la relation* $F^i(A) = A$ (resp. $F^i(A) = 0$) *entraîne* $F^i(X^\cdot) = X^\cdot$ (resp. $F^i(X^\cdot) = 0$) *et que, pour tout* $i \in \mathbf{Z}$, $F^i(X^\cdot)$ *soit une résolution injective de* $F^i(A)$.

Soit p (resp. $q > p$) le plus grand indice tel que $F^i(A) = A$ (resp. le plus petit indice pour lequel $F^i(A) = 0$). On raisonne par récurrence sur $q - p$, le lemme étant évident pour $q - p = 1$. Ayant formé une résolution injective $X'''^\cdot$ de $A/F^{q-1}(A)$ ayant les propriétés voulues, on considère la suite exacte $0 \to F^{q-1}(A) \to A \to A/F^{q-1}(A) \to 0$, on prend une résolution injective $X''^\cdot$ de $F^{q-1}(A)$, puis on détermine une résolution injective $X^\cdot$ de A de façon à avoir une suite exacte $0 \to X''^\cdot \to X^\cdot \to X'''^\cdot \to 0$ compatible avec la précédente (M, V, 2.2); il est clair que $X^\cdot$ répond à la question.

Corollaire **(13.6.3)**. — *Soit* B *un second objet de* $\mathcal{C}$, *muni d'une filtration finie* $(F^i(B))_{i\in\mathbf{Z}}$, *s un entier, et soit* $u : A \to B$ *un morphisme tel que* $u(F^i(A)) \subset F^{i+s}(B)$ *pour tout* $i \in \mathbf{Z}$. *Si* $Y^\cdot = (Y^j)_{j\geqslant 0}$ *est une résolution injective de* B *munie d'une filtration* $(F^i(Y^\cdot))_{i\in\mathbf{Z}}$ *ayant les propriétés énoncées en* (13.6.2), *il existe un morphisme* $v : X^\cdot \to Y^\cdot$ *compatible avec u et tel que* $v(F^i(X^\cdot)) \subset F^{i+s}(Y^\cdot)$ *pour tout* $i \in \mathbf{Z}$. *En outre, deux tels morphismes v, v' sont homotopes.*

Cela résulte aussitôt par récurrence sur $q - p$ de la construction précédente et de (M, V, 2.3).

(13.6.4) Sous les hypothèses de (13.6.2), considérons maintenant le complexe $T(X^\cdot)$ dans $\mathcal{C}'$, qui est évidemment filtré par les complexes $T(F^i(X^\cdot))$, puisque $F^i(X^\cdot)$ est facteur direct de $X^\cdot$. Il résulte de (13.6.3) que la *suite spectrale* de ce complexe filtré ne dépend que de l'objet filtré A, à un isomorphisme près. Son aboutissement est la cohomologie $R^\cdot T(A)$, avec la filtration

(13.6.4.1)
$$F^p(R^nT(A)) = \operatorname{Im}(R^nT(F^p(A)) \to R^nT(A)) = \operatorname{Ker}(R^nT(A) \to R^nT(A/F^p(A)))$$

(11.2.2), et son terme E_1 est donné par

(13.6.4.2)
$$E_1^{pq} = R^{p+q}T(\operatorname{gr}^p(A))$$

$\operatorname{gr}^p(A)$ désignant comme d'ordinaire $F^p(A)/F^{p+1}(A)$. Il est clair, d'après (11.2.2), que la filtration de l'aboutissement est *finie*, et que pour p, q donnés, les suites des

$B_r^{pq}(A) = B_r^{pq}(T(X^\bullet))$ et $Z_r^{pq}(A) = Z_r^{pq}(T(X^\bullet))$ sont *stationnaires*, donc la suite spectrale précédente est *birégulière* (11.1.3). Nous noterons cette suite $E(A) = (E_r^{pq}(A))$ et nous dirons que c'est la *suite spectrale du foncteur* T *relative à l'objet filtré* A.

(13.6.5) Supposons maintenant vérifiées les hypothèses de (13.6.3), dont nous conservons les notations. Comme $F^i(X^\bullet)$ (resp. $F^i(Y^\bullet)$) est facteur direct de $X^\bullet$ (resp. $Y^\bullet$), on a $(Tv)(T(F^i(X^\bullet))) \subset T(F^{i+s}(Y^\bullet))$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$; les définitions de (11.2.2) montrent alors que pour $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, Tv définit un morphisme $B_r^{pq}(T(X^\bullet)) \to B_r^{p+s,q-s}(T(Y^\bullet))$ et un morphisme $Z_r^{pq}(T(X^\bullet)) \to Z_r^{p+s,q-s}(T(Y^\bullet))$, d'où un morphisme

$$w_r : E_r^{pq}(A) \to E_r^{p+s,q-s}(B);$$

de même, on a pour l'aboutissement des morphismes $u_n : R^nT(A) \to R^nT(B)$ tels que $u_n(F^p(R^nT(A))) \subset F^{p+s}(R^nT(B))$.

La définition des d_r^{pq} (M, XV, 1) montre en outre que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} E_r^{pq}(A) & \xrightarrow{d_r^{pq}} & E_r^{p+r,q-r+1}(A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle w_r} & & \Big\downarrow{\scriptstyle w_r} \\ E_r^{p+s,q-s}(B) & \xrightarrow[d_r^{p+s,q-s}]{} & E_r^{p+r+s,q-r-s+1}(B) \end{array}$$

sont commutatifs; on en déduit un diagramme commutatif analogue pour les isomorphismes α_r^{pq}, que nous laisserons au lecteur le soin d'expliciter. Enfin *(loc. cit.)*, on a aussi des diagrammes commutatifs pour les aboutissements

$$\begin{array}{ccc} E_\infty^{pq}(A) & \xrightarrow{\beta^{pq}} & \mathrm{gr}^p(R^{p+q}T(A)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle w_\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_{p+q}} \\ E_\infty^{p+s,q-s}(B) & \xrightarrow[\beta^{p+s,q-s}]{} & \mathrm{gr}^{p+s}(R^{p+q}T(B)) \end{array}$$

(13.6.6) Supposons en particulier qu'il existe un anneau S, muni d'une *filtration* $(F^i(S))_{i\in\mathbf{Z}}$, et un homomorphisme d'anneaux

(13.6.6.1) $$h : S \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$$

tel que pour tout $t \in \mathrm{F}^j(\mathrm{S})$, on ait $h_t(\mathrm{F}^i(\mathrm{A})) \subset \mathrm{F}^{i+j}(\mathrm{A})$ pour tout couple i, j. Nous dirons pour abréger que A est alors muni d'une structure de S-$\boldsymbol{C}$-*module filtré* sur l'anneau filtré S. Par passage aux objets gradués associés, tout h_t, pour $t \in \mathrm{F}^j(\mathrm{S})$, définit un endomorphisme *gradué* $\bar{h}_t$ de $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{A})$, homogène de degré j; en outre, ce morphisme ne dépend que de la classe de t dans $\mathrm{gr}^j(\mathrm{S})$, et on définit ainsi un homomorphisme d'*anneaux gradués*

$$\bar{h} : \mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S}) \to \mathrm{Hom}^g_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{A}), \mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{A}))$$

où le second membre est l'anneau des endomorphismes *gradués* de $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{A})$. Nous dirons que $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{A})$ est muni d'une structure de $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\boldsymbol{C}$-*module gradué*. Il résulte alors de (13.6.5) que pour $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, tout $\bar{t} \in \mathrm{gr}^j(\mathrm{S})$ définit canoniquement dans les objets bigradués $(\mathrm{B}_r^{pq}(\mathrm{A}))_{(p,q)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$, $(\mathrm{Z}_r^{pq}(\mathrm{A}))_{(p,q)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$ et $\mathrm{E}_r(\mathrm{A}) = (\mathrm{E}_r^{pq}(\mathrm{A}))_{(p,q)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$ des endomorphismes bigradués de degrés $(s, -s)$; dans $\mathrm{E}_r(\mathrm{A})$ (pour r fini), cet endomorphisme commute à l'endomorphisme bigradué défini par les d_r^{pq}. Comme ces endomorphismes vérifient les conditions habituelles d'associativité et de distributivité par rapport à l'addition dans $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$ et dans les objets bigradués considérés, nous dirons pour abréger que ces derniers sont des $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\boldsymbol{C}'$-*modules bigradués*; il est immédiat que les α_r^{pq} définissent un *isomorphisme* pour ce type de structures. Pour tout entier n, on notera $\mathrm{B}_r^{(n)}(\mathrm{A})$ (resp. $\mathrm{Z}_r^{(n)}(\mathrm{A})$, $\mathrm{E}_r^{(n)}(\mathrm{A})$) le sous-objet gradué de $\mathrm{B}_r^{\bullet\bullet}(\mathrm{A})$ (resp. $\mathrm{Z}_r^{\bullet\bullet}(\mathrm{A})$, $\mathrm{E}_r^{\bullet\bullet}(\mathrm{A})$) formé des $\mathrm{B}_r^{pq}(\mathrm{A})$ (resp. $\mathrm{Z}_r^{pq}(\mathrm{A})$, $\mathrm{E}_r^{pq}(\mathrm{A})$) tels que $p+q=n$ (pour $1 \leqslant r \leqslant +\infty$); il est immédiat que ce sont des $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\boldsymbol{C}'$-*modules gradués*. Enfin, tout $\bar{t} \in \mathrm{gr}^j(\mathrm{S})$ définit pour tout n un endomorphisme gradué de degré j dans l'objet gradué $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{A}))$, qui est ainsi muni d'une structure de $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\boldsymbol{C}'$-*module gradué*; les β^{pq} (pour $p+q=n$) définissent un *isomorphisme* de $\mathrm{E}^{(n)}(\mathrm{A})$ sur $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{A}))$ pour cette espèce de structure.

On notera que lorsque $\boldsymbol{C}'$ est la catégorie des *groupes abéliens*, les structures de S-$\boldsymbol{C}'$-module (resp. de $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\boldsymbol{C}'$-module gradué ou bigradué) ne sont autres que les structures usuelles de S-*module* (resp. $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-module gradué, bigradué).

13.7. Foncteurs dérivés d'une limite projective d'arguments.

(13.7.1) Soient $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$ deux catégories abéliennes, $\boldsymbol{C}$ étant supposée telle que tout objet de $\boldsymbol{C}$ soit sous-objet d'un objet injectif; soit $\mathrm{T} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}'$ un foncteur additif covariant. Considérons un *système projectif strict* $\mathbf{A} = (\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ dans $\boldsymbol{C}$, *limité inférieurement*; de façon précise, nous supposerons que $\mathrm{A}_k = 0$ pour $k < k_0$. Nous associons canoniquement à ce système une filtration $(\mathrm{F}^p(\mathrm{A}_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ sur chaque A_k par les formules (13.4.1.1), et comme il s'agit d'un système projectif *strict*, les morphismes canoniques

(13.7.1.1) $$\mathrm{F}^i(\mathrm{A}_h)/\mathrm{F}^j(\mathrm{A}_h) \to \mathrm{F}^i(\mathrm{A}_k)/\mathrm{F}^j(\mathrm{A}_k) \quad (h \geqslant k)$$

pour $i \leqslant j \leqslant k+1$ sont des *isomorphismes*. Rappelons en outre que l'on a $\mathrm{F}^{k_0}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{A}_k$ et $\mathrm{F}^{k+1}(\mathrm{A}_k) = 0$ pour tout k.

(13.7.2) Construisons maintenant pour chaque k une *résolution injective* $\mathrm{X}_k^\bullet = (\mathrm{X}_k^j)_{j\geqslant 0}$ de A_k ayant les propriétés de (13.6.2). Les morphismes canoniques $\mathrm{A}_{k+1} \to \mathrm{A}_k$ permettent (13.6.3) de définir pour chaque k un morphisme de complexes $\mathrm{X}_{k+1}^\bullet \to \mathrm{X}_k^\bullet$ compatibles avec les filtrations, et faisant de $\mathbf{X}^\bullet = (X_k^\bullet)_{k\in\mathbf{Z}}$ un *système projectif* de complexes. On peut en outre supposer que ce système projectif est *strict*. Pour cela, on observe qu'en vertu de l'isomorphisme (13.7.1.1), A_k est isomorphe à $A_{k+1}/F^{k+1}(A_{k+1})$; on peut donc prendre, dans la construction de $X_{k+1}^\bullet$, la résolution injective de $A_{k+1}/F^{k+1}(A_{k+1})$ *égale* à $X_k^\bullet$, et il résulte de (M, V, 2.3) que la construction du morphisme de complexes $X_{k+1}^\bullet \to X_k^\bullet$ peut se faire de sorte que ce morphisme fournisse par passage aux quotients un *isomorphisme* $X_{k+1}^\bullet/F^{k+1}(X_{k+1}^\bullet) \xrightarrow{\sim} X_k^\bullet$ respectant les filtrations, ce qui est la condition de (13.5.1).

(13.7.3) Par construction, le système projectif $T(\mathbf{X}^\bullet)$ des complexes $T(X_k^\bullet)$ satisfait aux hypothèses de (13.5.3). Les résultats de (13.5.4), (13.5.5) et (13.5.6) sont donc applicables aux suites spectrales $E(T(X_k^\bullet)) = E(A_k)$; nous écrirons $E_r^{pq}(\mathbf{A})$ au lieu de $E_r^{pq}(T(\mathbf{X}^\bullet))$ pour $1 \leqslant r \leqslant +\infty$ (cf. (13.5.7) pour $r = +\infty$) et de même pour les notations analogues. On notera en particulier que l'on a

$$\textbf{(13.7.3.1)} \qquad E_1^{pq}(\mathbf{A}) = R^{p+q}T(\mathrm{gr}^p(\mathbf{A}))$$

en vertu de (13.6.4.2) et du fait que le système $(\mathrm{gr}^p(A_k))$ est essentiellement constant.

Ces résultats et (13.4.3) donnent la proposition suivante, démontrée d'abord par Shih Weishu par une méthode différente (inédite) :

Proposition **(13.7.4)** *(Shih). — Soit n un entier. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout couple (p, q) tel que $p+q=n$, le système projectif $(E_r^{pq}(\mathbf{A}))_{r\geqslant 2}$ est essentiellement constant.*

b) *Le système projectif $R^nT(\mathbf{A}) = (R^nT(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ vérifie* (ML).

En outre, lorsque ces conditions sont remplies, on a un isomorphisme canonique

$$\textbf{(13.7.4.1)} \qquad \mathrm{gr}^p(R^nT(\mathbf{A})) \xrightarrow{\sim} E_\infty^{p,n-p}(\mathbf{A}) \qquad \textit{pour tout } p\in\mathbf{Z}.$$

En effet, en vertu de (13.5.6), la condition *a)* équivaut à dire que le système projectif $(E_\infty^{pq}(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ est essentiellement constant pour $p+q=n$, et d'autre part $\mathrm{gr}^p(R^n(T(A_k))$ est canoniquement isomorphe à $E_\infty^{p,n-p}(A_k)$, donc il résulte de (13.4.3) que *a)* et *b)* sont équivalentes; l'isomorphisme (13.7.4.1) n'est autre que (13.5.6.1) appliqué au cas envisagé ici.

Corollaire **(13.7.5)**. — *Soit $\mathfrak{F} = (\mathscr{F}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ un système projectif de faisceaux de groupes abéliens satisfaisant aux conditions* (i), (ii) *et* (iii) *de* (13.3.1) *et soit $\mathscr{F} = \varprojlim \mathscr{F}_k$. Supposons que, pour le foncteur $\mathscr{G} \rightsquigarrow \Gamma(X, \mathscr{G})$, le système projectif $(E_r^{pq}(\mathfrak{F}))_{r\in\mathbf{Z}}$ soit essentiellement constant pour tout couple (p, q) tel que $p+q=n$ ou $p+q=n+1$. Considérons sur $H^{n+1}(X, \mathscr{F})$ la filtration définie par $F^p(H^{n+1}(X, \mathscr{F})) = \mathrm{Ker}(H^{n+1}(X, \mathscr{F}) \to H^{n+1}(X, \mathscr{F}_{p-1}))$. On a alors un isomorphisme canonique*

$$\textbf{(13.7.5.1)} \qquad \mathrm{gr}^p(H^{n+1}(X, \mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} E_\infty^{p,n-p+1}(\mathfrak{F}) \qquad \textit{pour tout } p\in\mathbf{Z}.$$

Il résulte de (13.7.4) appliqué au cas où $\boldsymbol{C}$ est la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X, $\boldsymbol{C}'$ la catégorie des groupes abéliens, et $T = \Gamma$, que l'on a un isomorphisme canonique $\mathrm{gr}^p(\mathrm{R}^{n+1}\Gamma(\mathfrak{F}))\xrightarrow{\sim}\mathrm{E}_\infty^{p,n-p+1}(\mathfrak{F})$ pour tout $p\in\mathbf{Z}$. D'autre part, comme en vertu de (13.7.4), le système projectif $(\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ vérifie (ML), on déduit de (13.3.1) un isomorphisme canonique

(13.7.5.1) $$\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k).$$

Comme le système projectif $\mathrm{R}^{n+1}\Gamma(\mathfrak{F})$ vérifie (ML) en vertu de (13.7.4), on a un isomorphisme canonique $\mathrm{gr}^p(\mathrm{R}^{n+1}\Gamma(\mathfrak{F})) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathrm{gr}^p(\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k))$ (13.4.3), et un isomorphisme canonique $\varprojlim_k \mathrm{gr}^p(\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k))\xrightarrow{\sim}\mathrm{gr}^p(\varprojlim_k \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k))$ (13.4.5). Tout revient donc à voir que l'isomorphisme (13.7.5.1) est compatible avec les filtrations des deux membres; mais cela résulte aussitôt des définitions et de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_k \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_{p-1}) & \end{array}$$

pour tout p.

(13.7.6) Soit S un anneau muni d'une filtration $(\mathrm{F}^i(\mathrm{S}))_{i\in\mathbf{Z}}$ telle que $\mathrm{F}^0(\mathrm{S})=\mathrm{S}$ (donc $\mathrm{gr}^i(\mathrm{S})=0$ pour $i<0$). Supposons que chacun des A_k, muni de la filtration définie dans (13.7.1), soit un S-$\mathbf{C}$-*module filtré* (13.6.6), les morphismes $\mathrm{A}_h\to\mathrm{A}_k$ pour $k\leqslant h$ étant des morphismes pour la structure de S-$\mathbf{C}$-module filtré; nous dirons pour abréger que $\mathbf{A}$ est un *système projectif de* S-$\mathbf{C}$-*modules filtrés*. Alors il est immédiat que les morphismes $\mathrm{B}_r^{pq}(\mathrm{A}_h)\to\mathrm{B}_r^{pq}(\mathrm{A}_k)$ et $\mathrm{Z}_r^{pq}(\mathrm{A}_h)\to\mathrm{Z}_r^{pq}(\mathrm{A}_k)$ pour $k\leqslant h$, $1\leqslant r\leqslant+\infty$, sont des morphismes pour les structures de $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-*module bigradué* (13.6.5), et que les familles $(\mathrm{Z}_r^{pq}(\mathbf{A}))$, $(\mathrm{B}_r^{pq}(\mathbf{A}))$ et $(\mathrm{E}_r^{pq}(\mathbf{A}))$ sont des $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-modules bigradués pour r fini, les deux premiers étant des sous-modules de $(\mathrm{E}_1^{pq}(\mathbf{A}))$. On notera encore $\mathrm{Z}_r^{(n)}(\mathbf{A})$, $\mathrm{B}_r^{(n)}(\mathbf{A})$, $\mathrm{E}_r^{(n)}(\mathbf{A})$ les sous-objets respectifs des précédents obtenu en ne prenant que les termes tels que $p+q=n$; ce sont des $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-*modules gradués*.

Lorsque le système $(\mathrm{E}_r^{pq}(\mathbf{A}))_{r\in\mathbf{Z}}$ est essentiellement constant, $(\mathrm{E}_\infty^{pq}(\mathbf{A}))$ est donc aussi un $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-module bigradué, et chaque $\mathrm{E}_\infty^{(n)}(\mathbf{A})$ un $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-module gradué. En outre, les $\beta^{p,n-p}:\mathrm{E}_\infty^{p,n-p}(\mathrm{A}_k)\xrightarrow{\sim}\mathrm{gr}^p(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{A}_k))$ constituent pour chaque k un isomorphisme pour la structure de $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-module gradué de $\mathrm{E}_\infty^{(n)}(\mathrm{A}_k)$ sur $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{A}_k))$; si on est dans les conditions précédentes, $\beta^{p,n-p}:\mathrm{E}_\infty^{(n)}(\mathbf{A})\xrightarrow{\sim}\varprojlim_k \mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{A}_k))$ sera donc aussi un isomorphisme pour ces structures et il en est évidemment de même de l'isomorphisme canonique $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathbf{A})\xrightarrow{\sim}\varprojlim_k \mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{A}_k))$, donc les isomorphismes (13.7.4.1) constituent un isomorphisme pour les structures de $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-*module gradué*.

Proposition **(13.7.7)**. — *Soit* S *un anneau noethérien* $\mathfrak{J}$-*adique. Supposons que* $\mathbf{C}$ *soit une catégorie abélienne dont tout objet est isomorphe à un sous-objet d'un objet injectif, et soit* T *un foncteur covariant additif de* $\mathbf{C}$ *dans la catégorie des groupes abéliens. Soit* $\mathbf{A}=(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ *un* *système projectif strict de* S-$\mathbf{C}$-*modules filtrés (pour la filtration* $\mathfrak{J}$-*adique sur* S) *limité inférieurement. On suppose que pour un entier n donné, la condition suivante soit vérifiée :*

(F_n) *Le* $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-*module gradué* $E_1^{(m)}(\mathbf{A})=(R^mT(\mathrm{gr}^p(\mathbf{A})))_{p\in\mathbf{Z}}$ (13.7.3.1) *est de type fini pour* $m=n$ *et* $m=n+1$.

Dans ces conditions :

(i) *Les systèmes projectifs* $(R^nT(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ *et* $(R^{n+1}T(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ *vérifient* (ML).

(ii) *Si on pose* $R'^nT(\mathbf{A})=\varprojlim_k R^nT(A_k)$, $R'^nT(\mathbf{A})$ *est un* S-*module de type fini.*

(iii) *La filtration définie par* $F^p(R'^nT(\mathbf{A}))=\mathrm{Ker}(R'^nT(\mathbf{A})\rightarrow R^nT(A_{p-1}))$ $(p\in\mathbf{Z})$ *sur* $R'^nT(\mathbf{A})$ *est* $\mathfrak{J}$-*bonne (c'est-à-dire que* $\mathfrak{J}F^p(R'^nT(\mathbf{A}))\subset F^{p+1}(R'^n(T(\mathbf{A}))$ *pour tout p, l'égalité des deux membres ayant lieu dès que p est assez grand). En particulier, la topologie sur* $R'^nT(\mathbf{A})$ *définie par cette filtration est identique à la topologie* $\mathfrak{J}$-*adique.*

(iv) *Le système projectif* $(E_r^{pq}(\mathbf{A}))_{r\in\mathbf{Z}}$ *est essentiellement constant pour* $p+q=n$ *et* $p+q=n+1$, $E_\infty^{pq}(\mathbf{A})$ *est donc défini* (13.5.7) *et on a un isomorphisme canonique de* $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-*modules gradués*

$$\mathrm{gr}^p(R'^nT(\mathbf{A}))\xrightarrow{\sim}E_\infty^{p,n-p}(\mathbf{A})\qquad(p\in\mathbf{Z}).\tag{13.7.7.1}$$

On notera que l'isomorphisme (13.7.7.1) permettra de noter $R^nT(\mathbf{A})$ par abus de langage, la limite projective $R'^nT(\mathbf{A})$ du système projectif $R^nT(\mathbf{A})$, compte tenu des isomorphismes (13.7.4.1).

Comme l'anneau gradué $\mathrm{gr}^\bullet(S)$ est noethérien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 9, cor. 5 du th. 2), la suite croissante des sous-$\mathrm{gr}^\bullet(S)$-modules gradués $B_r^{(m)}(\mathbf{A})$ de $E_1^{(m)}(\mathbf{A})$ (13.6.6) est *stationnaire* pour $m=n$ et $m=n+1$, et par suite la condition *b)* de (11.1.10) est vérifiée. Il s'ensuit que la condition *a)* de (13.7.4) est remplie pour n et pour $n+1$, et cela prouve déjà (i). En outre, les isomorphismes (13.7.4.1) (compte tenu des remarques de (13.7.6)) montrent que $\mathrm{gr}^\bullet(R^nT(\mathbf{A}))$ est un $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-module gradué isomorphe à $E_\infty^{(n)}(\mathbf{A})=Z_\infty^{(n)}(\mathbf{A})/B_\infty^{(n)}(\mathbf{A})$; comme $Z_\infty^{(n)}(\mathbf{A})$ est un sous-module de $E_1^{(n)}(\mathbf{A})$, il est de *type fini*, et il en est donc de même de $E_\infty^{(n)}(\mathbf{A})$. En outre, pour la filtration $(F^p(R'^nT(\mathbf{A})))$, il résulte de (13.4.5) que $\mathrm{gr}^\bullet(R^nT(\mathbf{A}))$ et $\mathrm{gr}^\bullet(R'^nT(\mathbf{A}))$ sont des $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-modules isomorphes, ce qui démontre (iv). Les assertions (ii) et (iii) seront enfin conséquences des résultats précédents et du lemme suivant :

Lemme (**13.7.7.2**). — *Soient* S *un anneau noethérien* $\mathfrak{J}$-*adique,* M *un* S-*module muni d'une filtration co-discrète* $(F^p(M))_{p\in\mathbf{Z}}$ *telle que* $\mathfrak{J}F^p(M)\subset F^{p+1}(M)$ *(ce qui exprime que* M *est un module filtré sur l'anneau* S *filtré par la filtration* $\mathfrak{J}$-*adique). Supposons en outre* M *séparé pour la topologie définie par la filtration* $(F^p(M))$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) M *est un* S-*module de type fini et* $(F^p(M))$ *une filtration* $\mathfrak{J}$-*bonne.*

b) $\mathrm{gr}^\bullet(M)$ *est un* $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-*module de type fini.*

c) *Les* $\mathrm{gr}^p(M)$ *sont des* S-*modules de type fini et pour p assez grand les homomorphismes canoniques*

$$\mathfrak{J}\otimes_S\mathrm{gr}^p(M)\rightarrow\mathrm{gr}^{p+1}(M)\tag{13.7.7.3}$$

(*déduits de* $\mathfrak{J}\otimes_S F^p(M) \to F^{p+1}(M)$, *compte tenu de ce que l'image de l'homomorphisme composé* $\mathfrak{J}\otimes_S F^{p+1}(M) \to \mathfrak{J}\otimes_S F^p(M) \to F^{p+1}(M)$ *est* $\mathfrak{J}F^{p+1}(M) \subset F^{p+2}(M)$) *sont surjectifs.*

Pour la démonstration, voir Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n⁰ 1, prop. 3.

(13.7.7.4) Pour appliquer le lemme (13.7.7.2), il reste à observer que la topologie définie sur $R'^n T(\mathbf{A})$ par la filtration considérée fait de $R'^n T(\mathbf{A})$ un S-module séparé et complet, cette topologie étant celle de la limite projective des groupes discrets $R^n T(A_k)$; d'autre part, si $A_k = 0$ pour $k < k_0$, on a aussi $R^n T(A_k) = 0$ pour $k < k_0$, donc $F^{k_0}(R'^n T(\mathbf{A})) = R'^n T(\mathbf{A})$, et on est bien dans les conditions d'application du lemme.

Corollaire **(13.7.8)**. — *Si l'hypothèse* (F_n) *est vérifiée, on a, pour tout élément* $f \in S$, *un isomorphisme canonique*

(13.7.8.1) $$\varprojlim_k ((R^n T(A_k))_f) \xrightarrow{\sim} R^n T(\mathbf{A}) \otimes_S S_{\{f\}}.$$

En effet, $R^n T(\mathbf{A})$ est un S-module de type fini, $S_{\{f\}}$ une S-algèbre adique noethérienne ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.6.11), séparée complétée de S_f pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.6.2). On conclut de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.7.8) et ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.7.1) que $R^n T(\mathbf{A}) \otimes_S S_{\{f\}}$ est isomorphe au séparé complété de $R^n T(\mathbf{A}) \otimes_S S_f$ pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique; un système fondamental de voisinages de 0 pour cette topologie est $(\mathfrak{J}^p R^n T(\mathbf{A})) \otimes_S S_f$, donc $F^p(R^n T(\mathbf{A})) \otimes_S S_f$ est aussi un tel système; ce dernier est le noyau de l'application canonique $(R^n T(\mathbf{A}))_f \to (R^n T(A_{p-1}))_f$ et par suite le groupe séparé associé à $R^n T(\mathbf{A}) \otimes_S S_f$ s'identifie à un sous-groupe G de $\varprojlim_k ((R^n T(A_k))_f)$. Mais le système projectif $((R^n T(A_k))_f)$ vérifie évidemment la condition (ML), et l'image de $(R^n T(\mathbf{A}))_f$ dans chacun des $(R^n T(A_k))_f$ est égale à l'image commune des $(R^n T(A_h))_f$ pour $h \geqslant k$ assez grand. On en conclut aussitôt que G est *partout dense* dans $\varprojlim_k ((R^n T(A_k))_f)$, et comme ce dernier groupe est séparé et complet, le corollaire est démontré.

(A suivre.)

CHAPITRE III

ÉTUDE COHOMOLOGIQUE DES FAISCEAUX COHÉRENTS

Sommaire

Ce chapitre donne les théorèmes fondamentaux sur la cohomologie des faisceaux algébriques cohérents, à l'exception de ceux découlant de la théorie des résidus (théorèmes de dualité), qui feront l'objet d'un chapitre ultérieur. Parmi les premiers, il y a essentiellement six théorèmes fondamentaux, faisant l'objet des six premiers paragraphes du présent chapitre. Ces résultats seront dans la suite des outils essentiels, même dans des questions qui ne sont pas de nature proprement cohomologique; le lecteur en verra les premiers exemples dès le § 4. Le § 7 donne des résultats de nature plus technique, mais d'un usage constant dans les applications. Enfin, dans les §§ 8 à 11, nous développerons certains résultats, liés à la dualité des faisceaux cohérents, particulièrement importants pour les applications, et qui peuvent s'exposer antérieurement à la théorie générale des résidus.

(1) Le chapitre IV ne dépend pas des §§ 8 à 11, et sera sans doute publié avant ces derniers.

Le contenu des §§ 1 et 2 est dû à J.-P. Serre, et le lecteur constatera que nous n'avons eu qu'à suivre l'exposé de (FAC). Les §§ 8 et 9 sont également inspirés par (FAC) (les transpositions nécessitées par les contextes différents étant toutefois moins évidentes). Enfin, comme nous l'avons dit dans l'Introduction, le § 4 doit être considéré comme la mise en forme, en langage moderne, du « théorème d'invariance » fondamental de la « théorie des fonctions holomorphes » de Zariski.

Signalons enfin que les résultats du n° 3.4 (et les propositions préliminaires de (**0**, 13.4 à 13.7)) ne seront pas utilisés dans la suite du chap. III et peuvent donc être omis en première lecture.

§ 1. COHOMOLOGIE DES SCHÉMAS AFFINES

1.1. Rappels sur le complexe de l'algèbre extérieure.

(1.1.1) Soient A un anneau, $\mathbf{f}=(f_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ un système de r éléments de A. Le *complexe de l'algèbre extérieure* $K_{\bullet}(\mathbf{f})$ correspondant à $\mathbf{f}$ est un complexe de chaînes (G, I, 2.2) se définissant de la façon suivante : le A-module gradué $K_{\bullet}(\mathbf{f})$ est égal à l'*algèbre extérieure* $\wedge(A^r)$, graduée de la façon usuelle, et l'opérateur bord est la *multiplication intérieure* $i_{\mathbf{f}}$ par $\mathbf{f}$ considéré comme élément du dual $(A^r)^{\vee}$; on rappelle que $i_{\mathbf{f}}$ est une *antidérivation* de degré -1 de $\wedge(A^r)$, et que si $(\mathbf{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est la base canonique de A^r, on a $i_{\mathbf{f}}(\mathbf{e}_i)=f_i$; la vérification de la condition $i_{\mathbf{f}}\circ i_{\mathbf{f}}=0$ est immédiate.

Une définition équivalente est la suivante : pour chaque i, on considère un complexe de chaînes $K_{\bullet}(f_i)$ défini comme suit : $K_0(f_i)=K_1(f_i)=A$, $K_n(f_i)=0$ pour $n\neq 0,1$: l'opérateur bord est défini par la condition que $d_1 : A\rightarrow A$ est la *multiplication par* f_i. On prend alors pour $K_{\bullet}(\mathbf{f})$ le *produit tensoriel* $K_{\bullet}(f_1)\otimes K_{\bullet}(f_2)\otimes\ldots\otimes K_{\bullet}(f_r)$ (G, I, 2.7) muni de son degré total; la vérification de l'isomorphisme de ce complexe et du complexe défini plus haut est immédiate.

(1.1.2) Pour tout A-module M, on définit le *complexe de chaînes*

$$K_{\bullet}(\mathbf{f}, M)=K_{\bullet}(\mathbf{f})\otimes_A M \tag{1.1.2.1}$$

et le *complexe de cochaînes* (G, I, 2.2)

$$K^{\bullet}(\mathbf{f}, M)=\mathrm{Hom}_A(K_{\bullet}(\mathbf{f}), M). \tag{1.1.2.2}$$

Si g est une k-cochaîne de ce dernier complexe, et si on pose

$$g(i_1, \ldots, i_k)=g(\mathbf{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_{i_k}),$$

g s'identifie à une application *alternée* de $[1, r]^k$ dans M, et il résulte des définitions précédentes que l'on a

$$d^k g(i_1, i_2, \ldots, i_{k+1})=\sum_{h=1}^{k+1}(-1)^{h-1}f_{i_h}g(i_1, \ldots, \widehat{i_h}, \ldots, i_{k+1}). \tag{1.1.2.3}$$

(1.1.3) Des complexes précédents, on déduit comme d'ordinaire les A-*modules d'homologie et de cohomologie* (G, I, 2.2)

(1.1.3.1) $$H_{\bullet}(\mathbf{f}, M) = H_{\bullet}(K_{\bullet}(\mathbf{f}, M))$$

(1.1.3.2) $$H^{\bullet}(\mathbf{f}, M) = H^{\bullet}(K^{\bullet}(\mathbf{f}, M)).$$

On définit d'ailleurs un A-*isomorphisme* $K_{\bullet}(\mathbf{f}, M) \xrightarrow{\sim} K^{\bullet}(\mathbf{f}, M)$ en faisant correspondre à toute chaîne $z = \Sigma(\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_k}) \otimes z_{i_1 \ldots i_k}$ la cochaîne g_z telle que $g_z(j_1, \ldots, j_{r-k}) = \varepsilon z_{i_1 \ldots i_k}$, où $(j_h)_{1 \leqslant h \leqslant r-k}$ est la suite strictement croissante complémentaire de la suite strictement croissante $(i_h)_{1 \leqslant h \leqslant k}$ dans $[1, r]$ et $\varepsilon = (-1)^{\nu}$, ν étant le nombre d'inversions de la permutation $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{r-k}$ de $[1, r]$. On vérifie que $g_{dz} = d(g_z)$, ce qui donne un isomorphisme

(1.1.3.3) $$H^i(\mathbf{f}, M) \xrightarrow{\sim} H_{r-i}(\mathbf{f}, M) \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant r.$$

Dans ce chapitre, nous aurons surtout à considérer les modules de cohomologie $H^{\bullet}(\mathbf{f}, M)$.

Pour un $\mathbf{f}$ donné, il est immédiat (G, I, 2.1) que $M \rightsquigarrow H^{\bullet}(\mathbf{f}, M)$ est un *foncteur cohomologique* (T, II, 2.1), de la catégorie des A-modules dans celle des A-modules gradués, nul pour les degrés <0 et $>r$. En outre, on a

(1.1.3.4) $$H^0(\mathbf{f}, M) = \mathrm{Hom}_A(A/(\mathbf{f}), M)$$

en désignant par $(\mathbf{f})$ l'idéal de A engendré par $f_1, \ldots, f_r$; cela résulte aussitôt de (1.1.2.3), et il est clair que $H^0(\mathbf{f}, M)$ s'identifie au sous-module de M *annulé par* $(\mathbf{f})$. De même, on a d'après (1.1.2.3)

(1.1.3.5) $$H^r(\mathbf{f}, M) = M/(\sum_{i=1}^{r} f_i M) = (A/(\mathbf{f})) \otimes_A M.$$

Nous utiliserons le résultat connu suivant, dont nous rappellerons une démonstration pour être complet :

Proposition **(1.1.4)**. — *Soient* A *un anneau,* $\mathbf{f} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ *une famille finie d'éléments de* A, M *un* A-*module. Si, pour* $1 \leqslant i \leqslant r$, *l'homothétie* $z \rightsquigarrow f_i . z$ *dans* $M_{i-1} = M/(f_1 M + \ldots + f_{i-1} M)$ *est injective, on a* $H^i(\mathbf{f}, M) = 0$ *pour* $i \neq r$.

Il suffit en effet de prouver que $H_i(\mathbf{f}, M) = 0$ pour tout $i > 0$ en vertu de (1.1.3.3). Raisonnons par récurrence sur r, le cas $r = 0$ étant trivial. Posons $\mathbf{f}' = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r-1}$; cette famille vérifie les conditions de l'énoncé, donc, si on pose $L_{\bullet} = K_{\bullet}(\mathbf{f}', M)$, on a $H_i(L_{\bullet}) = 0$ pour $i > 0$ par hypothèse, et $H_0(L_{\bullet}) = M_{r-1}$ en vertu de (1.1.3.3) et (1.1.3.5). Posons pour abréger $K_{\bullet} = K_{\bullet}(f_r) = K_0 \oplus K_1$, avec $K_0 = K_1 = A$, $d_1 : K_1 \to K_0$ étant la multiplication par f_r; on a par définition (1.1.1) $K_{\bullet}(\mathbf{f}, M) = K_{\bullet} \otimes_A L_{\bullet}$. Or, on a le lemme suivant :

Lemme **(1.1.4.1)**. — *Soit* $K_{\bullet}$ *un complexe de chaînes formé de* A-*modules libres, nuls sauf en dimensions* 0 *et* 1. *Pour tout complexe de chaînes* $L_{\bullet}$ *formé de* A-*modules, on a une suite exacte*

$$0 \to H_0(K_{\bullet} \otimes H_p(L_{\bullet})) \to H_p(K_{\bullet} \otimes L_{\bullet}) \to H_1(K_{\bullet} \otimes H_{p-1}(L_{\bullet})) \to 0$$

pour tout indice p.

C'est un cas particulier d'une suite exacte de termes de bas degré de la suite spectrale de Künneth (M, XVII, 5.2 *a)* et G, I, 5.5.2); on peut le démontrer directement de la façon suivante. Considérons K_0 et K_1 comme des complexes de chaînes (nuls en dimensions $\neq 0$ et $\neq 1$ respectivement); on a alors une suite exacte de complexes

$$0 \to K_0 \otimes L_\bullet \to K_\bullet \otimes L_\bullet \to K_1 \otimes L_\bullet \to 0$$

à laquelle nous pouvons appliquer la suite exacte d'homologie

$$\ldots \to H_{p+1}(K_1 \otimes L_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_p(K_0 \otimes L_\bullet) \to H_p(K_\bullet \otimes L_\bullet) \to H_p(K_1 \otimes L_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(K_0 \otimes L_\bullet) \to \ldots$$

Mais il est évident que $H_p(K_0 \otimes L_\bullet) = K_0 \otimes H_p(L_\bullet)$ et $H_p(K_1 \otimes L_\bullet) = K_1 \otimes H_{p-1}(L_\bullet)$ pour tout p; en outre, on vérifie aussitôt que l'opérateur $\partial : K_1 \otimes H_p(L_\bullet) \to K_0 \otimes H_p(L_\bullet)$ n'est autre que $d_1 \otimes 1$; le lemme résulte donc de la suite exacte précédente et de la définition de $H_0(K \otimes H_p(L_\bullet))$ et de $H_1(K_\bullet \otimes H_{p-1}(L_\bullet))$.

Ce lemme étant établi, la fin de la démonstration de (1.1.4) est immédiate : l'hypothèse de récurrence de ce lemme (1.1.4.1) donnent $H_p(K_\bullet \otimes L_\bullet) = 0$ pour $p \geqslant 2$; en outre, si on prouve que $H_1(K_\bullet, H_0(L_\bullet)) = 0$, on déduira aussi $H_1(K_\bullet \otimes L_\bullet) = 0$ du lemme (1.1.4.1); mais par définition, $H_1(K_\bullet, H_0(L_\bullet))$ n'est autre que le noyau de l'homothétie $z \rightsquigarrow f_r . z$ dans M_{r-1}, et comme par hypothèse ce noyau est nul, cela achève la démonstration.

(1.1.5) Soit $\mathbf{g} = (g_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une seconde suite de r éléments de A, et posons $\mathbf{fg} = (f_i g_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$. On peut définir un homomorphisme canonique de complexes

(1.1.5.1) $$\varphi_{\mathbf{g}} : K_\bullet(\mathbf{fg}) \to K_\bullet(\mathbf{f})$$

comme l'extension canonique à l'algèbre extérieure $\wedge(A^r)$ de l'application A-linéaire $(x_1, \ldots, x_r) \rightsquigarrow (g_1 x_1, \ldots, g_r x_r)$ de A^r dans lui-même. Pour voir qu'on a bien un homomorphisme de complexes, il suffit de remarquer, de façon générale, que si $u : E \to F$ est une application A-linéaire, $\mathbf{x} \in \check{F}$ et $\mathbf{y} = {}^t u(\mathbf{x}) \in \check{E}$, alors on a la formule

(1.1.5.2) $$(\wedge u) \circ i_{\mathbf{y}} = i_{\mathbf{x}} \circ (\wedge u);$$

en effet, les deux membres sont des antidérivations de $\wedge F$, et il suffit de vérifier qu'ils coïncident dans F, ce qui résulte aussitôt des définitions.

Lorsqu'on identifie $K_\bullet(\mathbf{f})$ au produit tensoriel des $K_\bullet(f_i)$ (1.1.1), $\varphi_{\mathbf{g}}$ est le produit tensoriel des φ_{g_i}, où φ_{g_i} se réduit à l'identité en degré 0 et à la multiplication par g_i en degré 1.

(1.1.6) En particulier, pour tout couple d'entiers m, n tels que $0 \leqslant n \leqslant m$, on a des homomorphismes de complexes

(1.1.6.1) $$\varphi_{\mathbf{f}^{m-n}} : K_\bullet(\mathbf{f}^m) \to K_\bullet(\mathbf{f}^n)$$

et par suite des homomorphismes

(1.1.6.2) $$\varphi_{\mathbf{f}^{m-n}} : K^\bullet(\mathbf{f}^n, M) \to K^\bullet(\mathbf{f}^m, M)$$

(1.1.6.3) $$\varphi_{\mathbf{f}^{m-n}} : H^\bullet(\mathbf{f}^n, M) \to H^\bullet(\mathbf{f}^m, M).$$

Ces derniers vérifient évidemment la condition de transitivité $\varphi_{\mathbf{f}^m-p}=\varphi_{\mathbf{f}^m-n}\circ\varphi_{\mathbf{f}^n-p}$ pour $p\leqslant n\leqslant m$; ils définissent donc deux *systèmes inductifs* de A-modules; on posera

$$(\mathbf{1.1.6.4})\qquad \mathrm{C}^{\bullet}((\mathbf{f}),\mathrm{M}) = \varinjlim_{n} \mathrm{K}^{\bullet}(\mathbf{f}^n,\mathrm{M})$$

$$(\mathbf{1.1.6.5})\qquad \mathrm{H}^{\bullet}((\mathbf{f}),\mathrm{M}) = \mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{C}^{\bullet}((\mathbf{f}),\mathrm{M})) = \varinjlim_{n} \mathrm{H}^{\bullet}(\mathbf{f}^n,\mathrm{M})$$

la dernière égalité provenant du fait que le passage à la limite inductive permute au foncteur $\mathrm{H}^{\bullet}$ (G, I, 2.1). On verra ultérieurement (1.4.3) que $\mathrm{H}^{\bullet}((\mathbf{f}),\mathrm{M})$ ne dépend en fait que de l'*idéal* $(\mathbf{f})$ dans A (et même de la topologie $(\mathbf{f})$-préadique sur A), ce qui justifie les notations.

Il est clair que $\mathrm{M}\rightsquigarrow\mathrm{C}^{\bullet}((\mathbf{f}),\mathrm{M})$ est un foncteur A-linéaire exact, et $\mathrm{M}\rightsquigarrow\mathrm{H}^{\bullet}((\mathbf{f}),\mathrm{M})$ un foncteur cohomologique.

