PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Propagateurs et commutateurs en relativité générale

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 10 (1961), p. 5-56
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1961__10__5_0>

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES
SCIENTIFIQUES

PROPAGATEURS ET COMMUTATEURS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par André LICHNEROWICZ

1961

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES, N° 10

5, ROND-POINT BUGEAUD — PARIS (XVI[e])

DÉPOT LÉGAL
1re édition .. .. .. 3e trimestre 1961

1. Introduction.

Élaborée dans le cadre de l'espace-temps de Minkowski, la théorie quantique des champs fait intervenir, pour ses commutateurs, le propagateur de Jordan-Pauli qui est de caractère scalaire. La construction dans le cadre de la relativité générale de commutateurs pour le champ électromagnétique et pour le champ gravitationnel suppose l'élaboration de propagateurs « tensoriels » relatifs à des opérateurs différentiels du second ordre.

La première partie de ce travail est consacrée à la *théorie mathématique des propagateurs*. Après avoir étudié la notion de *tenseur-distribution* sur une variété riemannienne V_n, je définis la notion de *laplacien d'un tenseur* sur V_n, notion qui généralise celle de laplacien d'une forme au sens de G. de Rham. L'opérateur Δ correspondant est auto-adjoint et commute avec la contraction; si le tenseur de Ricci de V_n est à dérivée covariante nulle, Δ commute pour les tenseurs d'ordre 1 avec la dérivation covariante et pour les tenseurs d'ordre 2 avec la dérivation covariante contractée.

Sur la variété riemannienne V_n, supposée de type hyperbolique normal, les opérateurs différentiels L sur les tenseurs T d'ordre p définis par :

$$LT = \Delta T + B(\nabla T) + CT$$

où C est un champ d'opérateurs linéaires sur les tenseurs d'ordre p et B un champ d'applications linéaires des tenseurs d'ordre $(p+1)$ dans les tenseurs d'ordre p, admettent deux noyaux élémentaires $E^{\pm}(x, x')$ qui sont des bitenseurs-distributions. L'existence et les propriétés de ces noyaux sont rappelées grâce à une technique simple due à Leray et Y. Fourès-Bruhat. Par différence, on obtient un *propagateur tensoriel*, antisymétrique en x et x', qui, pour chaque x' est solution de l'équation homogène relative à L et a son support dans et sur le conoïde caractéristique de sommet x'. Ce propagateur intervient de manière essentielle dans la solution du problème de Cauchy relatif à l'équation homogène.

Par antisymétrisation des propagateurs relatifs à l'opérateur $\Delta - \mu$ ($\mu = \text{const.}$) on obtient des propagateurs qui sont des bi-p-formes distributions et qui sont reliés entre eux par des identités différentielles remarquables qui jouent un rôle important dans les applications. Des résultats analogues sont valables pour le propagateur associé au même opérateur et aux tenseurs symétriques d'ordre 2. Dans le cas de l'espace-temps de Minkowski, tous les propagateurs introduits se déduisent du propagateur scalaire de Jordan-Pauli par multiplication par un bitenseur ordinaire provenant du bitenseur de transport.

Dans une seconde partie, des applications sont données à la formation des commutateurs qui doivent intervenir en relativité générale. Après avoir construit, sur une variété espace-temps donné, les commutateurs relatifs au champ électromagnétique en présence ou absence de terme de masse, je montre comment une théorie strictement parallèle peut être développée pour le champ gravitationnel varié, sur un espace-temps qui soit un espace d'Einstein. Le champ gravitationnel varié est décrit par un tenseur symétrique $h_{\alpha\beta}$ astreint seulement à des équations de champ faisant intervenir la variation du tenseur de Ricci; celle-ci s'exprime immédiatement à l'aide du laplacien introduit dans la première partie.

Si le champ gravitationnel est décrit par un tenseur H d'ordre 4, du type de symétrie du tenseur de courbure et satisfaisant aux « équations gravitationnelles d'ordre supérieur » introduites antérieurement (1), une technique variationnelle permet de construire, dans le cas d'*un espace à courbure constante*, un commutateur rigoureusement compatible avec les équations de champ et généralisant le commutateur construit, dans le cas d'un espace-temps de Minkowski, à l'aide de la transformation de Laplace (1).