(1.1.7) Soient $\mathbf{f}=(f_i)\in\mathrm{A}^r$, $\mathbf{g}=(g_i)\in\mathrm{A}^r$; désignons par $e_{\mathbf{g}}$ la multiplication à gauche par le vecteur $\mathbf{g}\in\mathrm{A}^r$ dans l'algèbre extérieure $\wedge(\mathrm{A}^r)$; on sait que l'on a la *formule d'homotopie*

$$(\mathbf{1.1.7.1})\qquad i_{\mathbf{f}}e_{\mathbf{g}}+e_{\mathbf{g}}i_{\mathbf{f}}=\langle\mathbf{g},\mathbf{f}\rangle 1$$

dans le A-module A^r (1 désignant l'automorphisme identique de A^r); cette relation signifie aussi que, *dans le complexe* $\mathrm{K}_{\bullet}(\mathbf{f})$, on a

$$(\mathbf{1.1.7.2})\qquad de_{\mathbf{g}}+e_{\mathbf{g}}d=\langle\mathbf{g},\mathbf{f}\rangle 1.$$

Si l'idéal $(\mathbf{f})$ est égal à A, il existe $\mathbf{g}\in\mathrm{A}^r$ tel que $\langle\mathbf{g},\mathbf{f}\rangle=\sum_{i=1}^{r} g_i f_i=1$. Par suite (G, I, 2.4) :

Proposition **(1.1.8)**. — *Supposons que l'idéal* $(\mathbf{f})$ *engendré par les* f_i *soit égal à* A. *Alors le complexe* $\mathrm{K}_{\bullet}(\mathbf{f})$ *est homotopiquement trivial, et il en est donc de même des complexes* $\mathrm{K}_{\bullet}(\mathbf{f},\mathrm{M})$ *et* $\mathrm{K}^{\bullet}(\mathbf{f},\mathrm{M})$ *pour tout* A-*module* M.

Corollaire **(1.1.9)**. — *Si* $(\mathbf{f})=\mathrm{A}$, *on a* $\mathrm{H}^{\bullet}(\mathbf{f},\mathrm{M})=0$ *et* $\mathrm{H}^{\bullet}((\mathbf{f}),\mathrm{M})=0$ *pour tout* A-*module* M.

En effet, on a alors $(\mathbf{f}^n)=\mathrm{A}$ pour tout n.

Remarque **(1.1.10)**. — Avec les mêmes notations que ci-dessus, soient $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, Y le sous-schéma fermé de X défini par l'idéal $(\mathbf{f})$. Nous prouverons au § 9 que $\mathrm{H}^{\bullet}((\mathbf{f}),\mathrm{M})$ est isomorphe à la cohomologie $\mathrm{H}^{\bullet}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X},\widetilde{\mathrm{M}})$ correspondant à l'antifiltre Φ des parties fermées de Y (T, 3.2). Nous montrerons aussi que la prop. (1.2.3) appliquée à X et à $\mathscr{F}=\widetilde{\mathrm{M}}$, est un cas particulier d'une suite exacte de cohomologie

$$\ldots\to\mathrm{H}^p_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X},\mathscr{F})\to\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathscr{F})\to\mathrm{H}^p(\mathrm{X}-\mathrm{Y},\mathscr{F})\to\mathrm{H}^{p+1}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X},\mathscr{F})\to\ldots$$

1.2. Cohomologie de Čech d'un recouvrement ouvert.

(1.2.1) *Notations*. — Dans ce numéro, on notera :

X un préschéma;

$\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module quasi-cohérent;

$A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$;

$\mathbf{f} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ un système fini d'éléments de A;

$U_i = X_{f_i}$ l'ensemble ouvert ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.5.2) des $x \in X$ tels que $f_i(x) \neq 0$;

$U = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$;

$\mathfrak{U}$ le recouvrement $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de U.

(1.2.2) Supposons que X soit, ou bien un préschéma dont l'espace sous-jacent est *noethérien*, ou bien un *schéma* dont l'espace sous-jacent soit *quasi-compact*. On sait alors (**I**, 9.3.3) que l'on a $\Gamma(U_i, \mathcal{F}) = M_{f_i}$. Nous poserons

$$U_{i_0 i_1 \ldots i_p} = \bigcap_{k=0}^{p} U_{i_k} = X_{f_{i_0} f_{i_1} \ldots f_{i_p}}$$

($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.5.3); on a donc aussi

$$\Gamma(U_{i_0 i_1 \ldots i_p}, \mathcal{F}) = M_{f_{i_0} f_{i_1} \ldots f_{i_p}} \tag{1.2.2.1}$$

Or ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 1.6.1) $M_{f_{i_0} f_{i_1} \ldots f_{i_p}}$ s'identifie à la limite inductive $\varinjlim_n M^{(n)}_{i_0 i_1 \ldots i_p}$, où le système inductif est formé des $M^{(n)}_{i_0 i_1 \ldots i_p} = M$, l'homomorphisme $\varphi_{nm} : M^{(m)}_{i_0 i_1 \ldots i_p} \to M^{(n)}_{i_0 i_1 \ldots i_p}$ étant la multiplication par $(f_{i_0} f_{i_1} \ldots f_{i_p})^{n-m}$ pour $m \leqslant n$. Désignons par $C^p_n(M)$ l'ensemble des applications *alternées* de $[1, r]^{p+1}$ dans M (pour tout n); ces A-modules forment encore un système inductif pour les φ_{nm}. Si $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ est le groupe des p-cochaînes *alternées* de Čech relatif au recouvrement $\mathfrak{U}$, à coefficients dans $\mathcal{F}$ (G, II, 5.1), il résulte de ce qui précède que l'on peut écrire

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \varinjlim_n C^p_n(M). \tag{1.2.2.2}$$

Or, avec les notations de (1.1.2), $C^p_n(M)$ s'identifie à $K^{p+1}(\mathbf{f}^n, M)$, et l'application φ_{nm} s'identifie à l'application $\varphi_{\mathbf{f}^{n-m}}$ définie dans (1.1.6). On a donc, pour tout $p \geqslant 0$, un isomorphisme canonique fonctoriel en $\mathcal{F}$

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \simeq C^{p+1}((\mathbf{f}), M). \tag{1.2.2.3}$$

En outre, la formule (1.1.2.3) et la définition de la cohomologie d'un recouvrement (G, II, 5.1) montrent que les isomorphismes (1.2.2.3) sont compatibles avec les opérateurs cobords.

Proposition **(1.2.3)**. — *Si* X *est un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, ou un schéma dont l'espace sous-jacent est quasi-compact, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel en* $\mathcal{F}$

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \simeq H^{p+1}((\mathbf{f}), M) \quad \textit{pour tout } p \geqslant 1. \tag{1.2.3.1}$$

On a en outre une suite exacte fonctorielle en $\mathcal{F}$

$$0 \to H^0((\mathbf{f}), M) \to M \to H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1((\mathbf{f}), M) \to 0. \tag{1.2.3.2}$$

Les relations (1.2.3.1) sont en effet conséquences immédiates de ce qu'on a vu dans (1.2.2). D'autre part, on a $C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = C^1((\mathbf{f}), M)$; $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ s'identifie par suite au sous-groupe des 1-cocycles de $C^1((\mathbf{f}), M)$; comme $M = C^0((\mathbf{f}), M)$, la suite exacte (1.2.3.2) n'est autre que celle qui résulte de la définition des groupes de cohomologie $H^0((\mathbf{f}), M)$ et $H^1((\mathbf{f}), M)$.

Corollaire (**1.2.4**). — *Supposons que les* X_{f_i} *soient quasi-compacts et qu'il existe des* $g_i \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ *tels que* $\sum_i g_i(f_i|U) = 1|U$. *Alors, pour tout* $(\mathcal{O}_X|U)$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{G}$, *on a* $H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) = 0$ *pour* $p>0$; *si en outre* $U = X$, *l'homomorphisme canonique* (1.2.3.2) $M \to H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ *est bijectif.*

Comme par hypothèse les $U_i = X_{f_i}$ sont quasi-compacts, il en est de même de U, et on peut donc se borner au cas où $U = X$; l'hypothèse entraîne alors $H^p((\mathbf{f}), M) = 0$ pour tout $p \geqslant 0$ (1.1.9). Le corollaire résulte alors aussitôt de (1.2.3.1) et (1.2.3.2).

On observera que puisque $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = H^0(U, \mathscr{F})$ (G, II, 5.2.2), on a ainsi démontré à nouveau (**I**, 1.3.7) comme cas particulier.

Remarque (**1.2.5**). — Supposons que X soit un *schéma affine*; alors les $U_i = X_{f_i} = D(f_i)$ sont des ouverts affines, ainsi que les $U_{i_0 i_1 \dots i_p}$ (mais U n'est pas nécessairement affine). Dans ce cas, les foncteurs $\Gamma(X, \mathscr{F})$ et $\Gamma(U_{i_0 i_1 \dots i_p}, \mathscr{F})$ sont exacts en $\mathscr{F}$ (**I**, 1.3.11). Si on a une suite exacte $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ de $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents, la suite des complexes

$$0 \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}') \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}'') \to 0$$

est exacte, et donne donc une suite exacte de cohomologie

$$\dots \to H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}') \to H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}'') \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}') \to \dots$$

D'autre part, si on pose $M' = \Gamma(X, \mathscr{F}')$, $M'' = \Gamma(X, \mathscr{F}'')$, la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est exacte; comme $C^\bullet((\mathbf{f}), M)$ est un foncteur exact en M, on a aussi la suite exacte de cohomologie

$$\dots \to H^p((\mathbf{f}), M') \to H^p((\mathbf{f}), M) \to H^p((\mathbf{f}), M'') \xrightarrow{\partial} H^{p+1}((\mathbf{f}), M') \to \dots$$

Cela étant, comme le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}') & \longrightarrow & C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) & \longrightarrow & C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C^\bullet((\mathbf{f}), M') & \to & C^\bullet((\mathbf{f}), M) & \to & C^\bullet((\mathbf{f}), M'') & \to & 0
\end{array}$$

est commutatif, on en conclut que les diagrammes

$$(\mathbf{1.2.5.1})\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}'') & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{H}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}') \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mathrm{H}^{p+1}((\mathbf{f}), \mathrm{M}'') & \underset{\partial}{\rightarrow} & \mathrm{H}^{p+2}((\mathbf{f}), \mathrm{M}') \end{array}$$

sont commutatifs pour tout p (G, I, 2.1.1).

1.3. Cohomologie d'un schéma affine.

Théorème (**1.3.1**). — *Soit* X *un schéma affine. Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *on a* $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F})=0$ *pour tout* $p>0$.

Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines $\mathrm{X}_{f_i}=\mathrm{D}(f_i)$ $(1\leqslant i\leqslant r)$; on sait qu'alors l'idéal engendré dans $\mathrm{A}=\Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ par les f_i est égal à A. On conclut donc de (1.2.4) que l'on a $\mathrm{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})=0$ pour $p>0$. Comme il y a des recouvrements finis de X par des ouverts affines qui sont arbitrairement fins (**I**, 1.1.10), la définition de la cohomologie de Čech (G, II, 5.8) montre que l'on a aussi $\check{\mathrm{H}}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F})=0$ pour $p>0$. Mais ceci s'applique aussi à tout préschéma X_f pour $f\in\mathrm{A}$ (**I**, 1.3.6), donc $\check{\mathrm{H}}^p(\mathrm{X}_f, \mathscr{F})=0$ pour $p>0$. Comme l'on a $\mathrm{X}_f\cap\mathrm{X}_g=\mathrm{X}_{fg}$, on en déduit que l'on a aussi $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F})=0$ pour tout $p>0$, en vertu de (G, II, 5.9.2).

Corollaire (**1.3.2**). — *Soient* Y *un préschéma*, $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ *un morphisme affine* (**II**, 1.6.1). *Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *on a* $\mathrm{R}^qf_*(\mathscr{F})=0$ *pour* $q>0$.

En effet, par définition $\mathrm{R}^qf_*(\mathscr{F})$ est le $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-Module associé au préfaisceau $\mathrm{U}\rightsquigarrow\mathrm{H}^q(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathscr{F})$, U parcourant les ouverts de Y. Mais les ouverts affines forment une base de Y, et pour un tel ouvert U, $f^{-1}(\mathrm{U})$ est affine (**II**, 1.3.2), donc $\mathrm{H}^q(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathscr{F})=0$ par (1.3.1), ce qui démontre le corollaire.

Corollaire (**1.3.3**). — *Soient* Y *un préschéma*, $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ *un morphisme affine. Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *l'homomorphisme canonique* $\mathrm{H}^p(\mathrm{Y},f_*(\mathscr{F}))\rightarrow\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ (**0**, 12.1.3.1) *est bijectif pour tout* p.

En effet, il suffit (en vertu de (**0**, 12.1.7)) de montrer que les edge-homomorphismes $''\mathrm{E}_2^{p0}=\mathrm{H}^p(\mathrm{Y},f_*(\mathscr{F}))\rightarrow\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ de la seconde suite spectrale du foncteur composé Γf_* sont bijectifs. Mais le terme E_2 de cette suite est donné par $''\mathrm{E}_2^{pq}=\mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \mathrm{R}^qf_*(\mathscr{F}))$ (G, II, 4.17.1), donc il résulte de (1.3.2) que $''\mathrm{E}_2^{pq}=0$ pour $q>0$, et la suite spectrale dégénère; d'où notre assertion (**0**, 11.1.6).

Corollaire (**1.3.4**). — *Soient* $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ *un morphisme affine*, $g:\mathrm{Y}\rightarrow\mathrm{Z}$ *un morphisme.*

Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, l'homomorphisme canonique $\mathrm{R}^p g_*(f_*(\mathcal{F})) \to \mathrm{R}^p(g \circ f)_*(\mathcal{F})$ (**0**, 12.2.5.1) *est bijectif pour tout p.*

Il suffit de remarquer que, d'après (1.3.3), pour tout ouvert affine W de Z, l'homomorphisme canonique $\mathrm{H}^p(g^{-1}(\mathrm{W}), f_*(\mathcal{F})) \to \mathrm{H}^p(f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{W})), \mathcal{F})$ est bijectif; cela prouve que l'homomorphisme de préfaisceaux définissant l'homomorphisme canonique $\mathrm{R}^p g_*(f_*(\mathcal{F})) \to \mathrm{R}^p(g \circ f)_*(\mathcal{F})$ est bijectif (**0**, 12.2.5).

1.4. Application à la cohomologie des préschémas quelconques.

Proposition **(1.4.1)**. — *Soient* X *un schéma,* $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)$ *un recouvrement de* X *par des ouverts affines. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, les modules de cohomologie* $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ *et* $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ (*sur* $\Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$) *sont canoniquement isomorphes.*

En effet, comme X est un schéma, toute intersection finie V d'ouverts du recouvrement $\mathfrak{U}$ est affine (**I**, 5.5.6), donc $\mathrm{H}^q(\mathrm{V}, \mathcal{F}) = 0$ pour $q \geqslant 1$ en vertu de (1.3.1). La proposition résulte alors du th. de Leray (G, II, 5.4.1).

Remarque **(1.4.2)**. — On notera que la conclusion de (1.4.1) est encore valable lorsque les intersections finies des ensembles U_α sont affines, même lorsque l'on ne suppose pas nécessairement que X soit un schéma.

Corollaire **(1.4.3)**. — *Soient* X *un schéma dont l'espace sous-jacent est quasi-compact,* $\mathrm{A} = \Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$, $\mathbf{f} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ *une suite finie d'éléments de* A *tels que les* X_{f_i} (*notations de* (1.2.1)) *soient affines. Alors* (*avec les notations de* (1.2.1)), *pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel en $\mathcal{F}$*

(1.4.3.1) $$\mathrm{H}^q(\mathrm{U}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{H}^{q+1}((\mathbf{f}), \mathrm{M}) \qquad \textit{pour } q \geqslant 1$$

et une suite exacte fonctorielle en $\mathcal{F}$

(1.4.3.2) $$0 \to \mathrm{H}^0((\mathbf{f}), \mathrm{M}) \to \mathrm{M} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{U}, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^1((\mathbf{f}), \mathrm{M}) \to 0.$$

Cela résulte en effet aussitôt de (1.4.1) et (1.2.3).

(1.4.4) Si X est un *schéma affine*, il résulte de (1.2.5) et (1.4.1) que pour tout $q \geqslant 0$, les diagrammes

(1.4.4.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^q(\mathrm{U}, \mathcal{F}'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \mathrm{H}^{q+1}(\mathrm{U}, \mathcal{F}') \arrow[d] \\
\mathrm{H}^{q+1}((\mathbf{f}), \mathrm{M}'') \arrow[r, "\partial"'] & \mathrm{H}^{q+2}((\mathbf{f}), \mathrm{M}')
\end{tikzcd}$$

correspondant à une suite exacte $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ de $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents (avec les notations de (1.2.5)), sont commutatifs.

Proposition **(1.4.5).** — *Soient* X *un schéma quasi-compact,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible, et considérons l'anneau gradué* $A_* = \Gamma_*(\mathscr{L})$ ($\mathbf{0}_I$, 5.4.6); *alors* $H^\bullet(\mathscr{F}, \mathscr{L}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^\bullet(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$ *est un* A_**-module gradué, et pour tout* $f \in A_n$, *on a un isomorphisme canonique*

$$(1.4.5.1) \qquad H^\bullet(X_f, \mathscr{F}) \simeq (H^\bullet(\mathscr{F}, \mathscr{L}))_{(f)}$$

de $(A_*)_{(f)}$*-modules.*

Comme X est un schéma quasi-compact, on peut calculer la cohomologie de tous les $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ à l'aide d'un même recouvrement fini $\mathfrak{U} = (U_i)$ par des ouverts affines tels que la restriction $\mathscr{L}|U_i$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_X|U_i$ pour chaque i (1.4.1). Il est alors immédiat que les $U_i \cap X_f$ sont des ouverts affines (**I**, 1.3.6), et l'on peut donc aussi calculer la cohomologie $H^\bullet(X_f, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$ à l'aide du recouvrement $\mathfrak{U}|X_f = (U_i \cap X_f)$ (1.4.1). Il est immédiat que pour tout $f \in A_n$, la multiplication par f définit un homomorphisme $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes (m+n)})$, d'où un homomorphisme $H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) \to H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes (m+n)})$, ce qui établit la première assertion. D'autre part, pour $f \in A_n$ donné, il résulte de (**I**, 9.3.2) que l'on a un isomorphisme de complexes de $(A_*)_{(f)}$-modules

$$C^\bullet(\mathfrak{U}|X_f, \mathscr{F}) \simeq (C^\bullet(\mathfrak{U}, \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}))_{(f)}$$

compte tenu de (**I**, 1.3.9, (ii)). Passant à la cohomologie de ces deux complexes, on en déduit l'isomorphisme (1.4.5.1), en se souvenant que le foncteur $M \rightsquigarrow M_{(f)}$ est exact dans la catégorie des A_*-modules gradués.

Corollaire **(1.4.6).** — *On suppose vérifiées les hypothèses de* (1.4.5) *et on suppose en outre que* $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X$. *Si on pose* $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, *alors, pour tout* $f \in A$, *on a un isomorphisme canonique* $H^\bullet(X_f, \mathscr{F}) \simeq (H^\bullet(X, \mathscr{F}))_f$ *de* A_f*-modules.*

Corollaire **(1.4.7).** — *Soient* X *un schéma quasi-compact,* f *un élément de* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

(i) *Supposons l'ouvert* X_f *affine. Alors, pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *tout* $i > 0$ *et tout* $\xi \in H^i(X, \mathscr{F})$, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $f^n \xi = 0$.

(ii) *Inversement, supposons que* X_f *soit quasi-compact et que pour tout faisceau quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ *d'idéaux de* $\mathcal{O}_X$ *et tout* $\zeta \in H^1(X, \mathscr{J})$, *il existe* $n > 0$ *tel que* $f^n \zeta = 0$. *Alors* X_f *est affine.*

(i) Si X_f est affine, on a $H^i(X_f, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $i > 0$ (1.3.1), donc l'assertion résulte directement de (1.4.6).

(ii) En vertu du critère de Serre (**II**, 5.2.1), il suffit de prouver que pour tout Idéal quasi-cohérent $\mathscr{K}$ de $\mathcal{O}_X|X_f$, on a $H^1(X_f, \mathscr{K}) = 0$. Comme X_f est un ouvert quasi-compact dans un schéma quasi-compact X, il existe un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_X$ tel que $\mathscr{K} = \mathscr{J}|X_f$ (**I**, 9.4.2). En vertu de (1.4.6), on a $H^1(X_f, \mathscr{K}) = (H^1(X, \mathscr{J}))_f$, et l'hypothèse entraîne que le second membre est nul, d'où la conclusion.

Remarque **(1.4.8).** — On notera que (1.4.7, (i)) redonne une démonstration plus simple de la relation (**II**, 4.5.13.2).

Lemme **(1.4.9).** — *Soient* X *un schéma quasi-compact,* $\mathfrak{U} = (U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un recouvrement fini de* X *par des ouverts affines,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent. Le complexe de faisceaux* $\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ *défini par le recouvrement* $\mathfrak{U}$ (G, II, 5.2) *est alors un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent.*

Il résulte des définitions (G, II, 5.2) que $\mathscr{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ est somme directe des faisceaux images directes des $\mathscr{F}|U_{i_0 \ldots i_p}$ par l'injection canonique $U_{i_0 \ldots i_p} \rightarrow X$. Or, l'hypothèse que X est un schéma entraîne que ces injections sont des morphismes affines (**I**, 5.5.6), donc les $\mathscr{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ sont quasi-cohérents (**II**, 1.2.6).

Proposition **(1.4.10).** — *Soit* $u : X \rightarrow Y$ *un morphisme séparé et quasi-compact. Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *les* $R^q u_*(\mathscr{F})$ *sont des* $\mathcal{O}_Y$*-Modules quasi-cohérents.*

La question étant locale sur Y, on peut supposer Y affine. Alors X est réunion finie d'ouverts affines U_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; soit $\mathfrak{U}$ le recouvrement (U_i). En outre, comme Y est un schéma, il résulte de (**I**, 5.5.10) que pour tout ouvert affine $V \subset Y$, l'injection canonique $u^{-1}(V) \rightarrow X$ est un morphisme affine; on en conclut ((1.4.1) et (G, II, 5.2)) que l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^\bullet(u^{-1}(V), \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^\bullet(\Gamma(V, \mathscr{K}^\bullet)) \tag{1.4.10.1}$$

où l'on a posé $\mathscr{K}^\bullet = u_*(\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}))$. En vertu de (1.4.9) et (**I**, 9.2.2), $\mathscr{K}^\bullet$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module quasi-cohérent; par ailleurs, il constitue un *complexe de faisceaux* puisqu'il en est ainsi de $\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$. Il résulte alors de la définition de la cohomologie $\mathscr{H}^\bullet(\mathscr{K}^\bullet)$ (G, II, 4.1) que cette dernière est formée de $\mathcal{O}_Y$-Modules quasi-cohérents (**I**, 4.1.1). Comme (pour V affine dans Y) le foncteur $\Gamma(V, \mathscr{G})$ est exact en $\mathscr{G}$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-Modules quasi-cohérents, on a (G, II, 4.1)

$$\mathrm{H}^\bullet(\Gamma(V, \mathscr{K}^\bullet)) = \Gamma(V, \mathscr{H}^\bullet(\mathscr{K}^\bullet)). \tag{1.4.10.2}$$

Notons enfin qu'il résulte de la définition de l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \rightarrow \mathrm{H}^\bullet(X, \mathscr{F})$$

donnée dans (G, II, 5.2), que si $V' \subset V$ est un second ouvert affine de Y, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^\bullet(u^{-1}(V), \mathscr{F}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^\bullet(\Gamma(V, \mathscr{K}^\bullet)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^\bullet(u^{-1}(V'), \mathscr{F}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^\bullet(\Gamma(V', \mathscr{K}^\bullet)) \end{array}$$

est commutatif. On conclut donc de ce qui précède que les isomorphismes (1.4.10.1) définissent un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-Modules

$$\mathrm{R}^\bullet u_*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^\bullet(\mathscr{K}^\bullet) \tag{1.4.10.3}$$

et par suite $R^{\cdot}u_{*}(\mathscr{F})$ est quasi-cohérent. Il résulte en outre de (1.4.10.3), (1.4.10.2) et (1.4.10.1) que :

Corollaire **(1.4.11).** — *Sous les hypothèses de* (1.4.10), *pour tout ouvert affine* V *de* Y, *l'homomorphisme canonique*

$$\text{(1.4.11.1)} \qquad H^q(u^{-1}(V), \mathscr{F}) \to \Gamma(V, R^q u_{*}(\mathscr{F}))$$

est un isomorphisme pour tout $q \geqslant 0$.

Corollaire **(1.4.12).** — *Supposons vérifiées les hypothèses de* (1.4.10) *et supposons en outre que* Y *soit quasi-compact. Alors il existe un entier* $r>0$ *tel que pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *et tout entier* $q>r$, *on ait* $R^q u_{*}(\mathscr{F})=0$. *Si* Y *est affine, on peut prendre pour* r *un entier tel qu'il existe un recouvrement de* X *formé de* r *ouverts affines.*

Comme on peut recouvrir Y par un nombre fini d'ouverts affines, on est ramené à démontrer la seconde assertion, en vertu de (1.4.11). Or, si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement de X par r ouverts affines, on a $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})=0$ pour $q>r$, puisque les cochaînes de $C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ sont alternées; la conclusion résulte donc de (1.4.1).

Corollaire **(1.4.13).** — *Supposons vérifiées les hypothèses de* (1.4.10) *et en outre supposons que* $Y=\operatorname{Spec}(A)$ *soit affine. Alors, pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *et tout* $f\in A$, *on a*

$$\Gamma(Y_f, R^q u_{*}(\mathscr{F})) = (\Gamma(Y, R^q u_{*}(\mathscr{F})))_f$$

à un isomorphisme canonique près.

En effet, cela résulte de ce que $R^q u_{*}(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module quasi-cohérent (**I**, 1.3.7).

Proposition **(1.4.14).** — *Soient* $f: X\to Y$ *un morphisme séparé quasi-compact,* $g: Y\to Z$ *un morphisme affine. Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *l'homomorphisme canonique* $R^p(g\circ f)_{*}(\mathscr{F})\to g_{*}(R^p f_{*}(\mathscr{F}))$ (**0**, 12.2.5.2) *est bijectif pour tout* p.

En effet, pour tout ouvert affine W de Z, $g^{-1}(W)$ est un ouvert affine de Y. L'homomorphisme de préfaisceaux définissant l'homomorphisme canonique

$$R^p(g\circ f)_{*}(\mathscr{F}) \to g_{*}(R^p f_{*}(\mathscr{F}))$$

(**0**, 12.2.5) est donc bijectif en vertu de (1.4.11).

Proposition **(1.4.15).** — *Soient* $u: X\to Y$ *un morphisme séparé de type fini,* $v: Y'\to Y$ *un morphisme plat de préschémas* ($\mathbf{0}_I$, 6.7.1); *soit* $u'=u_{(Y')}$, *de sorte qu'on a le diagramme commutatif*

$$\text{(1.4.15.1)} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{v'} & X'=X_{(Y')} \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} \\ Y & \xleftarrow[v]{} & Y' \end{array}.$$

Alors, pour tout $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, $R^q u'_{*}(\mathscr{F}')$, *où* $\mathscr{F}'=v'^{*}(\mathscr{F})=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{Y'}$, *est canoniquement isomorphe à* $R^q u_{*}(\mathscr{F})\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{Y'}=v^{*}(R^q u_{*}(\mathscr{F}))$ *pour tout* $q\geqslant 0$.

L'homomorphisme canonique $\rho : \mathscr{F} \to v'_*(v'^*(\mathscr{F}))$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 4.4.3.2)$ définit par fonctorialité un homomorphisme

(1.4.15.2) $$\mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F}) \to \mathrm{R}^q u_*(v'_*(\mathscr{F}')).$$

D'autre part, on a, en posant $w = u \circ v' = v \circ u'$, les homomorphismes canoniques (**0**, 12.2.5.1 et 12.2.5.2)

(1.4.15.3) $$\mathrm{R}^q u_*(v'_*(\mathscr{F}')) \to \mathrm{R}^q w_*(\mathscr{F}') \to v_*(\mathrm{R}^q u'_*(\mathscr{F}')).$$

Composant (1.4.15.3) et (1.4.15.2), on a un homomorphisme

$$\psi : \mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F}) \to v_*(\mathrm{R}^q u'_*(\mathscr{F}'))$$

et finalement on en déduit l'homomorphisme canonique (dont la définition ne fait intervenir *aucune hypothèse* sur v)

(1.4.15.4) $$\psi^\# : v^*(\mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F})) \to \mathrm{R}^q u'_*(\mathscr{F}')$$

dont il s'agit de prouver que c'est un isomorphisme lorsque v est *plat*. Il est clair que la question est locale sur Y et Y′ et l'on peut donc supposer que $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$; nous utiliserons en outre le

Lemme **(1.4.15.5).** — *Soient* $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un homomorphisme d'anneaux,* $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *le morphisme correspondant à* φ, M *un* B*-module. Pour que le* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module* $\widetilde{\mathrm{M}}$ *soit f-plat* $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.7.1)$, *il faut et il suffit que* M *soit un* A*-module plat. En particulier, pour que le morphisme f soit plat, il faut et il suffit que* B *soit un* A*-module plat.*

En effet, cela résulte de la définition $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.7.1)$ et de $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.3.3)$, compte tenu de (**I**, 1.3.4).

Cela étant, il résulte de (1.4.11.1) et des définitions des homomorphismes (1.4.15.3) (cf. **0**, 12.2.5) que ψ correspond alors au morphisme composé

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\rho_q} \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, v'_*(v'^*(\mathscr{F}))) \xrightarrow{\theta_q} \mathrm{H}^q(\mathrm{X}', v'^*(v'_*(v'^*(\mathscr{F})))) \xrightarrow{\sigma_q} \mathrm{H}^q(\mathrm{X}', v'^*(\mathscr{F}))$$

où ρ_q et σ_q sont les homomorphismes correspondant dans la cohomologie aux morphismes canoniques ρ et $\sigma : v'^*(v'_*(\mathscr{G}')) \to \mathscr{G}'$, et θ_q est le φ-morphisme (**0**, 12.1.3.1) relatif au $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module $v'_*(v'^*(\mathscr{F}))$. Mais par fonctorialité de θ_q, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathscr{F}) & \xrightarrow{\rho_q} & \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, v'_*(v'^*(\mathscr{F}))) \\
\downarrow{\scriptstyle \theta_q} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_q} \\
\mathrm{H}^q(\mathrm{X}', v'^*(\mathscr{F})) & \xrightarrow[v'^*(\rho_q)]{} & \mathrm{H}^q(\mathrm{X}', v'^*(v'_*(v'^*(\mathscr{F}))))
\end{array}$$

et comme par définition ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.4.3), $v'^{*}(\rho)$ est l'inverse de σ, on voit que le morphisme composé considéré plus haut n'est autre finalement que θ_q; $\psi^{\#}$ est par suite le B-homomorphisme associé $\mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathscr{F})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{H}^q(\mathrm{X}', \mathscr{F}')$. Comme u est de type fini, X est réunion finie d'ouverts affines U_i ($1\leqslant i\leqslant r$); soit $\mathfrak{U}$ le recouvrement (U_i). D'ailleurs v est un morphisme affine, donc il en est de même de v' (**II**, 1.6.2, (iii)), et les $\mathrm{U}'_i=v'^{-1}(\mathrm{U}_i)$ forment par suite un recouvrement ouvert affine $\mathfrak{U}'$ de X'. On sait alors (**0**, 12.1.4.2) que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) & \xrightarrow{\theta_q} & \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathscr{F}) & \xrightarrow[\theta_q]{} & \mathrm{H}^q(\mathrm{X}', \mathscr{F}') \end{array}$$

est commutatif, et les flèches verticales sont des isomorphismes puisque X et X' sont des schémas (1.4.1). Il suffit par suite de prouver que le φ-morphisme canonique $\theta_q : \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\rightarrow\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')$ est tel que le B-homomorphisme associé :

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')$$

soit un isomorphisme. Pour toute suite $\mathbf{s}=(i_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ de $p+1$ indices de $[1, r]$, posons $\mathrm{U}_{\mathbf{s}}=\bigcap_{k=0}^{p}\mathrm{U}_{i_k}$, $\mathrm{U}'_{\mathbf{s}}=\bigcap_{k=0}^{p}\mathrm{U}'_{i_k}=v'^{-1}(\mathrm{U}_{\mathbf{s}})$, $\mathrm{M}_{\mathbf{s}}=\Gamma(\mathrm{U}_{\mathbf{s}}, \mathscr{F})$, $\mathrm{M}'_{\mathbf{s}}=\Gamma(\mathrm{U}'_{\mathbf{s}}, \mathscr{F}')$. L'application canonique $\mathrm{M}_{\mathbf{s}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{M}'_{\mathbf{s}}$ est un isomorphisme (**I**, 1.6.5), donc l'application canonique $\mathrm{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{C}^p(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')$ est un isomorphisme, par lequel $d\otimes 1$ s'identifie à l'opérateur cobord $\mathrm{C}^p(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')\rightarrow\mathrm{C}^{p+1}(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')$. Comme B est un A-module *plat*, il résulte aussitôt de la définition des modules de cohomologie que l'application canonique $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')$ est un isomorphisme ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.1.1). Ce résultat sera généralisé plus tard (§ 6).

Corollaire (**1.4.16**). — *Soient* A *un anneau*, X *un* A*-schéma de type fini*, B *une* A*-algèbre fidèlement plate sur* A. *Pour que* X *soit affine, il faut et il suffit que* $\mathrm{X}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ *le soit.*

La condition est évidemment nécessaire (**I**, 3.2.2); montrons qu'elle est suffisante. Comme X est séparé sur A et que le morphisme Spec(B)$\rightarrow$Spec(A) est plat, il résulte de (1.4.1) que l'on a

$$(\mathbf{1.4.16.1})\qquad \mathrm{H}^i(\mathrm{X}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}, \mathscr{F}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B})=\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}$$

pour tout $i\geqslant 0$ et tout $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$. Si $\mathrm{X}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ est affine, le premier membre de (1.4.16.1) est nul pour $i=1$, donc il en est de même de $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ puisque B est un A-module fidèlement plat. Comme X est un schéma quasi-compact, on conclut par le critère de Serre (**II**, 5.2.1).

Proposition (**1.4.17**). — *Soient* X *un préschéma*, $0\rightarrow\mathscr{F}\xrightarrow{u}\mathscr{G}\xrightarrow{v}\mathscr{H}\rightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Modules. Si* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{H}$ *sont quasi-cohérents, il en est de même de* $\mathscr{G}$.

La question étant locale sur X, on peut supposer $X=\mathrm{Spec}(A)$ affine et il suffit alors de prouver que $\mathscr{G}$ vérifie les conditions d 1) et d 2) de (**I**, 1.4.1) (avec $V=X$). La vérification de d 2) est immédiate, car si $t\in\Gamma(X,\mathscr{G})$ a une restriction nulle à $D(f)$, il en est de même de son image $v(t)\in\Gamma(X,\mathscr{H})$; il y a donc $m>0$ tel que $f^m v(t)=v(f^m t)=0$ (**I**, 1.4.1), et comme Γ est exact à gauche, $f^m t=u(s)$, où $s\in\Gamma(X,\mathscr{F})$; comme u est injectif, la restriction de s à $D(f)$ est nulle, d'où (**I**, 1.4.1) l'existence d'un entier $n>0$ tel que $f^n s=0$; on en déduit finalement $f^{m+n}t=u(f^n s)=0$.

Vérifions maintenant d 2), et soit $t'\in\Gamma(D(f),\mathscr{G})$; comme $\mathscr{H}$ est quasi-cohérent, il existe un entier m tel que $f^m v(t')=v(f^m t')$ se prolonge en une section $z\in\Gamma(X,\mathscr{H})$ (**I**, 1.4.1). Mais en vertu de (1.3.1) (ou de (**I**, 5.1.9.2)) appliqué au $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, la suite $\Gamma(X,\mathscr{G})\to\Gamma(X,\mathscr{H})\to 0$ est exacte, donc il existe $t\in\Gamma(X,\mathscr{G})$ tel que $z=v(t)$; on voit donc que $v(f^m t'-t'')=0$, en désignant par t'' la restriction de t à $D(f)$; on a donc $f^m t'-t''=u(s')$, où $s'\in\Gamma(D(f),\mathscr{F})$. Mais comme $\mathscr{F}$ est quasi-cohérent, il existe un entier $n>0$ tel que $f^n s'$ se prolonge en une section $s\in\Gamma(X,\mathscr{F})$; comme $f^{m+n}t'-f^n t''=u(f^n s')$, on voit que $f^{m+n}t'$ est la restriction à $D(f)$ de la section $f^n t+u(f^n s)\in\Gamma(X,\mathscr{G})$, ce qui achève la démonstration.

§ 2. ÉTUDE COHOMOLOGIQUE DES MORPHISMES PROJECTIFS

2.1. Calculs explicites de certains groupes de cohomologie.

(2.1.1) Soient X un préschéma, $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_X$-Module inversible; considérons l'anneau gradué ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.4.6)

(2.1.1.1) $$S=\Gamma_*(X,\mathscr{L})=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\Gamma(X,\mathscr{L}^{\otimes n}).$$

Soit $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ une famille finie d'éléments *homogènes* de S, soit $f_i\in S_{d_i}$; posons $U_i=X_{f_i}$, $U=\bigcup_i U_i$, et désignons par $\mathfrak{U}$ le recouvrement (U_i) de U. Pour tout $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, on posera

(2.1.1.2) $$H^\bullet(U,\mathscr{F}(*))=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}H^\bullet(U,\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$$

(2.1.1.3) $$H^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{F}(*))=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}H^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}).$$

Les groupes abéliens (2.1.1.2) et (2.1.1.3) sont *bigradués*, en prenant

$$(H^\bullet(U,\mathscr{F}(*)))_{mn}=H^m(U,\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$$

et une définition analogue pour (2.1.1.3). Pour le deuxième degré, il est clair que ces groupes sont des S-modules gradués, comme il résulte par exemple du fait que $\mathscr{F}\rightsquigarrow H^m(U,\mathscr{F})$ et $\mathscr{F}\rightsquigarrow H^m(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ sont des foncteurs.

(2.1.2) Considérons maintenant le S-module gradué ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.4.6)

(2.1.2.1) $$M=\Gamma_*(\mathscr{L},\mathscr{F})=H^0(X,\mathscr{F}(*))=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\Gamma(X,\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}).$$

Si X est un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, ou un schéma quasi-compact, il résulte de (**I**, 9.3.1) qu'en posant comme d'ordinaire $U_{i_0 i_1 \dots i_p} = \bigcap_{k=0}^{p} U_{i_k}$, on a, à un isomorphisme canonique près,

$$\Gamma(U_{i_0 i_1 \dots i_p}, \mathscr{F}(*)) = H^0(U_{i_0 i_1 \dots i_p}, \mathscr{F}(*)) = M_{f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_p}}.$$

On peut encore, avec les notations de (1.2.2), identifier $M_{f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_p}}$ à $\varinjlim_n M^{(n)}_{i_0 i_1 \dots i_p}$. Cette identification est un isomorphisme de S-modules *gradués*, si l'on définit le degré d'un élément homogène $z \in \varinjlim_n M^{(n)}_{i_0 i_1 \dots i_p}$ de la façon suivante : z est l'image canonique d'un élément homogène $x \in M^{(n)}_{i_0 i_1 \dots i_p} = M$, de degré m; on prend alors pour degré de z le nombre $m - n(d_{i_0} + d_{i_1} + \dots + d_{i_p})$. Tenant compte de la définition des homomorphismes $\varphi_{kh} : M^{(h)}_{i_0 i_1 \dots i_p} \rightarrow M^{(k)}_{i_0 i_1 \dots i_p}$ (1.2.2), on voit aussitôt que cette définition ne dépend pas du « représentant » x de z que l'on a considéré. Désignant comme dans (1.2.2) par $C^p_n(M)$ l'ensemble des applications alternées de $[1, r]^{p+1}$ dans M (pour tout n), on définit de la même manière que ci-dessus une structure de S-module *gradué* sur $\varinjlim_n C^p_n(M)$; on a encore comme dans (1.2.2)

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(*)) = \varinjlim_n C^p_n(M) \tag{2.1.2.2}$$

l'isomorphisme des deux membres *respectant les degrés*. On a alors, comme dans (1.2.2)

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(*)) = C^{p+1}((\mathbf{f}), M) = \varinjlim_n K^{p+1}(\mathbf{f}^n, M) \tag{2.1.2.3}$$

l'isomorphisme *conservant les degrés* : le degré d'un élément de $\varinjlim_n K^{p+1}(\mathbf{f}^n, M)$, image canonique d'une cochaîne $g \in K^{p+1}(\mathbf{f}^n, M)$ dont les valeurs $g(i_0, \dots, i_p)$ sont dans une *même* composante homogène M_m de M, est $m - n(d_{i_0} + \dots + d_{i_p})$, et il est indépendant du choix de cette cochaîne comme représentant de l'élément considéré.

Comme les isomorphismes précédents sont compatibles avec les opérateurs cobords, on en conclut, comme dans (1.2.2) que l'on a :

Proposition (**2.1.3**). — *Soit* X *un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, ou un schéma quasi-compact. Il existe un isomorphisme canonique fonctoriel en* $\mathscr{F}$

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(*)) \simeq H^{p+1}((\mathbf{f}), M) \quad \textit{pour tout } p \geq 1. \tag{2.1.3.1}$$

On a en outre une suite exacte fonctorielle en $\mathscr{F}$

$$0 \rightarrow H^0((\mathbf{f}), M) \rightarrow M \rightarrow H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(*)) \rightarrow H^1((\mathbf{f}), M) \rightarrow 0. \tag{2.1.3.2}$$

De plus, tous les homomorphismes introduits sont de degré 0 *pour les structures de* S-*modules gradués* (S *étant l'anneau* (2.1.1.1)).

Corollaire **(2.1.4)**. — *Si* X *est un schéma quasi-compact et si les* $U_i = X_{f_i}$ *sont affines, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel en* $\mathscr{F}$, *de degré* 0,

$$\text{(2.1.4.1)} \qquad H^p(U, \mathscr{F}(*)) \cong H^{p+1}((\mathbf{f}), M) \qquad \textit{pour } p \geqslant 1$$

et une suite exacte fonctorielle en $\mathscr{F}$

$$\text{(2.1.4.2)} \qquad 0 \to H^0((\mathbf{f}), M) \to M \to H^0(U, \mathscr{F}(*)) \to H^1((\mathbf{f}), M) \to 0$$

où tous les homomorphismes sont de degré 0.

Il suffit en effet d'appliquer (1.4.1) au résultat de (2.1.3).

La proposition « locale » analogue à (2.1.3) est la suivante :

Proposition **(2.1.5)**. — *Soient* S *un anneau gradué à degrés positifs,* f_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *un élément homogène de* S_+ *de degré* d_i, M *un* S-*module gradué. Soit* $X = \mathrm{Proj}(S)$ *le spectre premier homogène de* S *et posons* $U_i = D_+(f_i)$, $U = \bigcup_i U_i$, $H^\cdot(U, \widetilde{M}(*)) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^\cdot(U, (M(n))^\sim)$. *Il existe alors des isomorphismes canoniques fonctoriels en* M, *de degré* 0 *pour les structures de* S-*module gradué*

$$\text{(2.1.5.1)} \qquad H^p(U, \widetilde{M}(*)) \cong H^{p+1}((\mathbf{f}), M) \qquad \textit{pour } p \geqslant 1$$

et une suite exacte fonctorielle en M

$$\text{(2.1.5.2)} \qquad 0 \to H^0((\mathbf{f}), M) \to M \to H^0(U, \widetilde{M}(*)) \to H^1((\mathbf{f}), M) \to 0$$

où tous les homomorphismes sont de degré 0.

En effet, on a $\Gamma(U_{i_0 i_1 \ldots i_p}, (M(n))^\sim) = (M_{f_{i_0} \ldots f_{i_p}})_n$ par définition (**II**, 2.5.2), donc $\Gamma(U_{i_0 i_1 \ldots i_p}, \widetilde{M}(*)) = M_{f_{i_0} \ldots f_{i_p}}$. Le reste du raisonnement est alors le même que pour démontrer (2.1.4), tenant compte de ce que X est un schéma.

Remarques **(2.1.6)**. — (i) Sous les conditions de (2.1.5), les foncteurs $\Gamma(U_{i_0 i_1 \ldots i_p}, \widetilde{M}(*))$ sont exacts en M, en vertu de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 1.3.2); le même raisonnement que dans (1.2.5) montre alors que si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de S-modules gradués (où les homomorphismes sont de degré 0), on a des diagrammes commutatifs pour tout $p \geqslant 0$

$$\text{(2.1.6.1)} \qquad \begin{array}{ccc} H^p(U, \widetilde{M}''(*)) & \xrightarrow{\partial} & H^{p+1}(U, \widetilde{M}'(*)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{p+1}((\mathbf{f}), M'') & \xrightarrow[\partial]{} & H^{p+2}((\mathbf{f}), M') \end{array}$$

(ii) La prop. (2.1.5) sera surtout intéressante lorsque S sera une A-algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments de degré 1, A étant supposé noethérien; en effet, lorsqu'il en est ainsi, *tout* $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent est de la forme $\widetilde{M}$ (**II**, 2.7.7).