Dans un appendice, j'indique un commutateur qui est la généralisation sur un espace d'Einstein du commutateur de Fierz correspondant à une particule de spin 2, avec terme de masse.

Une notion de fonction de Green, qui coïncide au fond avec celle de propagateur à notre sens, a été introduite indépendamment dans deux intéressants articles par B. de Witt [1], [2], avec des techniques et des buts différents. Les principaux résultats du présent travail ont paru dans trois Notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Lichnerowicz [2], [3], [4]) (2).

---

(1) Voir Lichnerowicz [5].
(2) Voir aussi cours du Collège de France 1958-1959 et *Séminaire Phys. théor.*, Zürich (mai 1959).

I

PROPAGATEURS TENSORIELS

2. Notion de tenseur-distribution sur une variété riemannienne.

a) Soit V_n une variété riemannienne (supposée orientée dans un but de simplicité) de dimension n, de classe C^h. Sa métrique peut s'écrire en coordonnées locales :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \tag{2.1}$$

Étant donnés deux tenseurs T et U d'ordre p, nous appelons produit scalaire $(T, U)_x$ au point x de V_n le produit en x

$$(T, U)_x = T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(x) U^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}(x) \tag{2.2}$$

Nous désignons par $\mathscr{D}^k_{V_n}$ l'espace vectoriel des tenseurs de classe C^k $(k \leqslant h)$ *à support compact* de V_n. Si $U \in \mathscr{D}^k_{V_n}$ est à support compact, nous pouvons poser :

$$< T, U > = \int_{V_n} (T, U)_x \eta(x) \tag{2.3}$$

où η est l'élément de volume riemannien. Localement

$$\eta = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \tag{2.4}$$

b) Nous appelons tenseur-distribution T *d'ordre p une fonctionnelle linéaire continue à valeurs scalaires sur les tenseurs d'ordre p suffisamment différentiables et à support compact.* Pour $U \in \mathscr{D}^k_{V_n}$ nous notons indifféremment $T[U]$ ou $< T, U >$ la valeur de cette fonctionnelle pour le tenseur U.

Un tenseur ordinaire T définit un tenseur-distribution par l'intermédiaire de la formule (2.3) dans laquelle la structure riemannienne intervient. Nous dirons que sur la variété riemannienne V_n *le tenseur-distribution défini par* (2.3) *est égal au tenseur ordinaire* T.

En se limitant aux tenseurs antisymétriques, on obtient les *p-formes-distributions* définies sur V_n comme *fonctionnelles linéaires sur les p-formes* (et non sur les $(n-p)$-formes comme les courants au sens de G. de Rham [1]), les fonctionnelles correspondantes différant l'une de l'autre par l'usage de l'opérateur $*$ [2].

---

(1) Voir G. de Rham [1], p. 39-40.
(2) G. de Rham [1] ou Lichnerowicz [1].

Si T est un tenseur-distribution d'ordre o, ou scalaire-distribution, V un tenseur ordinaire d'ordre p, TV est naturellement le tenseur-distribution d'ordre p défini par :

$$\text{TV}[\text{U}] = \text{T}[(\text{V}, \text{U})] \tag{2.5}$$

Cela posé, soit Ω le domaine d'un système de coordonnées locales (x^α) et donnons-nous dans Ω, n^p scalaires-distributions $\text{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$. L'expression [1]

$$\text{T} = \text{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_p} \tag{2.6}$$

définit un tenseur-distribution d'ordre p : si (e_α) est le repère dual du corepère (dx^α)

$$\text{U} = \text{U}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p}$$

et d'après (2.5), T[U] est donné par la somme

$$\text{T}[\text{U}] = \text{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}[\text{U}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}] \tag{2.7}$$

Inversement, tout tenseur-distribution d'ordre p dans Ω peut être représenté par une telle expression : désignons par $\text{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ les scalaires-distributions définis par :

$$\text{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}[\varphi] = \text{T}[\varphi e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p}]$$

où φ est une fonction arbitraire de $\mathscr{D}^k_\Omega$. On a :

$$\text{T}[\text{U}] = \text{T}[\text{U}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p}] = \text{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}[\text{U}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}]$$

et T admet bien l'expression (2.6). Ainsi, dans le domaine d'un système de coordonnées locales, tout tenseur-distribution d'ordre p peut être, comme un tenseur ordinaire, rapporté à ces coordonnées, les composantes étant des scalaires-distributions.

c) Soit T un tenseur ordinaire d'ordre p, ∇T le tenseur dérivée covariante de T dans la connexion riemannienne. Si U est un tenseur arbitraire d'ordre $(p+1)$ à support compact : $<\nabla \text{T}, \text{U}> = \int_{\text{V}_n} \nabla_\rho \text{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \text{U}^{\rho\alpha_1 \dots \alpha_p} \eta$

soit par intégration par parties :

$$<\nabla \text{T}, \text{U}> = \int_{\text{V}_n} \nabla_\rho (\text{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \text{U}^{\rho\alpha_1 \dots \alpha_p}) \eta - \int_{\text{V}_n} \text{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \nabla_\rho \text{U}^{\rho\alpha_1 \dots \alpha_p} \eta \tag{2.8}$$

Le premier terme du second membre est nul. Nous sommes ainsi conduits à introduire l'opérateur sur les tenseurs U définis par

$$\delta : \text{U}_{\beta_1 \dots \beta_{p+1}} \to -\nabla_\rho \text{U}^\rho{}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$$

Ainsi (2.8) peut s'écrire :

$$<\nabla \text{T}, \text{U}> = <\text{T}, \delta \text{U}> \tag{2.9}$$

Cela étant posé, nous définirons *la dérivée covariante d'un tenseur-distribution quelconque* T *d'ordre p comme le tenseur-distribution* ∇T *d'ordre* $p+1$ *déterminé par la relation* (2.9), où U est un tenseur arbitraire d'ordre $p+1$ à support compact $(\text{U} \in \mathscr{D}^k_{\text{V}_n})$.

---

[1] Sauf avis contraire, la convention de sommation est toujours faite.

En particulier, pour un scalaire-distribution, on a dans le domaine d'un système de coordonnées :

$$\text{(2.10)} \qquad <\nabla_\alpha T, u^\alpha> = -<T, \nabla_\alpha u^\alpha>$$

pour tout vecteur u, soit

$$<\nabla_\alpha T, u^\alpha> = -<T, \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha[u^\alpha\sqrt{|g|}]> \quad \left(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$$

relation compatible avec la définition usuelle de la dérivation des courants (G. de Rham [1], p. 55) si bien que

$$\nabla_\alpha T = \partial_\alpha T$$

Si T est un tenseur-distribution d'ordre 1, (2.9) peut s'écrire dans le domaine d'un système de coordonnées locales

$$<\nabla_\alpha T_\beta, U^{\alpha\beta}> = -<T_\beta, \nabla_\alpha U^{\alpha\beta}>$$

soit :

$$<\nabla_\alpha T_\beta, U^{\alpha\beta}> = -<T_\beta, \partial_\alpha U^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\alpha\rho}U^{\rho\beta}> - <T_\beta, \Gamma^\beta_{\alpha\rho}U^{\alpha\rho}>$$

Pour β fixé, il résulte de (2.10) que :

$$-<T_\beta, \partial_\alpha U^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\alpha\rho}U^{\rho\beta}> = <\partial_\alpha T_\beta, U^{\alpha\beta}>$$

On obtient ainsi :

$$<\nabla_\alpha T_\beta, U^{\alpha\beta}> = <\partial_\alpha T_\beta, U^{\alpha\beta}> - <\Gamma^\rho_{\alpha\beta}T_\rho, U^{\alpha\beta}>$$

soit

$$\nabla_\alpha T_\beta = \partial_\alpha T_\beta - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}T_\rho$$

Plus généralement, dans le domaine d'un système de coordonnées, les composantes de la dérivée covariante d'un tenseur-distribution d'ordre p s'expriment à partir des composantes du tenseur et des coefficients de la connexion par la *formule usuelle* en calcul tensoriel. Les propriétés classiques de la dérivation covariante subsistent. En particulier si T est un *tenseur-distribution* d'ordre $(p+1)$, on a pour tout tenseur U d'ordre p à support compact :

$$\text{(2.11)} \qquad <\delta T, U> = <T, \nabla U>$$

Il en est encore ainsi si T est un tenseur-distribution à support compact, U étant un tenseur quelconque.