(2.1.7) Nous allons appliquer (2.1.5) dans le cas $S = A[T_0, \ldots, T_r]$, où A est un anneau quelconque, les T_i sont des indéterminées, avec $M = S$ et $f_i = T_i$. On est donc essentiellement ramené à calculer $H^\bullet((\mathbf{T}), S)$, où $\mathbf{T} = (T_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$.

Lemme **(2.1.8)**. — *Si* $S = A[T_0, \ldots, T_r]$, *on a, avec* $\mathbf{T} = (T_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$

(2.1.8.1) $$H^i(\mathbf{T}^n, S) = 0 \qquad \textit{si } i \neq r+1$$

(2.1.8.2) $$H^{r+1}(\mathbf{T}^n, S) = S/(\mathbf{T}^n).$$

Le A-*module* $H^{r+1}(\mathbf{T}^n, S)$ *a donc une base sur* A *formée des classes mod.* $(\mathbf{T}^n)$ *des monômes* $\mathbf{T}_\mathbf{p} = T_0^{p_0} \ldots T_r^{p_r}$ *avec* $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_r)$, $0 \leqslant p_i < n$ *pour tout* i.

C'est une conséquence immédiate de (1.1.3.5) et de la prop. (1.1.4), dont les hypothèses sont trivialement vérifiées.

(2.1.9) Passons à la limite inductive sur n; les relations (2.1.8.1) donnent $H^i((\mathbf{T}), S) = 0$ pour $i \neq r+1$. Pour $i = r+1$, le système inductif est formé des $S/(\mathbf{T}^n)$, l'homomorphisme $\varphi_{nm} : S/(\mathbf{T}^n) \to S/(\mathbf{T}^m)$ pour $0 \leqslant n \leqslant m$ étant la multiplication par $(T_0 \ldots T_r)^{m-n}$. Pour $n \geqslant \sup(p_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$, désignons par $\xi_\mathbf{p}^{(n)} = \xi_{p_0 \ldots p_r}^{(n)}$ la classe de $T_0^{n-p_0} \ldots T_r^{n-p_r}$ mod. $(\mathbf{T}^n)$; on a alors $\varphi_{nm}(\xi_\mathbf{p}^{(n)}) = \xi_\mathbf{p}^{(m)}$, et ces éléments ont donc même image canonique $\xi_\mathbf{p} = \xi_{p_0 \ldots p_r}$ dans la limite inductive $H^{r+1}((\mathbf{T}), S)$; en vertu de la définition du degré donnée dans (2.1.2), le degré de $\xi_\mathbf{p}$ est donc égal à $-|\mathbf{p}| = -(p_0 + p_1 + \ldots + p_r)$. Il est clair que les $\xi_\mathbf{p}^{(n)}$ pour $0 < p_i \leqslant n$ et $0 \leqslant i \leqslant r$ forment une base de $S/(\mathbf{T}^n)$. On déduit donc aussitôt de (2.1.8) :

Corollaire **(2.1.10)**. — *Avec les notations de* (2.1.8), *on a*

(2.1.10.1) $$H^i((\mathbf{T}), S) = 0 \qquad \textit{pour } i \neq r+1$$

et $H^{r+1}((\mathbf{T}), S)$ *est un* A-*module libre dont une base est formée des éléments* $\xi_{p_0 \ldots p_r}$ *tels que* $p_i > 0$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant r$.

Remarque **(2.1.11)**. — Soit N un A-module quelconque et soit $M = S \otimes_A N$; le raisonnement de (2.1.8) montre que l'on a plus généralement

(2.1.11.1) $$H^i(\mathbf{T}^n, M) = 0 \qquad \textit{si } i \neq r+1$$

(2.1.11.2) $$H^{r+1}(\mathbf{T}^n, M) = (S/(\mathbf{T}^n)) \otimes_A N$$

car la dernière formule se déduit directement de (1.1.3.5), et d'autre part il est clair que $M/(T_0^n M + \ldots + T_{i-1}^n M)$ s'identifie au produit tensoriel $(S/(T_0^n S + \ldots + T_{i-1}^n S)) \otimes_A N$, l'idéal $T_0^n S + \ldots + T_{i-1}^n S$ étant facteur direct dans le A-module S; cela permet d'appliquer (1.1.4) à M, et on obtient ainsi (2.1.11.1).

Combinant (2.1.10) et (2.1.5), on obtient :

Proposition **(2.1.12)**. — *Soient* A *un anneau,* r *un entier* >0, *et* $X = \mathbf{P}_A^r$ (**II**, 4.1.1). *Alors :*

(i) *On a* $H^i(X, \mathcal{O}_X(*)) = 0$ *pour* $i \neq 0, r$.

(ii) *L'homomorphisme canonique* $\alpha : S \to H^0(X, \mathcal{O}_X(*))$ (**II**, 2.6.2) *est bijectif.*

(iii) $H^r(X, \mathcal{O}_X(*))$ *est un* A-*module libre ayant une base formée d'éléments* $\xi_{p_0 \ldots p_r}$, *où* $p_i > 0$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant r$, $\xi_{p_0 \ldots p_r}$ *étant de degré* $-|\mathbf{p}| = -(p_0 + \ldots + p_r)$, *et le produit* $T_i \xi_{p_0 \ldots p_r}$ *étant* $\xi_{p_0, \ldots, p_i - 1, \ldots, p_r}$.

Remarquons en effet que, dans la suite exacte (2.1.5.2) appliquée à

$$M = S = A[T_0, \ldots, T_r],$$

on a $H^0((\mathbf{T}), S) = 0$ et $H^1((\mathbf{T}), S) = 0$ d'après (2.1.10.1), et que la prop. (2.1.5) s'applique à $U = X$, puisque X est réunion des $D_+(T_i)$ (**II**, 2.3.14). Il reste à identifier l'application $S \to H^0(X, \mathcal{O}_X(*))$ de la suite exacte (2.1.5.1) et l'application canonique α; mais cela résulte de l'identification canonique de $H^0(U, \mathcal{O}_X(*))$ et de $H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(*))$.

Corollaire **(2.1.13)**. — *Les seules valeurs de* (i, n) *pour lesquelles on puisse avoir* $H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) \neq 0$ *sont les suivantes :* $i = 0$ *et* $n \geqslant 0$, $i = r$ et $n \leqslant -(r+1)$.

On notera que si $A \neq 0$, on a effectivement $H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) \neq 0$ pour les couples énumérés dans (2.1.13); cela résulte de (2.1.12), puisque S_n est alors $\neq 0$ pour tous les degrés $n \geqslant 0$.

Dans les applications qui seront faites dans ce chapitre, nous utiliserons surtout le résultat moins précis :

Corollaire **(2.1.14)**. — *Les* A-*modules* $H^i(X, \mathcal{O}_X(n))$ *sont libres de type fini; si* $i > 0$, *ils sont nuls pour* $n > 0$.

Proposition **(2.1.15)**. — *Soient* Y *un préschéma,* $\mathcal{E}$ *un* $\mathcal{O}_Y$-*Module localement libre de rang* $r+1$, $X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ *le fibré projectif défini par* E, $f : X \to Y$ *le morphisme structural. Les seules valeurs de i et n pour lesquelles* $R^i f_*(\mathcal{O}_X(n)) \neq 0$ *sont* $i = 0$ *et* $n \geqslant 0$, $i = r$ *et* $n \leqslant -(r+1)$; *en outre, l'homomorphisme canonique* (**II**, 3.3.2)

$$\alpha : \mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}) \to \mathbf{\Gamma}_*(\mathcal{O}_X) = R^0 f_*(\mathcal{O}_X(*)) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_*(\mathcal{O}_X(n))$$

est un isomorphisme.

La question étant locale sur Y, on peut supposer Y affine d'anneau A et $\mathcal{E} = \widetilde{E}$, où $E = A^{r+1}$; on est alors immédiatement ramené à (2.1.12), compte tenu de (1.4.11).

Remarque **(2.1.16)**. — Nous compléterons plus tard les résultats de (2.1.15) en démontrant les propositions suivantes : posons $\boldsymbol{\omega} = f^*(\overset{r+1}{\wedge} \mathcal{E})(-r-1)$, qui est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible. Alors :

(i) On a un isomorphisme canonique

$$\rho : R^r f_*(\boldsymbol{\omega}) \cong \mathcal{O}_Y. \qquad \textbf{(2.1.16.1)}$$

(ii) L'accouplement par cup-produit (**0**, 12.2.2)

$$R^r f_*(\mathcal{O}_X(n)) \times R^0 f_*(\boldsymbol{\omega}(-n)) \to R^r f_*(\boldsymbol{\omega}) \qquad \textbf{(2.1.16.2)}$$

composé avec l'isomorphisme ρ^{-1}, définit un *isomorphisme* de $R^r f_*(\mathcal{O}_X(n))$ sur le *dual* du $\mathcal{O}_Y$-Module localement libre

$$R^0 f_*(\boldsymbol{\omega}(-n)) = (\overset{r+1}{\wedge} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}))_{-n}.$$

2.2. Le théorème fondamental des morphismes projectifs.

Théorème **(2.2.1)** (Serre). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme propre,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible ample pour* f. *Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathscr{F}$, *posons* $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{L}^{\otimes n}$ *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$. *Alors, pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$:

(i) *Les* $R^q f_*(\mathscr{F})$ *sont des* $\mathcal{O}_Y$*-Modules cohérents.*

(ii) *Il existe un entier* N *tel que pour* $n \geqslant N$, *on ait* $R^q f_*(\mathscr{F}(n)) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

(iii) *Il existe un entier* N *tel que, pour* $n \geqslant N$, *l'homomorphisme canonique* $f^*(f_*(\mathscr{F}(n))) \to \mathscr{F}(n)$ *soit surjectif.*

Notons d'abord que si le théorème est vrai quand on y remplace $\mathscr{L}$ par $\mathscr{L}^{\otimes d}$ $(d > 0)$, il est vrai sous sa forme initiale. En effet, on peut alors écrire $\mathscr{F}(n) = (\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes r}) \otimes \mathscr{L}^{\otimes hd}$ avec un $h > 0$ et $0 \leqslant r < d$, et par hypothèse pour chaque r il y a un entier N_r tel que pour $h \geqslant N_r$ les propriétés (ii) et (iii) aient lieu pour le $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes r}$; prenant pour N le plus grand des dN_r, (ii) et (iii) auront lieu pour $n \geqslant N$. On peut donc supposer $\mathscr{L}$ *très ample* relativement à f (**II**, 4.6.11); il existe par suite une Y-immersion ouverte dominante $i : X \to P$, où $P = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$, où $\mathscr{S}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre quasi-cohérente graduée à degrés positifs, dans laquelle $\mathscr{S}_1$ est de type fini et engendre $\mathscr{S}$; en outre, $\mathscr{L}$ est isomorphe à $i^*(\mathcal{O}_P(1))$ (**II**, 4.4.7). Mais comme f est propre, il en est de même de i (**II**, 5.4.4), donc i est un *isomorphisme* $X \simeq P$. On peut donc se borner au cas où $X = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ et $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X(1)$. Le th. (2.2.1) est alors conséquence de la

Proposition **(2.2.2)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* S *une* A*-algèbre graduée à degrés positifs, dans laquelle* S_1 *est un* A*-module ayant un système de* $r+1$ *générateurs, et qui engendre l'algèbre* S. *Soit* $X = \mathrm{Proj}(S)$. *Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$:

(i) *Les* A*-modules* $H^q(X, \mathscr{F})$ *sont de type fini.*

(ii) *On a* $H^q(X, \mathscr{F}) = 0$ *pour* $q > r$.

(iii) *Il existe un entier* N *tel que pour* $n \geqslant N$, *on ait* $H^q(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

(iv) *Il existe un entier* N *tel que pour* $n \geqslant N$, $\mathscr{F}(n)$ *soit engendré par ses sections au-dessus de* X.

Montrons d'abord comment (2.2.2) entraîne (2.2.1) : dans (2.2.1) (ramené au cas particulier $X = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ considéré ci-dessus), Y est quasi-compact, donc peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts affines, d'anneaux noethériens, tels que la restriction de $\mathscr{S}_1$ à chacun de ces ouverts U_α soit engendrée par un nombre fini de sections de $\mathscr{S}_1$ au-dessus de U_α. Si on suppose (2.2.2) démontré, il suffira alors de prendre pour N dans les parties (ii) et (iii) de (2.2.1) le plus grand des entiers analogues correspondant aux U_α (tenant compte de (1.4.11) et de (**II**, 3.4.7)).

Pour prouver (2.2.2), remarquons que X s'identifie à un sous-schéma fermé de $P = \mathbf{P}_A^r$ (**II**, 3.6.2); en outre, si $j : X \to P$ est l'injection canonique, $j_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_P$-Module cohérent et on a $j_*(\mathscr{F}(n)) = (j_*(\mathscr{F}))(n)$ (**II**, 3.4.5 et 3.5.2). Compte tenu de (G, **II**, cor. du th. 4.9.1), on est donc ramené à prouver (2.2.2) dans le cas particulier où $X = \mathbf{P}_A^r$ et $S = A[T_0, \ldots, T_r]$. Comme X est recouvert par les ouverts affines $D_+(T_i)$ en nombre $r+1$, (ii) résulte de (1.4.12). Notons d'autre part que (iv) a déjà été démontré (**II**, 2.7.9).

Nous allons prouver simultanément (i) et (iii). Notons que ces assertions sont vraies pour $\mathscr{F}=\mathcal{O}_X(m)$ (2.1.13); elles le sont donc aussi lorsque $\mathscr{F}$ est somme directe d'un nombre fini de $\mathcal{O}_X$-Modules de la forme $\mathcal{O}_X(m_j)$. D'autre part, (i) et (iii) sont vraies trivialement pour $q>r$ en vertu de (ii). Nous allons procéder par *récurrence descendante* sur q. On sait que $\mathscr{F}$ est isomorphe à un quotient d'une somme directe $\mathscr{E}$ d'un nombre fini de faisceaux $\mathcal{O}_X(m_j)$ (**II**, 2.7.10); autrement dit, on a une suite exacte $0\rightarrow\mathscr{R}\rightarrow\mathscr{E}\rightarrow\mathscr{F}\rightarrow 0$, où $\mathscr{R}$ est cohérent ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.3) et où $\mathscr{E}$ vérifie (i) et (iii). Comme $\mathscr{F}(n)$ est un foncteur exact en $\mathscr{F}$, on a aussi la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathscr{R}(n) \rightarrow \mathscr{E}(n) \rightarrow \mathscr{F}(n) \rightarrow 0$$

pour tout $n\in\mathbf{Z}$. On en déduit la suite exacte de cohomologie

$$\mathrm{H}^{q-1}(X, \mathscr{E}(n)) \rightarrow \mathrm{H}^{q-1}(X, \mathscr{F}(n)) \rightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathscr{R}(n)).$$

Comme $\mathscr{E}(n)$ est somme directe des $\mathcal{O}_X(n+m_j)$ (**II**, 2.5.14), $\mathrm{H}^{q-1}(X, \mathscr{E}(n))$ est de type fini, et il en est de même de $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{R}(n))$ par l'hypothèse de récurrence; comme A est noethérien, on en conclut que $\mathrm{H}^{q-1}(X, \mathscr{F}(n))$ est de type fini pour tout $n\in\mathbf{Z}$, et en particulier pour $n=0$. D'autre part, par l'hypothèse de récurrence, il existe un entier N tel que pour $n\geqslant N$ on ait $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{R}(n))=0$; par ailleurs, on peut supposer aussi N choisi tel que $\mathrm{H}^{q-1}(X, \mathscr{E}(n))=0$ pour $n\geqslant N$, puisque $\mathscr{E}$ vérifie (iii); on en conclut que $\mathrm{H}^{q-1}(X, \mathscr{F}(n))=0$ pour $n\geqslant N$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(2.2.3)**. — *Sous les hypothèses de* (2.2.1), *soit* $\mathscr{F}\rightarrow\mathscr{G}\rightarrow\mathscr{H}$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_X$*-Modules cohérents. Il existe alors un entier* N *tel que pour* $n\geqslant N$, *la suite*

$$f_*(\mathscr{F}(n)) \rightarrow f_*(\mathscr{G}(n)) \rightarrow f_*(\mathscr{H}(n))$$

soit exacte.

Soient $\mathscr{F}'$, $\mathscr{G}'$, $\mathscr{G}''$ le noyau, l'image et le conoyau de $\mathscr{F}\rightarrow\mathscr{G}$; $\mathscr{G}'$ est le noyau et $\mathscr{G}''$ l'image de $\mathscr{G}\rightarrow\mathscr{H}$, soit $\mathscr{H}''$ le conoyau de cet homomorphisme; tous ces $\mathcal{O}_X$-Modules sont cohérents ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4). Comme $\mathscr{F}(n)$ est un foncteur exact en $\mathscr{F}$, il suffit de prouver que pour n assez grand, chacune des suites

$$\begin{aligned}
&0 \rightarrow f_*(\mathscr{F}'(n)) \rightarrow f_*(\mathscr{F}(n)) \rightarrow f_*(\mathscr{G}'(n)) \rightarrow 0\\
&0 \rightarrow f_*(\mathscr{G}'(n)) \rightarrow f_*(\mathscr{G}(n)) \rightarrow f_*(\mathscr{G}''(n)) \rightarrow 0\\
&0 \rightarrow f_*(\mathscr{G}''(n)) \rightarrow f_*(\mathscr{H}(n)) \rightarrow f_*(\mathscr{H}''(n)) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

est exacte; par suite, on peut supposer que $0\rightarrow\mathscr{F}\rightarrow\mathscr{G}\rightarrow\mathscr{H}\rightarrow 0$ est exacte. On a alors la suite exacte de cohomologie

$$0 \rightarrow f_*(\mathscr{F}(n)) \rightarrow f_*(\mathscr{G}(n)) \rightarrow f_*(\mathscr{H}(n)) \rightarrow \mathrm{R}^1 f_*(\mathscr{F}(n)) \rightarrow \dots$$

et la conclusion résulte de (2.2.1, (ii)).

Corollaire **(2.2.4)**. — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $f: X\rightarrow Y$ *un morphisme de type fini,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible ample pour* f; *pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathscr{F}$, *on pose* $\mathscr{F}(n)=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{L}^{\otimes n}$ (*pour* $n\in\mathbf{Z}$). *Soit* $\mathscr{F}\rightarrow\mathscr{G}\rightarrow\mathscr{H}$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_X$*-Modules cohérents,* *telle que les supports de* $\mathscr{F}$ *et de* $\mathscr{H}$ *soient propres sur* Y (**II**, 5.4.10). *Il existe alors un entier* N *tel que, pour* $n \geqslant \mathrm{N}$, *la suite*

$$f_*(\mathscr{F}(n)) \to f_*(\mathscr{G}(n)) \to f_*(\mathscr{H}(n))$$

est exacte.

Le même raisonnement qu'au début de (2.2.1) montre que si le corollaire est vrai pour $\mathscr{L}^{\otimes d}$ $(d>0)$, il l'est aussi pour $\mathscr{L}$; on peut donc se borner au cas où $\mathscr{L}$ est très ample pour f (**II**, 4.6.11), et par suite on peut identifier X à un ouvert dans un Y-schéma $\mathrm{Z}=\mathrm{Proj}(\mathscr{S})$, où $\mathscr{S}$ est une $\mathscr{O}_\mathrm{Y}$-Algèbre quasi-cohérente graduée à degrés positifs, dans laquelle $\mathscr{S}_1$ est de type fini et engendre $\mathscr{S}$, de sorte que $\mathscr{L}=i^*(\mathscr{O}_\mathrm{Z}(1))$, où i est l'immersion canonique $\mathrm{X}\to\mathrm{Z}$ (**II**, 4.4.7). Cela étant, comme $\mathrm{Supp}(\mathscr{G})$ est fermé dans X et contenu dans $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})\cap\mathrm{Supp}(\mathscr{H})$, il est propre sur Y; les supports de $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ sont donc *fermés dans* Z (**II**, 5.4.10). Les faisceaux $\mathscr{F}'=i_*(\mathscr{F})$, $\mathscr{G}'=i_*(\mathscr{G})$, $\mathscr{H}'=i_*(\mathscr{H})$ sont donc des $\mathscr{O}_\mathrm{Z}$-Modules cohérents, et la suite $\mathscr{F}'\to\mathscr{G}'\to\mathscr{H}'$ est exacte; en outre, si $g:\mathrm{Z}\to\mathrm{Y}$ est le morphisme structural, on a $f=g\circ i$, et il est clair que $\mathscr{F}'(n)=i_*(\mathscr{F}(n))$ et de même pour $\mathscr{G}'$ et $\mathscr{H}'$; la conclusion résulte donc de (2.2.3) appliqué à $\mathscr{F}'$, $\mathscr{G}'$, $\mathscr{H}'$.

Remarques (**2.2.5**). — (i) L'assertion (i) de (2.2.1) est encore vraie lorsqu'on suppose seulement que Y est *localement noethérien*; en effet, la propriété est évidemment locale sur Y; d'autre part, les hypothèses de (2.2.1) impliquent que pour tout ouvert $\mathrm{U}\subset\mathrm{Y}$, la restriction de f à $f^{-1}(\mathrm{U})$ est un morphisme projectif $f^{-1}(\mathrm{U})\to\mathrm{U}$ (**II**, 5.5.5, (iii)) et $\mathscr{L}|f^{-1}(\mathrm{U})$ est ample pour ce morphisme (**II**, 4.6.4).

(ii) L'assertion (iii) de (2.2.1) est encore valable, comme on l'a vu, lorsque l'on suppose seulement que X est un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, et $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ un morphisme quasi-compact (**II**, 4.6.8). Mais il faut noter que même lorsqu'on suppose que Y est le *spectre d'un corps* K et que f est *quasi-projectif*, l'assertion (ii) de (2.2.1) n'est plus nécessairement vérifiée. Par exemple, soit $\mathrm{X}'=\mathrm{Spec}(\mathrm{K}[\mathrm{T}_0,\dots,\mathrm{T}_r])$ et soit X la réunion des ouverts affines $\mathrm{D}(\mathrm{T}_i)$ de X' $(0\leqslant i\leqslant r)$; comme l'immersion $\mathrm{X}\to\mathrm{X}'$ est quasi-compacte, le morphisme structural $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ est quasi-affine (**II**, 5.1.10), donc $\mathscr{O}_\mathrm{X}$ est très ample pour f (**II**, 5.1.6). Mais l'anneau $\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{O}_\mathrm{X})$ s'identifie à l'intersection des anneaux de fractions $(\mathrm{K}[\mathrm{T}_0,\dots,\mathrm{T}_r])_{\mathrm{T}_i}$ pour $0\leqslant i\leqslant r$ (**I**, 8.2.1.1), c'est-à-dire à $\mathrm{K}[\mathrm{T}_0,\dots,\mathrm{T}_r]$. Par suite, il résulte des formules (1.4.3.1) et (1.1.3.5) que l'on a $\mathrm{H}^r(\mathrm{X},\mathscr{O}_\mathrm{X}^{\otimes n})=\mathrm{H}^r(\mathrm{X},\mathscr{O}_\mathrm{X})=\mathrm{A}\neq 0$ pour tout n.

2.3. Application aux faisceaux gradués d'algèbres et de modules.

Théorème (**2.3.1**). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $\mathscr{S}$ *une* $\mathscr{O}_\mathrm{Y}$*-Algèbre graduée à degrés positifs, quasi-cohérente et de type fini,* $\mathrm{X}=\mathrm{Proj}(\mathscr{S})$, $q:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ *le morphisme structural,* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{S}$*-Module gradué quasi-cohérent vérifiant la condition* (**TF**). *Alors il existe un entier* N *tel que, pour* $n\geqslant\mathrm{N}$, *l'homomorphisme canonique* (**II**, 8.14.5.1)

$$\alpha_n:\mathscr{M}_n\to q_*(\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}(n)))=q_*((\mathscr{P}roj(\mathscr{M}))_n)$$

soit bijectif. En d'autres termes, l'homomorphisme canonique

$$\alpha : \mathscr{M} \to \mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{P}roj(\mathscr{M}))$$

est un **(TN)**-*isomorphisme.*

On peut se borner au cas où $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{S}$-module de type fini (**II**, 3.4.2).

Comme Y est quasi-compact, il existe un entier $d>0$ tel que $\mathscr{S}^{(d)}$ soit engendrée par le $\mathcal{O}_Y$-Module quasi-cohérent $\mathscr{S}_d$, ce dernier étant de type fini (**II**, 3.1.10), donc cohérent puisque Y est noethérien. Remarquons maintenant que $\mathscr{M}$ est somme directe des $\mathscr{M}^{(d,k)}$ pour $0\leqslant k<d$ et que chacun des $\mathscr{M}^{(d,k)}$ est un $\mathscr{S}^{(d)}$-Module quasi-cohérent de type fini, ainsi qu'il résulte de (**II**, 2.1.6, (iii)), la question étant locale sur Y. Or, il suffit évidemment de prouver que chacun des homomorphismes canoniques $\alpha : \mathscr{M}^{(d,k)} \to \mathbf{\Gamma}_*((\mathscr{P}roj(\mathscr{M}))^{(d,k)})$ est un **(TN)**-isomorphisme. Compte tenu de (**II**, 8.14.13) (et notamment du diagramme (8.14.13.4)), on voit qu'on est ramené à prouver le théorème lorsque $\mathscr{S}$ est engendrée par $\mathscr{S}_1$ et que $\mathscr{S}_1$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent. Comme Y est noethérien, le même raisonnement qu'au début de (2.2.2) montre qu'on peut se borner au cas où $Y=\operatorname{Spec}(A)$, $\mathscr{S}=\widetilde{S}$, $\mathscr{M}=\widetilde{M}$, A étant un anneau noethérien, S_1 un A-module de type fini et M un S-module gradué de type fini. Montrons qu'il suffit alors de prouver le théorème lorsque $M=S$. En effet, dans le cas général, on a une suite exacte $L'\to L\to M\to 0$, où L et L' sont des sommes directes de modules gradués de la forme $S(m)$. Si le résultat est vrai pour $M=S$, il l'est aussi pour $M=S(m)$, donc pour L et L'. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{L}'_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"'] & \widetilde{L}_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"'] & \widetilde{M}_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"'] & 0 \\
q_*(\widetilde{L}'(n)) \arrow[r] & q_*(\widetilde{L}(n)) \arrow[r] & q_*(\widetilde{M}(n)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La deuxième ligne est exacte en vertu de (2.2.3), dès que n est assez grand; comme il en est de même de la première et que les deux flèches verticales de gauche sont des isomorphismes, il en est de même de la troisième.

Cela étant, pour prouver le théorème lorsque $M=S$, supposons d'abord que $S=A[T_0, \ldots, T_r]$ (T_i indéterminées); dans ce cas, notre assertion n'est autre que (2.1.11, (ii)). Dans le cas général, S s'identifie à un quotient d'un anneau $S'=A[T_0, \ldots, T_r]$ par un idéal gradué, donc X à un sous-schéma fermé de $X'=\mathbf{P}_A^r$ (**II**, 2.9.2). Si j est l'injection canonique $X\to X'$, $j_*(\widetilde{S}(n))$ n'est autre que le $\mathcal{O}_{X'}$-Module $(\mathscr{P}roj(\widetilde{S}))(n)$ où S est considéré comme un S'-module gradué; cela résulte en effet aussitôt de (**II**, 2.8.7). Comme $j_*(\widetilde{S}(n))$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-Module vérifiant **(TF)**, l'homomorphisme canonique $\alpha_n : S_n\to\Gamma(X', j_*(\widetilde{S}(n)))$ est bijectif pour n assez grand, en vertu de ce qui précède; cela achève la démonstration, puisque $\Gamma(X', j_*(\widetilde{S}(n)))=\Gamma(X, \widetilde{S}(n))$.

Corollaire **(2.3.2)**. — *Sous les hypothèses de* (2.3.1), *soit* $\mathscr{S}_{\mathrm{X}} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(n)$, *et soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{S}_{\mathrm{X}}$*-Module gradué quasi-cohérent de type fini. Alors* $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})$ *vérifie la condition* **(TF)**.

On a vu dans la démonstration de (2.3.1) que X, qui est isomorphe à $\mathrm{Proj}(\mathscr{S}^{(d)})$ (**II**, 3.1.8) est de type fini sur Y (**II**, 3.4.1). Il résulte alors de (**II**, 8.14.9) que $\mathscr{F}$ est isomorphe à un $\mathscr{S}_{\mathrm{X}}$-Module gradué de la forme $\mathscr{P}roj(\mathscr{M})$, où $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{S}$-Module gradué quasi-cohérent de type fini. En vertu de (2.3.1), $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})$ est **(TN)**-isomorphe à $\mathscr{M}$, et par suite vérifie **(TF)**.

Scholie **(2.3.3)**. — Soient Y un préschéma noethérien, $\mathscr{S}$ une $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-Algèbre graduée vérifiant les conditions de (2.3.1) et $\mathrm{X} = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$. Soient $\boldsymbol{K}_{\mathscr{S}}$ la catégorie abélienne des $\mathscr{S}$-Modules gradués quasi-cohérents vérifiant **(TF)**, $\boldsymbol{K}'_{\mathscr{S}}$ la sous-catégorie de $\boldsymbol{K}_{\mathscr{S}}$ formée des $\mathscr{S}$-Modules vérifiant **(TN)**; enfin, soit $\boldsymbol{K}_{\mathrm{X}}$ la catégorie des $\mathscr{S}_{\mathrm{X}}$-Modules gradués quasi-cohérents de type fini $\mathscr{F}$ (ce qui revient à dire, puisque $\mathscr{S}_{\mathrm{X}}$ est périodique (**II**, 8.14.4 et 8.14.12), que les $\mathscr{F}_i$ sont des $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modules cohérents). Alors les foncteurs $\mathscr{M} \rightsquigarrow \mathscr{P}roj(\mathscr{M})$ dans $\boldsymbol{K}_{\mathscr{S}}$ et $\mathscr{F} \rightsquigarrow \mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F})$ dans $\boldsymbol{K}_{\mathrm{X}}$ définissent, en vertu de (**II**, 8.14.8 et 8.14.10) et (2.3.2) *une équivalence* (T, I, 1.2) *de la catégorie quotient* $\boldsymbol{K}_{\mathscr{S}}/\boldsymbol{K}'_{\mathscr{S}}$ (T, I, 1.11) *avec la catégorie* $\boldsymbol{K}_{\mathrm{X}}$. Lorsque $\mathscr{S}$ est engendré par $\mathscr{S}_1$, on peut remplacer $\boldsymbol{K}_{\mathrm{X}}$ par la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modules cohérents (**II**, 8.14.12).

Proposition **(2.3.4)**. — *Soit* Y *un préschéma noethérien.*

(i) *Soit* $\mathscr{S}$ *une* $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$*-Algèbre graduée à degrés positifs, quasi-cohérente de type fini. Soient* $\mathrm{X} = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$, *et* $\mathscr{S}_{\mathrm{X}} = \mathscr{P}roj(\mathscr{S}) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(n)$. *Alors* $\mathscr{S}_{\mathrm{X}}$ *est une* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Algèbre graduée périodique* (**II**, 8.14.12) *dont les composants homogènes* $(\mathscr{S}_{\mathrm{X}})_n = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(n)$ *sont des* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Modules cohérents, et si* $d>0$ *est une période de* $\mathscr{S}_{\mathrm{X}}$, $(\mathscr{S}_{\mathrm{X}})_d = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(d)$ *est un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module inversible* Y*-ample. En outre, l'homomorphisme canonique* $\alpha : \mathscr{S} \rightarrow \mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{S}_{\mathrm{X}})$ *est un* **(TN)**-*isomorphisme.*

(ii) *Inversement, soit* $q : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme projectif, et soit* $\mathscr{S}'$ *une* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Algèbre graduée, dont les composants homogènes* $\mathscr{S}'_n$ $(n\in\mathbf{Z})$ *sont des* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Modules cohérents, et qui admet une période* $d>0$ *telle que* $\mathscr{S}'_d$ *soit un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module inversible ample pour* q. *Alors* $\mathscr{S} = \bigoplus_{n\geqslant 0} q_*(\mathscr{S}'_n)$ *est une* $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$*-Algèbre graduée à degrés positifs quasi-cohérente et de type fini, et il existe un* Y*-isomorphisme* $r : \mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ *tel que* $r^*(\mathscr{P}roj(\mathscr{S}))$ *soit isomorphe (en tant que* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Algèbre graduée) à* $\mathscr{S}'$.

(i) Toutes les assertions ont pratiquement déjà été démontrées, la dernière n'étant autre qu'un cas particulier de (2.3.2). Le fait que $\mathscr{S}_{\mathrm{X}}$ est périodique a été vu en (**II**, 8.14.14) et le fait qu'il y a une période $d>0$ telle que $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(d)$ soit inversible et Y-ample n'est autre que (**II**, 4.6.18). Enfin, pour $0 \leqslant k < d$, $(\mathscr{S}_{\mathrm{X}})^{(d,k)}$ est un $(\mathscr{S}_{\mathrm{X}})^{(d)}$-Module de type fini (**II**, 8.14.14), donc chacun des $(\mathscr{S}_{\mathrm{X}})_n$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module quasi-cohérent de type fini en vertu de (**II**, 2.1.6, (ii)), la question étant locale; comme $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ est cohérent, il en est de même des $(\mathscr{S}_{\mathrm{X}})_n$.

(ii) Quitte à remplacer la période d par un de ses multiples, on peut supposer que $\mathscr{L} = \mathscr{S}'_d$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module *très ample* relativement à q (**II**, 4.6.11). On a en outre $\mathscr{S}'^{(d)} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathscr{L}^{\otimes n}$ par hypothèse, donc $\mathscr{S}^{(d)} = \bigoplus_{n\geqslant 0} q_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$; on sait (**II**, 3.1.8 et 3.2.9) qu'il y a un Y-isomorphisme s de $\mathrm{X}' = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ sur $\mathrm{X}'' = \mathrm{Proj}(\mathscr{S}^{(d)})$ tel que

$s^*(\mathcal{O}_{X''}(n)) = \mathcal{O}_{X'}(nd)$. On établira donc l'existence d'un Y-isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} X'$ si l'on prouve la

Proposition **(2.3.4.1)**. — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $q : X \to Y$ *un morphisme projectif,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible très ample pour* q*. Alors* $\mathscr{S} = \bigoplus_{n \geqslant 0} q_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ *est une* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre graduée quasi-cohérente de type fini, telle que* $\mathscr{S}_n = \mathscr{S}_1^n$ *pour* n *assez grand, et il existe un* Y-*isomorphisme* $r : X \xrightarrow{\sim} P = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ *tel que* $\mathscr{L} = r^*(\mathcal{O}_P(1))$.

Comme q est un morphisme projectif, il résulte de (**II**, 5.4.4 et 4.4.7) qu'il existe un Y-isomorphisme $r' : X \xrightarrow{\sim} P' = \mathrm{Proj}(\mathscr{T})$, où $\mathscr{T}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre quasi-cohérente telle que $\mathscr{T}_1$ soit un $\mathcal{O}_Y$-Module de type fini et engendre $\mathscr{T}$, et l'on a $\mathscr{L} = r'^*(\mathcal{O}_{P'}(1))$. On a alors $\mathscr{S} = \bigoplus_{n \geqslant 0} q'_*(\mathcal{O}_{P'}(n))$, où $q' : P' \to Y$ est le morphisme structural, et il résulte de (2.3.1) que pour n assez grand, l'homomorphisme canonique $\alpha_n : \mathscr{T}_n \to \mathscr{S}_n = q_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ est *bijectif*; comme $\mathscr{T}_n = \mathscr{T}_1^n$, on a *a fortiori* $\mathscr{S}_n = \mathscr{S}_1^n$ dès que n est assez grand. En outre, comme l'homomorphisme canonique $\alpha : \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ de $\mathcal{O}_Y$-Algèbres graduées est un **(TN)**-isomorphisme, $\Phi = \mathrm{Proj}(\alpha) : \mathrm{Proj}(\mathscr{S}) \to \mathrm{Proj}(\mathscr{T})$ est un isomorphisme (**II**, 3.6.1) et on a $\Phi_*(\widetilde{\mathscr{S}(n)}) = (\mathscr{S}(n))_{[\alpha]}^{\sim}$ (**II**, 3.5.2); mais comme les $\mathscr{T}$-Modules gradués $(\mathscr{S}(n))_{[\alpha]}$ et $\mathscr{T}(n)$ sont **(TN)**-isomorphes, on a $\Phi_*(\mathcal{O}_P(n)) = \mathcal{O}_{P'}(n)$ pour tout n (**II**, 3.4.2); pour achever de prouver (2.3.4.1), il reste à montrer que $\mathscr{S}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre de type fini; or les $\mathscr{S}_n = q'_*(\mathcal{O}_{P'}(n))$ sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules *cohérents* en vertu de (2.2.1) et comme $\mathscr{S}_1^n = \mathscr{S}_n$ pour $n \geqslant n_0$, $\mathscr{S}$ est engendrée par $\bigoplus_{i \leqslant n_0} \mathscr{S}_i$, qui est cohérent, d'où notre assertion (**I**, 9.6.2).

Revenons à la démonstration de (2.3.4), dont nous reprenons les notations. Nous avons démontré l'existence d'un Y-isomorphisme $r'' : X \xrightarrow{\sim} X''$ tel que $r''_*(\mathscr{L}^{\otimes n}) = \mathcal{O}_{X''}(n)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$; nous désignerons par q'' le morphisme structural $X'' \to Y$. Notons maintenant que $\mathscr{S}'$ est somme directe des $\mathscr{S}'^{(d)}$-Modules gradués $\mathscr{S}'^{(d,k)}$; chacun de ces derniers est un $\mathscr{S}'^{(d)}$-Module quasi-cohérent de type fini, en vertu de la périodicité de $\mathscr{S}'$ et de l'hypothèse que les $\mathscr{S}'_n$ sont des $\mathcal{O}_X$-Modules de type fini (**II**, 8.14.12). Posons $\mathscr{F}^{(k)} = r''_*(\mathscr{S}'^{(d,k)})$, de sorte que les $\mathscr{F}^{(k)}$ sont des $\mathscr{S}_{X''}$-Modules gradués quasi-cohérents de type fini; par suite (**II**, 8.14.8), l'homomorphisme canonique $\beta : \mathscr{P}roj(\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F}^{(k)})) \to \mathscr{F}^{(k)}$ est un isomorphisme de $\mathscr{S}_{X''}$-Modules. Mais on a $q''_*((\mathscr{F}^{(k)})_n) = q_*((\mathscr{S}'^{(d,k)})_n)$ et pour $n \geqslant 0$, ce dernier $\mathcal{O}_Y$-Module est par définition égal à $(\mathscr{S}^{(d,k)})_n$. Autrement dit, l'injection canonique $\mathscr{S}^{(d,k)} \to \mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F}^{(k)})$ est un **(TN)**-isomorphisme, donc (**II**, 3.4.2) on a $\mathscr{P}roj(\mathscr{S}^{(d,k)}) = \mathscr{P}roj(\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F}^{(k)}))$, et par suite $r''^*(\mathscr{P}roj(\mathscr{S}^{(d,k)})) = \mathscr{S}'^{(d,k)}$. Il reste à remarquer que $\mathscr{P}roj(\mathscr{S}^{(d,k)}) = s_*((\mathscr{P}roj(\mathscr{S}))^{(d,k)})$ à un isomorphisme canonique près (**II**, 8.14.13.1) pour avoir démontré l'isomorphisme de $r^*(\mathscr{P}roj(\mathscr{S}))$ et de $\mathscr{S}'$. Enfin, en vertu de (2.3.2), chacun des $\mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{F}^{(k)})$ vérifie la condition **(TF)**, donc il en est de même de chacun des $\mathscr{S}^{(d,k)}$; en outre, comme les $\mathscr{S}'_n$ sont cohérents, il en est de même des $\mathscr{S}_n = q_*(\mathscr{S}'_n)$ par (2.2.1), et on en conclut aussitôt que les $\mathscr{S}^{(d,k)}$ sont des $\mathscr{S}^{(d)}$-Modules de type fini. Comme on a vu dans (2.3.4.1) que $\mathscr{S}^{(d)}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre de type fini, on en conclut bien que $\mathscr{S}$ est aussi une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre de type fini.

Proposition (**2.3.5**). — *Soient* Y *un préschéma intègre noethérien,* X *un préschéma intègre,* $f: X \to Y$ *un morphisme* projectif birationnel. *Il existe alors un Idéal fractionnaire cohérent* $\mathscr{J} \subset \mathscr{R}(Y)$ (**II**, 8.1.2) *tel que* X *soit* Y*-isomorphe au préschéma obtenu en faisant éclater* $\mathscr{J}$ (**II**, 8.1.3). *En outre, il existe un ouvert* U *de* Y *tel que la restriction de* f *à* $f^{-1}(U)$ *soit un isomorphisme de* $f^{-1}(U)$ *sur* U (cf. **I**, 6.5.5), *et que* $\mathscr{J}|U$ *soit inversible.*

Comme il existe un $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathscr{L}$ très ample pour f (**II**, 4.4.2 et 5.3.2), on peut appliquer (2.3.4.1), et on voit que X s'identifie à $\mathrm{Proj}(\mathscr{S})$, où $\mathscr{S} = \bigoplus_{n \geqslant 0} f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$. On sait en outre que les $f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules sans torsion (**I**, 7.4.5), donc il en est de même du $\mathcal{O}_Y$-Module $\mathscr{S}$, et par suite $\mathscr{S}$ s'identifie canoniquement à un sous-$\mathcal{O}_Y$-Module de $\mathscr{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{R}(Y)$ (**I**, 7.4.1); ce dernier est un faisceau *simple* (**I**, 7.3.6) qui est connu lorsqu'on connaît sa restriction à un ouvert non vide, par exemple à un ouvert non vide $U' \subset U$ tel que $\mathscr{L}|f^{-1}(U')$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_X|f^{-1}(U')$. Comme par hypothèse les $f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})|U'$ sont alors isomorphes à $\mathcal{O}_Y|U'$, on voit que $\mathscr{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{R}(Y)$ est un $\mathscr{R}(Y)$-Module isomorphe à $\mathscr{R}(Y)[T]$, où T est une indéterminée, et $\mathscr{S}$ est **(TN)**-isomorphe à la sous-$\mathcal{O}_Y$-Algèbre engendrée par l'image canonique de $f_*(\mathscr{L})$ dans $\mathscr{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{R}(Y)$ (2.3.4.1); mais si on identifie $\mathscr{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{R}(Y)$ à $\mathscr{R}(Y)[T]$, l'image de $f_*(\mathscr{L})$ s'identifie à $\mathscr{J}.T$, où $\mathscr{J}$ est un sous-$\mathcal{O}_Y$-Module cohérent (2.2.1) de $\mathscr{R}(Y)$, dont la restriction à U' est isomorphe à $\mathcal{O}_Y|U'$, et qui par suite est tel que $\mathscr{J}|U$ soit inversible. On voit alors que $\mathscr{S}$ est **(TN)**-isomorphe à $\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{J}^n$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**2.3.6**). — *Sous les hypothèses de* (2.3.5), *supposons en outre que, pour tout sous-*$\mathcal{O}_Y$*-Module cohérent* $\mathscr{J} \neq 0$ *de* $\mathscr{R}(Y)$, *il existe un* $\mathcal{O}_Y$*-Module inversible* $\mathscr{L}$ *tel que* $\Gamma(Y, \mathscr{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{H}om(\mathscr{J}, \mathcal{O}_Y)) \neq 0$; *alors, dans l'énoncé de* (2.3.5), *on peut supposer que* $\mathscr{J}$ *est un Idéal de* $\mathcal{O}_Y$. *Cette condition supplémentaire est toujours vérifiée s'il existe un* $\mathcal{O}_Y$*-Module ample.*

En effet, on a ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.4.2)

$$\mathscr{L} \otimes \mathscr{H}om(\mathscr{J}, \mathcal{O}_Y) = \mathscr{H}om(\mathscr{L}^{-1}, \mathscr{H}om(\mathscr{J}, \mathcal{O}_Y)) = \mathscr{H}om(\mathscr{J} \otimes \mathscr{L}^{-1}, \mathcal{O}_Y);$$

l'hypothèse signifie donc qu'il y a un homomorphisme non nul u de $\mathscr{J} \otimes \mathscr{L}^{-1}$ dans $\mathcal{O}_Y$. Comme, pour tout $y \in Y$, $(\mathscr{J} \otimes \mathscr{L}^{-1})_y$ s'identifie à un sous-$\mathcal{O}_y$-Module du corps des fractions $(\mathscr{R}(Y))_y$ de $\mathcal{O}_y$ (**I**, 7.1.5), u_y est nécessairement injectif, donc u est un isomorphisme de $\mathscr{J} \otimes \mathscr{L}^{-1}$ sur un Idéal $\mathscr{J}'$ de $\mathcal{O}_Y$. Mais comme $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{J}^n)$ et

$$\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n \geqslant 0} (\mathscr{J} \otimes \mathscr{L}^{-1})^n)$$

sont Y-isomorphes (**II**, 3.1.8), cela prouve la première assertion du corollaire. Pour démontrer la seconde, notons que $\mathscr{F} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{J}, \mathcal{O}_Y)$ est cohérent et $\neq 0$, puisqu'il existe un ouvert U de Y tel que $\mathscr{J}|U$ soit inversible. Si $\mathscr{L}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module ample, il existe un entier n tel que $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ soit engendré par ses sections au-dessus de Y (**II**, 4.5.5); *a fortiori*, on a $\Gamma(Y, \mathscr{F}(n)) \neq 0$, d'où la conclusion.