3. Le bitenseur de transport.

Dans la théorie des opérateurs différentiels sur une variété riemannienne V_n s'introduisent nécessairement des tenseurs doubles ([1]) ou *bitenseurs* et des bitenseurs-distributions sur $V_n \times V_n$. Parmi les plus simples des bitenseurs attachés à une variété riemannienne

([1]) Pour la notion de forme double voir G. de Rham [1], p. 35.

figure le *bitenseur de transport* introduit par B. Dewitt [1]. Ce bitenseur est de nature locale.

a) Soit d'abord V_n une variété différentiable *munie d'une connexion linéaire*. A chaque point x de V_n, on peut attacher un voisinage Ω de x, homéomorphe à une boule ouverte, tel que pour tout point $x' \in \Omega$ il existe un arc géodésique $l(x, x')$ et un seul dans Ω joignant x à x'. Le transport par parallélisme le long de $l(x, x')$ définit un isomorphisme canonique $\mu_{x,x'}$ de l'espace vectoriel T_x tangent en x sur l'espace vectoriel $T_{x'}$, tangent en x', isomorphisme qui se réduit à l'identité pour $x' = x$.

Attachons un repère à chaque point de Ω et désignons par (e_α) le repère en x et par $(e_{\lambda'})$ le repère en x'. L'isomorphisme $\mu_{x,x'}$ fait correspondre à tout vecteur v en x de composantes (v^α) le vecteur $\mu_{x,x'}v$ en x' dont les composantes sont des fonctions linéaires des (v^α) :

$$(\mu_{x,x'}v)^{\lambda'} = t_\alpha^{\lambda'}(x, x')v^\alpha \tag{3.1}$$

Les $t_\alpha^{\lambda'}$ sont les composantes d'un bi-1-tenseur élément de $T_{x'} \otimes T_x^*$ [2], c'est-à-dire 1-tenseur covariant en x et 1-tenseur contravariant en x'. Pour $x' = x$, $\mu_{x,x'}$ se réduit à l'identité et :

$$t_\alpha^{\lambda'}(x, x' = x) = \delta_\alpha^\lambda \tag{3.2}$$

Soit $t_{\lambda'}^\alpha$ le bi-1-tenseur associé de même à $\mu_{x,x'}^{-1} = \mu_{x',x}$. On a :

$$t_{\lambda'}^\beta t_\alpha^{\lambda'} = \delta_\alpha^\beta$$

$t_{\lambda'}^\alpha$ définit l'isomorphisme de T_x^* sur $T_{x'}^*$, déterminé par transport le long de $l(x, x')$. Nous appellerons le bi-1-tenseur ainsi défini le bitenseur dual du précédent.

Plus généralement, le transport le long de $l(x, x')$ définit un isomorphisme de l'espace vectoriel des tenseurs affines d'un type déterminé en x sur l'espace vectoriel des tenseurs de même type en x'. A cet isomorphisme correspond le bitenseur construit par produit tensoriel de $t_\alpha^{\lambda'}$ par lui-même et par le bitenseur dual.

Faisons varier x' le long d'un arc géodésique déterminé d'origine x et soit $u^{\mu'}$ un vecteur tangent en x' à cet arc. Le vecteur (3.1) étant déduit de v par transport, on a en désignant par $\nabla_{\mu'}$ l'opérateur de dérivation covariante relativement à x'

$$u^{\mu'}\nabla_{\mu'}(t_\alpha^{\lambda'}v^\alpha) = u^{\mu'}\nabla_{\mu'}t_\alpha^{\lambda'} . v^\alpha = 0$$

quel que soit v^α. Par suite

$$u^{\mu'}\nabla_{\mu'}t_\alpha^{\lambda'} = 0 \tag{3.3}$$

Le bitenseur $t_\alpha^{\lambda'}(x, x')$ peut ainsi être défini pour x donné et aux différents points x' de Ω en considérant les arcs géodésiques issus de x et en intégrant sur un tel arc le système différentiel (3.3) avec la condition initiale (3.2).

Pour $x' = x$, on a

$$u^{\mu'}\nabla_{\mu'}t_\alpha^{\lambda'}(x, x' = x) = 0$$

---

(1) Cf. B. DEWITT et BREHME, *Annals Phys.*, t. 9, p. 220 (1960) [2].