Corollaire (**2.3.7**). — *Soient* X *et* Y *deux schémas intègres, projectifs sur un corps* k, *et soit* $f: X \to Y$ *un* k*-morphisme birationnel. Alors* X *est* k*-isomorphe à un* Y*-schéma obtenu en faisant éclater un sous-schéma fermé* Y' *(non nécessairement réduit) de* Y.

En effet, f est projectif (**II**, 5.5.5, (v)) et comme Y est projectif sur k, la condition supplémentaire de (2.3.6) est vérifiée; il suffit alors de considérer le sous-schéma fermé Y′ de Y défini par l'Idéal cohérent $\mathscr{J}$ du cor. (2.3.6).

Remarque **(2.3.8)**. — Au chap. IV, en étudiant la notion de diviseur, nous verrons que si, dans l'énoncé de (2.3.5), on suppose que les anneaux $\mathcal{O}_y$ ($y \in \mathrm{Y}$) sont factoriels (ce qui est le cas par exemple si Y est non singulier), alors X peut se déduire de Y en faisant éclater un sous-préschéma fermé Y′ de Y dont l'espace sous-jacent est contenu dans Y—U.

2.4. Une généralisation du théorème fondamental.

Théorème **(2.4.1)**. — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $\mathscr{S}$ *une* $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$*-Algèbre quasi-cohérente de type fini. Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme projectif,* $\mathscr{S}' = f^*(\mathscr{S})$, $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{S}'$*-Module quasi-cohérent de type fini. Alors :*

(i) *Pour tout* $p \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{M})$ *est un* $\mathscr{S}$*-Module de type fini.*

(ii). *Soit de plus* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module inversible ample pour* f, *et posons* $\mathscr{M}(n) = \mathscr{M} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$. *Il existe un entier* N *tel que, pour* $n \geqslant \mathrm{N}$, *on ait*

(2.4.1.1) $$\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{M}(n)) = 0$$

pour tout $p > 0$, *et que l'homomorphisme canonique* $f^*(f_*(\mathscr{M}(n)) \to \mathscr{M}(n)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.4.3) *soit surjectif.*

Posons $\mathrm{Y}' = \mathrm{Spec}(\mathscr{S})$, $\mathrm{X}' = \mathrm{Spec}(\mathscr{S}')$ de sorte que $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ (**II**, 1.5.5); soient $g : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$, $g' : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ les morphismes structuraux, qui sont affines par définition, et $f' = f_{(\mathrm{Y}')} : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$; on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[d, "f"'] & \mathrm{X}' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[dl, "h"] \\ \mathrm{Y} & \mathrm{Y}' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

et le morphisme f' est projectif (**II**, 5.5.5, (iii)); posons $h = f \circ g' = g \circ f'$.

(i) Soit $\widetilde{\mathscr{M}}$ le $\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}$-Module associé au $\mathscr{S}'$-Module quasi-cohérent $\mathscr{M}$, quand X′ est considéré comme un X-schéma affine (**II**, 1.4.3), de sorte que l'on a $\mathscr{M} = g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})$; comme $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{S}'$-Module de type fini, $\widetilde{\mathscr{M}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}$-Module de type fini (**II**, 1.4.5); comme h est de type fini, puisque g et f' le sont (**II**, 1.3.7 et **I**, 6.3.4, (ii)), X′ est noethérien (**I**, 6.3.7) et $\widetilde{\mathscr{M}}$ est par suite cohérent. Cela étant, comme g' est affine, l'homomorphisme canonique $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{M}) \to \mathrm{R}^p h_*(\widetilde{\mathscr{M}})$ est bijectif (1.3.4). En outre, cet homomorphisme est un homomorphisme de $\mathscr{S}$*-Modules*; en effet, de l'homomorphisme canonique

(2.4.1.2) $$g'_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}) \to g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})$$

qui définit la structure de $\mathscr{S}'$-Module de $\mathscr{M}$ (en se rappelant que $\mathscr{S}' = g'_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'})$), on déduit canoniquement un homomorphisme

$$f_*(g'_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'})) \otimes \mathrm{R}^p f_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})) \to \mathrm{R}^p f_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}))$$

(**0**, 12.2.2), et comme (2.4.1.2) provient lui-même (par application de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.2.2.1)) de l'homomorphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}\otimes\widetilde{\mathscr{M}}\rightarrow\widetilde{\mathscr{M}}$ définissant la structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$-Module de $\widetilde{\mathscr{M}}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} f_*(g'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}))\otimes\mathrm{R}^pf_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}^pf_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})) \arrow[d] \\ h_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'})\otimes\mathrm{R}^ph_*(\widetilde{\mathscr{M}}) \arrow[r] & \mathrm{R}^ph_*(\widetilde{\mathscr{M}}) \end{tikzcd}$$

est commutatif (**0**, 12.2.6); composant les flèches horizontales avec l'homomorphisme provenant de l'homomorphisme canonique $\mathscr{S}\rightarrow f_*(f^*(\mathscr{S}))=f_*(\mathscr{S}')=f_*(g'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}))=h_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'})$, on obtient notre assertion. D'autre part, puisque g est affine et que f' est séparé et quasi-compact, l'homomorphisme canonique $\mathrm{R}^ph_*(\widetilde{\mathscr{M}})\rightarrow g_*(\mathrm{R}^pf'_*(\widetilde{\mathscr{M}}))$ est bijectif (1.4.14), et on démontre comme ci-dessus que c'est un isomorphisme de *$\mathscr{S}$-Modules* (en utilisant cette fois la commutativité de (**0**, 12.2.6.2)). Or, f' étant projectif et $\widetilde{\mathscr{M}}$ cohérent, $\mathrm{R}^pf'_*(\widetilde{\mathscr{M}})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}$-Module cohérent en vertu de (2.2.1); on en conclut que $g_*(\mathrm{R}^pf'_*(\widetilde{\mathscr{M}}))$ est un $\mathscr{S}$-Module *de type fini* (**II**, 1.4.5).

(ii) Soit $\mathscr{L}'=g'^*(\mathscr{L})$, qui est un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$-Module inversible; pour tout $n\in\mathbf{Z}$, on a $g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})=g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}=\mathscr{M}(n)$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.4.10) à un isomorphisme près; on peut appliquer à $\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}$ le raisonnement fait dans (i) pour $\widetilde{\mathscr{M}}$, qui prouve que $\mathrm{R}^pf_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}))$ est isomorphe à $g_*(\mathrm{R}^pf'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}))$. Or $\mathscr{L}'$ est ample pour f' (**II**, 4.6.13, (iii)), donc il résulte de (**2.2.1**) qu'il existe un entier N tel que $\mathrm{R}^pf'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})=0$ pour tout p et tout $n\geqslant\mathrm{N}$, ce qui prouve (2.4.1.1). Enfin, il résulte encore de (2.2.1) qu'on peut supposer N tel que pour $n\geqslant\mathrm{N}$, l'homomorphisme canonique $f'^*(f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}))\rightarrow\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}$ soit surjectif; comme g'_* est un foncteur exact (**II**, 1.4.4), l'homomorphisme correspondant

$$g'_*(f'^*(f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})))\rightarrow g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})=\mathscr{M}(n)$$

est surjectif. Or, on a $g'_*(f'^*(f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})))=f^*(g_*(f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}))$ (**II**, 1.5.2) et comme $g_*\circ f'_*=f_*\circ g'_*$, on voit finalement que l'on a

$$g'_*(f'^*(f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})))=f^*(f_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})))=f^*(f_*(\mathscr{M}(n))),$$

ce qui achève la démonstration.

(2.4.2) Nous aurons en particulier à appliquer (2.4.1) lorsque $\mathscr{S}$ est une $\mathscr{O}_\mathrm{Y}$-Algèbre *graduée* à degrés positifs, $\mathscr{M}=\bigoplus_{k\in\mathbf{Z}}\mathscr{M}_k$ un $\mathscr{S}'$-Module *gradué*. Alors (avec les mêmes hypothèses de finitude sur $\mathscr{S}$ et $\mathscr{M}$) on conclut de (2.4.1) que $\bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathrm{R}^p f_*(\mathscr{M}_k)$ est un $\mathscr{S}$-Module *de type fini* pour tout p, et (sous les hypothèses supplémentaires de (2.4.1, (ii)) qu'il existe N tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{M}_k(n)) = 0$ pour tout $p>0$ et *tout* $k\in\mathbf{Z}$, et que l'homomorphisme canonique $f^*(f_*(\mathscr{M}_k(n))) \rightarrow \mathscr{M}_k(n)$ soit surjectif pour *tout* $k\in\mathbf{Z}$.

2.5. Caractéristique d'Euler-Poincaré et polynôme de Hilbert.

(2.5.1) Soient A un anneau *artinien*, X un A-schéma *projectif* sur $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Pour tout $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module cohérent $\mathscr{F}$, les $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ $(i \geqslant 0)$ sont des A-modules de type fini (2.2.1), donc ici *de longueur finie* puisque A est artinien. On sait en outre (2.2.1) que $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F}) = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de $i \geqslant 0$; le nombre entier

(2.5.1.1)
$$\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{long}(\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F}))$$

est donc défini pour tout $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module cohérent $\mathscr{F}$. Lorsque A est un *anneau local artinien*, on dit que $\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F})$ est la *caractéristique d'Euler-Poincaré de* $\mathscr{F}$ *(par rapport à l'anneau* A). Pour $\mathscr{F} = \mathcal{O}_\mathrm{X}$, on dit que $\chi_\mathrm{A}(\mathcal{O}_\mathrm{X})$ est le *genre arithmétique de* X (par rapport à A).

Proposition **(2.5.2)**. — *Soit* $0 \rightarrow \mathscr{F}' \rightarrow \mathscr{F} \rightarrow \mathscr{F}'' \rightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Modules cohérents; on a alors*

(2.5.2.1)
$$\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}) = \chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}') + \chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}'').$$

Comme les modules de cohomologie de $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$, $\mathscr{F}''$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux, il y a un entier $r>0$ tel que la suite exacte de cohomologie s'écrive

$$0 \rightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{F}') \rightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \rightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{F}'') \rightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathscr{F}') \rightarrow \ldots$$
$$\ldots \rightarrow \mathrm{H}^r(\mathrm{X}, \mathscr{F}') \rightarrow \mathrm{H}^r(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \rightarrow \mathrm{H}^r(\mathrm{X}, \mathscr{F}'') \rightarrow 0.$$

Or, on sait que dans une suite exacte de A-modules de longueur finie, ayant des 0 aux deux extrémités, la somme alternée des longueurs est nulle (**0**, 11.10.1); appliquant ce résultat, on trouve immédiatement la formule (2.5.2.1).

On notera que le résultat de (2.5.2) s'applique toutes les fois que l'on sait que X est un A-schéma quasi-compact et que les A-modules $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ sont *de type fini* pour tout $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module cohérent $\mathscr{F}$ (1.4.12).

Théorème **(2.5.3)**. — *Soient* A *un anneau local artinien,* X *un schéma projectif sur* $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module inversible très ample relativement à* Y, $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module cohérent; on pose* $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathscr{L}^{\otimes n}$ *pour tout* $n\in\mathbf{Z}$.

(i) *Il existe un polynôme unique* $\mathrm{P} \in \mathbf{Q}[\mathrm{T}]$ *tel que* $\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}(n)) = \mathrm{P}(n)$ *pour tout* $n\in\mathbf{Z}$ (on dit que P est le *polynôme de Hilbert* de $\mathscr{F}$ par rapport à A).

(ii) *Pour n assez grand, on a* $\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}(n)) = \operatorname{long}_\mathrm{A} \Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{F}(n))$.

(iii) *Le terme de plus haut degré de* $\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}(n))$ *a un coefficient* $\geqslant 0$.

Ajoutons qu'au chap. IV, dans le paragraphe consacré à la notion de dimension, nous démontrerons en outre que *le degré de* $\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}(n))$ *est égal à la dimension du support de* $\mathscr{F}$.

Comme on a $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F}(n)) = 0$ pour tout $i>0$ dès que n est assez grand (2.2.1), on a $\chi_A(\mathscr{F}(n)) = \text{long}\, H^0(X, \mathscr{F}(n)) = \text{long}\, \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$ pour n assez grand, d'où (ii); cela entraîne $\chi_A(\mathscr{F}(n)) \geqslant 0$ pour n assez grand, et (iii) résulte donc de (i); comme d'ailleurs l'assertion d'unicité de (i) est immédiate, il reste à prouver l'existence du polynôme **P**.

Montrons d'abord qu'on peut supposer que $\mathfrak{m}\mathscr{F} = 0$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A. En effet, il existe un entier $s>0$ tel que $\mathfrak{m}^s = 0$, et $\mathscr{F}(n)$ admet donc une filtration finie

$$\mathscr{F}(n) \supset \mathfrak{m}\mathscr{F}(n) \supset \ldots \supset \mathfrak{m}^{s-1}\mathscr{F}(n) \supset 0.$$

Par récurrence, on déduit de (2.5.2.1) que

$$\chi_A(\mathscr{F}(n)) = \sum_{k=1}^{s} \chi_A(\mathfrak{m}^{k-1}\mathscr{F}(n)/\mathfrak{m}^k\mathscr{F}(n));$$

comme $\mathfrak{m}^{k-1}\mathscr{F}(n)/\mathfrak{m}^k\mathscr{F}(n) = \mathscr{F}'_k(n)$, où $\mathscr{F}'_k = \mathfrak{m}^{k-1}\mathscr{F}/\mathfrak{m}^k\mathscr{F}$, cela prouve notre assertion.

Supposons donc $\mathfrak{m}\mathscr{F} = 0$; si X' est le sous-schéma fermé de X, image réciproque par le morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}(A)$ de l'unique point fermé de Spec(A), et $j : X' \to X$ l'injection canonique, on a $\mathscr{F} = j_*(\mathscr{F}')$, où $\mathscr{F}'$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-Module cohérent; X' est un schéma projectif sur Spec(K), où $K = A/\mathfrak{m}$. Si $\mathscr{L}' = j^*(\mathscr{L})$, $\mathscr{L}'$ est très ample relativement à Spec(K) (**II**, 4.4.10), et on a $\mathscr{F}(n) = j_*(\mathscr{F}'(n))$, où $\mathscr{F}'(n) = \mathscr{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{L}'^{\otimes n}$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.4.10). On en conclut que $\chi_A(\mathscr{F}(n)) = \chi_K(\mathscr{F}'(n))$ (G, II, 4.9.1), et on est donc ramené au cas où A est un *corps*.

Notons maintenant que X peut être considéré comme un sous-schéma fermé de $P = \mathbf{P}^r_A$ pour un r convenable (**II**, 5.5.4, (ii)); si $i : X \to P$ est l'injection canonique, on voit comme ci-dessus que l'on a $\chi_A(\mathscr{F}(n)) = \chi_A(i_*(\mathscr{F})(n))$, de sorte que l'on peut se borner au cas où $X = \mathbf{P}^r_A = \mathrm{Proj}(S)$ avec $S = A[T_0, \ldots, T_r]$, A étant un corps.

Cela étant, on a $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un S-module gradué de type fini (**II**, 2.7.8); il existe par suite une résolution finie de M par des S-modules gradués *libres* de type fini

$$0 \to L_q \to L_{q-1} \to \ldots \to L_1 \to M \to 0$$

en vertu du th. des syzygies de Hilbert (M, VIII, 6.5); comme $\widetilde{M}$ est un foncteur exact en M (**II**, 2.5.4), on a aussi une suite exacte

$$0 \to \widetilde{L}_q \to \widetilde{L}_{q-1} \to \ldots \to \widetilde{L}_1 \to \widetilde{M} \to 0$$

et par suite, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la suite

$$0 \to \widetilde{L}_q(n) \to \widetilde{L}_{q-1}(n) \to \ldots \to \widetilde{L}_1(n) \to \widetilde{M}(n) \to 0$$

est exacte; appliquant par récurrence sur q la prop. (2.5.1), il vient

$$\chi_A(\widetilde{M}(n)) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \chi_A(\widetilde{L}_j(n))$$

et pour prouver (i), on est donc ramené au cas où M est *libre* et gradué de type fini, donc au cas où $M = S(h)$ pour un $h \in \mathbf{Z}$. Comme alors $\widetilde{\mathscr{M}}(n) = (M(n))^{\sim} = (S(n+h))^{\sim}$ (**II**, 2.5.15), on voit finalement que le théorème résultera du

Lemme (**2.5.3.1**). — *Soient* A *un corps, r un entier* >0, *et* $X = \mathbf{P}_A^r$; *on a alors* $\chi_A(\mathcal{O}_X(n)) = \binom{n+r}{r}$ *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$.

En effet, pour $n > 0$, on a $\chi_A(\mathcal{O}_X(n)) = \operatorname{long} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$, qui est le nombre de monômes en les T_i de degré total n, c'est-à-dire $\binom{n+r}{r}$ (2.1.12). Pour $n \leqslant -r-1$, on a de même $\chi_A(\mathcal{O}_X(n)) = (-1)^r \operatorname{long} H^r(X, \mathcal{O}_X(n))$; si $n = -r-h$, la dimension de $H^r(X, \mathcal{O}_X(n))$ sur A est le nombre des suites $(p_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$ d'entiers $p_i > 0$ tels que $\sum_{i=0}^{r} p_i = r+h$ (2.1.12), ou encore le nombre des suites d'entiers $q_i \geqslant 0$ ($0 \leqslant i \leqslant r$) tels que $\sum_{i=0}^{r} q_i = h-1$; c'est donc le nombre $\binom{h+r-1}{r} = (-1)^r \binom{n+r}{r}$. Enfin, pour $-r \leqslant n \leqslant 0$, on a $\binom{n+r}{r} = 0$ et d'autre part $H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$ (2.1.12), ce qui prouve le lemme.

Corollaire (**2.5.4**). — *Soient* A *un anneau local artinien,* S *une* A-*algèbre graduée de type fini engendrée par* S_1, M *un* S-*module gradué de type fini,* $X = \operatorname{Proj}(S)$. *On a alors* $\chi_A(\widetilde{M}(n)) = \operatorname{long} M_n$ *pour n assez grand.*

Cela résulte de ce que M_n et $\Gamma(X, \widetilde{M}(n))$ sont isomorphes pour n assez grand (2.3.1).

2.6. Application : critères d'amplitude.

Proposition (**2.6.1**). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme propre,* $\mathcal{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$-*Module inversible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathcal{L}$ *est ample pour f.*

b) *Pour tout* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent* $\mathcal{F}$, *il existe un entier* N *tel que pour* $n \geqslant N$, *on ait* $R^q f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

c) *Pour tout Idéal cohérent* $\mathcal{J}$ *de* $\mathcal{O}_X$, *il existe un entier* N *tel que pour* $n \geqslant N$ *on ait* $R^1 f_*(\mathcal{J} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$.

On a vu que *a)* entraîne *b)* (2.2.1, (ii)). Il est trivial que *b)* entraîne *c)*, et il reste à prouver que *c)* implique *a)*. On peut se borner au cas où Y est affine (**II**, 4.6.4), et prouver dans ce cas que $\mathcal{L}$ est ample; il suffira de montrer que lorsque h parcourt l'ensemble des sections des $\mathcal{L}^{\otimes n}$ ($n > 0$) au-dessus de X, ceux des X_h qui sont affines forment un recouvrement de X (**II**, 4.5.2). Pour cela, montrons que pour tout point *fermé x* de X et tout voisinage ouvert affine U de x, il existe un n et un $h \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ tels que $x \in X_h \subset U$; X_h sera nécessairement affine (**I**, 1.3.6) et la réunion de ces X_h sera un ouvert de X contenant tous les points fermés de X, et par suite X lui-même puisque X est noethérien (**I**, 6.3.7 et $\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 2.1.3). Soit $\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{J}'$) le faisceau quasi-cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ définissant le sous-préschéma fermé réduit de X ayant pour espace sous-jacent $X - U$ (resp. $(X-U) \cup \{x\}$) (**I**, 5.2.1); il est clair que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont cohérents (**I**, 6.1.1), que $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ et que $\mathcal{J}'' = \mathcal{J}/\mathcal{J}'$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.3.3) ayant pour support $\{x\}$ et tel que $\mathcal{J}''_x = \boldsymbol{k}(x)$. Comme $\mathcal{L}$ est localement libre, la suite $0 \to \mathcal{J}' \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{J} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{J}'' \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \to 0$ est exacte pour tout n, et par hypothèse il existe n assez grand tel que $H^1(X, \mathcal{J}' \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$; la suite exacte de cohomologie prouve donc que l'homomorphisme $\Gamma(X, \mathscr{J}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})\rightarrow\Gamma(X, \mathscr{J}''\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$ est *surjectif*. Une section g de $\mathscr{J}''\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ au-dessus de X telle que $g(x)\neq 0$ est donc l'image d'une section $h\in\Gamma(X, \mathscr{J}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})\subset\Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$ (car en vertu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.1), $\mathscr{J}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-Module de $\mathscr{L}^{\otimes n}$); on a par définition $h(x)\neq 0$ et $h(z)=0$ pour $z\notin U$, ce qui achève la démonstration.

Proposition (**2.6.2**). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $f: X\rightarrow Y$ *un morphisme de type fini,* $g: X'\rightarrow X$ *un morphisme fini surjectif,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible et* $\mathscr{L}'=g^*(\mathscr{L})$. *On suppose vérifiée la condition suivante : Il existe une partie* Z *de* X, *propre sur* Y (**II**, 5.4.10) *telle que pour tout* $x\in X-Z$, *ou bien* X *est normal au point* x, *ou bien* $(g_*(\mathcal{O}_{X'}))_x$ *est un* $\mathcal{O}_x$*-module libre. Dans ces conditions, pour que* $\mathscr{L}$ *soit ample pour* f, *il faut et il suffit que* $\mathscr{L}'$ *soit ample pour* $f\circ g$.

(**2.6.2.1**) Puisque g est affine, la condition est nécessaire (**II**, 5.1.12). Pour voir qu'elle est suffisante, on peut supposer Y affine (**II**, 4.6.4). Montrons en outre qu'on peut se borner au cas où X est *réduit*. En effet, soit $j: X_{\mathrm{red}}\rightarrow X$ l'injection canonique, et posons $X_1=X_{\mathrm{red}}$, $X'_1=X'\times_X X_1$, de sorte que l'on a le diagramme commutatif

$$(2.6.2.2)\qquad \begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{j'} & X'_1 \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_1} \\ X & \xleftarrow[j]{} & X_1 \end{array}.$$

Le morphisme $f\circ j$ est alors de type fini (**I**, 6.3.4) et g_1 est un morphisme fini (**II**, 6.1.5, (iii)); si $\mathscr{L}'$ est ample pour $f\circ g$, $j'^*(\mathscr{L}')$ est ample pour $f\circ g\circ j'$ puisque j' est une immersion fermée (**II**, 5.1.12 et **I**, 4.3.2). Si on pose $Z_1=j^{-1}(Z)$, Z_1 est propre sur Y (**II**, 5.4.10); d'autre part, si X est normal en un point x, il en est évidemment de même de X_{red}; enfin, si $(g_*(\mathcal{O}_{X'}))_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module libre, il résulte aussitôt de (**II**, 1.5.2) que $((g_1)_*(\mathcal{O}_{X'_1}))_x$ est un $\mathcal{O}_{X_1,x}$-module libre. Enfin, comme X est noethérien (**I**, 6.3.7), si $j^*(\mathscr{L})$ est ample, $\mathscr{L}$ est ample (**II**, 4.5.14), et comme $j'^*(\mathscr{L}')=g_1^*(j^*(\mathscr{L}))$, cela achève la réduction annoncée. Nous supposons donc désormais Y *affine* et X *réduit*.

Les hypothèses de (**II**, 6.6.11) étant alors vérifiées, il existe un Y-préschéma réduit X_2, et un Y-morphisme $h: X_2\rightarrow X$ *fini* et *birationnel* tel que la restriction de h à $h^{-1}(X-Z)$ soit un *isomorphisme* sur $X-Z$ et que $h^*(\mathscr{L})$ soit ample. Remplaçant X' par X_2, on voit qu'on est ramené à démontrer la proposition en supposant en outre que g *possède les propriétés qui viennent d'être énumérées pour* h. Nous désignerons encore par Z un sous-préschéma de X ayant Z pour espace sous-jacent, qui est propre sur Y (**II**, 5.4.10).

(**2.6.2.3**) Soient maintenant X_1 un *sous-préschéma fermé* de X, $j: X_1\rightarrow X$ l'injection canonique, $X'_1=g^{-1}(X_1)=X'\times_X X_1$ son image réciproque, $j': X'_1\rightarrow X'$ l'injection canonique, de sorte que l'on a le diagramme commutatif (2.6.2.2); posons $\mathscr{L}_1=j^*(\mathscr{L})$, $\mathscr{L}'_1=j'^*(\mathscr{L}')=g_1^*(\mathscr{L}_1)$, de sorte que $\mathscr{L}'_1$ est ample pour $f\circ g\circ j'$ (**II**, 5.1.12). Si on pose $Z_1=j^{-1}(Z)$, le sous-préschéma fermé Z_1 de X_1 est propre sur Y (**II**, 5.4.2, (ii)). En d'autres termes, *les hypothèses de* (2.6.2) *sont vérifiées pour* X_1, $\mathscr{L}_1$, g_1 et Z_1.

Ceci va nous permettre de démontrer (2.6.2) par *récurrence noethérienne* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.2.2) dans le cas où la restriction de g à $g^{-1}(X-Z)$ est un *isomorphisme* sur $X-Z$ (ce qui est suffisant pour notre propos, comme on l'a vu en (2.6.2.2)) : il suffira d'établir que si, pour tout sous-préschéma fermé X_1 de X, dont l'espace sous-jacent est $\neq X$, la conclusion de (2.6.2) est vraie pour le faisceau $\mathscr{L}_1$, alors elle est vraie aussi pour le faisceau $\mathscr{L}$.

(2.6.2.4) Soient alors $\mathscr{A}=\mathscr{O}_X$, $\mathscr{B}=g_*(\mathscr{O}_X)$, de sorte que $\mathscr{B}$ est une sous-$\mathscr{A}$-Algèbre de $\mathscr{R}(X)$, qui est un $\mathscr{A}$-Module cohérent; en outre, la restriction $\mathscr{B}|(X-Z)$ est égale à $\mathscr{A}|(X-Z)$. Soit $\mathscr{K}$ le *conducteur* de $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{A}$, c'est-à-dire le plus grand sous-$\mathscr{A}$-Module quasi-cohérent de $\mathscr{A}$ tel que $\mathscr{B}.\mathscr{K}\subset\mathscr{A}$ (ou encore l'*annulateur* du $\mathscr{A}$-Module $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.7)), ce qui entraîne $\mathscr{B}.\mathscr{K}=\mathscr{K}$. Il est clair que $\mathscr{K}_x=\mathscr{A}_x$ en tous les points admettant un voisinage W_x tel que g soit un isomorphisme de $g^{-1}(W_x)$ sur W_x, et en particulier en tous les points de $X-Z$ et dans un voisinage de tout point générique d'une composante irréductible de X. Considérons alors le sous-préschéma fermé $Z_1=\mathrm{Spec}(\mathscr{A}/\mathscr{K})$ de X défini par $\mathscr{K}$; il est encore *propre* sur Y car le sous-espace Z_1 est fermé dans Z (**II**, 5.4.10). De plus, la définition de $\mathscr{K}$ montre que $\mathscr{B}|(X-Z_1)=\mathscr{A}|(X-Z_1)$; on voit donc qu'on peut toujours se ramener au cas où $Z=\mathrm{Spec}(\mathscr{A}/\mathscr{K})$, et comme on a vu que $X-Z_1$ est un ouvert non vide de X, on peut toujours supposer que l'espace Z est *distinct* de X.

(2.6.2.5) Considérons X' comme égal à $\mathrm{Spec}(\mathscr{B})$ (puisque g est affine) et soit $\mathscr{K}'=\widetilde{\mathscr{K}}$, Idéal cohérent de $\mathscr{O}_{X'}$ tel que $g_*(\mathscr{K}')=\mathscr{K}$ (**II**, 1.4.1); le sous-préschéma fermé $Z'=g^{-1}(Z)=Z\times_X X'$ de X' est défini par $\mathscr{K}'$ et égal à $\mathrm{Spec}(\mathscr{B}/\mathscr{K})$ (**II**, 1.4.10); comme $h: Z'\rightarrow Z$ est un morphisme fini (**II**, 6.1.5, (iii)), Z' est *propre* sur Y (**II**, 6.1.11 et 5.4.2, (ii)).

Cela posé, il nous faut prouver que pour tout $x\in X$ et tout voisinage ouvert U de x, il existe une section s d'un $\mathscr{L}^{\otimes n}$ $(n>0)$ au-dessus de X telle que $x\in X_s\subset U$ (**II**, 4.5.2); nous distinguerons deux cas :

1° On a $x\in X-Z$; on peut évidemment supposer alors que l'on a aussi $U\subset X-Z$, donc l'ouvert $U'=g^{-1}(U)$ ne rencontre pas Z'. Comme $\mathscr{L}'$ est ample par hypothèse, il existe un $n>0$ et une section s' de $\mathscr{L}'^{\otimes n}$ au-dessus de X' telle que $x'=g^{-1}(x)\in X'_{s'}\subset g^{-1}(U)$ (**II**, 4.5.2). En outre, on peut supposer que $\mathscr{K}'\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}$ soit engendré par ses sections au-dessus de X' (**II**, 4.5.5), donc, comme $\mathscr{K}'_{x'}=\mathscr{O}_{x'}$, il y a une de ces sections s'' telle que $s''(x')\neq 0$; en la multipliant par s' (ce qui revient à remplacer n par $2n$), on voit qu'on peut supposer aussi que $x'\in X'_{s''}\subset g^{-1}(U)$. Cela étant, il résulte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.10) que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma(X, \mathscr{K}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X', \mathscr{K}'\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}).$$

La section s de $\mathscr{K}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ qui correspond à s'' par cet isomorphisme a évidemment les propriétés voulues.

2° On a $x\in Z$. Soit $\mathscr{J}$ l'Idéal cohérent de $\mathscr{O}_X$ définissant le sous-préschéma fermé réduit de X ayant pour espace sous-jacent $X-U$, et considérons *dans* $\mathscr{B}$ les Idéaux cohérents $\mathscr{J}\mathscr{B}$ et $\mathscr{J}\mathscr{K}=\mathscr{J}(\mathscr{K}\mathscr{B})=\mathscr{K}(\mathscr{J}\mathscr{B})$, de sorte que l'on a le diagramme d'inclusions

$$\begin{array}{ccc} & \mathscr{J}\mathscr{B} & \rightarrow & \mathscr{B} \\ & \uparrow & & \uparrow \\ & \mathscr{J} & \rightarrow & \mathscr{A} \\ & \uparrow & & \uparrow \\ \mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B}= & \mathscr{J}\mathscr{K} & \rightarrow & \mathscr{K} \end{array} \tag{2.6.2.6}$$

Soit $\mathscr{J}'$ l'Idéal cohérent $(\mathscr{J}\mathscr{B})^\sim$ de $\mathcal{O}_{X'}$ de sorte que $\mathscr{J}\mathscr{B}=g_*(\mathscr{J}')$, $\mathscr{J}'\mathscr{K}'=(\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B})^\sim$, et par suite $\mathscr{J}'/\mathscr{J}'\mathscr{K}'=(\mathscr{J}\mathscr{B}/\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B})^\sim$ (**II**, 1.4.4). Comme $\mathscr{J}|V=\mathscr{J}\mathscr{K}|V$ pour tout ouvert V ne rencontrant pas Z, on voit que le support de $\mathscr{J}'/\mathscr{J}'\mathscr{K}'$ est *contenu dans* Z'. Comme Z' est propre sur Y, on peut appliquer (2.2.4) et on voit que pour n assez grand, l'application canonique

$$\Gamma(X', \mathscr{J}'\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}) \rightarrow \Gamma(X', (\mathscr{J}'/\mathscr{J}'\mathscr{K}')\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})$$

est *surjective*.

Mais en vertu de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.4.10), on en conclut que l'application canonique

$$\Gamma(X, \mathscr{J}\mathscr{B}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}) \rightarrow \Gamma(X, (\mathscr{J}\mathscr{B}/\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$$

est *surjective*.

Cela étant, soient $i: Z\rightarrow X$ l'injection canonique, $i': Z'\rightarrow X'$ l'injection canonique, de sorte qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{i'} & Z' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X & \xleftarrow[i]{} & Z \end{array}$$

Soient $\mathscr{M}=i^*(\mathscr{L})$, $\mathscr{M}'=i'^*(\mathscr{L}')$; comme $\mathscr{L}'$ est ample, $\mathscr{M}'$ est ample (**II**, 5.1.12), et d'autre part $\mathscr{M}'=h^*(\mathscr{M})$; on conclut donc de l'hypothèse de récurrence noethérienne (puisque $Z\neq X$) que $\mathscr{M}$ est *ample*. Par suite $i^*(\mathscr{J}/\mathscr{J}\mathscr{K})\otimes\mathscr{M}^{\otimes n}$ est engendré par ses sections au-dessus de Z pour n assez grand (**II**, 4.5.5). Comme $\mathscr{J}/\mathscr{J}\mathscr{K}=i_*(i^*(\mathscr{J}/\mathscr{J}\mathscr{K}))$, on déduit encore de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.4.10) qu'il existe une section s de $(\mathscr{J}/\mathscr{J}\mathscr{K})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ au-dessus de X (pour un n assez grand) telle que $s(x)\neq 0$, puisque l'on a $\mathscr{J}_x=\mathscr{A}_x$ par définition de $\mathscr{J}$ et $\mathscr{K}_x\neq\mathscr{A}_x$ par hypothèse. Le diagramme (2.6.2.6) montre que s est aussi une section de $(\mathscr{J}\mathscr{B}/\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ au-dessus de X, donc s est l'*image canonique d'une section t de* $(\mathscr{J}\mathscr{B})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ au-dessus de X. Mais par définition, l'image canonique s de t mod. $(\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ est dans $(\mathscr{J}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})/(\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$ donc, en vertu de (2.6.2.6), cela implique que t est une *section de* $\mathscr{J}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ au-dessus de X, et *a fortiori* une section de $\mathscr{L}^{\otimes n}$. On a vu ci-dessus que $t(x)\neq 0$, donc $x\in X_t$, et par définition de $\mathscr{J}$, $t(y)=0$ dans $X-U$ qui est le support de $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}$; donc $X_t\subset U$, ce qui achève la démonstration.

Remarque **(2.6.3).** — Lorsque X est *propre* sur Y, on peut démontrer (2.6.2) plus simplement, en raisonnant comme dans le th. de Chevalley (**II**, 6.7.1), à l'aide de (2.6.1) et du lemme (**II**, 6.7.1.1).

§ 3. LE THÉORÈME DE FINITUDE POUR LES MORPHISMES PROPRES

3.1. Le lemme de dévissage.

Définition **(3.1.1).** — *Soit* $\boldsymbol{K}$ *une catégorie abélienne. On dit qu'un sous-ensemble* $\boldsymbol{K}'$ *de l'ensemble des objets de* $\boldsymbol{K}$ *est exact si* $0 \in \boldsymbol{K}'$ *et si, pour toute suite exacte* $0 \rightarrow \mathrm{A}' \rightarrow \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}'' \rightarrow 0$ *dans* $\boldsymbol{K}$ *telle que deux des objets* A, A′, A″ *soit dans* $\boldsymbol{K}'$, *alors le troisième est aussi dans* $\boldsymbol{K}'$.

Théorème **(3.1.2).** — *Soit* X *un préschéma noethérien; on désigne par* $\boldsymbol{K}$ *la catégorie abélienne des* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Modules cohérents. Soient* $\boldsymbol{K}'$ *un sous-ensemble exact de* $\boldsymbol{K}$, X′ *une partie fermée de l'espace sous-jacent à* X. *On suppose que pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X′, *de point générique* y, *il existe un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module* $\mathscr{G} \in \boldsymbol{K}'$ *tel que* $\mathscr{G}_y$ *soit un* $\boldsymbol{k}(y)$*-espace vectoriel de dimension* 1. *Alors tout* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module cohérent de support contenu dans* X′ *appartient à* $\boldsymbol{K}'$ (*et en particulier, si* $\mathrm{X}' = \mathrm{X}$, *on a* $\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K}$).

Considérons la propriété suivante $\boldsymbol{P}(\mathrm{Y})$ d'une partie fermée Y de X′ : tout $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module cohérent de support contenu dans Y appartient à $\boldsymbol{K}'$. En vertu du principe de récurrence noethérienne ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.2.2), on voit qu'on est ramené à démontrer que *si* Y *est une partie fermée de* X′ *tel que la propriété* $\boldsymbol{P}(\mathrm{Y}')$ *soit vraie pour toute partie fermée* Y′ *de* Y, *distincte de* Y, *alors* $\boldsymbol{P}(\mathrm{Y})$ *est vraie.*

Soit donc $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$ à support contenu dans Y et prouvons que $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}'$. Désignons encore par Y le sous-préschéma fermé réduit de X ayant Y pour espace sous-jacent (**I**, 5.2.1); il est défini par un Idéal cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$. On sait (**I**, 9.3.4) qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\mathscr{J}^n \mathscr{F} = 0$; pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathscr{J}^{k-1}\mathscr{F}/\mathscr{J}^k\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{F}/\mathscr{J}^k\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{F}/\mathscr{J}^{k-1}\mathscr{F} \rightarrow 0$$

de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modules cohérents ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.6 et 5.3.3); comme $\boldsymbol{K}'$ est exact, on voit, par récurrence sur k, qu'il suffit de montrer que chacun des $\mathscr{F}_k = \mathscr{J}^{k-1}\mathscr{F}/\mathscr{J}^k\mathscr{F}$ est dans $\boldsymbol{K}'$. On est donc ramené à prouver que $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}'$ sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathscr{J}\mathscr{F} = 0$; il revient au même de dire que $\mathscr{F} = j_*(j^*(\mathscr{F}))$, où j est l'injection canonique $\mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{X}$. Distinguons maintenant deux cas :

a) Y est *réductible*. Soient $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}' \cup \mathrm{Y}''$, Y′ et Y″ étant des parties fermées de Y, distinctes de Y; soient encore Y′, Y″ les sous-préschémas fermés réduits de X ayant pour espaces sous-jacents Y′, Y″ respectivement, qui sont définis respectivement par les Idéaux cohérents $\mathscr{J}'$, $\mathscr{J}''$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$. Posons $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} (\mathcal{O}_{\mathrm{X}}/\mathscr{J}')$, $\mathscr{F}'' = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} (\mathcal{O}_{\mathrm{X}}/\mathscr{J}'')$. Les homomorphismes canoniques $\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{F}'$, $\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{F}''$ définissent donc un homomorphisme $u : \mathscr{F} \rightarrow \mathscr{F}' \oplus \mathscr{F}''$. Montrons que pour tout $z \notin \mathrm{Y}' \cap \mathrm{Y}''$, l'homomorphisme $u_z : \mathscr{F}_z \rightarrow \mathscr{F}'_z \oplus \mathscr{F}''_z$ est *bijectif*. En effet, on a $\mathscr{J}' \cap \mathscr{J}'' = \mathscr{J}$, car la question est locale et l'égalité précédente résulte de (**I**, 5.2.1 et 1.1.5); si $z \notin \mathrm{Y}''$, on a donc $\mathscr{J}'_z = \mathscr{J}_z$, d'où $\mathscr{F}'_z = \mathscr{F}_z$ et $\mathscr{F}''_z = 0$, ce qui établit notre assertion dans ce cas; on raisonne de même si $z \notin \mathrm{Y}'$. Par suite, le noyau et le conoyau de u, qui sont dans $\boldsymbol{K}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4) ont leurs supports dans $\mathrm{Y}' \cap \mathrm{Y}''$, et sont donc dans $\boldsymbol{K}'$ par hypothèse; pour la même raison, $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}''$ sont dans $\boldsymbol{K}'$, donc aussi $\mathscr{F}' \oplus \mathscr{F}''$, puisque $\boldsymbol{K}'$ est exact. La conclusion résulte alors de la considération des deux suites exactes

$$0 \rightarrow \mathrm{Im}\, u \rightarrow \mathscr{F}' \oplus \mathscr{F}'' \rightarrow \mathrm{Coker}\, u \rightarrow 0$$
$$0 \rightarrow \mathrm{Ker}\, u \rightarrow \mathscr{F} \rightarrow \mathrm{Im}\, u \rightarrow 0$$

et de l'hypothèse que $\boldsymbol{K}'$ est exact.

b) Y est irréductible, et par suite le sous-préschéma Y de X est *intègre*. Si y est son point générique, on a $(\mathcal{O}_{\mathrm{Y}})_y = \boldsymbol{k}(y)$, et comme $j^*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-Module cohérent, $\mathscr{F}_y = (j^*(\mathscr{F}))_y$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-espace vectoriel de dimension finie m. Par hypothèse, il y a un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module cohérent $\mathscr{G}$ (nécessairement de support Y) tel que $\mathscr{G}_y$ soit un $\boldsymbol{k}(y)$-espace vectoriel de dimension 1. Par suite, il y a un $\boldsymbol{k}(y)$-isomorphisme $(\mathscr{G}_y)^m \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_y$, qui est aussi un $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-isomorphisme, et comme $\mathscr{G}^m$ et $\mathscr{F}$ sont cohérents, il existe un voisinage ouvert W de y dans X et un isomorphisme $\mathscr{G}^m|\mathrm{W} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}|\mathrm{W}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.7). Soit $\mathscr{H}$ le graphe de cet isomorphisme, qui est un sous-$(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}|\mathrm{W})$-Module cohérent de $(\mathscr{G}^m \oplus \mathscr{F})|\mathrm{W}$, canoniquement isomorphe à $\mathscr{G}^m|\mathrm{W}$ et à $\mathscr{F}|\mathrm{W}$; il existe donc un sous-$\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module cohérent $\mathscr{H}_0$ de $\mathscr{G}^m \oplus \mathscr{F}$, induisant $\mathscr{H}$ sur W et 0 sur $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ puisque $\mathscr{G}^m$ et $\mathscr{F}$ ont pour support Y (**I**, 9.4.7). Les restrictions $v : \mathscr{H}_0 \rightarrow \mathscr{G}^m$ et $w : \mathscr{H}_0 \rightarrow \mathscr{F}$ des projections canoniques de $\mathscr{G}^m \oplus \mathscr{F}$ sont alors des homomorphismes de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modules cohérents, qui, dans W et dans $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$, se réduisent à des isomorphismes; autrement dit, les noyaux et conoyaux de v et w ont leur support dans l'ensemble fermé $\mathrm{Y} - (\mathrm{Y} \cap \mathrm{W})$, distinct de Y. Ils appartiennent donc à $\boldsymbol{K}'$; d'autre part, on a $\mathscr{G}^m \in \boldsymbol{K}'$ puisque $\mathscr{G} \in \boldsymbol{K}'$ et que $\boldsymbol{K}'$ est exact. On en conclut successivement, par l'exactitude de $\boldsymbol{K}'$, que $\mathscr{H}_0 \in \boldsymbol{K}'$ puis que $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}'$. C.Q.F.D.

Corollaire (**3.1.3**). — *Supposons que le sous-ensemble exact $\boldsymbol{K}'$ de $\boldsymbol{K}$ ait en outre la propriété que tout facteur direct cohérent d'un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module cohérent $\mathscr{M} \in \boldsymbol{K}'$ appartienne encore à $\boldsymbol{K}'$. Dans ces conditions, la conclusion de* (3.1.2) *subsiste encore lorsque la condition « $\mathscr{G}_y$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-espace vectoriel de dimension* 1 » *est remplacée par $\mathscr{G}_y \neq 0$ (ce qui équivaut à* Supp $(\mathscr{G}) = \mathrm{Y}$).

En effet, le raisonnement de (3.1.2) ne doit être modifié que dans le cas *b)*; cette fois $\mathscr{G}_y$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-espace vectoriel de dimension $q > 0$, et on a par suite un $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-isomorphisme $(\mathscr{G}_y)^m \xrightarrow{\sim} (\mathscr{F}_y)^q$; la fin du raisonnement de (3.1.2) prouve alors que $\mathscr{F}^q \in \boldsymbol{K}'$, et l'hypothèse additionnelle sur $\boldsymbol{K}'$ implique que $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}'$.

3.2. Le théorème de finitude : cas des schémas usuels.

Théorème (**3.2.1**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme propre. Pour tout $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module cohérent $\mathscr{F}$, les $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-Modules $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ sont cohérents pour $q \geqslant 0$.*

La question étant locale sur Y, on peut supposer Y noethérien, donc X noethérien (**I**, 6.3.7). Les $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modules cohérents $\mathscr{F}$ pour lesquels la conclusion du th. (3.2.1) est vraie forment un sous-ensemble *exact* $\boldsymbol{K}'$ de la catégorie $\boldsymbol{K}$ des $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modules cohérents.

En effet, soit $0 \rightarrow \mathscr{F}' \rightarrow \mathscr{F} \rightarrow \mathscr{F}'' \rightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents; supposons par exemple que $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}''$ appartiennent à $\boldsymbol{K}'$; on a la suite exacte de cohomologie

$$\mathrm{R}^{q-1}f_*(\mathscr{F}'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}') \rightarrow \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) \rightarrow \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{R}^{q+1} f_*(\mathscr{F}')$$

dans laquelle par hypothèse les quatre termes extrêmes sont cohérents; il en est donc de même du terme médian $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ par (**0**$_{\mathrm{I}}$, 5.3.4 et 5.3.3). On montre de la même manière que lorsque $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ (resp. $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}''$) sont dans $\boldsymbol{K}'$, il en est de même de $\mathscr{F}''$ (resp. $\mathscr{F}'$). De plus, tout *facteur direct* cohérent $\mathscr{F}'$ d'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}'$ appartient aussi à $\boldsymbol{K}'$: en effet, $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}')$ est alors facteur direct de $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ (G, II, 4.4.4), donc est de type fini, et comme il est quasi-cohérent (1.4.10), il est cohérent, Y étant noethérien. En vertu de (3.1.3), on est ramené à prouver que lorsque X est *irréductible* de point générique x, il existe *un* $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F}$ appartenant à $\boldsymbol{K}'$, tel que $\mathscr{F}_x \neq 0$: en effet, si ce point est établi, on pourra l'appliquer à tout sous-préschéma fermé irréductible Y de X, car si $j : Y \rightarrow X$ est l'injection canonique, $f \circ j$ est propre (**II**, 5.4.2), et si $\mathscr{G}$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent de support Y, $j_*(\mathscr{G})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent tel que $\mathrm{R}^q(f \circ j)_*(\mathscr{G}) = \mathrm{R}^q f_*(j_*(\mathscr{G}))$ (G, II, 4.9.1), donc on est bien dans les conditions d'application de (3.1.3).

Or, en vertu du lemme de Chow (**II**, 5.6.2), il existe un préschéma irréductible X' et un morphisme *projectif* et surjectif $g : X' \rightarrow X$ tel que $f \circ g : X' \rightarrow Y$ soit *projectif*. Il existe un $\mathcal{O}_{X'}$-Module $\mathscr{L}$ ample pour g (**II**, 5.3.1); appliquons le th. fondamental des morphismes projectifs (2.2.1) à $g : X' \rightarrow X$ et à $\mathscr{L}$: il existe donc un entier n tel que $\mathscr{F} = g_*(\mathcal{O}_{X'}(n))$ soit un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent et $\mathrm{R}^q g_*(\mathcal{O}_{X'}(n)) = 0$ pour tout $q > 0$; en outre, comme $g^*(g_*(\mathcal{O}_{X'}(n))) \rightarrow \mathcal{O}_{X'}(n)$ est surjectif pour n assez grand (2.2.1), on voit qu'on peut supposer que, au point générique x de X, on a $\mathscr{F}_x \neq 0$ (**II**, 3.4.7). D'autre part, comme $f \circ g$ est projectif et Y noethérien, les $\mathrm{R}^p(f \circ g)_*(\mathcal{O}_{X'}(n))$ sont *cohérents* (2.2.1). Cela étant, $\mathrm{R}^*(f \circ g)_*(\mathcal{O}_{X'}(n))$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray, dont le terme E_2 est donné par $\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{R}^p f_*(\mathrm{R}^q g_*(\mathcal{O}_{X'}(n)))$; ce qui précède montre que cette suite spectrale est dégénérée, et on sait alors (**0**, 11.1.6) que $\mathrm{E}_2^{p0} = \mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F})$ est isomorphe à $\mathrm{R}^p(f \circ g)_*(\mathcal{O}_{X'}(n)))$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**3.2.2**). — *Soit* Y *un préschéma localement noethérien. Pour tout morphisme propre* $f : X \rightarrow Y$, *l'image directe par* f *de tout* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent est un* $\mathcal{O}_Y$-*Module cohérent.*

Corollaire (**3.2.3**). — *Soient* A *un anneau noethérien,* X *un schéma propre sur* A; *pour tout* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent* $\mathscr{F}$, *les* $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F})$ *sont des* A-*modules de type fini, et il existe un entier* $r > 0$ *tel que pour tout* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent* $\mathscr{F}$ *et tout* $p > r$, $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F}) = 0$.

La seconde assertion a déjà été démontrée (1.4.12); la première résulte du th. de finitude (3.2.1), compte tenu de (1.4.11).

En particulier, si X est un *schéma algébrique propre* sur un corps k, alors, pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F}$, les $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F})$ sont des k-espaces vectoriels de *dimension finie.*

Corollaire (**3.2.4**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : X \rightarrow Y$ *un morphisme de type fini. Pour tout* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent* $\mathscr{F}$ *dont le support est propre sur* Y (**II**, 5.4.10), *les* $\mathcal{O}_Y$-*Modules* $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ *sont cohérents.*

La question étant locale sur Y, on peut supposer Y noethérien, et il en est donc de même de X (**I**, 6.3.7). Par hypothèse, tout sous-préschéma fermé Z de X dont l'espace sous-jacent est $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ est propre sur Y, autrement dit, si $j : Y \to X$ est l'injection canonique, $f \circ j : Z \to Y$ est propre. Or, on peut supposer Z tel que $\mathscr{F} = j_*(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G} = j^*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Z$-Module cohérent (**I**, 9.3.5); comme on a $R^q f_*(\mathscr{F}) = R^q(f \circ j)_*(\mathscr{G})$ par (1.3.4), la conclusion résulte aussitôt de (3.2.1).

3.3. Généralisation du théorème de finitude (schémas usuels).

Proposition (**3.3.1**). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $\mathscr{S}$ *une* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre graduée à degrés positifs, quasi-cohérente et de type fini,* $Y' = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ *et* $g : Y' \to Y$ *le morphisme structural. Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme propre,* $\mathscr{S}' = f^*(\mathscr{S})$, $\mathscr{M} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathscr{M}_k$ *un* $\mathscr{S}'$*-Module gradué quasi-cohérent et de type fini. Alors les* $R^p f_*(\mathscr{M}) = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} R^p f_*(\mathscr{M}_k)$ *sont des* $\mathscr{S}$*-Modules gradués de type fini pour tout* p. *Supposons en outre que* $\mathscr{S}$ *soit engendrée par* $\mathscr{S}_1$ *; alors, pour chaque* $p \in \mathbf{Z}$, *il existe un entier* k_p *tel que pour tout* $k \geqslant k_p$ *et tout* $r \geqslant 0$, *on ait*

$$R^p f_*(\mathscr{M}_{k+r}) = \mathscr{S}_r R^p f_*(\mathscr{M}_k). \tag{3.3.1.1}$$

La première assertion est identique à l'énoncé de (2.4.1, (i)), où on a simplement remplacé « morphisme projectif » par « morphisme propre ». Or, dans la démonstration de (2.4.1, (i)), l'hypothèse sur f a été utilisée uniquement pour montrer (avec les notations de cette démonstration) que $R^p f'_*(\widetilde{\mathscr{M}})$ est un $\mathcal{O}_{Y'}$-Module cohérent. Avec les hypothèses de (3.3.1), f' est propre (**II**, 5.4.2, (iii)), donc on peut reprendre sans changement toute la démonstration de (2.4.1, (i)), grâce au théorème de finitude (3.2.1).

Quant à la seconde assertion, il suffit de remarquer qu'il y a un recouvrement ouvert affine fini (U_i) de Y tel que les restrictions à U_i des deux membres de (3.3.1.1) soient égales pour tout $k \geqslant k_{p,i}$ (**II**, 2.1.6, (ii)); il suffit de prendre pour k_p le plus grand des $k_{p,i}$.

Corollaire (**3.3.2**). — *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* A, X *un* A*-schéma propre,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Alors, pour tout* $p \geqslant 0$, *la somme directe* $\bigoplus_{k \geqslant 0} H^p(X, \mathfrak{m}^k \mathscr{F})$ *est un module de type fini sur l'anneau* $S = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathfrak{m}^k$; *en particulier, il existe un entier* $k_p \geqslant 0$ *tel que pour tout* $k \geqslant k_p$, *et tout* $r \geqslant 0$, *on ait*

$$H^p(X, \mathfrak{m}^{k+r} \mathscr{F}) = \mathfrak{m}^r H^p(X, \mathfrak{m}^k \mathscr{F}). \tag{3.3.3.1}$$

Il suffit d'appliquer (3.3.2) avec $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathscr{S} = \widetilde{S}$, $\mathscr{M}_k = \mathfrak{m}^k \mathscr{F}$, compte tenu de (1.4.11).

Il convient de rappeler que la structure de S-module de $\bigoplus_{k \geqslant 0} H^p(X, \mathfrak{m}^k \mathscr{F})$ s'obtient en considérant, pour tout $a \in \mathfrak{m}^r$, l'application $H^p(X, \mathfrak{m}^k \mathscr{F}) \to H^p(X, \mathfrak{m}^{k+r} \mathscr{F})$ qui provient par passage à la cohomologie de la multiplication $\mathfrak{m}^k \mathscr{F} \to \mathfrak{m}^{k+r} \mathscr{F}$ définie par a (2.4.1).

3.4. Le théorème de finitude : cas des schémas formels.

Les résultats de cette section (sauf la définition (3.4.1)) ne seront pas utilisés dans la suite de ce chapitre.

(3.4.1) Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{S}$ deux préschémas formels localement noethériens (**I**, 10.4.2), $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ un morphisme de préschémas formels. Nous dirons que f est un morphisme *propre* s'il vérifie les conditions suivantes :

1° *f est un morphisme de type fini* (**I**, 10.13.3).

2° *Si $\mathscr{K}$ est un Idéal de définition de $\mathfrak{S}$ et si l'on pose* $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, $X_0 = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $S_0 = (\mathfrak{S}, \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}/\mathscr{K})$, *le morphisme $f_0 : X_0 \to Y_0$ déduit de f* (**I**, 10.5.6) *est propre.*

Il est immédiat que cette définition ne dépend pas de l'Idéal de définition $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{S}$ considéré; en effet, si $\mathscr{K}'$ est un second Idéal de définition tel que $\mathscr{K}' \subset \mathscr{K}$, et si on pose $\mathscr{J}' = f^*(\mathscr{K}')\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, $X'_0 = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}')$, $S'_0 = (\mathfrak{S}, \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}/\mathscr{K}')$, le morphisme $f'_0 : X'_0 \to S'_0$ déduit de f est tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_0} & S_0 \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ X'_0 & \xrightarrow[f'_0]{} & S'_0 \end{array}$$

est commutatif, i et j étant des immersions surjectives; il revient donc au même de dire que f_0 ou f'_0 est propre, en vertu de (**II**, 5.4.5).

On notera que, pour tout $n \geqslant 0$, si on pose $X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $S_n = (\mathfrak{S}, \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}/\mathscr{K}^{n+1})$, le morphisme $f_n : X_n \to Y_n$ déduit de f (**I**, 10.5.6) est propre pour tout n dès qu'il l'est pour $n = 0$ (**II**, 5.4.6).

Si $g : Y \to Z$ est un morphisme propre de préschémas usuels, localement noethériens, Z' une partie fermée de Z, Y' une partie fermée de Y telle que $g(Y') \subset Z'$, le prolongement $\widehat{g} : Y_{/Y'} \to Z_{/Z'}$ de g aux complétés (**I**, 10.9.1) est un morphisme propre de préschémas formels, comme il résulte de la définition et de (**II**, 5.4.5).

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{S}$ deux préschémas formels localement noethériens, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ un morphisme *de type fini* (**I**, 10.13.3); les notations étant les mêmes que ci-dessus, on dit qu'une partie Z de l'espace sous-jacent à $\mathfrak{X}$ est *propre* sur $\mathfrak{S}$ (ou propre pour f) si, considérée comme partie de X_0, Z est *propre sur* S_0 (**II**, 5.4.10). Toutes les propriétés des parties propres de préschémas usuels énoncées dans (**II**, 5.4.10) sont encore valables pour les parties propres de préschémas formels comme il résulte aussitôt des définitions.

Théorème **(3.4.2)**. — *Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ deux préschémas formels localement noethériens, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre. Pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent $\mathscr{F}$, les $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules $R^q f_*(\mathscr{F})$ sont cohérents pour tout $q \geqslant 0$.*

Soient $\mathscr{J}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{K} = f^*(\mathscr{J})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, et considérons les $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules

(3.4.2.1) $$\mathscr{F}_k = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}} (\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{J}^{k+1}) = \mathscr{F}/\mathscr{K}^{k+1}\mathscr{F} \qquad (k \geqslant 0)$$

qui forment évidemment un *système projectif* de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules topologiques, tel que

$\mathscr{F} = \varprojlim_k \mathscr{F}_k$ (**I**, 10.11.3). D'autre part, il résultera de (3.4.2) que chacun des $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$, étant cohérent, est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Module topologique (**I**, 10.11.6), et il en est de même des $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_k)$. Aux homomorphismes canoniques $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_k = \mathscr{F}/\mathscr{K}^{k+1}\mathscr{F}$ correspondent canoniquement des homomorphismes

$$\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) \to \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_k)$$

qui sont nécessairement continus pour les structures de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Module topologique précédentes (**I**, 10.11.6), et forment un système projectif, donnant à la limite un homomorphisme canonique fonctoriel

(3.4.2.2)
$$\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) \to \varprojlim_k \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_k)$$

qui sera un homomorphisme continu de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules topologiques. Nous allons démontrer en même temps que (3.4.2) le

Corollaire **(3.4.3)**. — *Chacun des homomorphismes* (3.4.2.2) *est un isomorphisme topologique. En outre, si* $\mathfrak{Y}$ *est noethérien, le système projectif* $(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}/\mathscr{K}^{k+1}\mathscr{F}))_{k \geqslant 0}$ *satisfait à la condition* (ML) (**0**, 13.1.1).

Nous commencerons par établir (3.4.2) et (3.4.3) lorsque Y est un schéma affine formel noethérien (**I**, 10.4.1) :

Corollaire **(3.4.4)**. — *Sous les hypothèses de* (3.4.2), *supposons en outre que* $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, *où* A *est un anneau adique noethérien. Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, *et posons* $\mathscr{F}_k = \mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}$ *pour* $k \geqslant 0$. *Alors les* $\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ *sont des* A*-modules de type fini ; le système projectif* $(\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k))_{k \geqslant 0}$ *satisfait à la condition* (ML) *pour tout n ; si on pose*

(3.4.4.1)
$$\mathrm{N}_{n,k} = \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k))$$

(égal aussi à $\mathrm{Im}(\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))$ *par la suite exacte de cohomologie), les* $\mathrm{N}_{k,n}$ *définissent sur* $\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ *une filtration* $\mathfrak{J}$*-bonne* (**0**, 13.7.7); *enfin, l'homomorphisme canonique*

(3.4.4.2)
$$\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \to \varprojlim_k \mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k)$$

est un isomorphisme topologique pour tout n (le premier membre étant muni de la topologie $\mathfrak{J}$*-adique, les* $\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k)$ *de la topologie discrète).*

Posons

(3.4.4.3)
$$\mathrm{S} = \mathrm{gr}(\mathrm{A}) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1}, \qquad \mathscr{M} = \mathrm{gr}(\mathscr{F}) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathfrak{J}^k\mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}.$$

On sait que $\mathfrak{J}^{\Delta}$ est un Idéal de définition de $\mathfrak{Y}$ (**I**, 10.3.1); soient $\mathscr{K} = f^*(\mathfrak{J}^{\Delta})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathrm{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K})$, $\mathrm{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathfrak{J}^{\Delta}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_0)$ avec $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}/\mathfrak{J}$. Il est clair que les $\mathscr{M}_k = \mathfrak{J}^k\mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}$ sont des $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}$-Modules cohérents (**I**, 10.11.3). Considérons d'autre part la $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}$-Algèbre graduée quasi-cohérente

(3.4.4.4)
$$\mathscr{S} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{S} = \mathrm{gr}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathscr{K}^k/\mathscr{K}^{k+1}.$$

L'hypothèse que $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module de type fini entraîne d'abord que $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{S}$-Module gradué *de type fini*. En effet, la question est locale sur $\mathfrak{X}$, et on peut donc supposer pour la traiter que $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(\mathrm{B})$, où B est un anneau adique noethérien, et $\mathscr{F}=\mathrm{N}^{\Delta}$, où N est un B-module de type fini (**I**, 10.10.5); on a en outre $\mathrm{X}_0=\mathrm{Spec}(\mathrm{B}_0)$ où $\mathrm{B}_0=\mathrm{B}/\mathfrak{J}\mathrm{B}$, et les $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}$-Modules quasi-cohérents $\mathscr{S}$ et $\mathscr{M}$ sont respectivement égaux à $\widetilde{\mathrm{S}'}$ et $\widetilde{\mathrm{M}'}$, où $\mathrm{S}'=\bigoplus_{k\geqslant 0}((\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1})\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{B}_0)$ et $\mathrm{M}'=\bigoplus_{k\geqslant 0}((\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1})\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0)$, avec $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}/\mathfrak{J}\mathrm{N}$; on a donc évidemment $\mathrm{M}'=\mathrm{S}'\otimes_{\mathrm{B}_0}\mathrm{N}_0$, et comme N_0 est un B_0-module de type fini, M′ est un S′-module de type fini, d'où notre assertion (**I**, 1.3.13).

Comme le morphisme $f_0 : \mathrm{X}_0\rightarrow\mathrm{Y}_0$ est *propre* par hypothèse, on peut appliquer (3.3.2) à $\mathscr{S}$, $\mathscr{M}$ et au morphisme f_0; compte tenu de (1.4.11), on en conclut que pour *tout* $n\geqslant 0$, $\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathrm{H}^n(\mathrm{X}_0, \mathscr{M}_k)$ est un S-module gradué *de type fini*. Cela prouve que la condition (F_n) de (**0**, 13.7.7) est vérifiée pour *tout* $n\geqslant 0$, lorsqu'on considère le système projectif strict $(\mathscr{F}/\mathfrak{J}^k\mathscr{F})_{k\geqslant 0}$ de faisceaux de groupes abéliens sur X_0, munis chacun de sa structure naturelle de « A-module filtré ». On peut donc appliquer (**0**, 13.7.7), qui prouve que :

1° Le système projectif $(\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k))_{k\geqslant 0}$ vérifie la condition (ML).

2° Si $\mathrm{H}'^n=\varprojlim_k \mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k)$, H'^n est un A-module de type fini.

3° La filtration définie sur H'^n par les noyaux des homomorphismes canoniques $\mathrm{H}'^n\rightarrow\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k)$ est $\mathfrak{J}$-bonne.

Notons d'autre part que si on pose $\mathrm{X}_k=(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K}^{k+1})$, $\mathscr{F}_k$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_k}$-Module cohérent (**I**, 10.11.3) et si U est un ouvert affine dans X_0, U est aussi un ouvert affine dans chacun des X_k (**I**, 5.1.9), donc $\mathrm{H}^n(\mathrm{U}, \mathscr{F}_k)=0$ pour tout $n>0$ et tout k (1.3.1) et $\mathrm{H}^0(\mathrm{U}, \mathscr{F}_k)\rightarrow\mathrm{H}^0(\mathrm{U}, \mathscr{F}_h)$ est surjectif pour $h\leqslant k$ (**I**, 1.3.9). On est donc dans les conditions de (**0**, 13.3.2) et l'application de (**0**, 13.3.1) prouve que H'^n s'identifie canoniquement à $\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \varprojlim_k \mathscr{F}_k)=\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$; cela achève de prouver (3.4.4).

(3.4.5) Revenons maintenant à la démonstration de (3.4.2) et (3.4.3). Prouvons d'abord ces propositions dans le cas $\mathfrak{Y}=\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ envisagé dans (3.4.4); pour cela, pour tout $g\in\mathrm{A}$, appliquons (3.4.4) au schéma formel affine noethérien induit sur l'ouvert $\mathfrak{Y}_g=\mathfrak{D}(g)$ de $\mathfrak{Y}$, qui est égal à $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}_{\{g\}})$, et au préschéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur $f^{-1}(\mathfrak{Y}_g)$; notons que $\mathfrak{Y}_g$ est aussi un ouvert affine dans le préschéma $\mathrm{Y}_k=(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/(\mathfrak{J}^{\Delta})^{k+1})$, et comme $\mathscr{F}_k$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_k}$-Module cohérent, on a

$$\mathrm{H}^n(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F}_k)=\Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F}_k))$$

pour tout $k\geqslant 0$ en vertu de (1.4.11). L'homomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^n(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F}) \rightarrow \varprojlim_k \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F}_k))$$

est un isomorphisme; mais on a ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.2.6)

$$\varprojlim_k \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F}_k))=\Gamma(\mathfrak{Y}_g, \varprojlim_k \mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F}_k))$$

et comme le faisceau $R^n f_*(\mathscr{F})$ est associé au préfaisceau $\mathfrak{Y}_g \rightsquigarrow H^n(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F})$ sur les $\mathfrak{Y}_g$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.2.1), on a bien montré que l'homomorphisme (3.4.2.2) est *bijectif*. Prouvons ensuite que $R^n f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Module cohérent, et de façon plus précise que l'on a

(3.4.5.1)
$$R^n f_*(\mathscr{F}) = (H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))^{\Delta}.$$

Avec les notations précédentes, on a, puisque $\mathscr{F}_k$ est un $\mathscr{O}_{X_k}$-Module cohérent (1.4.13)

$$\Gamma(\mathfrak{Y}_g, R^n f_*(\mathscr{F}_k)) = (\Gamma(\mathfrak{Y}, R^n f_*(\mathscr{F}_k)))_g = (H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k))_g.$$

Or, les $H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k)$ forment un système projectif vérifiant (ML) et leur limite projective $H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ est un A-module de type fini. On en conclut (**0**, 13.7.8) que l'on a

$$\varprojlim_k((H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k))_g) = H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \otimes_A A_{\{g\}} = \Gamma(\mathfrak{Y}_g, (H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))^{\Delta})$$

compte tenu de (**I**, 10.10.8) appliqué à A et $A_{\{g\}}$; ceci démontre (3.4.5.1) puisque $\Gamma(\mathfrak{Y}_g, R^n f_*(\mathscr{F})) = \varprojlim_k \Gamma(\mathfrak{Y}_g, R^n f_*(\mathscr{F}_k))$.

Comme (3.4.2.2) est alors un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules cohérents, c'est nécessairement un isomorphisme *topologique* (**I**, 10.11.6). Enfin, il résulte des relations $R^n f_*(\mathscr{F}_k) = (H^n(X, \mathscr{F}_k))^{\Delta}$ que le système projectif $(R^n f_*(\mathscr{F}_k))_{k \geqslant 0}$ vérifie (ML) (**I**, 10.10.2).

Une fois (3.4.2) et (3.4.3) démontrés dans le cas où le préschéma formel $\mathfrak{Y}$ est affine noethérien, il est immédiat de passer de là au cas général pour (3.4.2) et la première assertion de (3.4.3), qui sont locales sur $\mathfrak{Y}$. Quant à la seconde assertion de (3.4.3), il suffit, $\mathfrak{Y}$ étant noethérien, de le recouvrir par un nombre fini d'ouverts affines noethériens U_i et de remarquer que les restrictions du système projectif $(R^q f_*(\mathscr{F}_k))$ à chacun des U_i vérifient (ML).

Nous avons en outre démontré en cours de route :

Corollaire **(3.4.6)**. — *Sous les hypothèses de* (3.4.4), *l'homomorphisme canonique*

(3.4.6.1)
$$H^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \to \Gamma(\mathfrak{Y}, R^q f_*(\mathscr{F}))$$

est bijectif.

§ 4. LE THÉORÈME FONDAMENTAL DES MORPHISMES PROPRES APPLICATIONS

4.1. Le théorème fondamental.

(4.1.1) Soient X, Y deux préschémas usuels noethériens, $f: X \to Y$ un morphisme *propre*, Y′ une partie fermée de Y, X′ son image réciproque $f^{-1}(Y')$. Nous désignerons par $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ les préschémas formels $X_{/X'}$ et $Y_{/Y'}$ *complétés* de X et Y le long de X′ et Y′ respectivement (**I**, 10.8.5), par $\hat{f}$ le *prolongement* de f à ces complétés (**I**, 10.9.1) qui est un morphisme $\hat{X} \to \hat{Y}$ de préschémas formels. Pour tout $\mathscr{O}_X$-Module *cohérent* $\mathscr{F}$, nous désignerons par $\hat{\mathscr{F}}$ son *complété* $\mathscr{F}_{/X'}$ le long de X' (**I**, 10.8.4) qui est un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent (**I**, 10.8.8).

(4.1.2) Soit $\mathscr{J}$ un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_Y$ tel que $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_Y/\mathscr{J})=Y'$ (**I**, 5.2.1); on sait (**I**, 4.4.5) que $\mathscr{K}=f^*(\mathscr{J})\mathcal{O}_X$ est un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$ tel que

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathscr{K})=X'.$$

Nous considérerons pour tout $k\geqslant 0$ les $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents

$$\mathscr{F}_k=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y/\mathscr{J}^{k+1})=\mathscr{F}/\mathscr{K}^{k+1}\mathscr{F}.$$

Les $\mathcal{O}_Y$-Modules $R^nf_*(\mathscr{F})$ et $R^nf_*(\mathscr{F}_k)$ sont *cohérents* pour tout n (3.2.1). Pour tout $k\geqslant 0$ et tout n, l'homomorphisme canonique $\mathscr{F}\to\mathscr{F}_k$ définit par fonctorialité un homomorphisme

(4.1.2.1) $$R^nf_*(\mathscr{F})\to R^nf_*(\mathscr{F}_k).$$

En outre, comme $\mathscr{F}_k$ est un $\mathcal{O}_X/\mathscr{K}^{k+1}$-Module, $R^nf_*(\mathscr{F}_k)$ est un $\mathcal{O}_Y/\mathscr{J}^{k+1}$-Module (**0**, 12.2.1) et on déduit donc de (4.1.2.1) un homomorphisme

(4.1.2.2) $$R^nf_*(\mathscr{F})\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y/\mathscr{J}^{k+1})\to R^nf_*(\mathscr{F}_k).$$

Les deux membres de (4.1.2.2) forment deux systèmes projectifs, et la limite projective du premier membre n'est autre que le *complété* $(R^nf_*(\mathscr{F}))_{/Y'}$, que nous noterons $(R^nf_*(\mathscr{F}))^{\wedge}$. En outre, il est immédiat que les homomorphismes (4.1.2.2) forment un système projectif, d'où par passage à la limite un *homomorphisme canonique*

(4.1.2.3) $$\varphi_n:(R^nf_*(\mathscr{F}))^{\wedge}\to\varprojlim_k R^nf_*(\mathscr{F}_k).$$

D'ailleurs (4.1.2.2) est un homomorphisme de $(\mathcal{O}_Y/\mathscr{J}^{k+1})$-Modules, et par suite (**I**, 10.8.3) peut être considéré comme un homomorphisme continu de $\mathcal{O}_{\hat{Y}}$-Modules topologiques pseudo-discrets ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 3.8.1). L'homomorphisme φ_n est par suite un homomorphisme *continu* de $\mathcal{O}_Y$-Modules topologiques.

(4.1.3) Soit $i:\hat{X}\to X$ le morphisme canonique d'espaces annelés défini dans (**I**, 10.8.7), de sorte que l'on a le diagramme commutatif

(4.1.3.1) $$\begin{array}{ccc} X_k & \xrightarrow{h_k} & \hat{X} \\ & {\scriptstyle i_k}\searrow & \downarrow{\scriptstyle i} \\ & & X \end{array}$$

où X_k est le sous-préschéma fermé de X défini par l'Idéal $\mathscr{K}^{k+1}$, i_k l'injection canonique, h_k le morphisme d'espaces annelés correspondant à l'identité dans les espaces sous-jacents et à l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{\hat{X}}\to\mathcal{O}_X/\mathscr{K}^{k+1}$ (**I**, 10.5.2). En outre, on a $\hat{\mathscr{F}}=i^*(\mathscr{F})$ (**I**, 10.8.8) à un isomorphisme canonique près. On sait que l'on a

(4.1.3.2) $$H^n(X_k, i_k^*(\mathscr{F}_k))=H^n(X, \mathscr{F}_k)$$

à un isomorphisme canonique près, puisque $\mathscr{F}_k = (i_k)_*(i_k^*(\mathscr{F}_k))$ (G, II, 4.9.1); l'homomorphisme canonique $\mathrm{H}^n(\hat{\mathrm{X}}, \hat{\mathscr{F}}) \rightarrow \mathrm{H}^n(\mathrm{X}_k, h_k^*(\hat{\mathscr{F}}))$ (**0**, 12.1.3.5) s'écrit donc aussi

$$(4.1.3.3) \qquad \mathrm{H}^n(\hat{\mathrm{X}}, \hat{\mathscr{F}}) \rightarrow \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k)$$

et ces homomorphismes forment évidemment un système projectif, d'où par passage à la limite, un homomorphisme canonique

$$(4.1.3.4) \qquad \psi_{n,\mathrm{X}} : \mathrm{H}^n(\hat{\mathrm{X}}, \hat{\mathscr{F}}) \rightarrow \varprojlim_k \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k).$$

Remplaçant X par un ouvert de la forme $f^{-1}(\mathrm{V})$, où V est un ouvert affine de Y, on a, compte tenu de (1.4.11), des homomorphismes

$$(4.1.3.5) \qquad \psi_{n,\mathrm{V}} : \mathrm{H}^n(\hat{\mathrm{X}} \cap f^{-1}(\mathrm{V}), \hat{\mathscr{F}}) \rightarrow \varprojlim_k \Gamma(\mathrm{V}, \mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F}_k));$$

ces homomorphismes commutent de façon évidente à la restriction de V à un ouvert affine plus petit, donc définissent finalement un *homomorphisme canonique* de faisceaux

$$(4.1.3.6) \qquad \psi_n : \mathrm{R}^n \hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}) \rightarrow \varprojlim_k \mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F}_k).$$

(4.1.4) Soit enfin $j : \hat{\mathrm{Y}} \rightarrow \mathrm{Y}$ le morphisme canonique d'espaces annelés (**I**, 10.8.7); comme $\mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-Module cohérent (3.2.1), on a $j^*(\mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F})) = \mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F}))^\wedge$ à un isomorphisme canonique près (**I**, 10.8.8) et on a donc un homomorphisme canonique

$$(4.1.4.1) \qquad \rho_n : (\mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F}))^\wedge = j^*(\mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F})) \rightarrow \mathrm{R}^n \hat{f}_*(i^*(\mathscr{F})) = \mathrm{R}^n \hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}})$$

défini de façon générale pour les espaces annelés (voir la démonstration de (1.4.15)). Montrons que le diagramme

$$(4.1.4.2) \qquad \begin{array}{ccc} (\mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F}))^\wedge & \xrightarrow{\rho_n} & \mathrm{R}^n \hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}) \\ & {\scriptstyle\varphi_n}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\psi_n} & \\ & \varprojlim_k \mathrm{R}^n f_*(\mathscr{F}_k) & \end{array}$$

est *commutatif*. Il suffit évidemment de prouver la commutativité du diagramme correspondant d'homomorphismes de préfaisceaux, donc on peut se borner au cas où Y est affine, et tout revient à prouver que le diagramme

$$(4.1.4.3) \qquad \begin{array}{ccc} (\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}))^\wedge & \xrightarrow{\rho_n} & \mathrm{H}^n(\hat{\mathrm{X}}, \hat{\mathscr{F}}) \\ & {\scriptstyle\varphi_n}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\psi_{n,\mathrm{X}}} & \\ & \varprojlim_k \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k) & \end{array}$$

est commutatif. Mais la commutativité de (4.1.3.1) et les relations vues dans (4.1.3) entre les groupes de cohomologie donnent aussitôt le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}) & \rightarrow & \mathrm{H}^n(\hat{\mathrm{X}}, \hat{\mathscr{F}}) = \mathrm{H}^n(\hat{\mathrm{X}}, i^*(\mathscr{F})) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k) = \mathrm{H}^n(\mathrm{X}_k, i_k^*(\mathscr{F})) & \end{array}$$

d'où on déduit aussitôt la commutativité de (4.1.4.3).

Théorème **(4.1.5)**. — *Soient* $f : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme propre de préschémas noethériens,* Y' *une partie fermée de* Y, $\mathrm{X}' = f^{-1}(\mathrm{Y}')$. *Alors, pour tout* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$, $\mathrm{R}^n\hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}})$ *est un* $\mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}}}$*-Module cohérent et les homomorphismes* φ_n, ψ_n *et* ρ_n *du diagramme* (4.1.4.2) *sont des isomorphismes topologiques.*

Il suffira évidemment de prouver que φ_n et ψ_n sont des isomorphismes; comme $\mathrm{R}^nf_*(\mathscr{F})$ est cohérent (3.2.1), il en résultera que $(\mathrm{R}^nf_*(\mathscr{F}))\hat{}$ est cohérent (**I**, 10.8.8) et la bicontinuité de φ_n, ψ_n et ρ_n est alors automatique (**I**, 10.11.6).

Remarques **(4.1.6)**. — (i) Si on pose $\mathscr{F}_k = \hat{\mathscr{F}}/\mathscr{K}^{k+1}\hat{\mathscr{F}}$, il est immédiat que $\mathscr{F}_k = i_*(\hat{\mathscr{F}}_k)$, et l'homomorphisme canonique (4.1.3.6) n'est autre que l'homomorphisme déjà défini en (3.4.2.2)

$$\mathrm{R}^n\hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}) \rightarrow \varprojlim_k \mathrm{R}^n\hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}_k); \tag{4.1.6.1}$$

par suite le fait que ψ_n soit un isomorphisme est un cas particulier de (3.4.3). Mais nous en donnerons ci-dessous une démonstration directe, évitant les considérations délicates sur les limites projectives de suites spectrales (**0**, 13.7), sur lesquelles repose le théorème général (3.4.3).

(ii) Compte tenu du fait que les ψ_n sont des isomorphismes, il est équivalent de dire que les φ_n ou les $\rho_n = \psi_n^{-1} \circ \varphi_n$ sont des isomorphismes. Le th. (4.1.5) exprime entre autres que *la formation des* R^nf_* *commute à la complétion* et pourra s'appeler le *premier théorème de comparaison* de la théorie « algébrique » à la théorie « formelle ».

Nous commencerons par établir la forme affine de (4.1.5) :

Corollaire **(4.1.7)**. — *Les hypothèses étant celles de* (4.1.5), *supposons en outre* $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, *où* A *est noethérien, et* $\mathscr{J} = \tilde{\mathfrak{J}}$, *où* $\mathfrak{J}$ *est un idéal de* A, *de sorte que* $\mathscr{F}_k = \mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}$. *L'homomorphisme canonique*

$$\varphi_n : (\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}))\hat{} \rightarrow \varprojlim_k \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k) \tag{4.1.7.1}$$

(où le premier membre est le séparé complété de $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ *pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique) est un isomorphisme. Le système projectif* $(\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k))_{k \geqslant 0}$ *vérifie pour tout n la condition* (ML), *et l'homomorphisme canonique*

$$\psi_n : \mathrm{H}^n(\hat{\mathrm{X}}, \hat{\mathscr{F}}) \rightarrow \varprojlim_k \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k) \tag{4.1.7.2}$$

est un isomorphisme. Enfin, la filtration sur $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F})$, *définie par les noyaux des homomor-*

phismes canoniques $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k)$, *est* $\mathfrak{J}$-*bonne* (**0**, 13.7.7) *et* φ_n *est un isomorphisme topologique* [1].

L'entier $n \geqslant 0$ étant fixé dans cette démonstration, nous poserons pour simplifier

(4.1.7.3) $$\mathrm{H} = \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}), \qquad \mathrm{H}_k = \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k)$$

(4.1.7.4) $$\mathrm{R}_k = \mathrm{Ker}(\mathrm{H} \to \mathrm{H}_k), \qquad \text{sous-A-module de H.}$$

La suite exacte de cohomologie

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F})$$

montre que l'on a aussi $\mathrm{R}_k = \mathrm{Im}(\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}))$; nous poserons

(4.1.7.5) $$\begin{aligned} \mathrm{Q}_k &= \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F})) \\ &= \mathrm{Im}(\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k) \to \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F})). \end{aligned}$$

On a donc la suite exacte

(4.1.7.6) $$0 \to \mathrm{R}_k \to \mathrm{H} \to \mathrm{H}_k \to \mathrm{Q}_k \to 0.$$

(4.1.7.7) Soit x un élément de $\mathfrak{J}^m$ $(m \geqslant 0)$; la multiplication par x dans $\mathfrak{J}^k\mathscr{F}$ est un homomorphisme $\mathfrak{J}^k\mathscr{F} \to \mathfrak{J}^{k+m}\mathscr{F}$, et donne lieu par suite à un homomorphisme

(4.1.7.8) $$\mu_{x,m} : \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^k\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+m}\mathscr{F}).$$

Si on désigne par S la A-algèbre graduée $\bigoplus_{k \geqslant 0} \mathfrak{J}^k$, on sait que les multiplications $\mu_{x,m}$ définissent sur $\mathrm{E} = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^k\mathscr{F})$ une structure de *module gradué de type fini* sur l'anneau gradué S (3.3.2), qui est *noethérien* (**II**, 2.1.5).

Lemme **(4.1.7.9)**. — *Les sous-modules* R_k *de* H *définissent sur* H *une filtration* $\mathfrak{J}$-*bonne*.

En premier lieu, montrons que l'on a

(4.1.7.10) $$\mathfrak{J}^m \mathrm{R}_k \subset \mathrm{R}_{k+m},$$

la multiplication dans $\mathrm{H} = \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ par un élément $x \in \mathfrak{J}^m$ étant donc l'application $\mu_{x,0}$.

Pour tout $x \in \mathfrak{J}^m$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F} \arrow[r, "x"] \arrow[d] & \mathfrak{J}^{k+m+1}\mathscr{F} \arrow[d] \\ \mathscr{F} \arrow[r, "x"'] & \mathscr{F} \end{tikzcd}$$

(1) La démonstration qui suit, plus simple que la démonstration initiale, et le complément relatif à la filtration de $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F})$, nous ont été communiqués par J.-P. Serre.

(où les flèches horizontales sont la multiplication par x, et les flèches verticales les injections canoniques) est commutatif; donc le diagramme correspondant

$$(4.1.7.11) \qquad \begin{array}{ccc} H^n(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) & \xrightarrow{\mu_{x,m}} & H^n(X, \mathfrak{J}^{k+m+1}\mathscr{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(X, \mathscr{F}) & \xrightarrow[\mu_{x,0}]{} & H^n(X, \mathscr{F}) \end{array}$$

est commutatif, ce qui, compte tenu de l'interprétation de R_k comme image de $H^n(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \to H^n(X, \mathscr{F})$, prouve (4.1.7.10) et montre en outre que le S-module gradué $R = \bigoplus_{k \geqslant 0} R_k$ est un *quotient* du sous-S-module $M = \bigoplus_{k \geqslant 0} H^n(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F})$ de E; la remarque faite plus haut montre donc que R est un S-module *de type fini*, ce qui équivaut à l'assertion de (4.1.7.9) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 1, th. 1).

(4.1.7.12) Considérons maintenant le S-module gradué $N = \bigoplus_{k \geqslant 0} H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F})$ défini comme dans (4.7.1.8); c'est encore un S-module *de type fini* en vertu de (3.3.2); on a $Q_k \subset N_k$ pour tout k par (4.1.7.5) et le diagramme (4.1.7.11) où on remplace n par $n+1$, montre que $S_m Q_k = \mathfrak{J}^m Q_k \subset Q_{k+m}$. Autrement dit, Q est un *sous-S-module gradué* de N, et par suite est *de type fini*.

(4.1.7.13) Désignons par α_m l'injection canonique $\mathfrak{J}^m \to A$, qu'on peut écrire $S_m \to S_0$. Comme $\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}_k = 0$, le A-module $H^n(X, \mathscr{F}_k)$ est annulé par $\mathfrak{J}^{k+1}$; comme Q_k est l'image du A-homomorphisme $H^n(X, \mathscr{F}_k) \to H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F})$, Q_k, en tant que A-module, est aussi annulé par $\mathfrak{J}^{k+1}$; cela signifie encore que, dans le S-*module* Q, on a

$$(4.1.7.14) \qquad \alpha_{k+1}(S_{k+1})Q_k = 0.$$

Comme Q est un S-module de type fini, il existe un entier k_0 et un entier h tels que $Q_{k+h} = S_h Q_k$ pour $k \geqslant k_0$ (**II**, 2.1.6, (ii)); on déduit de cette relation et de (4.1.7.14) qu'il existe un entier $r > 0$ tel que

$$(4.1.7.15) \qquad \alpha_r(S_r)Q = 0.$$

(4.1.7.16) Notons maintenant que l'injection canonique $\mathfrak{J}^{k+m}\mathscr{F} \to \mathfrak{J}^k\mathscr{F}$ donne en passant à la cohomologie un A-homomorphisme

$$(4.1.7.17) \qquad \nu_m : H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+m}\mathscr{F}) \to H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^k\mathscr{F})$$

et, pour tout $x \in \mathfrak{J}^m$, on a évidemment la factorisation

$$(4.1.7.18) \quad \mu_{x,0} : H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^k\mathscr{F}) \xrightarrow{\mu_{x,m}} H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+m}\mathscr{F}) \xrightarrow{\nu_m} H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^k\mathscr{F})$$

d'où on conclut que, pour tout sous-A-module P de $H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^k\mathscr{F})$, on a, dans le S-module N,

$$\nu_m(S_m P) = \alpha_m(S_m)P. \tag{4.1.7.19}$$

Lemme **(4.1.7.20)**. — *Il existe un entier* $m>0$ *tel que* $\nu_m(Q_{k+m})=0$ *pour tout* $k\geqslant k_0$.

Prenons en effet pour m un multiple de h qui soit $\geqslant r$; comme $Q_{k+m}=S_m Q_k$ pour $k\geqslant k_0$, on a en vertu de (4.1.7.19) et (4.1.7.15) $\nu_m(Q_{k+m})=\alpha_m(S_m)Q_k\subset\alpha_r(S_r)Q_k=0$.

(4.1.7.21) Remarquons que du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^n(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & H^n(X,\mathscr{F}_k) \arrow[r, "\partial"] & H^{n+1}(X,\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \arrow[r] & H^{n+1}(X,\mathscr{F}) \\
H^n(X,\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[u] & H^n(X,\mathscr{F}_{k+m}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u] & H^{n+1}(X,\mathfrak{J}^{k+m+1}\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[u] & H^{n+1}(X,\mathscr{F}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

provenant lui-même du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F} \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & \mathscr{F}_k \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{J}^{k+m+1}\mathscr{F} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{F}_{k+m} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les applications canoniques, on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_k \arrow[r] & H \arrow[r] & H_k \arrow[r] & Q_k \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_{k+m} \arrow[r] \arrow[u] & H \arrow[r] \arrow[u, "id."'] & H_{k+m} \arrow[r] \arrow[u] & Q_{k+m} \arrow[r] \arrow[u, "\nu_m"'] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Comme la dernière flèche verticale est nulle pour $k\geqslant k_0$ (4.1.7.20), l'image de H_{k+m} dans H_k est contenue dans $\mathrm{Ker}(H_k\rightarrow Q_k)=\mathrm{Im}(H\rightarrow H_k)$, mais par ailleurs elle contient $\mathrm{Im}(H\rightarrow H_k)$ par la commutativité du diagramme, donc elle lui est égale; il en est donc de même des images dans H_k des $H_{k'}$ pour $k'\geqslant k+m$, ce qui démontre la condition (ML) pour le système projectif $(H_k)_{k\geqslant 0}$. En outre, pour tout ouvert affine U de X, on a $H^i(U,\mathscr{F}_k)=0$ pour $i>0$ (1.3.1), et pour $m>0$, l'application $H^0(U,\mathscr{F}_{k+m})\rightarrow H^0(U,\mathscr{F}_k)$ est surjective (**I**, 1.3.9). On peut donc appliquer (**0**, 13.3.1), et l'homomorphisme canonique $H^n(\hat{X}, \hat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_k H^n(X, \mathscr{F}_k)$ est *bijectif* pour tout $n \geqslant 0$.