(2) T_x^* désigne le dual de T_x.

quel que soit le vecteur u en $x'=x$. Par suite :

(3.4) $$\nabla_{\mu'} t_{\alpha}^{\lambda'}(x, x'=x) = 0$$

et de même

(3.5) $$\nabla_{\mu'} t_{\lambda'}^{\alpha}(x, x'=x) = 0$$

b) Supposons V_n munie d'une métrique riemannienne et introduisons la connexion riemannienne correspondante. Le tenseur métrique étant invariant par transport par parallélisme :

(3.6) $$g_{\lambda'\mu'}(x') = t_{\lambda'}^{\alpha} t_{\mu'}^{\beta} g_{\alpha\beta}(x)$$

Il en résulte par inversion

$$g_{\lambda'\mu'} t_{\beta}^{\mu'} = g_{\alpha\beta} t_{\lambda'}^{\alpha}$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire les quantités :

(3.7) $$t_{\beta\lambda'} = g_{\lambda'\mu'} t_{\beta}^{\mu'} = g_{\alpha\beta} t_{\lambda'}^{\alpha}$$

qui sont les composantes covariantes d'un bi-1-tenseur euclidien, de composantes mixtes $t_{\alpha}^{\lambda'}$ ou $t_{\lambda'}^{\alpha}$, que nous appellerons le *bitenseur de transport* $t(x, x')$; (3.7) est équivalent à

(3.8) $$t_{\beta\lambda'} t_{\alpha}^{\lambda'} = g_{\alpha\beta}$$

Pour $x'=x$, le bitenseur de transport vérifie les relations :

(3.9) $$t_{\alpha\lambda'}(x, x'=x) = g_{\alpha\lambda}(x)$$

et

(3.10) $$\nabla_{\mu'} t_{\alpha\lambda'}(x, x'=x) = 0$$

Pour étudier le bitenseur de transport, il peut être commode d'adopter dans un voisinage de x les repères déduits d'un repère déterminé en x par transport le long des différents arcs géodésiques issus de ce point; relativement à ces repères, les composantes du bitenseur de transport sont constantes et $t_{\alpha}^{\lambda'}(x, x') = \delta_{\alpha}^{\lambda}$.

c) Prenons pour V_n un espace *euclidien* de signature quelconque. Le bitenseur de transport est alors défini globalement quel que soit le couple (x, x'). Attachons un repère à chaque point de V_n et soit (e_α) le repère en x, $(e_{\lambda'})$ le repère en x'. Considérons le bi-1-tenseur admettant pour composantes les produits scalaires

$$e_\alpha . e_{\lambda'}$$

Si à tous les points est attaché le même repère, ce bitenseur admet les composantes constantes $e_\alpha . e_\lambda = g_{\alpha\lambda}$. Évaluons pour ce choix des repères la dérivée covariante par rapport à x du bitenseur considéré. Il vient pour cette dérivée :

$$\partial_\beta(l_\alpha l_\lambda) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(l_\gamma l_\lambda) = \partial_\beta g_{\alpha\lambda} = 0$$

Ainsi *notre bitenseur est à dérivée covariante nulle par rapport à x et par rapport à x'*. De plus, pour x' coïncidant avec x, il admet toujours les composantes triviales $g_{\alpha\lambda}$. Il coïncide donc avec le bitenseur du transport et

(3.11) $$t_{\alpha\lambda'} = e_\alpha . e_{\lambda'}$$

4. Bitenseurs de Dirac.

a) V_n étant de nouveau une variété riemannienne arbitraire, nous désignons par $\tau(x, x')$ tout bi-1-tenseur de V_n astreint seulement à satisfaire la relation (3.9)

$$\tau_{\alpha\lambda'}(x, x'=x) = g_{\alpha\lambda}(x) \tag{4.1}$$

Le bitenseur de transport est, sur Ω, un cas particulier des bitenseurs ainsi envisagés.