Comme le système projectif $(H/R_k)_{k \geqslant 0}$ est strict, on peut passer à la limite projective dans les suites exactes

(4.1.7.22) $$0 \to H/R_k \to H_k \to Q_k \to 0$$

(**0**, 13.2.2); comme $\nu_m(Q_{k+m}) = 0$, on a $\varprojlim_k Q_k = 0$, d'où un isomorphisme topologique $\varprojlim_k (H/R_k) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k H_k$. Mais comme la filtration (R_k) de H est $\mathfrak{J}$-bonne, elle définit sur H la topologie $\mathfrak{J}$-préadique; donc $\varprojlim_k (H/R_k)$ est le séparé complété de H pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, ce qui achève de démontrer (4.1.7).

(4.1.8) Passons enfin à la démonstration de (4.1.5) : pour tout ouvert affine V de Y, $\Gamma(V, (R^n f_*(\mathscr{F}))\hat{\ })$ est le séparé complété de $\Gamma(V, R^n f_*(\mathscr{F}))$ pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique (si $\mathscr{J}|V = \widetilde{\mathfrak{J}}$) puisque $R^n f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent (**I**, 10.8.4), et $\Gamma(V, \varprojlim_k R^n f_*(\mathscr{F}_k))$ est égal à $\varprojlim_k \Gamma(V, R^n f_*(\mathscr{F}_k))$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.2.6); le fait que φ_n soit un isomorphisme topologique résulte alors de (4.1.7) et de (1.4.11). D'autre part (toujours en vertu de (1.4.11)), il résulte de (4.1.7) que l'homomorphisme $\psi_{n,V}$ de (4.1.3.3) est un *isomorphisme*, donc ψ_n est un isomorphisme par définition de $R^n\hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}})$.

Corollaire **(4.1.9)**. — *Sous les hypothèses de* (4.1.4), *pour tout ouvert affine* V *de* Y, *l'homomorphisme canonique*

$$H^n(\hat{X} \cap f^{-1}(V), \hat{\mathscr{F}}) \to \Gamma(\hat{Y} \cap V, R^n\hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}))$$

est bijectif.

Remarque **(4.1.10)**. — Soit $f: X \to Y$ un morphisme *de type fini* de préschémas (usuels) noethériens, et soit $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent dont le support soit *propre sur* Y (**II**, 5.4.10). On sait alors (3.2.4) que $R^n f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent pour tout $n \geqslant 0$. En outre, on peut toujours supposer que $\mathscr{F} = u_*(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G} = u^*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Z$-Module cohérent, Z désignant un sous-préschéma fermé convenable de X dont l'espace sous-jacent est $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, et $u: Z \to X$ l'injection canonique (**I**, 9.3.5). Si on pose $\mathscr{G}_k = \mathscr{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y/\mathscr{J}^{k+1})$, on a $\mathscr{G}_k = u^*(\mathscr{F}_k)$, $R^n f_*(\mathscr{F}_k) = R^n(f \circ u)_*(\mathscr{G}_k)$ et $R^n f_*(\mathscr{F}) = R^n(f \circ u)_*(\mathscr{G})$ (1.3.4), et enfin, compte tenu de (**I**, 10.9.5),

$$R^n\hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}) = R^n(f \circ u)_*\hat{\ }(\mathscr{G}).$$

On peut alors appliquer (4.1.5) à $\mathscr{G}$ et au morphisme propre $f \circ u$, et on en conclut que sous ces hypothèses, *les résultats de* (4.1.5) *sont valables pour* $\mathscr{F}$ *et* f.

4.2. Cas particuliers et variantes.

La forme la plus utile du th. de comparaison (4.1.5) est la suivante :

Proposition **(4.2.1)**. — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme propre,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Alors, pour tout* $y \in Y$ *et tout* p, $(R^p f_*(\mathscr{F}))_y$ *est* *un $\mathcal{O}_y$-module de type fini, donc séparé pour la topologie $\mathfrak{m}_y$-préadique, et on a un isomorphisme topologique canonique*

$$(\mathbf{4.2.1.1}) \qquad ((\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}))_y)^\wedge \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathrm{H}^p(f^{-1}(y), \mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k))$$

où le premier membre est le complété de $(\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}))_y$ pour la topologie $\mathfrak{m}_y$-préadique, et au second membre $f^{-1}(y)$ est considéré, pour tout $k\geqslant 0$, comme espace sous-jacent au préschéma $\mathrm{X}\times_\mathrm{Y}\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k)$ (I, 3.6.1).

Comme $\mathcal{O}_y$ est un anneau local noethérien et $(\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}))_y$ un $\mathcal{O}_y$-module de type fini (3.2.1), la topologie $\mathfrak{m}_y$-préadique sur $(\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}))_y$ est séparée ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.5). Les autres assertions sont conséquences de (4.1.7) lorsque Y est noethérien et le point y fermé, en remplaçant Y par un voisinage affine de y et prenant $\mathrm{Y}'=\{y\}$, compte tenu de (G, II, 4 9.1). Dans le cas général, posons $\mathrm{Y}_1=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$, $\mathrm{X}_1=\mathrm{X}\times_\mathrm{Y}\mathrm{Y}_1$, $\mathscr{F}_1=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}}\mathcal{O}_{\mathrm{Y}_1}$ et soit $f_1=f\times 1_{\mathrm{Y}_1}:\mathrm{X}_1\to\mathrm{Y}_1$; Y_1 est noethérien et f_1 propre (**II**, 5.4.2, (iii)) et $\mathscr{F}_1$ est cohérent ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.3.11). Soit y_1 l'unique point fermé de Y_1; la proposition est valable pour f_1, $\mathscr{F}_1$ et y_1; on a $\mathcal{O}_{y_1}=\mathcal{O}_y$, $f_1^{-1}(y_1)=f^{-1}(y)$ (I, 3.6.5), les préschémas $\mathrm{X}\times_\mathrm{Y}\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k)$ et $\mathrm{X}_1\times_{\mathrm{Y}_1}\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k)$ étant canoniquement identifiés (I, 3.3.9); en outre, $\mathscr{F}_1\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Y}_1}}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k)$ s'identifie à $\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k)$ (**I**, 9.1.6). Il reste à voir que $\mathrm{R}^p f_{1*}(\mathscr{F}_1)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F})\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}}\mathcal{O}_{\mathrm{Y}_1}$, ce qui résulte de (1.4.15), le morphisme local $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)\to\mathrm{Y}$ étant plat ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.7.1 et **I**, 2.4.2).

Le corollaire suivant utilise la terminologie de la théorie de la dimension (chap. IV) et ne sera pas appliqué avant le chap. IV.

Corollaire (**4.2.2**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien, $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ un morphisme propre, y un point de* Y, *r la dimension de $f^{-1}(y)$. Alors, pour tout $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module cohérent $\mathscr{F}$, les faisceaux $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F})$ sont nuls au voisinage de y pour tout $p>r$.*

En effet, on a alors $\mathrm{H}^p(f^{-1}(y), \mathscr{F}\otimes(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k))=0$ (G, II, 4.15.2) pour tout k, donc (4.2.1) le séparé complété de $(\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}))_y$ pour la topologie $\mathfrak{m}_y$-préadique est nul, et comme cette topologie est séparée, on a aussi $(\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}))_y=0$; d'où la conclusion, puisque $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F})$ est cohérent ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.2.2).

(**4.2.3**) Le résultat (4.2.1) est surtout employé pour $p=0$; on obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire (**4.2.4**). — *Sous les hypothèses de* (4.2.1), *on a un isomorphisme canonique topologique*

$$((f_*(\mathscr{F}))_y)^\wedge \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \Gamma(f^{-1}(y), \mathscr{F}_y/\mathfrak{m}_y^k\mathscr{F}_y).$$

4.3. Le théorème de connexion de Zariski.

Les résultats de ce numéro et du suivant généralisent des théorèmes bien connus de Zariski, et peuvent tous se déduire de (4.2.4). Ils sont conséquences du th. suivant :

Théorème (**4.3.1**) (théorème de connexion). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien, $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ un morphisme propre. Alors $\mathscr{A}(\mathrm{X})=f_*(\mathcal{O}_\mathrm{X})$ est une $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-Algèbre cohérente.*

Soit Y′ *le* Y-*schéma fini au-dessus de* Y *tel que* $\mathscr{A}(Y')=\mathscr{A}(X)$, *qui est déterminé à un* Y-*isomorphisme près* (**II**, 1.3.1 et 6.1.3); *si* $f'=\mathscr{A}(e)$ *est le* Y-*morphisme* $X\rightarrow Y'$ *déduit de l'isomorphisme identique* $e:\mathscr{A}(Y')\rightarrow\mathscr{A}(X)$ (**II**, 1.2.7), f' *est propre,* $f'_*(\mathcal{O}_X)$ *est isomorphe à* $\mathcal{O}_{Y'}$, *et les fibres* $f'^{-1}(y')$ *du morphisme* f' *sont connexes et non vides pour tout* $y'\in Y'$.

Soit $g:Y'\rightarrow Y$ le morphisme structural. Pour prouver que l'homomorphisme $\theta:\mathcal{O}_{Y'}\rightarrow f'_*(\mathcal{O}_X)$ entrant dans la définition du morphisme f' est bijectif, il suffit, puisque Y′ est affine sur Y, de prouver que $g_*(\theta):g_*(\mathcal{O}_{Y'})\rightarrow g_*(f'_*(\mathcal{O}_X))=f_*(\mathcal{O}_X)$ est l'identité (**II**, 1.4.2); mais cela résulte des définitions puisque $g_*(\mathcal{O}_{Y'})=\mathscr{A}(Y')$ et $f_*(\mathcal{O}_X)=\mathscr{A}(X)$. Le fait que $\mathscr{A}(X)$ est cohérent est un cas particulier du th. de finitude (3.2.1). Comme f est propre et g séparé, f' est propre (**II**, 5.4.3, (i)); pour terminer la démonstration de (4.3.1), il suffit donc d'en prouver le

Corollaire (**4.3.2**). — *Sous les hypothèses de* (4.3.1), *supposons de plus que* $f_*(\mathcal{O}_X)$ *soit isomorphe à* $\mathcal{O}_Y$. *Alors les fibres* $f^{-1}(y)$ *de* f *sont connexes et non vides pour tout* $y\in Y$.

L'hypothèse que $f_*(\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_Y$ entraîne déjà que f est dominant, donc surjectif puisque f est une application fermée. On peut se ramener, comme dans (4.2.1), au cas où y est *fermé* dans Y; $f^{-1}(y)$ étant un espace noethérien, a un nombre fini de composantes connexes, et c'est l'espace sous-jacent du complété $\hat{X}$ le long de $f^{-1}(y)$. Si Z_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont ces composantes connexes, il est clair que $\Gamma(\hat{X},\mathcal{O}_{\hat{X}})$ est composé direct des anneaux $\Gamma(Z_i,\mathcal{O}_{\hat{X}})$, et chacun de ces derniers n'est pas réduit à 0, puisque la section unité est distincte de 0 en chaque point de $\hat{X}$. Or, si on applique (4.1.5) à $\mathscr{F}=\mathcal{O}_X$, dont le complété le long de $f^{-1}(y)$ est $\mathcal{O}_{\hat{X}}$, on voit que $\Gamma(\hat{X},\mathcal{O}_{\hat{X}})$ est isomorphe au séparé complété $\mathfrak{m}_y$-adique $\widehat{\mathcal{O}}_y$ de l'anneau local $\mathcal{O}_y$; c'est donc un *anneau local* qui ne peut être composé direct de plusieurs anneaux non réduits à 0 (sans quoi il aurait plusieurs idéaux maximaux distincts). On a donc $n=1$, ce qui démontre le corollaire.

Corollaire (**4.3.3**). — *Sous les hypothèses de* (4.3.1), *pour tout* $y\in Y$, *l'ensemble des composantes connexes de la fibre* $f^{-1}(y)$ *est en correspondance biunivoque avec l'ensemble fini des points de la fibre* $g^{-1}(y)$, *où* $g:Y'\rightarrow Y$ *est le morphisme structural* (autrement dit, l'ensemble des *idéaux maximaux* de $(f_*(\mathcal{O}_X))_y$).

Puisque Y′ est fini sur Y, on sait en effet que $g^{-1}(y)$ est un espace fini discret (**II**, 6.1.7). Comme $f^{-1}(y)=f'^{-1}(g^{-1}(y))$, le corollaire résulte de cette remarque et de (4.3.1).

On a ainsi une interprétation remarquable du Y-préschéma Y′ défini dans (4.3.1). La factorisation $f=g\circ f'$ du morphisme propre f est analogue à la factorisation obtenue par K. Stein pour les applications holomorphes d'espaces analytiques, et nous l'appellerons par la suite la *factorisation de Stein* de f.

Remarque (**4.3.4**). — Soit k une extension du corps $\boldsymbol{k}(y)$: si le préschéma $f^{-1}(y)\otimes_{\mathbf{k}(y)}k=X\times_Y\operatorname{Spec}(k)$ est connexe, il en est de même de $f^{-1}(y)$, qui en est l'image par un morphisme de projection (**I**, 3.4.7). Nous dirons que, pour un morphisme $f:X\rightarrow Y$ de préschémas et un point $y\in Y$, la fibre $f^{-1}(y)$ est *géométriquement connexe,* si pour *toute* extension k de $\boldsymbol{k}(y)$, le préschéma $f^{-1}(y)\otimes_{\mathbf{k}(y)}k=X\times_Y\operatorname{Spec}(k)$ est *connexe.*

Sous les hypothèses de (4.3.2), on peut alors en renforcer la conclusion : les fibres $f^{-1}(y)$ sont en effet *géométriquement connexes*. Pour le voir, observons que pour toute extension k de $\boldsymbol{k}(y)$, il existe un anneau local noethérien A et un homomorphisme local $\varphi : \mathcal{O}_y \to A$ qui fait de A un $\mathcal{O}_y$-module *plat* et tel que le corps résiduel de A soit $\boldsymbol{k}(y)$-isomorphe à k (**0**, 10.3.1). Soit alors $Y_1 = \mathrm{Spec}(A)$ et soit $h : Y_1 \to Y$ le morphisme local correspondant à φ, transformant l'unique point fermé y_1 de Y_1 en y (**I**, 2.4.1); posons $X_1 = X \times_Y Y_1$, et $f_1 = f \times 1_{Y_1}$; f_1 est propre (**II**, 5.4.2, (iii)) et $f_1^{-1}(y_1)$ est un $\boldsymbol{k}(y_1)$-préschéma isomorphe à $X \times_Y \mathrm{Spec}(k)$. Tout revient donc à montrer que $f_{1*}(\mathcal{O}_{X_1}) = \mathcal{O}_{Y_1}$ pour pouvoir appliquer (4.3.2) à f_1. Or g est un morphisme *plat*, comme il résulte de (**I**, 2.4.2) et de (1.4.15.5); on a donc $f_{1*}(\mathcal{O}_{X_1}) = h^*(f_*(\mathcal{O}_X)) = h^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y_1}$ en vertu de (1.4.15) appliqué pour $q = 0$.

Dans le cas général (4.3.1), le même raisonnement montre que l'on a (avec les notations de (4.3.1)) $f_{1*}(\mathcal{O}_{X_1}) = h^*(g_*(\mathcal{O}_{Y'}))$, et la factorisation de Stein $f_1 = g_1 \circ f'_1$ de f_1 est telle que $g_1 = g \times 1_{Y_1}$ (**II**, 1.5.2), le Y_1-schéma fini correspondant étant $Y'_1 = Y' \times_Y Y_1$. Tenant compte de la transitivité des fibres (**I**, 3.6.4), on voit donc que le nombre des composantes connexes de $f_1^{-1}(y_1)$ est, en vertu de (4.3.3), égal au nombre d'éléments de $g_1^{-1}(y_1) = g^{-1}(y) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} k$. Si on prend pour k une extension *algébriquement close* de $\boldsymbol{k}(y)$, ce nombre est indépendant de l'extension algébriquement close considérée et égal au *nombre géométrique de points de* $g^{-1}(y)$ (**I**, 6.4.7), ou encore à la *somme des rangs séparables* $[\boldsymbol{k}(y'_i) : \boldsymbol{k}(y)]_s$ où y'_i parcourt l'ensemble fini $g^{-1}(y)$. On dit encore que ce nombre est le *nombre géométrique de composantes connexes* de $f^{-1}(y)$. On notera que les $\boldsymbol{k}(y'_i)$ ne sont autres que les corps résiduels de l'anneau semi-local $(f_*(\mathcal{O}_X))_y$.

Proposition (**4.3.5**). — *Soient* X *et* Y *deux préschémas localement noethériens intègres et* $f : X \to Y$ *un morphisme propre dominant. Pour tout* $y \in Y$, *le nombre de composantes connexes de* $f^{-1}(y)$ *est au plus égal au nombre des idéaux maximaux de la fermeture intégrale* $\mathcal{O}'_y$ *de* $\mathcal{O}_y$ *dans le corps des fonctions rationnelles* R(X).

En effet, pour tout ouvert U de Y, $\Gamma(U, f_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ est l'intersection des anneaux locaux $\mathcal{O}_x$ tels que $x \in f^{-1}(U)$ (**I**, 8.2.1.1). On en conclut aussitôt que la fibre $(f_*(\mathcal{O}_X))_y$ est un sous-anneau de R(X) contenant $\mathcal{O}_y$. En outre, comme $f_*(\mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent, $(f_*(\mathcal{O}_X))_y$ est un $\mathcal{O}_y$-module de type fini, donc contenu dans $\mathcal{O}'_y$; on sait ([13], vol. I, p. 257 et 259) que tout idéal maximal d'un tel anneau A est l'intersection de A et d'un idéal maximal de $\mathcal{O}'_y$, d'où la proposition.

Définition (**4.3.6**). — *On dit qu'un anneau local intègre est unibranche si sa clôture intégrale est un anneau local. On dit qu'un point* y *d'un préschéma intègre* Y *est unibranche si l'anneau local* $\mathcal{O}_y$ *est unibranche* (ce qui est en particulier le cas lorsque Y est *normal* au point y).

Soit A un anneau local intègre, et soit K son corps des fractions; pour que A soit unibranche, il faut et il suffit que tout sous-anneau A_1 de K, contenant A et qui est une A-algèbre finie, soit un anneau local. En effet, soit A′ la clôture intégrale de A; il résulte du premier théorème de Cohen-Seidenberg (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, th. 1) que tout idéal maximal de A_1 est la trace d'un idéal maximal de A′, donc si A′ est local, il en est de même de A_1. Réciproquement, A′ est limite inductive de la famille filtrante croissante des sous-A-algèbres finies A_α de A', et si chacune des A_α est un anneau local, l'idéal maximal de A_α est la trace sur A_α de celui de A_β pour $A_\alpha \subset A_\beta$ par le même raisonnement que ci-dessus, donc A' est un anneau local (**0**, 10.3.1.3).

On notera que si le complété d'un anneau local *noethérien* A est intègre (ce qu'on exprime en disant que A est *analytiquement intègre*), A est *unibranche*. Soient en effet $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, K son corps des fractions, K' le corps des fractions de $\hat{A}$; on a donc $K' = K \otimes_A \hat{A}$. Soit A'_F une sous-A-algèbre finie de K. Le sous-anneau B_F de K' engendré par $\hat{A}$ et A'_F est isomorphe à $A'_F \otimes_A \hat{A}$; c'est un $\hat{A}$-module de type fini, *complété* de A'_F pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.3 et 7.3.6). Comme A'_F est un anneau semi-local (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9) et que son complété est intègre, A'_F ne peut avoir qu'un seul idéal maximal $\mathfrak{m}'_F$ et on a $\mathfrak{m}'_F \cap A = \mathfrak{m}$; d'où notre assertion.

Corollaire (**4.3.7**). — *Sous les hypothèses de* (4.3.5), *supposons que la fermeture algébrique de* R(Y) *dans* R(X) *soit de degré séparable n et que* $y \in Y$ *soit unibranche. Alors la fibre* $f^{-1}(y)$ *a au plus n composantes connexes. En particulier si la fermeture algébrique de* R(Y) *dans* R(X) *est radicielle sur* R(X), $f^{-1}(y)$ *est connexe.*

En effet, soit $\mathcal{O}''_y$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_y$; la fermeture intégrale $\mathcal{O}'_y$ de $\mathcal{O}_y$ dans R(X) est aussi celle de $\mathcal{O}''_y$; mais on sait que si $\mathcal{O}''_y$ est un anneau local, $\mathcal{O}'_y$ est un anneau semi-local dont le nombre d'idéaux maximaux est au plus égal à *n* ([13], vol. I, p. 289, th. 22).

Ce corollaire est essentiellement la forme sous laquelle Zariski énonce son « théorème de connexion » pour les schémas algébriques.

Remarque (**4.3.8**). — Si on ajoute aux hypothèses de (4.3.7) l'hypothèse que Y est *normal* au point *y*, la fibre $f^{-1}(y)$ est *géométriquement connexe*, puisque (avec les notations de (4.3.4)) $g^{-1}(y)$ est réduit à un point y' et que $\boldsymbol{k}(y')$ est radiciel sur $\boldsymbol{k}(y)$.

Définition (**4.3.9**). — *Étant donné un préschéma localement noethérien* Y, *on dit qu'un morphisme* de type fini $f: X \to Y$ *est universellement ouvert si, pour tout préschéma irréductible localement noethérien* Y', *et tout morphisme dominant* $g: Y' \to Y$, *toute composante irréductible de* $X' = X \times_Y Y'$ *domine* Y'.

Si Y est irréductible, cela revient à dire que si η, η' sont les points génériques de Y et Y' respectivement (de sorte que $g(\eta') = \eta$), et si on pose $f' = f_{(Y')}$, toute composante irréductible de X' rencontre $f'^{-1}(\eta')$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.8); cela implique donc que pour tout ouvert U de Y, le morphisme $f^{-1}(U) \to U$, restriction de f, est universellement ouvert,

Corollaire (**4.3.10**). — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens intègres.* $f: X \to Y$ *un morphisme propre dominant et universellement ouvert. Si la fermeture algébrique de* R(Y) *dans* R(X) *est radicielle sur* R(Y), *toute fibre* $f^{-1}(y)$ ($y \in Y$) *est géométriquement connexe.*

On peut se borner au cas où $Y = \operatorname{Spec}(B)$, B étant un anneau intègre noethérien. Il résulte alors de (**II**, 7.1.7) qu'il existe un anneau local *noethérien intégralement clos* A qui domine $\mathcal{O}_y$ et a R(Y) pour corps des fractions. Soit $Y' = \operatorname{Spec}(A)$, et soit $h: Y' \to Y$ le morphisme correspondant à l'injection canonique $B \to A$, qui est birationnel (donc dominant); en outre, si y' est l'unique point fermé de Y', on a $h(y') = y$. Soient

$X' = X \times_Y Y'$, $f' = f \times 1_{Y'}$; désignons par η, η', ξ les points génériques de Y, Y' et X respectivement, de sorte que $f(\xi) = \eta$ et $h^{-1}(\eta) = \{\eta'\}$; en outre, $\boldsymbol{k}(\eta) = \boldsymbol{k}(\eta') = R(Y)$, donc $f'^{-1}(\eta')$ est isomorphe à $f^{-1}(\eta)$ (**I**, 3.6.4) et en particulier, puisque ξ est le point générique de $f^{-1}(\eta)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.8), $f'^{-1}(\eta')$ a un seul point générique. Mais par hypothèse, toute composante irréductible de X' a son point générique dans $f'^{-1}(\eta')$, donc X' est nécessairement irréductible, son point générique ξ' est le point générique de $f'^{-1}(\eta')$ et on a $\boldsymbol{k}(\xi') = \boldsymbol{k}(\xi)$. Posons $X'' = X'_{\mathrm{red}}$, $f'' = f'_{\mathrm{red}}$; X'' est donc intègre et noethérien, f'' est propre (**II**, 5.4.6) et les espaces sous-jacents aux fibres $f'^{-1}(y')$ et $f''^{-1}(y')$ sont les mêmes; en outre, $R(X'') = \boldsymbol{k}(\xi') = R(X)$, donc f'' vérifie les hypothèses de (4.3.8), et $f''^{-1}(y')$ est géométriquement connexe. Soit maintenant k une extension quelconque de $\boldsymbol{k}(y)$; il existe une extension k_1 de $\boldsymbol{k}(y)$ dont $\boldsymbol{k}(y')$ et k peuvent être considérés comme des sous-extensions (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 4, prop. 2). Par hypothèse, $f''^{-1}(y') \times_{Y'} \mathrm{Spec}(k_1)$ est connexe, et il a même préschéma réduit que $f'^{-1}(y') \times_{Y'} \mathrm{Spec}(k_1)$ (**I**, 5.1.8), donc ce dernier est connexe, et comme il est isomorphe à $f^{-1}(y) \times_Y \mathrm{Spec}(k_1)$ (**I**, 3.6.4), on en conclut que ce dernier est connexe; *a fortiori*, il en est de même de $f^{-1}(y) \times_Y \mathrm{Spec}(k)$ d'après la remarque du début de (4.3.4), ce qui achève la démonstration.

Remarques (**4.3.11**). — (i) Le raisonnement précédent est dû en substance à Zariski [20], à cela près qu'il peut prendre pour A la clôture intégrale de $\mathcal{O}_y$, celle-ci étant un anneau noethérien pour les anneaux locaux de la géométrie algébrique classique. D'autre part, Zariski prouve que si Y est la variété de Chow d'un espace projectif $\mathbf{P}_k^r$ sur un corps k, et si X est la partie fermée de $\mathbf{P}_k^r \times_k Y$ qui définit la correspondance de Chow entre $\mathbf{P}_k^r$ et Y, alors la projection $X \to Y$ est un morphisme universellement ouvert (*loc. cit.*, lemme de la p. 82). Il semble bien que ce soit la seule propriété formelle des « coordonnées de Chow » dont on se soit servi dans certaines applications; il y a par suite intérêt dans une telle situation, à substituer le langage : fibres d'un morphisme propre (éventuellement supposé universellement ouvert ou soumis à d'autres restrictions analogues de régularité locale) au langage : spécialisation de cycles dans l'espace projectif.

(ii) Au chap. IV, nous verrons qu'un morphisme universellement ouvert $f : X \to Y$ peut encore être défini de la façon suivante (qui justifie la terminologie) : pour *tout* morphisme $Z \to Y$, le morphisme $f_{(Z)} : X_{(Z)} \to Z$ est *ouvert*. On peut montrer en outre que si f vérifie les hypothèses de (4.3.10), alors, si y, y' sont deux points de Y tels que y soit une *spécialisation* de y', le nombre géométrique de composantes connexes de $f^{-1}(y)$ est au plus égal à celui des composantes connexes de $f^{-1}(y')$.

Corollaire (**4.3.12**). — *Sous les hypothèses de* (4.3.5), *supposons en outre* R(Y) *algébriquement fermé dans* R(X), *et soit y un point normal de* Y. *Alors $f^{-1}(y)$ est géométriquement connexe, et il existe un voisinage ouvert* U *de y dans* Y *tel que* $f_*(\mathcal{O}_X | f^{-1}(U))$ *soit isomorphe à* $\mathcal{O}_Y | U$. *Si plus particulièrement, on suppose* Y *normal* (*et* R(Y) *algébriquement fermé dans* R(X)) $f_*(\mathcal{O}_X)$ *est isomorphe à* $\mathcal{O}_Y$.

La première assertion relative à $f^{-1}(y)$ est un cas particulier de (4.3.8). On en déduit que si $f: X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$ est la factorisation de Stein de f (4.3.3), $g^{-1}(y)$ se réduit à un seul point y'; en outre, on a $\mathcal{O}_y \subset \mathcal{O}_{y'} = (f_*(\mathcal{O}_X))_y \subset R(X)$, et comme $\mathcal{O}_{y'}$ est fini sur $\mathcal{O}_y$, (et *a fortiori* sur R(Y)), il est contenu dans R(Y) en vertu de l'hypothèse; comme y est normal, on a nécessairement $\mathcal{O}_{y'} = \mathcal{O}_y$; on en conclut que g est un isomorphisme local au point y' (**I**, 6.5.4), ce qui achève de prouver la première partie du corollaire. La seconde résulte de la première, car l'hypothèse supplémentaire entraîne que g est bijective et un isomorphisme local au voisinage de tout point de Y′, donc un isomorphisme.

Le fait que (4.3.7) soit établi dans le cadre des schémas permet des applications telles que la suivante :

Proposition **(4.3.13)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien unibranche,* $\mathfrak{a}$ *un idéal de définition de* A, $A_0 = A/\mathfrak{a}$, $S = \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ *l'anneau gradué associé à* A *pour la filtration* $\mathfrak{a}$*-préadique ;* S *est une* A_0*-algèbre graduée engendrée par* S_1, S_1 *étant un* A_0*-module de type fini. Alors* Proj(S) *est un* A_0*-schéma connexe.*

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A; $Y = \mathrm{Spec}(A)$ est un schéma intègre dont le point y correspondant à $\mathfrak{m}$ est l'unique point fermé. Par hypothèse, on a $\mathfrak{m}^p \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ pour un entier p, donc $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{m}\}$. Soit $S' = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{a}^n$, et soit $X = \mathrm{Proj}(S')$, qui est le Y-schéma obtenu en faisant éclater l'idéal $\mathfrak{a}$; X est intègre et le morphisme structural $f: X \to Y$ est birationnel (**II**, 8.1.4) et évidemment projectif. Par suite, (4.3.7) est applicable et montre que $f^{-1}(y)$ est connexe; mais l'espace $f^{-1}(y)$ est sous-jacent à $\mathrm{Proj}(S' \otimes_A A_0)$ (**I**, 3.6.1 et **II**, 2.8.10); comme $S' \otimes_A A_0 = S$ par définition, la proposition est démontrée.

4.4. Le « main theorem » de Zariski.

Proposition **(4.4.1)**. — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme propre. Soit* X′ *l'ensemble des points* $x \in X$ *qui sont isolés dans leur fibre* $f^{-1}(f(x))$. *Alors l'ensemble* X′ *est ouvert dans* X, *et si* $f = g \circ f'$ *est la factorisation de Stein de* f (4.3.3), *la restriction de* f' *à* X′ *est un isomorphisme de* X′ *sur un sous-préschéma induit sur un ouvert* U *de* Y′, *et on a* $X' = f'^{-1}(U)$.

Comme $g^{-1}(f(x))$ est fini et discret (4.3.3 et **II**, 6.1.7), pour que x soit isolé dans $f^{-1}(f(x))$, il faut et il suffit qu'il le soit dans $f'^{-1}(f'(x))$; on peut donc se borner au cas où $f' = f$, donc $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$. Alors, si $x \in X'$, $f^{-1}(f(x))$, qui est connexe (4.3.2) est nécessairement réduit au point x. Comme f est fermé, pour tout voisinage ouvert V de x dans X, $f(X-V)$ est fermé dans Y et ne contient pas $y = f(x)$, puisque $f^{-1}(y) = \{x\}$; si U est le complémentaire de $f(X-V)$ dans Y, on a $f^{-1}(U) \subset V$, et on en conclut que les images réciproques par f d'un système fondamental de voisinages ouverts de y forment un système fondamental de voisinages ouverts de x. L'hypothèse $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ et la définition de l'image directe d'un faisceau ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.4.1 et 4.2.1) entraînent alors que, si $f = (\psi, \theta)$, l'homomorphisme $\theta_y^\# : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ est un *isomorphisme*. On en conclut qu'il existe un voisinage ouvert V de x et un voisinage ouvert U de y tels que la restriction de f à V soit un isomorphisme de V sur U (**I**, 6.5.4); en outre, d'après ce qu'on vient de voir, on peut supposer que $f^{-1}(U)=V$, d'où on conclut aussitôt, par définition, que $V \subset X'$, ce qui achève la démonstration.

La proposition suivante a été démontrée par Chevalley dans le cas des schémas algébriques :

Proposition **(4.4.2)**. — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est fini.*

b) *f est affine et propre.*

c) *f est propre et, pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini.*

On sait que *a)* entraîne *b)* (**II**, 6.1.2 et 6.1.11). Si f est propre et affine, il en est de même du morphisme $f^{-1}(y) \to \operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ (**II**, 1.6.2, (iii) et 5.4.2, (iii)), et le th. de finitude (3.2.1) appliqué au faisceau structural de $f^{-1}(y)$, montre que $f^{-1}(y)=\operatorname{Spec}(A)$, où A est une $\boldsymbol{k}(y)$-algèbre *finie*; donc $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini (**II**, 6.1.7), et on voit que *b)* entraîne *c)*. Enfin, comme $f^{-1}(y)$ est un préschéma algébrique sur $\boldsymbol{k}(y)$, l'hypothèse que l'ensemble $f^{-1}(y)$ est fini entraîne que l'espace $f^{-1}(y)$ est discret (**I**, 6.4.4). Avec les notations de (4.4.1), on a donc $X'=X$, et $f': X \to Y'$ est un isomorphisme; comme g est un morphisme fini, on voit que *c)* entraîne *a)*.

Théorème **(4.4.3)** (« Main theorem » de Zariski). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme quasi-projectif,* X' *l'ensemble des points* $x \in X$ *qui sont isolés dans leur fibre* $f^{-1}(f(x))$. *Alors* X' *est une partie ouverte de* X, *et le sous-préschéma induit* X' *est isomorphe à un préschéma induit sur une partie ouverte d'un* Y-*préschéma* Y' *fini sur* Y.

L'hypothèse entraîne qu'il existe un Y-préschéma projectif Z tel que X soit Y-isomorphe à un sous-préschéma induit sur un ouvert de Z (**II**, 5.3.2 et 5.5.1). On est donc ramené à démontrer le théorème lorsque f est un morphisme projectif, donc propre (**II**, 5.5.3), et il résulte alors aussitôt de (4.4.1).

Remarque **(4.4.4)**. — Si X est réduit (resp. irréductible et X' non vide), on peut supposer, dans l'énoncé de (4.4.3), que Y' est réduit (resp. irréductible). En effet, on peut toujours remplacer Y' par le sous-préschéma *adhérence* $\overline{X'}$ de X' dans Y' (**I**, 9.5.11 et **II**, 6.1.5, (i) et (ii)), et on sait que si X' est réduit, il en est de même de $\overline{X'}$ (**I**, 9.5.9, (i)); par ailleurs, si X' n'est pas vide, il est irréductible si X l'est, et $\overline{X'}$ est alors aussi irréductible.

Corollaire **(4.4.5)**. — *Soient* Y *un schéma localement noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme de type fini,* x *un point de* X *isolé dans sa fibre* $f^{-1}(f(x))$. *Alors il existe un voisinage ouvert de* x *dans* X *qui est isomorphe à une partie ouverte d'un* Y-*préschéma fini sur* Y.

Soient en effet $y=f(x)$, U un voisinage ouvert affine de y dans Y, V un voisinage ouvert affine de x dans X, contenu dans $f^{-1}(U)$. Comme Y est séparé, l'injection $U \to Y$ est affine (**II**, 1.6.3), et comme V est affine sur U *(ibid.)*, la restriction de f à V est un morphisme affine $V \to Y$ (**II**, 1.6.2, (ii)); *a fortiori*, cette restriction est un morphisme quasi-projectif puisqu'il est de type fini (**I**, 6.3.5 et **II**, 5.3.4, (i)). Il suffit alors d'appliquer à cette restriction le th. (4.4.3).

Le cor. (4.4.5) s'énonce dans le langage de l'algèbre commutative :

Corollaire **(4.4.6).** — *Soient* A *un anneau noethérien,* B *une* A-*algèbre de type fini,* $\mathfrak{q}$ *un idéal premier de* B, $\mathfrak{p}$ *son image réciproque dans* A. *On suppose que* $\mathfrak{q}$ *soit à la fois maximal et minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de* B *dont l'image réciproque est* $\mathfrak{p}$. *Alors il existe* $g \in B - \mathfrak{q}$, *une* A-*algèbre finie* A' *et un élément* $f' \in A'$ *tels que les* A-*algèbres* B_g *et* $A'_{f'}$ *soient isomorphes.*

Il suffit en effet d'appliquer (4.4.5) à $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$, l'hypothèse sur $\mathfrak{q}$ signifiant exactement qu'il est isolé dans sa fibre (**I**, 1.1.7).

On en déduit le résultat suivant, moins général en apparence :

Corollaire **(4.4.7).** — *Soient* A *un anneau local noethérien,* B *une* A-*algèbre de type fini,* $\mathfrak{n}$ *un idéal premier de* B *dont l'image réciproque dans* A *est l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$. *On suppose que* $\mathfrak{n}$ *est maximal dans* B *et est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de* B *dont l'image réciproque est* $\mathfrak{m}$ *(ce qui signifie aussi que* $B\mathfrak{m}$ *est primaire pour* $\mathfrak{n}$*). Alors il existe une* A-*algèbre finie* A' *et un idéal maximal* $\mathfrak{m}'$ *de* A' (*dont* $\mathfrak{m}$ *est l'image réciproque dans* A) *tels que* $B_{\mathfrak{n}}$ *soit isomorphe à la* A-*algèbre* $A'_{\mathfrak{m}'}$.

Le cas particulier suivant de (4.4.7) est aussi parfois appelé « Main Theorem » :

Corollaire **(4.4.8).** — *Sous les conditions de* (4.4.7), *supposons en outre* A *et* B *intègres et ayant même corps des fractions* K. *Alors, si* A *est intégralement clos, on a* $B = A$.

En effet, la *Remarque* (4.4.4) montre que l'on peut supposer, dans l'application de (4.4.7) que A' est intègre et a K pour corps des fractions; l'hypothèse sur A entraîne alors $A' = A$, donc $B_{\mathfrak{n}} = A$; comme on a $A \subset B \subset B_{\mathfrak{n}}$, on en conclut bien $A = B$.

L'énoncé (4.4.8) est la forme donnée par Zariski à son « Main theorem » (étendu aux anneaux locaux noethériens intègres quelconques).

Les corollaires précédents étaient des variantes de nature locale de (4.4.3), qui est un résultat global. Voici une autre conséquence de nature globale :

Corollaire **(4.4.9).** — *Soient* Y *un préschéma intègre localement noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme séparé, de type fini et birationnel. Supposons en outre* Y *normal et toutes les fibres* $f^{-1}(y)$ *finies pour* $y \in Y$. *Alors* f *est une immersion ouverte ; si en outre* f *est fermé (et en particulier si* f *est propre),* f *est un isomorphisme.*

Soit en effet $x \in X$, et posons $y = f(x)$. Comme $f^{-1}(y)$ est un schéma algébrique sur $\boldsymbol{k}(y)$, l'hypothèse qu'il est fini entraîne qu'il est discret (**I**, 6.4.4); en outre $\mathcal{O}_y$ est intégralement clos et $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y$ ont même corps des fractions (**I**, 7.1.5). On peut donc appliquer (4.4.8), et si $f = (\psi, \theta)$, l'homomorphisme $\theta_y^{\#} : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ est bijectif; on en conclut (**I**, 6.5.4) que f est un isomorphisme local. Mais comme f est séparé et X intègre, f est une immersion ouverte (**I**, 8.2.8). La dernière assertion résulte de ce que f est dominant.

Proposition **(4.4.10).** — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini. L'ensemble* X' *des* $x \in X$ *isolés dans leur fibre* $f^{-1}(f(x))$ *est ouvert dans* X.

La question étant locale sur X et Y, on peut supposer X et Y affines noethériens et f de type fini; f est alors un morphisme affine de type fini, donc quasi-projectif (**II**, 5.3.4, (i)), et il suffit d'appliquer (4.4.3).

Corollaire (**4.4.11**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme propre. L'ensemble* U *des points* $y \in Y$ *tels que* $f^{-1}(y)$ *soit discret est ouvert dans* Y, *et le morphisme* $f^{-1}(U) \to U$ *restriction de* f *est fini. En particulier, un morphisme propre et quasi-fini* $X \to Y$ *est fini.*

En effet, le complémentaire de U dans Y est l'image par f de $X - X'$ qui est fermé dans X en vertu de (4.4.10); comme f est une application fermée, U est ouvert. En outre, il résulte de (**II**, 6.2.2) que $f^{-1}(y)$ est fini pour tout $y \in U$; comme le morphisme $f^{-1}(U) \to U$, restriction de f est propre (**II**, 5.4.1), il est fini en vertu de (4.4.2).

Remarques (**4.4.12**). — (i) Comme on l'a annoncé dans (**II**, 6.2.7), nous montrerons au chap. V que si Y est localement noethérien, tout morphisme quasi-fini et séparé $f: X \to Y$ est quasi-affine, donc quasi-projectif. Il s'ensuivra que, dans le Main Theorem (4.4.3) la conclusion reste valable lorsqu'on suppose seulement f *séparé et de type fini*. En effet, il résulte de (4.4.10) que X′ est ouvert dans X, et comme X est localement noethérien, la restriction de f à X′ est encore de type fini (**I**, 6.3.5), donc quasi-fini par définition de X′, et évidemment séparé; on peut donc appliquer (4.4.3) à cette restriction, d'où la conclusion.

(ii) Nous donnerons au chap. IV une démonstration plus élémentaire de (4.4.10), utilisant la théorie de la dimension.

4.5. Complétés de modules d'homomorphismes.

Proposition (**4.5.1**). — *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, X *un* A-*préschéma de type fini,* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *deux* $\mathcal{O}_X$-*Modules cohérents dont les supports ont une intersection propre sur* $Y = \mathrm{Spec}(A)$ (**II**, 5.4.10). *Alors, pour tout entier* $n \geqslant 0$, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(X; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ *est un* A-*module de type fini, et son séparé complété pour la topologie* $\mathfrak{J}$-*préadique s'identifie canoniquement* (*avec les notations de* (4.1.7)) *à* $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{X}; \hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$.

On sait (T, 4.2) qu'il existe une suite spectrale birégulière $E(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ dont l'aboutissement est $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}(X; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ et dont les termes E_2 sont donnés par $E_2^{pq} = H^p(X, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$. On sait que $\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent (**0**, 12.3.3) dont le support est contenu dans l'intersection de ceux de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ (T, 4.2.2), et est par suite propre sur Y (**II**, 5.4.10). On conclut de (3.2.4) que les E_2^{pq} sont des A-modules de type fini, et par suite (**0**, 11.1.8) il en est de même de tous les termes E_r^{pq} de la suite spectrale et de son aboutissement. D'autre part, si $i: \hat{X} \to X$ est le morphisme canonique, $\hat{\mathscr{F}}$ et $\hat{\mathscr{G}}$ s'identifient canoniquement à $i^*(\mathscr{F})$ et $i^*(\mathscr{G})$, et i est *plat* (**I**, 10.8.8 et 10.8.9). On sait alors (**0**, 12.3.4) qu'il existe, pour tout $q \geqslant 0$, un i-morphisme canonique $u_q: \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$, et que le $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-homomorphisme correspondant $u^\sharp: i^*(\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$ est un *isomorphisme* (**0**, 12.3.5); autrement dit (**I**, 10.8.8), $\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$ s'identifie canoniquement au complété $(\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))^\wedge$ (avec les notations de (4.1.7)). On conclut alors du th. de comparaison (4.1.10) que pour tout $p \geqslant 0$, $H^p(\hat{X}, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}}))$ s'identifie canoniquement au séparé complété de $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$ pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique. Si on désigne par $\mathrm{E}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$ la suite spectrale birégulière définie dans (T, 4.2) relative à $\hat{\mathscr{F}}$ et $\hat{\mathscr{G}}$, on voit donc que si $\hat{\mathrm{A}}$ désigne le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, on a, à un isomorphisme canonique près, $\mathrm{E}_2^{pq}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}}) = \mathrm{E}_2^{pq}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \hat{\mathrm{A}}$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.3).

Cela étant, on sait que la donnée du morphisme plat i définit un homomorphisme canonique de suites spectrales

$$\varphi : \mathrm{E}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{E}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}}) = \mathrm{E}(i^*(\mathscr{F}), i^*(\mathscr{G}))$$

qui, pour les termes E_2 (resp. l'aboutissement) se réduit à l'homomorphisme

$$\varphi_2^{pq} : \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathrm{H}^p(\hat{\mathrm{X}}, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}}}}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}}))$$
$$(\text{resp. } \varphi^n : \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}}}}(\hat{\mathrm{X}}; \hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}}))$$

déduit de u_q (resp. u_0) par fonctorialité ($\mathbf{0}$, 12.3.4). Par tensorisation avec $\hat{\mathrm{A}}$, les φ_r^{pq} et φ^n donnent des homomorphismes de $\hat{\mathrm{A}}$-modules

$$\psi_r^{pq} : \mathrm{E}_r^{pq}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \hat{\mathrm{A}} \to \mathrm{E}_r^{pq}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$$
$$\psi^n : \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \hat{\mathrm{A}} \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}}}}(\hat{\mathrm{X}}; \hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}}).$$

Comme $\hat{\mathrm{A}}$ est un A-module *plat* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.3), les $\hat{\mathrm{A}}$-modules $\mathrm{E}_r^{pq}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \hat{\mathrm{A}}$ forment une suite spectrale birégulière d'aboutissement les $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \hat{\mathrm{A}}$, et les ψ_r^{pq} et ψ_n un morphisme de suites spectrales. Comme les ψ_2^{pq} sont des *isomorphismes*, il en est de même des ψ^n ($\mathbf{0}$, 11.1.5).

Corollaire (**4.5.2**). — *Sous les hypothèses de* (4.5.1), *supposons en outre que* A *soit un anneau* $\mathfrak{J}$*-adique noethérien. Alors, pour tout entier* $n \geqslant 0$, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ *s'identifie canoniquement à* $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}}}}(\hat{\mathrm{X}}; \hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$.

Il suffit de remarquer que $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \mathscr{G})$, étant un A-module de type fini, est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.6).

Le cas particulier $n = 0$ de (4.5.1) s'énonce de la façon suivante :

Corollaire (**4.5.3**). — *Sous les hypothèses de* (4.5.1), *pour tout homomorphisme* $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, *désignons par* $\hat{u}$ *l'homomorphisme complété* $\hat{\mathscr{F}} \to \hat{\mathscr{G}}$ (**I**, 10.8.4). *Alors on a un isomorphisme canonique*

(4.5.3.1) $$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}}}}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$$

où le premier membre est le séparé complété pour la topologie $\mathfrak{J}$*-préadique du* A*-module* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, *cet isomorphisme étant obtenu par passage aux séparés complétés à partir de l'homomorphisme* $u \to \hat{u}$.

4.6. Relations entre morphismes formels et morphismes usuels.

Proposition (**4.6.1**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme propre,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module cohérent et* f*-plat,* y *un point de* Y. *Supposons que pour un* *entier n, on ait* $H^n(f^{-1}(y), \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\boldsymbol{k}(y))=0$. *Alors il existe un voisinage* U *de* y *dans* Y *tel que* $R^n f_*(\mathcal{F})|U=0$, *et pour tout entier* $p\geqslant 0$, *l'homomorphisme canonique*

$$(R^{n-1}f_*(\mathcal{F}))_y \rightarrow H^{n-1}(f^{-1}(y), \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^{p+1}))$$

(4.2.1.1) *est surjectif.*

Comme $R^n f_*(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent (3.2.1), la première assertion de la proposition sera établie si l'on prouve que l'on a $(R^n f_*(\mathcal{F}))_y=0$ (**0**$_{\mathrm{I}}$, 5.2.2); en vertu de (4.2.1), il suffira de prouver que $H^n(f^{-1}(y), \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^{p+1}))=0$ pour tout p. C'est vrai par hypothèse pour $p=0$; nous allons le démontrer par récurrence sur p. Posons $X_p=X\times_Y \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^{p+1})$, de sorte que X_{p-1} est un sous-préschéma fermé de X_p, ayant même espace sous-jacent (**I**, 3.6.1); l'hypothèse de récurrence $H^n(X_{p-1}, \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^p))=0$ entraîne donc $H^n(X_p, \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^p))=0$; d'autre part, la suite exacte de cohomologie donne, à partir de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_y^p\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^p\mathcal{F} \rightarrow 0$$

de $\mathcal{O}_{X_p}$-Modules, la suite exacte

$$H^n(X_p, \mathfrak{m}_y^p\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_p, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_p, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^p\mathcal{F})$$

et il suffira de montrer que l'on a

$$H^n(X_p, \mathfrak{m}_y^p\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathcal{F})=0 \tag{4.6.1.1}$$

car alors $H^n(X_p, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathcal{F})$ sera un sous-module de $H^n(X_p, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^p\mathcal{F})$, donc 0 en vertu de l'hypothèse de récurrence.

Notons maintenant que la fibre $Z=f^{-1}(y)=X\times_Y\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ est un sous-préschéma fermé de X_p, et que $\mathfrak{m}_y^p\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathcal{F}$ est annulé par $\mathfrak{m}_y$, donc peut être considéré comme un $\mathcal{O}_Z$-Module, de sorte que $H^n(Z, \mathfrak{m}_y^p\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathcal{F})=H^n(X_p, \mathfrak{m}_y^p\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathcal{F})$. Cela étant, nous allons montrer que le $\mathcal{O}_Z$-homomorphisme canonique

$$(\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y\mathcal{F})\otimes_{\boldsymbol{k}(y)}(\mathfrak{m}_y^p/\mathfrak{m}_y^{p+1}) \rightarrow \mathfrak{m}_y^p\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathcal{F} \tag{4.6.1.2}$$

est *bijectif*; cela établi, il en résultera, puisque $\mathfrak{m}_y^p/\mathfrak{m}_y^{p+1}$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-module libre, que l'on a

$$H^n(Z, \mathfrak{m}_y^p\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathcal{F})=H^n(Z, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y\mathcal{F})\otimes_{\boldsymbol{k}(y)}(\mathfrak{m}_y^p/\mathfrak{m}_y^{p+1})=0$$

(**0**, 12.2.3), puisque $H^n(Z, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y\mathcal{F})=0$ par hypothèse, d'où (4.6.1.1). Pour établir la première assertion, il reste donc à prouver que (4.6.1.2) est bijectif; comme la question est ponctuelle sur X et que $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_y$-module *plat* par hypothèse pour tout $x\in f^{-1}(y)$, il suffit d'appliquer (**0**, 10.2.1, *c*)), car $\mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_y\mathcal{F}_x$ est un module plat sur le corps $\boldsymbol{k}(y)=\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y$.

Pour démontrer la seconde assertion de (4.6.1), on se ramène aussitôt, comme dans (4.2.1), au cas où Y est affine et y fermé. Notons que (4.6.1.1) donne, par un raisonnement analogue, pour tout $k>0$, la relation

$$H^n(X_{k+1}, \mathfrak{m}_y^k\mathcal{F}/\mathfrak{m}_y^{k+p+1}\mathcal{F})=0 \tag{4.6.1.3}$$

d'où on déduit, par (4.2.1), que l'on a aussi

(4.6.1.4) $$(\mathrm{R}^n f_*(\mathfrak{m}_y^k \mathscr{F}))_y = 0.$$

Cela étant, on tire de la suite exacte de cohomologie l'exactitude de la suite

$$(\mathrm{R}^{n-1} f_*(\mathscr{F}))_y \to (\mathrm{R}^{n-1} f_*(\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}))_y \to (\mathrm{R}^n f_*(\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}))_y = 0$$

et comme y est fermé et Y affine, on a (1.4.11)

$$\mathrm{R}^{n-1} f_*(\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}) = (\mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}))^{\sim} = (\mathrm{H}^{n-1}(f^{-1}(y), \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}))^{\sim}$$

(G, II, 4.9.1); or $\mathrm{H}^{n-1}(f^{-1}(y), \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F})$ est un $(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^p)$-module, d'où

$$(\mathrm{R}^{n-1} f_*(\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}))_y = \mathrm{H}^{n-1}(f^{-1}(y), \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F})$$

et cela achève de prouver (4.6.1).

Corollaire **(4.6.2)**. — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme propre et plat,* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *deux* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Modules localement libres,* y *un point de* Y. *Posons* $\mathrm{X}_y = f^{-1}(y) = \mathrm{X} \otimes_\mathrm{Y} \boldsymbol{k}(y)$, $\mathscr{F}_y = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}} \boldsymbol{k}(y)$, $\mathscr{G}_y = \mathscr{G} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}} \boldsymbol{k}(y)$, *et supposons que l'on ait*

(4.6.2.1) $$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_y, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y)) = 0.$$

Alors, pour tout homomorphisme $u_0 : \mathscr{F}_y \to \mathscr{G}_y$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* Y *et un homomorphisme* $u : \mathrm{F}|f^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathscr{G}|f^{-1}(\mathrm{U})$ *tels que* u_0 *soit égal à l'homomorphisme* $u \otimes 1$.

En effet, l'hypothèse permet d'appliquer (4.6.1) au $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module cohérent $\mathscr{H} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ pour $n = 1$ et $p = 0$, car $\mathscr{H}$ est localement libre et *a fortiori* f-plat, et le $\mathcal{O}_{\mathrm{X}_y}$-Module $\mathscr{H} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}} \boldsymbol{k}(y)$ s'identifie alors à $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y)$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.2.2). On peut supposer $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ affine, et alors (1.4.11) $\mathrm{R}^0 f_*(\mathscr{H}) = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))^{\sim}$, donc $(\mathrm{R}^0 f_*(\mathscr{H}))_y = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \mathcal{O}_y$; l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \mathcal{O}_y \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y)$$

étant surjectif par (4.6.1), cela établit le corollaire, tout élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \mathcal{O}_y$ pouvant toujours se mettre sous la forme $u \otimes (1/s)$, où $s \notin \mathfrak{m}_y$ est un élément de A.

Ce corollaire peut se compléter par le suivant :

Corollaire **(4.6.3)**. — *Sous les hypothèses de* (4.6.2), *si* u_0 *est injectif* (resp. *surjectif, bijectif*), *on peut supposer qu'il en est de même de* u.

On peut se borner au cas où $\mathrm{U} = \mathrm{Y}$. Il suffit de prouver que si u_0 est injectif (resp. surjectif), $\mathrm{Ker}\, u_x = 0$ (resp. $\mathrm{Coker}\, u_x = 0$) pour tout $x \in f^{-1}(y)$: en effet, $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Coker}\, u$ sont des $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Modules cohérents ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.3.4), donc il existera un voisinage V de $f^{-1}(y)$ dans X tel que la restriction de $\mathrm{Ker}\, u$ (resp. $\mathrm{Coker}\, u$) à V soit 0 ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.2.2); comme f est fermé, il existera un voisinage $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$ de y tel que $f^{-1}(\mathrm{U}') \subset \mathrm{V}$, et (4.6.3) sera démontré. Par hypothèse, $u_x \otimes 1 : \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y) \to \mathscr{G}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)$ est injectif (resp. surjectif),

$\mathcal{F}_x$ et $\mathcal{G}_x$ sont des $\mathcal{O}_x$-modules libres de type fini et $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_y$-module plat. Lorsque l'on suppose $u_x \otimes 1$ injectif, le fait que u_x soit injectif résulte de (**0**, 10.2.4). Lorsque l'on suppose $u_x \otimes 1$ surjectif, *a fortiori* l'homomorphisme $\mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{G}_x$, qui s'en déduit par passage aux quotients, est surjectif; comme $\mathcal{G}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module de type fini et que $\mathcal{O}_x$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$, la conclusion résulte du lemme de Nakayama (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 6, n° 3, cor. 4 de la prop. 6).

On déduit en particulier de (4.6.3) :

Corollaire (**4.6.4**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien*, $f : X \to Y$ *un morphisme propre et plat*, y *un point de* Y, $X_y = X \otimes_Y \boldsymbol{k}(y)$. *Soit* $\mathcal{E}_0$ *un* $\mathcal{O}_{X_y}$*-Module localement libre tel que*

$$\text{(4.6.4.1)} \qquad H^1(X_y, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)) = 0.$$

Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *deux* $\mathcal{O}_X$*-Modules localement libres tels que* $\mathcal{F}_y$ *et* $\mathcal{G}_y$ (*avec les notations de* (4.6.2)) *soient isomorphes à* $\mathcal{E}_0$. *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* y *tel que* $\mathcal{F}|f^{-1}(U)$ *et* $\mathcal{G}|f^{-1}(U)$ *soient isomorphes.*

Plus particulièrement :

Corollaire (**4.6.5**). — *Sous les hypothèses de* (4.6.4) *sur* f, X, Y, *supposons que* $H^1(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 0$. *Si* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *sont deux* $\mathcal{O}_X$*-Modules inversibles tels que* $\mathcal{F}_y$ *et* $\mathcal{G}_y$ *soient isomorphes, il existe un voisinage ouvert* U *de* y *tel que* $\mathcal{F}|f^{-1}(U)$ *et* $\mathcal{G}|f^{-1}(U)$ *soient isomorphes.*

Il suffit d'appliquer (4.6.4) aux modules $\mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}$ et $\mathcal{O}_X$.

Remarques (**4.6.6**). — (i) En utilisant (4.6.5), nous établirons au chap. V la classification des faisceaux inversibles sur un fibré projectif, annoncée dans (**II**, 4.2.7).

(ii) Le résultat de (4.6.1) apparaîtra au § 7 comme conséquence de propositions plus générales.

Proposition (**4.6.7**). — *Soient* Z *un préschéma localement noethérien*, X, Y *deux* Z*-préschémas tels que les morphismes structuraux* $g : X \to Z$, $h : Y \to Z$ *soient propres. Soient* $f : X \to Y$ *un* Z*-morphisme*, z *un point de* Z, *et soit* $f_z = f \times_Z 1 : X \otimes_Z \boldsymbol{k}(z) \to Y \otimes_Z \boldsymbol{k}(z)$.

(i) *Si* f_z *est un morphisme fini* (resp. *une immersion fermée*), *il existe un voisinage ouvert* U *de* z *tel que le morphisme* $g^{-1}(U) \to h^{-1}(U)$, *restriction de* f, *soit un morphisme fini* (resp. *une immersion fermée*).

(ii) *On suppose de plus que* g *soit un morphisme plat. Alors, si* f_z *est un isomorphisme, il existe un voisinage ouvert* U *de* z *tel que le morphisme* $g^{-1}(U) \to h^{-1}(U)$, *restriction de* f, *soit un isomorphisme.*

Dans les deux cas, il suffira de prouver que pour tout $y \in h^{-1}(z)$ il existe un voisinage V_y de y tel que la restriction $f^{-1}(V_y) \to V_y$ de f soit un morphisme fini (resp. une immersion fermée, un isomorphisme); il en résultera alors en effet que si V est la réunion des V_y, la restriction $f^{-1}(V) \to V$ de f est un morphisme fini (resp. une immersion fermée, un isomorphisme) (**II**, 6.1.1 et **I**, 4.2.4). Comme h est un morphisme fermé, il existera un voisinage ouvert U de z tel que $h^{-1}(U) \subset V$, et la proposition sera démontrée.

(i) Notons tout d'abord que f est un morphisme propre (**II**, 5.4.3); si on suppose f_z fini, l'existence pour tout $y \in h^{-1}(z)$ d'un voisinage V_y tel que $f^{-1}(V_y) \rightarrow V_y$ soit fini résulte de (4.4.11). Pour traiter le cas où f_z est une immersion fermée, on peut donc déjà supposer que le morphisme f est *fini*, donc que $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{B})$, où $\mathscr{B}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre cohérente, le morphisme f correspondant (**II**, 1.2.7) à l'homomorphisme canonique $u : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathscr{B}$. Si l'on prouve que pour tout $y \in h^{-1}(z)$, l'homomorphisme $u_y : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathscr{B}_y$ est surjectif, il en résultera que pour un voisinage V_y de y, $u | V_y$ sera surjectif, le faisceau Coker u étant cohérent ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4 et 5.2.2). Cela étant, le morphisme fini f_z correspond à l'homomorphisme $v = u \otimes 1 : \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_z} \boldsymbol{k}(z) \rightarrow \mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_z} \boldsymbol{k}(z)$, et l'hypothèse que f_z est une immersion fermée entraîne que l'homomorphisme $u_y \otimes 1 : \mathcal{O}_y \otimes_{\mathcal{O}_z} \boldsymbol{k}(z) \rightarrow \mathscr{B}_y \otimes_{\mathcal{O}_z} \boldsymbol{k}(z)$ est surjectif. Comme $\mathscr{B}_y$ est un $\mathcal{O}_y$-module de type fini et $\mathcal{O}_y$ un anneau local noethérien, la conclusion résulte comme dans (4.6.3) du lemme de Nakayama.

(ii) Le même raisonnement que ci-dessus montre qu'il suffit cette fois de prouver que u_y est bijectif, sachant que $u_y \otimes 1$ est bijectif.

Cela résultera du lemme suivant :

Lemme (**4.6.7.1**). — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\rho : A \rightarrow B$ *un homomorphisme local,* $u : N \rightarrow M$ *un homomorphisme de* B*-modules. On suppose que* M *est un* A*-module plat,* N *un* B*-module de type fini et que* $u \otimes 1 : N \otimes_A k \rightarrow M \otimes_A k$ (*où* k *est le corps résiduel de* A) *est injectif. Alors* N *est un* A*-module plat et* u *est injectif.*

Pour établir la première assertion, il faut montrer que pour tout couple de A-modules *de type fini* P, Q et tout A-homomorphisme injectif $v : P \rightarrow Q$, $1_N \otimes v : N \otimes_A P \rightarrow N \otimes_A Q$ est injectif. Or, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_A P & \xrightarrow{1_N \otimes v} & N \otimes_A Q \\ {\scriptstyle u \otimes 1_P} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle u \otimes 1_Q} \\ M \otimes_A P & \xrightarrow[1_M \otimes v]{} & M \otimes_A Q \end{array}$$

et comme $1_M \otimes v$ est injectif par hypothèse, il suffira de prouver qu'il en est de même de $u \otimes 1_P$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A; la filtration $\mathfrak{m}$-adique sur le A-module $N \otimes_A P$ est aussi sa filtration $\mathfrak{m}$B-adique en tant que B-module; la topologie définie par cette filtration est donc *séparée*, puisque B est noethérien, que $\mathfrak{m}$B est contenu dans le radical de B, et que $N \otimes_A P$ est un B-module de type fini, N étant un B-module de type fini et P un A-module de type fini ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5). Il suffit donc de prouver que l'homomorphisme $\mathrm{gr}\,(u \otimes 1_P) : \mathrm{gr}_\bullet(N \otimes_A P) \rightarrow \mathrm{gr}_\bullet(M \otimes_A P)$ (où les modules gradués sont relatifs aux filtrations $\mathfrak{m}$-adiques) est injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 1 du th. 1). Notons maintenant que puisque M est un A-module plat, les homomorphismes $M \otimes_A (\mathfrak{m}^n P) \rightarrow \mathfrak{m}^n (M \otimes_A P)$ sont bijectifs; il en est donc de même de l'homomorphisme canonique

$$\varphi_M : \mathrm{gr}_0(M) \otimes_A \mathrm{gr}_\bullet(P) \rightarrow \mathrm{gr}_\bullet(M \otimes_A P).$$

Or, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}_0(N)\otimes_A \mathrm{gr}_\bullet(P) \arrow[r, "\mathrm{gr}_0(u)\otimes 1"] \arrow[d, "\varphi_N"'] & \mathrm{gr}_0(M)\otimes_A \mathrm{gr}_\bullet(P) \arrow[d, "\varphi_M"] \\
\mathrm{gr}_\bullet(N\otimes_A P) \arrow[r, "\mathrm{gr}(u\otimes 1)"'] & \mathrm{gr}_\bullet(M\otimes_A P)
\end{tikzcd}$$

dans lequel φ_M est bijectif, φ_N surjectif; en outre, $\mathrm{gr}_0(u)$ est injectif par hypothèse, et comme $\mathrm{gr}_0(N)\otimes_A\mathrm{gr}_\bullet(P)=\mathrm{gr}_0(N)\otimes_k\mathrm{gr}_\bullet(P)$, $\mathrm{gr}_0(M)\otimes_A\mathrm{gr}_\bullet(P)=\mathrm{gr}_0(M)\otimes_k\mathrm{gr}_\bullet(P)$, $\mathrm{gr}_0(u)\otimes 1$ est aussi injectif. On en conclut que $\mathrm{gr}(u\otimes 1)$ est injectif, ce qui achève de démontrer la première assertion. La seconde se déduit du raisonnement précédent en faisant $P=A$.

Proposition **(4.6.8)**. — *Soient* Z *un préschéma localement noethérien*, X, Y, *deux* Z-*préschémas tels que les morphismes structuraux* $g: X\to Z$, $h: Y\to Z$ *soient propres*, Z′ *une partie fermée de* Z, $X'=g^{-1}(Z')$, $Y'=h^{-1}(Z')$ *ses images réciproques*, $\hat{X}=X_{/X'}$, $\hat{Y}=Y_{/Y'}$, $\hat{Z}=Z_{/Z'}$ *les complétés formels de* X, Y, Z *le long de ces parties fermées*, $f: X\to Y$ *un* Z-*morphisme*, $\hat{f}: \hat{X}\to\hat{Y}$ *son prolongement aux complétés. Pour que* $\hat{f}$ *soit un isomorphisme* (resp. *une immersion fermée*), *il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert* U *de* Z′ *tel que le morphisme* $g^{-1}(U)\to h^{-1}(U)$, *restriction de* f, *soit un isomorphisme* (resp. *une immersion fermée*).

La suffisance de la condition est immédiate (**I**, 10.14.7). Pour en montrer la nécessité, il suffit encore de prouver que pour tout $y\in Y'$, il existe un voisinage ouvert V_y de y tel que la restriction $f^{-1}(V_y)\to V_y$ de f soit un isomorphisme (resp. une immersion fermée), par le même raisonnement que dans (4.6.7). On est ainsi ramené au cas où $Y=Z$, $Y=\mathrm{Spec}(A)$ étant affine noethérien. Par hypothèse (**I**, 10.9.1 et 10.14.2) la fibre $f^{-1}(y)$ est réduite à un point pour $y\in Y'$, donc comme f est propre (**II**, 5.4.3), il existe un voisinage ouvert U de y tel que la restriction $f^{-1}(U)\to U$ de f soit un morphisme *fini* (4.4.11). On peut donc déjà supposer que f soit un morphisme fini, donc $X=\mathrm{Spec}(B)$, où B est une A-algèbre *finie* sur A. Si $Y'=V(\mathfrak{J})$, on a alors $\hat{Y}=\mathrm{Spf}(\hat{A})$, $\hat{X}=\mathrm{Spf}(\hat{B})$, $\hat{A}$ étant le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, $\hat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie $\mathfrak{J}B$-préadique, ou (ce qui revient au même), le séparé complété du A-module B pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique; en outre, $\hat{f}$ est le morphisme de schémas formels affines correspondant au prolongement continu $\hat{\varphi}: \hat{A}\to\hat{B}$ de l'homomorphisme canonique d'anneaux $\varphi: A\to B$, et l'hypothèse est que $\hat{\varphi}$ est surjectif (resp. bijectif) (**I**, 10.14.2). Or, $\hat{\varphi}$ est aussi le prolongement continu de φ considéré comme homomorphisme de A-modules; on sait alors (**I**, 10.8.14) qu'il existe un voisinage ouvert U de Y′ tel que la restriction à U de l'homomorphisme $\widetilde{\varphi}: \widetilde{A}\to\widetilde{B}$ de $\mathcal{O}_Y$-Modules soit surjectif (resp. bijectif), ce qui achève la démonstration.

4.7. Un critère d'amplitude.

Théorème (**4.7.1**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme propre,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible,* y *un point de* Y, $X_y = X \otimes_Y \boldsymbol{k}(y) = f^{-1}(y)$, g *la projection de* X_y *dans* X. *Si* $\mathscr{L}_y = g^*(\mathscr{L}) = \mathscr{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \boldsymbol{k}(y)$ *est ample sur* X_y, *il existe un voisinage ouvert* U *de* y *dans* Y *tel que* $\mathscr{L} | f^{-1}(U)$ *soit ample pour la restriction de* f *à* $f^{-1}(U)$.

I) Posons $Y' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$, $X' = X \times_Y Y'$, et soit $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_y$; nous allons d'abord prouver que $\mathscr{L}'$ est *ample pour* $f' = f_{(Y')}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & X' \arrow[l] \arrow[d, "f'"] & X_y \arrow[l] \arrow[d, "f_y"] \\ Y & Y' \arrow[l] & \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y)) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Comme f' est propre (**II**, 5.4.2, (iii)) et $\mathcal{O}_y$ noethérien, on voit qu'on peut se borner au cas où $Y = Y' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$, donc $X = X'$, supposer que $\mathscr{L}_y$ est ample pour f_y et prouver que $\mathscr{L}$ est ample pour f (**II**, 4.6.6). Nous allons appliquer le critère (2.6.1, *c)*) et montrer en fait que pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un entier N tel que $H^1(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ pour tout $n \geqslant N$, avec $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$. Notons que y est un point fermé de Y correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_y$; X_y est donc un sous-préschéma fermé de X défini par l'Idéal cohérent $\mathscr{J} = f^*(\widetilde{\mathfrak{m}})\mathcal{O}_X = \mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ de $\mathcal{O}_X$ (**I**, 4.4.5), et g l'injection canonique. Considérons alors la $\boldsymbol{k}(y)$-algèbre graduée $S = \mathrm{gr}(\mathcal{O}_y) = \bigoplus_{j \geqslant 0} \mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$, qui est de type fini puisque $\mathcal{O}_y$ est noethérien; la $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathscr{S} = f^*(\widetilde{S})$ est donc quasi-cohérente et de type fini, et elle est évidemment annulée par $\mathscr{J}$, donc si on pose $\mathscr{S}_y = g^*(\mathscr{S})$, $\mathscr{S}_y$ est une $\mathcal{O}_{X_y}$-Algèbre quasi-cohérente de type fini, et $\mathscr{S} = g_*(\mathscr{S}_y)$. Posons d'autre part, $\mathscr{M}_j = \mathfrak{m}^j\mathscr{F}/\mathfrak{m}^{j+1}\mathscr{F}$ et $\mathscr{M} = \bigoplus_{j \geqslant 0} \mathscr{M}_j = \mathrm{gr}(\mathscr{F})$; comme $\mathscr{F}$ est cohérent, $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{S}$-Module quasi-cohérent de type fini (**0**, 10.1.1) qui est aussi annulé par $\mathscr{J}$, de sorte que si l'on pose $\mathscr{M}'_j = g^*(\mathscr{M}_j)$, $\mathscr{M}' = g^*(\mathscr{M}) = \bigoplus_{j \geqslant 0} \mathscr{M}'_j$ est un $\mathscr{S}_y$-Module gradué quasi-cohérent de type fini tel que $\mathscr{M} = g_*(\mathscr{M}')$. En outre, si on pose $\mathscr{M}'_j(n) = \mathscr{M}'_j \otimes \mathscr{L}_y^{\otimes n}$, on a $\mathscr{M}'_j(n) = g^*((\mathscr{M}_j(n)))$. Cela étant, f_y est propre (**II**, 5.4.2, (iii)) et $\mathscr{L}_y$ est ample, donc f_y est *projectif* (**II**, 5.5.4 et 4.6.11), et on peut appliquer à $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$, f_y, $\mathscr{S}_y$, $\mathscr{L}_y$ et $\mathscr{M}'$ le théorème (2.4.1, (ii)) : il existe un entier N tel que pour $n \geqslant N$, on ait $H^q(X_y, \mathscr{M}'_j(n)) = 0$ pour tout $q > 0$ *et tout* j; par suite, on a aussi $H^q(X, \mathscr{M}_j(n)) = 0$ pour tout $q > 0$ et tout j (G, II, 4.9.1). Posons alors $\mathscr{F}(n)_j = \mathscr{F}(n)/\mathfrak{m}^{j+1}\mathscr{F}(n)$, de sorte que $\mathscr{F}(n)_{j-1} = \mathscr{F}(n)_j/\mathscr{M}_j(n)$ pour $j \geqslant 1$ et $\mathscr{F}(n)_0 = \mathscr{M}_0(n)$. On a $H^1(X, \mathscr{F}(n)_0) = 0$, et, par la suite exacte de cohomologie, $H^1(X, \mathscr{F}(n)_j) = H^1(X, \mathscr{F}(n)_{j-1})$ pour tout $j \geqslant 1$, donc $H^1(X, \mathscr{F}(n)_j) = 0$ pour tout $j \geqslant 0$. On conclut donc de (4.2.1) que $H^1(X, \mathscr{F}(n)) = 0$, ce qui achève de prouver notre assertion.

II) Revenons aux notations du début de la démonstration, et remarquons qu'on peut toujours supposer $Y = \mathrm{Spec}(A)$ affine; comme f' est de type fini et $\mathscr{L}'$ ample pour f', il existe un entier $m>0$ tel que $\mathscr{L}'^{\otimes m}$ soit très ample pour f' (**II**, 4.6.11); remplaçant au besoin $\mathscr{L}$ par $\mathscr{L}^{\otimes m}$, on peut se borner à considérer le cas où $\mathscr{L}'$ est *très ample* pour f', et à prouver que $\mathscr{L}|f^{-1}(U)$ est alors très ample pour f. Comme f' est propre, il existe alors une Y'-immersion *fermée* $j : X' \to P = \mathbf{P}^r_{Y'}$ pour un entier $r>0$ convenable, telle que $\mathscr{L}'$ soit isomorphe à $j^*(\mathcal{O}_P(1))$ (**II**, 5.5.4, (ii)); cette immersion correspond canoniquement à un $\mathcal{O}_{X'}$-homomorphisme *surjectif* $u : \mathcal{O}_{X'}^{r+1} \to \mathscr{L}'$ (**II**, 4.2.3). Ce dernier correspond ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.1.1) à la donnée de $r+1$ sections s'_i $(0 \leqslant i \leqslant r)$ de $\mathscr{L}'$ au-dessus de X' qui engendrent ce $\mathcal{O}_{X'}$-Module. Ces sections sont aussi par définition des sections de $f'_*(\mathscr{L}')$ au-dessus de Y'; on a $f'_*(\mathscr{L}') = f_*(\mathscr{L}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.10), Y est affine et $\mathcal{O}_y$ est l'anneau local en l'idéal premier $\mathfrak{j}_y$ de A, donc on a $s'_i = s''_i/t_i$, où les s''_i sont des sections de $f_*(\mathscr{L})$ au-dessus de Y et les t_i des éléments de A n'appartenant pas à $\mathfrak{j}_y$; on en conclut qu'il existe un voisinage ouvert affine V de y dans Y et des sections s_i de $f_*(\mathscr{L})|V$ telles que $s'_i = s_i/1$ (on rappelle que l'espace Y' est contenu dans V, cf. **I**, 2.4.2). Les s_i sont alors des sections de $\mathscr{L}$ au-dessus de $f^{-1}(V)$, définissant donc un homomorphisme $v : (\mathcal{O}_X|f^{-1}(V))^{r+1} \to \mathscr{L}|f^{-1}(V)$ qui, par hypothèse, est surjectif en tous les points de $f^{-1}(y)$; comme Coker (v) est cohérent ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4), son support est fermé ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2) et par suite il existe un voisinage ouvert $W \subset f^{-1}(V)$ de $f^{-1}(y)$ tel que la restriction de v à W soit un homomorphisme *surjectif*. Puisque le morphisme f est fermé, on peut supposer que W est de la forme $f^{-1}(U)$, où U est un voisinage ouvert de y, et la conclusion résulte alors de (**II**, 4.2.3).

4.8. Morphismes finis de préschémas formels.

Proposition (**4.8.1**). — *Soient* $\mathfrak{Y}$ *un préschéma formel localement noethérien,* $\mathscr{K}$ *un Idéal de définition de* $\mathfrak{Y}$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme de préschémas formels. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathfrak{X}$ *est localement noethérien,* f *est un morphisme adique* (**I**, 10.12.1) *et si l'on pose* $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, *le morphisme* $f_0 : (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}) \to (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$ *déduit de* f *est fini.*

b) $\mathfrak{X}$ *est localement noethérien et est limite inductive d'un* (Y_n)*-système inductif adique* (X_n) *tel que le morphisme* $X_0 \to Y_0$ *soit fini.*

c) Tout point de $\mathfrak{Y}$ *possède un voisinage ouvert formel affine noethérien* V *tel que* $f^{-1}(V)$ *soit un ouvert formel affine et que* $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *soit un* $\Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$*-module de type fini.*

Il est immédiat que *a)* entraîne *b)* en vertu de (**I**, 10.12.3). Pour voir que *b)* entraîne *c)*, on peut supposer que $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$, où B est adique noethérien et $\mathscr{K} = \mathfrak{K}^\Delta$, où $\mathfrak{K}$ est un idéal de définition de B. Par hypothèse, X_0 est un schéma affine dont l'anneau A_0 est un $B/\mathfrak{K}$-module de type fini (**II**, 6.1.3). En vertu de (**I**, 5.1.9), chacun des X_n est un schéma affine, et si A_n est son anneau, l'hypothèse *b)* entraîne que pour $m \leqslant n$, A_m est isomorphe à $A_n/\mathfrak{K}^{m+1}A_n$. On en déduit que $\mathfrak{X}$ est isomorphe à $\mathrm{Spf}(A)$, où $A = \varprojlim_n A_n$; on conclut en vertu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.2.9). Enfin, pour prouver que *c)* entraîne *a)*, on peut se borner encore au cas $\mathfrak{Y}=\mathrm{Spf}(B)$, $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(A)$, A étant une B-algèbre finie; comme $A/\mathfrak{K}A$ est alors une $B/\mathfrak{K}$-algèbre finie, il résulte de (**I**, 10.10.9) que les conditions de *a)* sont satisfaites.

Définition **(4.8.2)**. — *Lorsque les propriétés équivalentes* a), b), c) *de* (4.8.1) *sont vérifiées, on dit que le morphisme f est fini, ou que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-préschéma formel fini, ou un préschéma formel fini au-dessus de $\mathfrak{Y}$.*

Proposition **(4.8.3)**. — (i) *Une immersion fermée de préschémas formels localement noethériens est un morphisme fini.*

(ii) *Le composé de deux morphismes finis de préschémas formels localement noethériens est un morphisme fini.*

(iii) *Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{S}$ trois préschémas formels localement noethériens, $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{S}$ un morphisme fini, $g:\mathfrak{Y}\rightarrow\mathfrak{S}$ un morphisme; alors le morphisme $\mathfrak{X}\times_{\mathfrak{S}}\mathfrak{Y}\rightarrow\mathfrak{Y}$ est fini.*

(iv) *Soient $\mathfrak{S}$ un préschéma formel localement noethérien, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ deux préschémas formels localement noethériens tels que $\mathfrak{X}'\times_{\mathfrak{S}}\mathfrak{Y}'$ soit localement noethérien. Si $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ sont des $\mathfrak{S}$-préschémas formels localement noethériens, $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{X}'$, $g:\mathfrak{Y}\rightarrow\mathfrak{Y}'$ deux* S-*morphismes finis, alors $f\times_{\mathfrak{S}}g$ est un morphisme fini.*

(v) *Soient $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{Y}$, $g:\mathfrak{Y}\rightarrow\mathfrak{Z}$ deux morphismes de préschémas formels localement noethériens tels que g soit de type fini et séparé; alors, si $g\circ f$ est un morphisme fini, f est un morphisme fini.*

(i) est trivial, et les autres assertions se ramènent aussitôt aux propositions correspondantes pour les morphismes de préschémas usuels (**II**, 6.1.5) à l'aide du critère *a)* de (4.8.1); nous laissons les détails au lecteur, sur le modèle de (**I**, 10.13.5).

Corollaire **(4.8.4)**. — *Sous les hypothèses de* (**I**, 10.9.9), *si f est un morphisme fini, il en est de même de son prolongement $\hat{f}$ aux complétés.*

Corollaire **(4.8.5)**. — *Si $\mathfrak{X}$ est un préschéma formel fini au-dessus de $\mathfrak{Y}$, $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{Y}$ le morphisme structural, alors, pour tout ouvert $U\subset\mathfrak{Y}$, $f^{-1}(U)$ est fini au-dessus de* U.

Proposition **(4.8.6)**. — *Si $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{Y}$ est un morphisme fini de préschémas formels localement noethériens, $f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est une $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Algèbre cohérente.*

On peut considérer f comme limite inductive d'un système inductif (f_n) de morphismes $f_n: X_n\rightarrow Y_n$; montrons que les f_n sont des morphismes finis et $f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est isomorphe à la limite projective des $(f_n)_*(\mathcal{O}_{X_n})$, ce qui établira notre assertion (**I**, 10.10.5). Il suffit de se borner au cas où $\mathfrak{Y}=\mathrm{Spf}(B)$, $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(A)$, et de remarquer que si $\mathfrak{K}$ est un idéal de définition de B et A un B-module de type fini, $A/\mathfrak{K}^{n+1}A$ est un module de type fini sur $B/\mathfrak{K}^{n+1}B$, et que A est limite projective des $A/\mathfrak{K}^{n+1}A$.

Réciproquement :

Proposition **(4.8.7)**. — *Soient $\mathfrak{Y}$ un préschéma formel localement noethérien, $\mathscr{A}$ une $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Algèbre cohérente. Il existe un préschéma formel $\mathfrak{X}$ fini au-dessus de $\mathfrak{Y}$, défini à un $\mathfrak{Y}$-isomorphisme unique près, et tel que $f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})=\mathscr{A}$, $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{Y}$ étant le morphisme structural.*

Soit $\mathscr{K}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{Y}$, et posons $Y_n=(\mathfrak{Y},\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$ et $\mathscr{A}_n=\mathscr{A}/\mathscr{K}^{n+1}\mathscr{A}$; il est clair que $\mathscr{A}_n$ est une $\mathcal{O}_{Y_n}$-Algèbre finie et définit donc un

Y_n-préschéma fini $X_n = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}_n)$ (**II**, 6.1.3); pour $m \leqslant n$, l'homomorphisme canonique surjectif $h_{mn} : \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}_m$ définit un morphisme $u_{mn} : X_m \to X_n$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_n & X_m \arrow[l, "u_{mn}"'] \arrow[d, "f_m"] \\ Y_n \arrow[from=1-1, "f_n"'] & Y_m \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(f_n étant le morphisme structural) soit commutatif et identifie X_m au produit $X_n \times_{Y_n} Y_m$, comme on le voit aussitôt (**II**, 1.4.6). Le préschéma formel X, limite inductive du système inductif (X_n) est alors localement noethérien et tel que le morphisme structural $f : X \to Y$, limite inductive du système (f_n), soit fini (4.8.1 et **II**, 10.12.3.1); on a vu en outre dans la démonstration de (4.8.6) que $f_*(\mathcal{O}_X)$ est limite projective des $\mathscr{A}_n$, donc égale à $\mathscr{A}$ (**I**, 10.10.6). Quant à l'assertion d'unicité, elle est conséquence du résultat plus général suivant :

Proposition (**4.8.8**). — *Soient $\mathfrak{Y}$ un préschéma formel localement noethérien, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ deux $\mathfrak{Y}$-préschémas formels finis au-dessus de $\mathfrak{Y}$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $f' : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}$ les morphismes structuraux. Il existe une bijection canonique de* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}')$ *sur* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}}(f'_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}), f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}))$ [1].

La définition de cette application $h \to \mathscr{A}(h)$ est la même que dans (**II**, 1.1.2), et pour voir qu'elle est bijective, on est aussitôt ramené au cas où $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ est un schéma formel affine noethérien. Mais alors $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X}' = \mathrm{Spf}(A')$, où A et A' sont deux B-algèbres finies et $f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = A^{\Delta}$, $f'_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}) = A'^{\Delta}$. La conclusion résulte alors de la correspondance biunivoque, d'une part entre les $\mathfrak{Y}$-morphismes $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ et les B-homomorphismes (nécessairement continus) $A' \to A$ qui sont des homomorphismes d'algèbres (**I**, 10.2.2), et d'autre part entre les homomorphismes de B-modules $A' \to A$ et les homomorphismes de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules $A'^{\Delta} \to A^{\Delta}$ (**I**, 10.10.2.3).

Corollaire (**4.8.9**). — *Dans la correspondance biunivoque canonique définie dans* (4.8.8), *les immersions fermées $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ correspondent aux homomorphismes surjectifs de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Algèbres $f'_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}) \to f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$.*

La question étant encore locale sur $\mathfrak{Y}$, on est ramené à la définition des immersions fermées de préschémas formels localement noethériens (**I**, 10.14.2).

Corollaire (**4.8.10**). — *Les notations et hypothèses étant celles de* (4.8.1), *pour qu'un morphisme adique f soit une immersion fermée, il faut et il suffit que f_0 soit une immersion fermée (de préschémas usuels).*

Cela résulte aussitôt de (4.8.9) et de la condition de surjectivité pour un homomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules cohérents (**I**, 10.11.5).

Proposition (**4.8.11**). — *Pour qu'un morphisme $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de préschémas formels localement*

---

[1] La dernière expression désigne l'ensemble des homomorphismes de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-*Algèbres* $f'_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}) \to f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$.

noethériens soit fini, il faut et il suffit qu'il soit propre et ait ses fibres $f^{-1}(y)$ finies (pour tout $y \in \mathfrak{Y}$).

Grâce aux définitions (3.4.1 et 4.8.2), on est aussitôt ramené à la même proposition pour f_0 (notations de (4.8.1)), ce qui n'est autre que (4.4.2).

§ 5. UN THÉORÈME D'EXISTENCE DE FAISCEAUX ALGÉBRIQUES COHÉRENTS

5.1. Énoncé du théorème.

(5.1.1) Soient A un anneau *adique noethérien*, $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A, de sorte que A est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique. Si $Y = \mathrm{Spec}(A)$, le schéma formel affine Spf(A) s'identifie au *complété* $\hat{Y}$ de Y le long de la partie fermée $Y' = V(\mathfrak{J})$ (**I**, 10.10.1). Soient X un Y-préschéma (usuel) de type fini, $f : X \rightarrow Y$ le morphisme structural; nous désignerons par $\hat{X}$ le *complété* de X le long de la partie fermée $X' = f^{-1}(Y')$, ou encore le $\hat{Y}$-préschéma formel $X \times_Y \hat{Y}$; par $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ le prolongement de f aux complétés; enfin, pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$, nous noterons $\hat{\mathcal{F}}$ son complété, $\mathcal{F}_{/X'}$, qui est un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent.

Proposition **(5.1.2)**. — *Les hypothèses et notations étant celles de* (5.1.1), *soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent dont le support est propre sur* Y (**II**, 5.4.10). *Les homomorphismes canoniques* (4.1.4)

$$\rho_i : \mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{H}^i(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}})$$

sont alors des isomorphismes.

Comme $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ est un A-module de type fini (3.2.4), donc identique à son séparé complété pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.6), la proposition n'est qu'un cas particulier de (4.1.10).

Rappelons que les isomorphismes canoniques ρ_i commutent aux cobords pour toute suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents ((**0**, 12.1.6) et (**I**, 10.8.9)).

Corollaire **(5.1.3)**. — *Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents tels que l'intersection de leurs supports soit propre sur* Y. *Alors l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}) \tag{5.1.3.1}$$

qui, à tout homomorphisme $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, fait correspondre son complété $\hat{u} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, est un isomorphisme. De plus, lorsque le morphisme f est fermé, pour que $\hat{u}$ soit injectif (resp. *surjectif*), *il faut et il suffit que u le soit.*

La première assertion est un cas particulier de (4.5.3), dû encore au fait que le premier membre de (5.1.3.1) est un A-module de type fini, donc identique à son séparé complété. Pour démontrer la seconde, notons en vertu de (**I**, 10.8.14) que $\hat{u}$ est injectif (resp. surjectif) si et seulement s'il existe un voisinage de X' dans lequel u soit injectif (resp. surjectif).

La conclusion résulte donc du lemme suivant :

Lemme **(5.1.3.1)**. — *Sous les hypothèses de* (5.1.1), *si on suppose en outre le morphisme f fermé, tout voisinage de* X' *dans* X *est identique à* X.

Tout d'abord, on peut se ramener au cas où $f(X)=Y$. En effet, par hypothèse, $f(X)$ est une partie fermée Z de Y; on peut en outre remplacer f par f_{red} (**I**, 6.3.4), et supposer par suite X et Y réduits; on peut alors remplacer Y par le sous-préschéma fermé réduit de Y ayant Z pour espace sous-jacent (**I**, 5.2.2), car tout idéal de A est fermé, et tout anneau quotient de A est donc adique et noethérien. On a alors $f(X')=Y'$; si V est un voisinage ouvert de X' dans X, $f(X-V)$ est fermé dans Y par hypothèse, et ne rencontre pas Y'; mais cela est impossible à moins que $X-V$ ne soit vide, puisque $\mathfrak{J}$ est contenu dans le radical de A (**I**, 1.1.15 et $\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.1.10), d'où la conclusion.

Lorsqu'on se borne aux $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents dont le support est propre sur Y, (5.1.3) peut s'énoncer, dans le langage des catégories, en disant que le foncteur $\mathcal{F} \rightsquigarrow \widehat{\mathcal{F}}$ est *pleinement fidèle* de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules du type précédent, dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents, et établit par suite une *équivalence* de la première de ces catégories avec une sous-catégorie *pleine* de la seconde (**0**, 8.1.6). Le théorème d'existence va prouver que lorsque X est propre sur Y, cette sous-catégorie est en fait la catégorie de *tous* les $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents. De façon précise :

Théorème **(5.1.4)**. — *Soient* A *un anneau adique noethérien,* $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, $Y'=V(\mathfrak{J})$, $f: X\to Y$ *un morphisme séparé de type fini,* $X'=f^{-1}(Y')$. *Soient* $\widehat{Y}=Y_{/Y'}=\mathrm{Spf}(A)$, $\widehat{X}=X_{/X'}$ *les complétés de* Y *et* X *le long de* Y' *et* X', $\widehat{f}:\widehat{X}\to\widehat{Y}$ *le prolongement de f aux complétés; alors, le foncteur* $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F}_{/X'}=\widehat{\mathcal{F}}$ *est une équivalence de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents de support propre sur* $\mathrm{Spec}(A)$, *avec la catégorie des $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents de support propre sur* $\mathrm{Spf}(A)$.