Pour chaque $x \in V_n$, nous désignons par δ_x le *scalaire-distribution* de V_n défini par :

$$< \delta_x(x'), \varphi(x') >_{V_n} = \varphi(x) \tag{4.2}$$

où nous avons introduit, pour être clair, dans le symbole $< \ldots >$ une variable point x' et où $\varphi \in \mathscr{D}^k_{V_n}$. De δ_x on déduit un *biscalaire-distribution* δ — ou scalaire-distribution sur la variété produit $V_n \times V_n$ — défini de la manière suivante : si $\varphi(x, x') \in \mathscr{D}^k_{V_n \times V_n}$

$$< \delta(x, x'), \varphi(x, x') >_{V_n \times V_n} = < \delta_x(x'), \varphi(x, x') >_{V_n \times V_n} \tag{4.3}$$

$\delta(x, x')$ — symétrique en x, x' — est le *biscalaire de Dirac* sur V_n. La formule (4.2) sera aussi écrite

$$< \delta(x, x'), \varphi(x') > = \varphi(x) \tag{4.4}$$

Pour tout bitenseur τ (astreint à (4.1)), le biscalaire δ vérifie une relation importante que nous allons établir. Désignons par ∇_α et $\nabla_{\lambda'}$ les opérateurs de dérivation covariante respectivement par rapport à x et x'. De (2.11), il résulte

$$-< \nabla_{\lambda'}(\tau^{\lambda'}_\alpha \delta(x, x')), \varphi(x') > = < \tau^{\lambda'}_\alpha \delta(x, x'), \nabla_{\lambda'}\varphi(x') > = < \delta(x, x'), \tau^{\lambda'}_\alpha \nabla_{\lambda'}\varphi(x') >$$

soit d'après (4.1) :

$$-< \nabla_{\lambda'}(\tau^{\lambda'}_\alpha \delta(x, x')), \varphi(x') > = \nabla_\alpha \varphi(x) \qquad (\varphi \in \mathscr{D}^k_{V_n}) \tag{4.5}$$

Par dérivation de (4.4) par rapport à x, il vient d'autre part :

$$< \nabla_\alpha \delta(x, x'), \varphi(x') > = \nabla_\alpha \varphi(x) \tag{4.6}$$

De (4.5) et (4.6) résulte la relation que nous voulions établir

$$-\nabla_{\lambda'}(\tau^{\lambda'}_\alpha \delta(x, x')) = \nabla_\alpha \delta(x, x') \tag{4.7}$$

b) Par produit tensoriel en x, x' du bi-1-tenseur τ par lui-même, on obtient des bi-p-tenseurs notés $\otimes^p \tau$. Par antisymétrisation (partielle) ou produit extérieur de τ par lui-même, on obtient des bi-p-formes notées $\Lambda^p \tau$ (pour $p = 0, 1, \ldots, n$) ; pour $p = 2$ par exemple, $\Lambda^2 \tau$ admet les composantes :

$$(\Lambda^2 \tau)_{\alpha\beta, \lambda'\mu'} = \tau_{\alpha\lambda'}\tau_{\beta\mu'} - \tau_{\beta\lambda'}\tau_{\alpha\mu'} \tag{4.8}$$

Nous appellerons *bitenseurs de Dirac* sur V_n les bitenseurs-distributions $(\otimes^p \tau)\delta$ et $(\Lambda^p \tau)\delta$. Ces bitenseurs-distributions ne dépendent pas du choix des bitenseurs τ astreints naturellement à satisfaire (4.1). Nous posons

$$\delta^{(p)} = (\Lambda^p \tau)\delta \qquad (\text{avec } \delta^{(0)} = \delta)$$

et désignons par d_x et δ_x les *opérateurs de différentiation et de codifférentiation extérieure* relativement à x, par $d_{x'}$ et $\delta_{x'}$, les opérateurs correspondant relativement à x'. Avec ces notations, la relation (4.7) peut s'écrire :

(4.9) $$\delta_{x'}\delta^{(1)} = d_x\delta$$

Plus généralement, cherchons à évaluer $\delta_{x'}\delta^{(p)} (p = 1, \ldots, n)$. On a avec des notations évidentes

(4.10) $$\delta_{x'}\delta^{(p)} = \delta_{x'}\{(\tau \wedge \Lambda^{p-1}\tau)\delta\}$$

(4.10) ne dépendant pas du choix de τ astreint à satisfaire (4.1), nous pouvons en outre astreindre τ à satisfaire aux relations vérifiées pour $x' = x$ par les dérivées du bitenseur de transport, soit :