En d'autres termes, compte tenu de (5.1.3) :

Corollaire **(5.1.5)**. — *Pour qu'un $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module soit isomorphe au complété d'un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent et de support propre sur* $\mathrm{Spec}(A)$, *il faut et il suffit qu'il soit cohérent et de support propre sur* $\mathrm{Spf}(A)$.

Le cas le plus important est le

Corollaire **(5.1.6)**. — *Supposons* X *propre sur* $Y=\mathrm{Spec}(A)$. *Alors le foncteur* $\mathcal{F} \rightsquigarrow \widehat{\mathcal{F}}$ *est une équivalence de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents et de la catégorie des $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents.*

Scholie **(5.1.7)**. — Si on tient compte de la caractérisation des faisceaux cohérents sur les préschémas formels (**I**, 10.11.3), on voit que sous les conditions de (5.1.1), la donnée d'un $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module cohérent de support propre sur Spec(A) *équivaut* (en posant $Y_n=\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^{n+1})$ et $X_n=X\times_Y Y_n$) à la donnée d'un système projectif de $\mathcal{O}_{X_n}$-Modules cohérents $(\mathcal{F}_n)$ tel que pour $m\leqslant n$ on ait $\mathcal{F}_m=\mathcal{F}_n\otimes_{Y_n}\mathcal{O}_{Y_m}$ (ou encore $\mathcal{F}_m=\mathcal{F}_n/\mathfrak{J}^{m+1}\mathcal{F}_n$) et que le support de $\mathcal{F}_0$ soit une partie de X_0 propre sur Y_0. Au moyen de (**I**, 10.11.4), on interprète de même les homomorphismes de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents comme des homomorphismes de systèmes projectifs de $\mathcal{O}_{X_n}$-Modules cohérents.

Dans tous les cas d'application connus, A est en fait un anneau adique *local* noethérien, donc les Y_n sont des spectres d'anneaux *artiniens locaux*, et les résultats de ce paragraphe et des précédents réduisent dans une large mesure la géométrie algébrique sur un anneau adique local noethérien, à la géométrie algébrique sur des anneaux locaux artiniens.

Corollaire **(5.1.8)**. — *Sous les conditions de* (5.1.4), *l'application* $Z \rightsquigarrow \hat{Z} = Z_{/(Z \cap X')}$ *est une bijection de l'ensemble des sous-préschémas fermés* Z *de* X, *propres sur* Y, *sur l'ensemble des sous-préschémas formels fermés de* $\hat{X}$, *propres sur* $\hat{Y}$.

En effet, un sous-préschéma formel fermé de $\hat{X}$ est de la forme $(T, (\mathcal{O}_{\hat{X}}/\mathcal{A})|T)$, où $\mathcal{A}$ est un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$ (**I**, 10.14.2); si T est propre sur $\hat{Y}$, il résulte de (5.1.4) que $\mathcal{O}_{\hat{X}}/\mathcal{A}$ est isomorphe à un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module de la forme $\hat{\mathcal{F}}$, où $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent de support propre sur Y; en outre, il résulte de (5.1.3) que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{\hat{X}} \to \mathcal{O}_{\hat{X}}/\mathcal{A}$ est de la forme $\hat{u}$, où $u : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ est un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_X$-Modules. Donc $\mathcal{F}$ est de la forme $\mathcal{O}_X/\mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$, et $\mathcal{A} = \hat{\mathcal{N}}$ (**I**, 10.8.8), d'où la conclusion (**I**, 10.14.7).

5.2. Démonstration du théorème d'existence : cas projectif et quasi-projectif.

(5.2.1) Sous les conditions de (5.1.4), nous dirons provisoirement qu'un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent est *algébrisable* s'il est isomorphe à un complété $\hat{\mathcal{F}}$ d'un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$ de support propre sur Y.

Lemme **(5.2.2)**. — *Soient* $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$ *deux* $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-*Modules algébrisables. Pour tout homomorphisme* $u : \mathcal{F}' \to \mathcal{G}'$, Ker (u), Im (u) *et* Coker (u) *sont algébrisables.*

En effet, si $\mathcal{F}' = \hat{\mathcal{F}}$, $\mathcal{G}' = \hat{\mathcal{G}}$, où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents de supports propres sur Y, on a $u = \hat{v}$, où $v : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un homomorphisme (5.1.3). En vertu de l'exactitude du foncteur $\mathcal{F} \rightsquigarrow \hat{\mathcal{F}}$, Ker $(\hat{v})$ est isomorphe à (Ker $(v))^\wedge$ et comme le support de Ker (v) est contenu dans celui de $\mathcal{F}$, on voit que Ker (u) est algébrisable; démonstration analogue pour Im (u) et Coker (u).

Proposition **(5.2.3)**. — *Soient* A *un anneau adique noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme propre de préschémas formels. On pose* $Y_k = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^{k+1})$, $X_k = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} Y_k$, *et pour tout* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-*Module* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_k = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n} = \mathcal{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F}$. *Soit* $\mathcal{L}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-*Module inversible, et supposons que* $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}/\mathfrak{J}\mathcal{L}$ *soit un* $\mathcal{O}_{X_0}$-*Module ample; pour tout* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-*Module* $\mathcal{F}$ *et tout entier n, posons* $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$. *Alors, pour tout* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-*Module cohérent* $\mathcal{F}$, *il existe un entier* n_0 *tel que, pour tout* $n \geqslant n_0$, *les propriétés suivantes aient lieu :*

(i) *L'homomorphisme canonique* $H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}(n)) \to H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_k(n))$ *est surjectif pour tout* $k \geqslant 0$.

(ii) *On a* $H^q(\mathfrak{X}, \mathcal{F}(n)) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

On sait que les espaces sous-jacents à $\mathfrak{X}$ et à X_0 sont les mêmes; les faisceaux $\mathcal{M}_k = \mathfrak{J}^k\mathcal{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F}$ étant annulés par $\mathfrak{J}$, peuvent être considérés comme des $\mathcal{O}_{X_0}$-Modules cohérents ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.10); en outre, si on pose $\mathcal{M}_k(n) = \mathcal{M}_k \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}} \mathcal{L}_0^{\otimes n}$, on voit aussitôt que $\mathcal{M}_k(n) = \mathfrak{J}^k\mathcal{F}(n)/\mathfrak{J}^{k+1}\mathcal{F}(n)$. Notons que, puisque $\mathcal{L}_0$ est ample pour $f_0 : X_0 \to Y_0$, et que f_0 est propre, on en conclut que f_0 est *projectif* (**II**, 5.5.4). Soit S la A-algèbre graduée $\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1}$ associée à la filtration $\mathfrak{J}$-adique de A, qui est de type fini puisque A est noethérien; si on pose $\mathscr{S}'=f_0^*(\widetilde{S})$, $\mathscr{S}'$ est une $\mathcal{O}_{X_0}$-Algèbre quasi-cohérente de type fini, et $\mathscr{M}=\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathscr{M}_k$ un $\mathscr{S}'$-Module gradué quasi-cohérent et de type fini (puisque $\mathscr{F}_0$ est cohérent et engendre le $\mathscr{S}'$-Module $\mathscr{M}$). On est donc dans les conditions d'application du théorème (2.4.1, (ii)), et on en conclut qu'il existe n_0 tel que, pour $n\geqslant n_0$ et pour *tout* k, on ait

(**5.2.3.1**) $$\mathrm{H}^q(\mathrm{X}_0, \mathscr{M}_k(n))=0 \qquad \textit{pour tout } q>0.$$

On a donc aussi $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{M}_k(n))=0$ pour $q>0$ et $n\geqslant n_0$, $\mathscr{M}_k(n)$ étant cette fois considéré comme $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Module. Appliquant la suite exacte de cohomologie à

$$0\rightarrow \mathfrak{J}^k\mathscr{F}(n)/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}(n)\rightarrow \mathfrak{J}^h\mathscr{F}(n)/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}(n)\rightarrow \mathfrak{J}^h\mathscr{F}(n)/\mathfrak{J}^k\mathscr{F}(n)\rightarrow 0$$

on en déduit tout d'abord que pour $0\leqslant h<k$, $n\geqslant n_0$ et $q>0$, on a par récurrence sur $h-k$

(**5.2.3.2**) $$\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}^h\mathscr{F}(n)/\mathfrak{J}^k\mathscr{F}(n))=0$$

et en particulier pour $h=0$

(**5.2.3.3**) $$\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))=0 \qquad \text{pour } n\geqslant n_0,\ k\geqslant 0 \text{ et } q>0.$$

Une autre portion de la suite exacte de cohomologie, pour $h=0$, donne la suite exacte

(**5.2.3.4**) $$\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_{k+1}(n))\rightarrow \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))\rightarrow \mathrm{H}^1(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}^k\mathscr{F}(n)/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}(n))=0$$

d'où on déduit que pour $h\leqslant k$, l'application canonique

(**5.2.3.5**) $$\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))\rightarrow \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_h(n))$$

est *surjective*. Pour *tout* q, le système projectif $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))$ $(k\geqslant 0)$ vérifie donc la condition (ML) pour $n\geqslant n_0$. Par ailleurs, tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$ est aussi un ouvert affine dans chacun des X_k (**I**, 10.5.2), donc on a $\mathrm{H}^q(\mathrm{U}, \mathscr{F}_k(n))=0$ pour tout $q>0$ (1.3.1), et $\mathrm{H}^0(\mathrm{U}, \mathscr{F}_k(n))\rightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{U}, \mathscr{F}_h(n))$ est surjective pour $h\leqslant k$ (**I**, 1.3.9). Les conditions d'application de (**0**, 13.3.1) sont par suite remplies, et on en conclut que, pour $n\geqslant n_0$:

1° Pour tout $q>0$, $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n))\rightarrow\varprojlim_k \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))$ est bijectif, donc, en vertu de (5.2.3.3), $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n))=0$.

2° L'homomorphisme $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n))\rightarrow\varprojlim_k \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))$ est bijectif; par ailleurs, comme les homomorphismes (5.2.3.5) sont surjectifs, il en est de même de chacun des homomorphismes

$$\varprojlim_k \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))\rightarrow \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_h(n))$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**5.2.4**). — *Les hypothèses étant celles de* (5.2.3), *pour tout* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$, *il existe un entier* N *tel que pour* $n\geqslant \mathrm{N}$, $\mathscr{F}(n)$ *soit engendré par ses sections au-dessus* *de* $\mathfrak{X}$; *en d'autres termes,* $\mathscr{F}$ *est isomorphe au quotient d'un* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$*-Module de la forme* $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-n))^k$.

Comme X_0 est noethérien, il résulte de l'hypothèse sur $\mathscr{L}_0$ et de (**II**, 4.5.5) qu'il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\mathscr{F}_0(n)$ soit engendré par ses sections au-dessus de $\mathfrak{X}$; par ailleurs, on peut supposer n_0 pris assez grand pour que l'homomorphisme $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n)) \rightarrow \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_0(n))$ soit surjectif pour $n \geqslant n_0$ (5.2.3). Il existe donc un nombre fini de sections $s_i \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n))$ dont les images dans $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_0(n))$ engendrent $\mathscr{F}_0(n)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.3). Comme $\mathfrak{J}$ est contenu dans l'idéal maximal de l'anneau local en tout point de $\mathfrak{X}$, il résulte du lemme de Nakayama, appliqué à ces anneaux locaux, que les s_i engendrent $\mathscr{F}(n)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.1.1).

(5.2.5) Démonstration du théorème d'existence : cas projectif.

Les notations étant celles de (5.1.4), supposons f *projectif,* de sorte qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-Module ample $\mathscr{L}$ (**I**, 5.5.4). Par définition, $X_n = \hat{X} \times_{\hat{Y}} Y_n$ est égal au sous-préschéma fermé $X_n \times_Y Y_n = f^{-1}(Y_n)$ de X; si $\mathscr{L}'$ est le complété $\mathscr{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\hat{X}}$ de $\mathscr{L}$, on a donc $\mathscr{L}'_0 = \mathscr{L}/\mathfrak{J}\mathscr{L}$, considéré comme $\mathcal{O}_{X_0}$-Module; on sait que $\mathscr{L}'_0$ est *ample* (**II**, 4.6.13, (i *bis*)). On peut donc appliquer à $\mathscr{L}'$ et à tout $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent $\mathscr{F}$ le cor. (5.2.4); on voit donc que $\mathscr{F}$ est isomorphe à un quotient de $\mathscr{G} = (\mathscr{L}'^{\otimes(-n)})^k$ pour des entiers $n > 0$ et $k > 0$ convenables. Or, il est clair que $\mathscr{G}$ est le complété de $(\mathscr{L}^{\otimes(-n)})^k$ (**I**, 10.8.10), donc est algébrisable. Considérons ensuite l'homomorphisme canonique surjectif $u : \mathscr{G} \rightarrow \mathscr{F}$, et soit $\mathscr{H} = \operatorname{Ker}(u)$, qui est un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4). On voit de même qu'il existe un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module algébrisable $\mathscr{K}$ et un homomorphisme $v : \mathscr{K} \rightarrow \mathscr{G}$ tel que $\mathscr{H} = \operatorname{Im}(v)$. On a alors $\mathscr{F} = \operatorname{Coker}(v)$, et $\mathscr{F}$ est algébrisable en vertu de (5.2.2).

(5.2.6) Démonstration du théorème d'existence; cas quasi-projectif.

Les notations étant toujours celles de (5.1.4), supposons maintenant que f soit *quasi-projectif.* Il existe alors un morphisme projectif $g : Z \rightarrow Y$ tel que X s'identifie au Y-préschéma induit sur un ouvert de Z (**II**, 5.3.2); si on pose $Z' = g^{-1}(Y')$, on a $X' = X \cap Z'$. Par suite, le complété $\hat{X} = X_{/X'}$ s'identifie au préschéma formel induit par le complété $\hat{Z} = Z_{/Z'}$ sur l'ouvert $X \cap Z'$ de $\hat{Z}$ (**I**, 10.8.5). Soit $\mathscr{F}'$ un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent, dont le support T' est *propre sur* $\hat{Y}$; cela signifie par définition qu'il existe un sous-préschéma fermé de X', ayant $T' \subset X'$ comme espace sous-jacent, tel que la restriction $T' \rightarrow Y'$ de f soit propre; on en conclut que T' est propre *sur* Y, donc *fermé dans* Z' (**II**, 5.4.10). Il en résulte que $\mathscr{F}'$ est le faisceau induit sur $\hat{X}$ par le $\mathcal{O}_Z$-Module $\mathscr{G}'$ obtenu par recollement de $\mathscr{F}'$ (défini sur l'ouvert $\hat{X}$ de $\hat{Z}$) et du faisceau o sur l'ouvert $\hat{Z} - T'$ de $\hat{Z}$, ces deux faisceaux coïncidant dans l'ouvert intersection $\hat{X} - T'$. Il est clair que $\mathscr{G}'$ est cohérent; en vertu de (5.2.5), il existe un $\mathcal{O}_Z$-Module cohérent $\mathscr{G}$ tel que $\mathscr{G}' = \hat{\mathscr{G}}$; soit T le support de $\mathscr{G}$, de sorte que $T' = T \cap Z'$ (**I**, 10.8.12). Si h est la restriction de g au sous-préschéma fermé réduit de Z ayant T comme espace sous-jacent, on a donc $T' = h^{-1}(Y') = T \cap g^{-1}(Y')$, et par suite $X \cap T$ est un ouvert de T contenant T'.

Comme h est propre (**II**, 5.4.2), donc fermé, il résulte de (5.1.3.1) que $X \cap T = T$, autrement dit $T \subset X$, et comme T est fermé dans Z, T est propre sur Y. Si $\mathscr{F}$ est le faisceau induit sur X par $\mathscr{G}$, son complété $\hat{\mathscr{F}}$ est induit sur $\hat{X}$ par $\hat{\mathscr{G}}$ (**I**, 10.8.4), donc est égal à $\mathscr{F}'$, ce qui achève la démonstration.

5.3. Démonstration du théorème d'existence : cas général.

Lemme **(5.3.1)**. — *Sous les conditions de* (5.1.4), *si* $0 \to \mathscr{H} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to 0$ *est une suite exacte de* $\mathcal{O}_{\hat{X}}$*-Modules cohérents telle que* $\mathscr{G}$ *et* $\mathscr{H}$ *soient algébrisables, alors* $\mathscr{F}$ *est algébrisable.*

En effet, supposons que $\mathscr{G} = \hat{\mathscr{B}}$, $\mathscr{H} = \hat{\mathscr{C}}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ étant des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents à supports propres sur Y; $\mathscr{F}$ définit canoniquement un élément du A-module $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{X}; \hat{\mathscr{B}}, \hat{\mathscr{C}})$ (**0**, 12.3.2), et les hypothèses entraînent que ce A-module est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(X; \mathscr{B}, \mathscr{C})$ (4.5.2); il existe donc une suite exacte $0 \to \mathscr{C} \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to 0$ de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents telle que l'image canonique de l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(X; \mathscr{B}, \mathscr{C})$ correspondant à $\mathscr{A}$ soit l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{X}; \hat{\mathscr{B}}, \hat{\mathscr{C}})$ correspondant à $\mathscr{F}$. Mais par définition (compte tenu de (**I**, 10.8.8, (ii))), cela signifie que $\mathscr{F}$ est isomorphe à $\hat{\mathscr{A}}$, d'où le lemme, car $\mathrm{Supp}(\mathscr{A})$ est contenu dans la réunion de $\mathrm{Supp}(\mathscr{B})$ et $\mathrm{Supp}(\mathscr{C})$, donc est propre sur Y.

Corollaire **(5.3.2)**. — *Sous les conditions de* (5.1.1), *soit* $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *un homomorphisme de* $\mathcal{O}_{\hat{X}}$*-Modules cohérents; si* $\mathscr{G}$, Ker (u) *et* Coker (u) *sont algébrisables, il en est de même de* $\mathscr{F}$.

Le lemme (5.2.2) appliqué à l'homomorphisme $\mathscr{G} \to \mathrm{Coker}\,(u)$ montre en effet que Im (u) est algébrisable, et il suffit ensuite d'appliquer le lemme (5.3.1) à la suite exacte $0 \to \mathrm{Ker}\,(u) \to \mathscr{F} \to \mathrm{Im}\,(u) \to 0$.

Lemme **(5.3.3)**. — *Sous les conditions de* (5.1.1), *soient* $h : Z \to Y$ *un morphisme de type fini,* $\hat{Z}$ *le complété de* Z *le long de* $Z' = h^{-1}(Y')$, $g : Z \to X$ *un* Y*-morphisme propre,* $\hat{g} : \hat{Z} \to \hat{X}$ *son prolongement aux complétés. Pour tout* $\mathcal{O}_{\hat{Z}}$*-Module algébrisable* $\mathscr{F}'$, $\hat{g}_*(\mathscr{F}')$ *est un* $\mathcal{O}_{\hat{X}}$*-Module algébrisable.*

En effet, si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_Z$-Module cohérent tel que $\mathscr{F}' = \hat{\mathscr{F}}$, il résulte du premier th. de comparaison (4.1.5) que $\hat{g}_*(\hat{\mathscr{F}})$ est isomorphe au complété de $g_*(\mathscr{F})$.

Lemme **(5.3.4)**. — *Soient* X *un schéma (usuel) noethérien,* X′ *une partie fermée de* X, $f : Z \to X$ *un morphisme propre,* $Z' = f^{-1}(X')$, $\hat{X} = X_{/X'}$, $\hat{Z} = Z_{/Z'}$, $\hat{f} : \hat{Z} \to \hat{X}$ *le prolongement de f aux complétés. Soit* $\mathscr{M}$ *un Idéal cohérent de* $\mathcal{O}_X$ *tel que, si* $U = X - \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathscr{M})$, *la restriction* $f^{-1}(U) \to U$ *de f soit un isomorphisme. Alors, pour tout* $\mathcal{O}_{\hat{X}}$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que le noyau et le conoyau de l'homomorphisme canonique* $\rho_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \hat{f}_*(\hat{f}^*(\mathscr{F}))$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.4.3) *soient annulés par* $\hat{\mathscr{M}}^n$.

On peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ où B est un anneau noethérien, donc $X' = V(\mathfrak{K})$, où $\mathfrak{K}$ est un idéal de B. Nous allons voir qu'on peut se ramener au cas où B est un anneau *adique* noethérien et $\mathfrak{K}$ un idéal de définition de B. Soit en effet B_1 le séparé complété de B pour la topologie $\mathfrak{K}$-préadique; si $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}B_1$, B_1 est donc un anneau adique noethérien dont $\mathfrak{K}_1$ est un idéal de définition. Posons $X_1 = \mathrm{Spec}(B_1)$ et soit $h : X_1 \to X$ le morphisme correspondant à l'homomorphisme canonique $B \to B_1$; si $X'_1 = h^{-1}(X')$, on a donc $X'_1 = V(\mathfrak{K}_1)$. Posons enfin $Z_1 = Z \times_X X_1 = Z_{(X_1)}$, $f_1 = f_{(X_1)} : Z_1 \to X_1$, qui est un morphisme propre (**II**, 5.4.2), et désignons par $\hat{X}_1$ le complété de X_1 le long de X'_1, par $\hat{Z}_1 = Z_1 \times_{X_1} \hat{X}_1$ le complété de Z_1 le long de $Z'_1 = f_1^{-1}(X'_1)$, par $\hat{f}_1$ le prolongement de f_1 aux complétés. Il est immédiat que le prolongement $\hat{h} : \hat{X}_1 \to \hat{X}$ de h aux complétés est un isomorphisme, correspondant à l'application identique de B_1 (**I**, 10.9.1); on en conclut que l'homomorphisme correspondant $\hat{Z}_1 \to \hat{Z}$ est aussi un isomorphisme, ces isomorphismes identifiant $\hat{f}_1$ et $\hat{f}$. Enfin, $\mathscr{M}_1 = h^*(\mathscr{M})$ est un Idéal cohérent de $\mathscr{O}_{X_1}$ et $\mathrm{Supp}(\mathscr{O}_{X_1}/\mathscr{M}_1) = h^{-1}(\mathrm{Supp}(\mathscr{O}_X/\mathscr{M}))$ (**I**, 9.1.13), donc, si $U_1 = X_1 - \mathrm{Supp}(\mathscr{O}_{X_1}/\mathscr{M}_1)$, on a $U_1 = h^{-1}(U)$, d'où résulte aussitôt que la restriction $f_1^{-1}(U_1) \to U_1$ de f_1 est un isomorphisme (**I**, 3.2.7); en outre, les complétés $\hat{\mathscr{M}}$ et $\hat{\mathscr{M}}_1$ s'identifient par $\hat{h}$ (**I**, 10.9.5). Toutes les hypothèses de (5.3.4) sont donc remplies par X_1, X'_1, f_1 et $\mathscr{M}_1$, et on peut donc désormais supposer B adique noethérien et $\mathfrak{K}$ un idéal de définition de B. On a alors $\hat{X} = \mathrm{Spf}(B)$, et $\mathscr{F} = N^{\Delta}$, où N est un B-module de type fini, d'où $\mathscr{F} = \hat{\mathscr{G}}$, où $\mathscr{G}$ est le $\mathscr{O}_X$-Module cohérent $\widetilde{N}$ (**I**, 10.10.5), et par suite $\hat{f}^*(\mathscr{F}) = (f^*(\mathscr{G}))\hat{}$ (**I**, 10.9.5). En outre, en vertu du premier théorème de comparaison (4.1.5), $\hat{f}_*((f^*(\mathscr{G}))\hat{})$ s'identifie canoniquement à $(f_*(f^*(\mathscr{G})))\hat{}$, et l'homomorphisme canonique $\rho_{\mathscr{F}}$ n'est autre que $\hat{\rho}_{\mathscr{G}}$ en vertu de (5.1.3). Or, le noyau $\mathscr{P}$ et le conoyau $\mathscr{R}$ de $\rho_{\mathscr{G}} : \mathscr{G} \to f_*(f^*(\mathscr{G}))$ sont des $\mathscr{O}_X$-Modules cohérents, et par hypothèse leurs restrictions à U sont évidemment nuls. Il existe par suite un entier $n > 0$ tel que $\mathscr{M}^n \mathscr{P} = \mathscr{M}^n \mathscr{R} = 0$ (**I**, 9.3.4); on en conclut que $\hat{\mathscr{M}}^n \hat{\mathscr{P}} = \hat{\mathscr{M}}^n \hat{\mathscr{R}} = 0$ (**I**, 10.8.8 et 10.8.10).

5.3.5. Fin de la démonstration du théorème d'existence.

Les hypothèses étant celles de (5.1.4), nous allons utiliser le principe de récurrence noethérienne ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 2.2.2) en supposant donc le théorème vrai pour tout sous-préschéma fermé T de X dont l'espace sous-jacent est distinct de X (le complété $\hat{T}$ étant bien entendu le complété de T le long de $T \cap X'$). On peut supposer X non vide. Comme f est séparé et de type fini, on peut appliquer le lemme de Chow (**II**, 5.6.1) : il existe donc un Y-schéma Z et un Y-morphisme $g : Z \to X$ tels que le morphisme structural $h : Z \to Y$ soit quasi-projectif, le morphisme g projectif et surjectif, et en outre un ouvert non vide U de X tel que la restriction $g^{-1}(U) \to U$ soit un isomorphisme. Soit $\mathscr{M}$ un Idéal cohérent de $\mathscr{O}_X$ définissant un sous-préschéma fermé d'espace sous-jacent $X - U$ (**I**, 5.2.2), et soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent dont le support E est propre sur Y; désignons par $\hat{Z}$ le complété de Z le long de $h^{-1}(Y')$, par $\hat{g} : \hat{Z} \to \hat{X}$ le prolongement de g aux complétés. Alors $\hat{g}^*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\hat{Z}}$-Module cohérent dont le support est contenu dans $g^{-1}(E)$ et est par suite propre sur Y, puisque g est projectif, donc propre (**II**, 5.4.6). Comme h est quasi-projectif, $\hat{g}^*(\mathscr{F})$ est algébrisable en vertu de (5.2.6). On en conclut que $\hat{g}_*(\hat{g}^*(\mathscr{F}))$ est un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module algébrisable (5.3.3) puisque g est propre. On peut maintenant appliquer à $\mathscr{F}$ et à g le résultat de (5.2.4) : le noyau $\mathscr{P}$ et le conoyau $\mathscr{R}$ de l'homomorphisme $\rho_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \hat{g}_*(\hat{g}^*(\mathscr{F}))$ sont annulés par une puissance $\hat{\mathscr{M}}^n$; soient T le sous-préschéma fermé de X défini par $\mathscr{M}^n$, ayant $X - U$ pour espace sous-jacent, $j : T \to X$ l'injection canonique, de sorte que le prolongement aux complétés $\hat{j} : \hat{T} \to \hat{X}$ est l'injection canonique (**I**, 10.14.7). On peut donc écrire $\mathscr{P} = \hat{j}_*(\hat{j}^*(\mathscr{P})))$ et $\mathscr{R} = \hat{j}_*(\hat{j}^*(\mathscr{R}))$ et comme U n'est pas vide, il résulte de l'hypothèse de récurrence que $\hat{j}^*(\mathscr{P})$ et $\hat{j}^*(\mathscr{R})$ sont des $\mathcal{O}_{\hat{T}}$-Modules algébrisables; en vertu de (5.3.3), $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont algébrisables, et on peut alors appliquer (5.3.2), qui prouve finalement que $\mathscr{F}$ est algébrisable.

C.Q.F.D.

5.4. Application : comparaison de morphismes de schémas usuels et de morphismes de schémas formels. Schémas formels algébrisables.

Théorème (**5.4.1**). — *Soient* A *un anneau adique noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S' = V(\mathfrak{J})$. *Soient* $u : X \to S$ *un morphisme propre,* $v : Y \to S$ *un morphisme séparé de type fini, et soient* $\hat{S}$, $\hat{X}$, $\hat{Y}$ *les complétés de* S, X, Y *le long de* S', $u^{-1}(S')$, $v^{-1}(S')$ *respectivement. Si, pour tout* S-*morphisme* $f : X \to Y$, $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ *est le prolongement de* f *aux complétés, l'application* $f \leadsto \hat{f}$ *est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\hat{S}}(\hat{X}, \hat{Y}).$$

Montrons d'abord que $f \leadsto \hat{f}$ est injective. Supposons en effet que deux S-morphismes f, g de X dans Y soient tels que $\hat{f} = \hat{g}$. On sait alors (**I**, 10.9.4) qu'il existe un voisinage ouvert V de $X' = u^{-1}(S')$ dans lequel f et g coïncident. Or, comme u est une application fermée, on a $V = X$ (5.1.3.1), d'où $f = g$.

Prouvons maintenant que $f \leadsto \hat{f}$ est surjective, et soit donc h un $\hat{S}$-morphisme $\hat{X} \to \hat{Y}$. Soit $Z = X \times_S Y$, et désignons par $p : Z \to X$ et $q : Z \to Y$ les projections canoniques; Z est de type fini sur S (**I**, 6.3.4), donc noethérien; désignons par $\hat{Z}$ son complété le long de $Z' = p^{-1}(u^{-1}(S'))$; on sait que $\hat{Z}$ s'identifie canoniquement à $\hat{X} \times_{\hat{S}} \hat{Y}$, les projections $\hat{Z} \to \hat{X}$ et $\hat{Z} \to \hat{Y}$ s'identifiant aux prolongements $\hat{p}$ et $\hat{q}$ (**I**, 10.9.7). Comme Y est séparé sur S, $\hat{Y}$ est séparé sur $\hat{S}$ (**I**, 10.15.7), donc le morphisme graphe $\Gamma_h = (1_{\hat{X}}, h) : \hat{X} \to \hat{Z}$ est une immersion fermée (**I**, 10.15.4). Soient $\mathfrak{T}$ le sous-préschéma formel fermé de $\hat{Z}$ associé à cette immersion, et $j : \mathfrak{T} \to \hat{Z}$ l'injection canonique, de sorte que $\Gamma_h = j \circ w$, où $w : \hat{X} \to \mathfrak{T}$ est un isomorphisme (**I**, 10.14.3) dont l'isomorphisme réciproque est $\hat{p} \circ j$; en outre, $\mathfrak{T}$ est évidemment propre sur $\hat{S}$, puisque $\hat{X}$ l'est; on en conclut (5.1.8) qu'il existe un sous-préschéma fermé T de Z tel que $\mathfrak{T} = \hat{T} = T_{/(T \cap Z')}$, et que $j = \hat{i}$, où i est l'injection canonique $T \to Z$ (**I**, 10.14.7). Alors $p \circ i : T \to X$ est un isomorphisme, car il en est ainsi de $(p \circ i)\hat{} = \hat{p} \circ \hat{i}$ par hypothèse, et il suffit d'appliquer

(4.6.8) en notant comme ci-dessus que S est le seul voisinage de S′ dans S. Soit $g: X \to T$ l'isomorphisme réciproque de $p \circ i$, et posons $f = q \circ i \circ g$, qui est un morphisme $X \to Y$ dont par définition le graphe $\Gamma_f = i \circ g$. Comme $\hat{g}$ est l'isomorphisme réciproque de $(p \circ i)^\wedge = w$, on a $(\Gamma_f)^\wedge = \hat{i} \circ \hat{g} = j \circ w = \Gamma_h$. Mais on sait que $(\Gamma_f)^\wedge = \Gamma_{\hat{f}}$ (**I**, 10.9.8), d'où finalement $h = \hat{f}$, ce qui achève la démonstration.

On peut donc dire, dans le langage des catégories, que le foncteur $X \rightsquigarrow \hat{X}$ est *pleinement fidèle* (**0**, 8.1.6) de la catégorie des schémas propres sur Spec(A) dans la catégorie des schémas formels propres sur Spf(A), pour tout anneau adique noethérien A; il établit par suite une équivalence entre la première de ces catégories et une *sous-catégorie* de la seconde; les objets de cette dernière seront appelés *schémas formels algébrisables*. Pour un tel schéma $\mathfrak{X}$, il existe un schéma usuel X, propre sur Spec(A), déterminé à isomorphisme unique près, tel que $\mathfrak{X}$ soit isomorphe à $\hat{X}$.

Scholie (**5.4.2**). — Avec les notations de (5.4.1), posons $S_n = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^{n+1})$, $X_n = X \times_S S_n$, $Y_n = Y \times_S S_n$. Il résulte de (5.4.1) et de (**I**, 10.12.3) que se donner un S-morphisme $f: X \to Y$ *équivaut* à se donner un (S_n)-système inductif adique (**I**, 10.12.2) de S_n-morphismes $f_n: X_n \to Y_n$.

Remarque (**5.4.3**). — Contrairement à ce que pourrait suggérer le th. d'existence (5.1.6), il y a des schémas formels propres sur Spf(A) et qui *ne sont pas algébrisables* (tout comme il y a des espaces analytiques compacts qui ne proviennent pas de variétés algébriques complexes). Nous rencontrerons plus tard de tels schémas dans la « théorie des modules », qui traite précisément (lorsque le corps de base est **C**) des variations infinitésimales de la structure complexe d'une variété algébrique complète, et on sait que de telles variations peuvent donner naissance à des variétés analytiques qui ne sont pas algébriques.

Proposition (**5.4.4**). — *Soient* A *un anneau adique noethérien,* $\mathfrak{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $g: \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$, $h: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{S}$ *deux morphismes propres de schémas formels,* $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un* $\mathfrak{S}$*-morphisme. Si f est fini et si* $\mathfrak{Y}$ *est algébrisable, alors* $\mathfrak{X}$ *est algébrisable.*

On notera que les hypothèses sur g et h entraînent déjà que f est propre (3.4.1), et pour que f soit fini, il suffit que pour tout $y \in \mathfrak{Y}$, la fibre $f^{-1}(y)$ soit *finie* (4.8.11). L'hypothèse entraîne que $\mathscr{B} = f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Algèbre cohérente (4.8.6), donc il résulte du th. d'existence que, si $\mathfrak{Y} = \hat{Y}$ et $h = \hat{w}$, où $w: Y \to \mathrm{Spec}(A)$ est un morphisme propre de schémas usuels, il existe une $\mathscr{O}_Y$-Algèbre cohérente $\mathscr{C}$ telle que $\mathscr{B} = \hat{\mathscr{C}}$. Soient $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{C})$, et $u: X \to Y$ le morphisme structural; alors, il résulte aussitôt de la définition de $\mathfrak{X}$ à partir de $\mathscr{B}$ (4.8.7) que $\mathfrak{X}$ est canoniquement isomorphe à $\hat{X}$ et que f s'identifie à $\hat{u}$ (il suffit pour le voir de considérer le cas où Y est affine).

On notera que (5.1.8) est un cas particulier de (5.4.4).

Théorème (**5.4.5**). — *Soient* A *un anneau adique noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{S} = \hat{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ *un morphisme propre de schémas formels. On pose* $S_k = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^{k+1})$, $X_k = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} S_k$, *et pour tout* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-Module* $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_k = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{X_k} = \mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}$.

Soit $\mathscr{L}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-Module inversible, et supposons que* $\mathscr{L}_0=\mathscr{L}/\mathfrak{J}\mathscr{L}$ *soit un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}$*-Module ample. Alors* $\mathfrak{X}$ *est algébrisable, et si* X *est un* S*-schéma propre tel que* $\mathfrak{X}$ *soit isomorphe à* $\hat{\mathrm{X}}$*, il existe un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-Module ample* $\mathscr{M}$ *tel que* $\mathscr{L}$ *soit isomorphe à* $\hat{\mathscr{M}}$ (ce qui entraîne que X est *projectif* sur S).

Appliquons (5.2.3) à $\mathscr{F}=\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$: il existe donc un entier n_0 tel que pour $n\geqslant n_0$, l'homomorphisme canonique $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{L}^{\otimes n})\rightarrow\Gamma(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}_0^{\otimes n})$ soit *surjectif*. On peut supposer $n\geqslant n_0$ choisi assez grand pour que $\mathscr{L}_0^{\otimes n}$ soit *très ample* pour S_0 (**II**, 4.5.10). Comme le morphisme $f_0:\mathrm{X}_0\rightarrow\mathrm{S}_0$ est propre, $\Gamma(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}_0^{\otimes n})$ est un A-module de type fini (3.2.1), donc il existe un sous-A-module de type fini E de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{L}^{\otimes n})$ dont l'image dans $\Gamma(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}_0^{\otimes n})$ soit ce dernier module tout entier. Cela étant, pour tout $k\geqslant 0$, considérons l'homomorphisme $u_k:\mathrm{E}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathrm{E}\rightarrow\Gamma(\mathrm{X}_k, \mathscr{L}_k^{\otimes n})$ déduit de l'injection canonique $\mathrm{E}\rightarrow\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{L}^{\otimes n})$. Notons que $(f_k)_*(\mathscr{L}_k^{\otimes n})$ est quasi-cohérent, et comme $\Gamma(\mathrm{S}_k, (f_k)_*(\mathscr{L}_k^{\otimes n}))=\Gamma(\mathrm{X}_k, \mathscr{L}_k^{\otimes n})$, u_k définit un homomorphisme $\widetilde{u}_k:(\mathrm{E}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathrm{E})^{\sim}\rightarrow(f_k)_*(\mathscr{L}_k^{\otimes n})$, et par suite aussi un homomorphisme $\widetilde{u}_k^{\#}:f_k^*((\mathrm{E}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathrm{E})^{\sim})\rightarrow\mathscr{L}_k^{\otimes n}$. D'ailleurs, si on pose $\mathscr{G}_k=f_k^*((\mathrm{E}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathrm{E})^{\sim})$, on a $\mathscr{G}_0=\mathscr{G}_k/\mathfrak{J}\mathscr{G}_k$ (**I**, 9.1.5), donc $\widetilde{u}_0^{\#}:\mathscr{G}_k/\mathfrak{J}\mathscr{G}_k\rightarrow\mathscr{L}_k^{\otimes n}/\mathfrak{J}\mathscr{L}_k^{\otimes n}$ se déduit de $\widetilde{u}_k^{\#}$ par passage aux quotients. Or, par définition de E, $\widetilde{u}_0^{\#}$ n'est autre que l'homomorphisme canonique $\sigma:f_0^*((f_0)_*(\mathscr{L}_0^{\otimes n}))\rightarrow\mathscr{L}_0^{\otimes n}$, et l'hypothèse que $\mathscr{L}_0^{\otimes n}$ est très ample entraîne que $\widetilde{u}_0^{\#}$ est *surjectif* (**II**, 4.4.3); on déduit alors du lemme de Nakayama que chacun des $\widetilde{u}_k^{\#}$ est aussi *surjectif*. Chacun des $\widetilde{u}_k^{\#}$ définit donc (**II**, 4.2.2) un S_k-morphisme $g_k:\mathrm{X}_k\rightarrow\mathrm{P}_k=\mathbf{P}(\mathrm{E}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathrm{E})$, et comme $\mathrm{P}_h=\mathrm{P}_k\times_{\mathrm{S}_k}\mathrm{S}_h$ pour $h\leqslant k$ en vertu de (**II**, 4.1.3), (g_k) est un (S_k)*-système inductif adique* (**I**, 10.12.2) en vertu des relations entre les $\widetilde{u}_k^{\#}$ et de (**II**, 4.2.10). Les g_k définissent donc un $\mathfrak{S}$-morphisme de schémas formels $g:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{P}$, où $\mathfrak{P}$ est la limite inductive du système (P_k), ou encore le complété $\hat{\mathrm{P}}$, où $\mathrm{P}=\mathbf{P}(\mathrm{E})$. De plus, l'hypothèse que $\mathscr{L}_0^{\otimes n}$ est très ample entraîne que g_0 est une *immersion fermée* (**II**, 4.4.3); on en conclut que g est une immersion fermée de schémas formels (4.8.10), donc $\mathfrak{X}$ est algébrisable (5.1.8). Le fait que $\mathscr{L}$ soit isomorphe au complété $\hat{\mathscr{M}}$ d'un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-Module inversible résulte alors du th. d'existence (5.1.6). En outre, $\mathscr{L}^{\otimes n}$ est alors le complété de $\mathscr{M}^{\otimes n}$ (**I**, 10.8.10), et les homomorphismes $\widetilde{u}_k^{\#}$ définissent un homomorphisme bien déterminé $v:f^*(\widetilde{\mathrm{E}})\rightarrow\mathscr{M}^{\otimes n}$ (5.1.7); d'ailleurs, comme $\widetilde{u}_0^{\#}$ est surjectif, il en est de même de $\hat{v}$ (**I**, 10.11.5), donc de v (5.1.3); en outre, le morphisme $r:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{P}$ défini par v (**II**, 4.2.2) a pour prolongement aux complétés g, et comme g est une immersion fermée, il en est de même de r, par (5.1.8) et (5.4.1); on en conclut que $\mathscr{M}^{\otimes n}$ est très ample (**II**, 4.4.6) et $\mathscr{M}$ est ample (**II**, 4.5.10).

Remarque (**5.4.6**). — Soient A un anneau adique noethérien, $\mathfrak{S}=\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{S}$ un morphisme propre de schémas formels. Soit $\mathscr{N}$ l'Idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ tel que pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{N})$ soit le nilradical de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$; l'existence de cet Idéal résulte facilement de (**I**, 10.10.2) et du fait que tout homomorphisme d'anneaux $\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{C}$ applique le nilradical de B dans celui de C. Soit $\mathfrak{X}'$ le sous-schéma formel fermé de $\mathfrak{X}$ défini par $\mathscr{N}$ (**I**, 10.14.2); il serait intéressant de savoir si, lorsque $\mathfrak{X}'$ est algébrisable, $\mathfrak{X}$ lui-même est algébrisable. On parviendrait sans doute à une solution de ce problème si on savait classifier (par exemple au moyen d'invariants de nature cohomologique), les *extensions* d'un faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ (pour un préschéma usuel ou un préschéma formel) par un Idéal de carré nul, autrement dit les $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Algèbres $\mathscr{A}$ telles que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ soit isomorphe à $\mathscr{A}/\mathscr{J}$, où $\mathscr{J}$ est un Idéal de carré nul de $\mathscr{A}$.

5.5. Une décomposition de certains schémas.

Proposition **(5.5.1)**. — *Soient* A *un anneau adique noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, $Y = \mathrm{Spec}(A)$. *Soit* $f : X \rightarrow Y$ *un morphisme séparé de type fini; on pose* $Y_0 = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J})$, $X_0 = X \times_Y Y_0 = f^{-1}(Y_0)$. *Soit* Z_0 *une partie ouverte de* X_0, *propre sur* Y_0 ; *il existe alors dans* X *une partie ouverte et fermée* Z, *propre sur* Y *et telle que* $Z \cap X_0 = Z_0$.

Par hypothèse, il y a un ouvert T de X tel que $T \cap X_0 = Z_0$; soit $\hat{T}$ le complété le long de Z_0 du schéma induit par X sur l'ouvert T; le support de $\mathcal{O}_{\hat{T}}$ étant Z_0, qui est propre sur Y_0, $\hat{T}$ est propre sur $\hat{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ (3.4.1). Il résulte de (5.1.8) qu'il existe un sous-schéma fermé Z de T *propre* sur Y, tel que, si $i : Z \rightarrow T$ est l'injection canonique, $\hat{i} = \hat{Z} \rightarrow \hat{T}$ soit un isomorphisme ($\hat{Z}$ étant le complété de Z le long de Z_0). On en conclut (4.6.8) qu'il existe dans T un voisinage ouvert V de Z_0 tel que la restriction $i^{-1}(V) \rightarrow V$ de i soit un isomorphisme. Mais $i^{-1}(V)$ est un voisinage de Z_0 dans Z, donc est nécessairement identique à Z (5.1.3.1). On en conclut que Z est ouvert dans T, donc dans X, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(5.5.2)**. — *Si* X_0 *est propre sur* Y_0, X *est réunion de deux parties ouvertes disjointes* Z *et* Z' *telles que* Z *soit propre sur* Y *et contienne* X_0 ; *en outre, toute partie fermée* P *de* X, *propre sur* Y, *est contenue dans* Z.

La dernière assertion résulte de ce que $P \cap Z'$ étant fermé dans P est propre sur Y; si $P \cap Z'$ n'était pas vide, $f(P \cap Z')$ serait fermé non vide dans Y, donc rencontrerait Y_0 (5.1.3.1), ce qui contredit la définition de Z.

(A suivre.)

INDEX DES NOTATIONS

BIBLIOGRAPHIE *(suite)*

[27] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, thèse, Paris (1961).

[28] J. E. Roos, Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$. Applications, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. CCLII, 1961, p. 3702-3704.

[29] H. Cartan, Séminaire de l'École Normale Supérieure, 13e année (1960-1961), exposé no 11.

INDEX TERMINOLOGIQUE

TABLE DES MATIÈRES

Reçu le 28 juin 1961.