(4.11) $$\nabla_{\mu'}\tau_{\alpha\lambda'}(x, x' = x) = \nabla_\beta\tau_{\alpha\lambda'}(x, x' = x) = 0$$

Pour un tel bi-1-tenseur τ, on voit que :

$$\delta_{x'}\delta^{(p)} = \delta_{x'}(\tau\delta) \wedge \Lambda^{p-1}\tau$$

où le produit extérieur est effectué relativement à T_x, soit d'après (4.9)

$$\delta_{x'}\delta^{(p)} = d_x\delta \wedge \Lambda^{p-1}\tau$$

Compte tenu de (4.11), il vient :

$$\delta_{x'}\delta^{(p)} = d_x(\Lambda^{p-1}\tau)\delta + d_x\delta \wedge \Lambda^{p-1}\tau$$

c'est-à-dire

$$\delta_{x'}\delta^{(p)} = d_x(\Lambda^{p-1}\tau . \delta)$$

où le second membre est indépendant du choix du bitenseur τ astreint seulement à satisfaire (4.1). Les bi-p-formes de Dirac vérifient ainsi les relations :

(4.12) $$\delta_{x'}\delta^{(p)} = d_x\delta^{(p-1)} \quad (p = 1, \ldots, n)$$

Ces relations peuvent aussi se déduire directement de (2-11).

5. Opérateurs différentiels linéaires du second ordre sur les scalaires.

a) Si (x^α) désigne provisoirement les coordonnées canoniques de R^n, on envisage les opérateurs sur les fonctions u à valeurs réelles

(5.1) $$Lu = -g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}u + a^\rho\partial_\rho u + cu$$

où la forme quadratique $(g^{\alpha\beta})$ est de type hyperbolique normal et où les $(g^{\alpha\beta}, a^\rho, c)$ sont suffisamment différentiables. La théorie classique de ces opérateurs fait intervenir d'une manière essentielle des éléments liés à la métrique riemannienne

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$$

où les formes $(g_{\alpha\beta})$ et $(g^{\alpha\beta})$ sont corrélatives l'une de l'autre. Introduisons le laplacien de u au sens de G. de Rham relativement à cette métrique

$$\Delta u = \delta\,du = -\nabla^\alpha\nabla_\alpha u$$

soit avec les notations classiques :

$$\Delta u = -g^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha\beta}u - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\partial_\rho u) = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha\left(g^{\alpha\beta}\partial_\beta u\sqrt{|g|}\right)$$

(5.1) peut s'écrire ainsi :

$$Lu = \Delta u + b^\rho \partial_\rho u + cu \tag{5.2}$$

b) Nous sommes ainsi conduits à envisager ces opérateurs sous forme invariante sur une variété différentiable. Soit V_n une variété différentiable orientée de classe C^{h+1} munie d'une métrique riemannienne $(g_{\alpha\beta})$ *de type hyperbolique normal*, de classe C^h. Si b est une 1-forme et c une 0-forme de classe C^{h-1}, nous pouvons introduire sur V_n l'opérateur différentiel linéaire du second ordre qui, à une fonction u de classe C^{k+2} $(0 \leqslant k \leqslant h-1)$, fait correspondre une fonction de classe C^k et qui est défini par la formule

$$Lu = \Delta u + b^\rho \partial_\rho u + cu \tag{5.3}$$

où Δu est le laplacien dans la métrique donnée. Dans ces conditions, l'opérateur L^* *adjoint* de L se trouve défini par

$$L^* v = \Delta v - \nabla_\rho(b^\rho v) + cv \tag{5.4}$$

Pour que L soit auto-adjoint, il faut et il suffit que $b = 0$.

Si u et v sont des fonctions à valeurs scalaires de classe C^{k+2}, il résulte de (5.4) que :

$$vLu - L^*v.u = v\Delta u - u\Delta v + \nabla_\rho(uvb^\rho)$$

soit

$$vLu - L^*v.u = \delta(v\,du - u\,dv - uvb) \tag{5.5}$$

Si u est une fonction scalaire à support $S(u)$ compact de classe C^{k+2} $(u \in \mathscr{D}^{k+2}_{V_n})$ et si v est une distribution dans V_n, il résulte de (5.5) et (2.11) que :

$$\langle v, Lu\rangle - \langle L^*v, u\rangle = \langle \delta(v\,du - u\,dv - uvb), 1\rangle = 0$$

soit

$$\langle v, Lu\rangle = \langle L^*v, u\rangle \tag{5.6}$$

La formule (5-6) est bien entendu encore valable si l'on a seulement $S(u) \cap S(v)$ compact.

6. Solutions élémentaires correspondantes.

Toutes les considérations qui suivent sont de nature *purement locales*. Nous désignons par $\Gamma_{x'}$ le *conoïde caractéristique* de sommet x'. Considérons un voisinage Ω, homéomorphe à une boule ouverte, tel que pour tout point x de Ω, il existe un arc géodésique $l(x, x')$ et un seul dans Ω joignant x' à x. Les coordonnées normales géodésiques établissent un homéomorphisme de Ω sur une boule ouverte de l'espace vectoriel tangent en x', homéomorphisme qui applique le *conoïde* caractéristique en x' sur le cône isotrope $C_{x'}$ limité à la boule. Ainsi le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$ est régulier dans Ω; au partage de $C_{x'}$

en deux nappes $C^+_{x'}$ et $C^-_{x'}$, correspond la subdivision de $\Gamma_{x'}$ en deux demi-conoïdes $\Gamma^+_{x'}$ et $\Gamma^-_{x'}$, dont le premier est dit orienté vers le futur, le second vers le passé. Pour qu'un point x de Ω soit intérieur à $\Gamma^+_{x'}$ (resp. $\Gamma^-_{x'}$), il faut et il suffit que $l(x', x)$ soit orienté dans le temps et vers le futur (resp. passé). Nous dirons alors que x est dans le futur de x' (resp. passé de x'), le point x' étant dans le passé (resp. futur) de x.

Nous appelons, selon Leray, *émission* d'un ensemble K de Ω, ou *futur* de K, l'ensemble des chemins temporels $\mathscr{E}_+(K)$ issus d'un point de K du côté du futur de ce point. L'*émission rétrograde* $\mathscr{E}_-(K)$, ou *passé* de K, est l'ensemble des chemins temporels aboutissant en un point de K du côté du passé de ce point. Un ensemble K de Ω est dit *compact vers le passé* (resp. futur) si son intersection avec $\mathscr{E}_-(x)$ (resp. $\mathscr{E}_+(x)$) est compacte ou vide pour tout x de Ω; $\mathscr{E}_+(K)$ est aussi compact vers le passé, ainsi que tout sous-ensemble fermé.

On démontre que l'intersection $\mathscr{E}_+(K) \cap \mathscr{E}_-(K')$ est compacte si K ou K' est compact, K' compact vers le futur ou K compact vers le passé (Leray [1]).

a) En ce qui concerne les solutions élémentaires, nous rappellerons le résultat suivant :

Théorème. — Étant donnée une boule ouverte Ω, il existe pour x' fixé deux solutions élémentaires $E^\pm_{x'}(x)$ de L dans Ω, c'est-à-dire deux scalaires-distributions satisfaisant relativement à x

(6.1) $$L^* E^\pm_{x'}(x) = \delta_{x'}(x)$$

et à supports respectivement dans $\mathscr{E}_+(x')$ ou $\mathscr{E}_-(x')$. Ces solutions élémentaires sont uniques.

Pour établir l'existence de ces solutions élémentaires, il suffit de se placer dans le cas où la variété envisagée est *de dimension paire*, le cas où elle est de dimension impaire s'en déduisant par la classique méthode de descente sur laquelle nous reviendrons dans un instant. Nous nous bornons à esquisser une démonstration de ce théorème bien connu.

Sur la variété V_{2n}, on peut d'abord (1) établir, par intégration d'un système différentiel, l'existence d'une paramétrix $\sigma^\pm_{x'}$, relative au point x', c'est-à-dire, pour chaque x', l'existence d'un scalaire-distribution dans Ω dont le support est sur $\Gamma^+_{x'}$, ou $\Gamma^-_{x'}$, et satisfaisant :

$$L^* \sigma^\pm_{x'} = \delta_{x'} - \mathscr{L}^\pm_{x'}$$

où $\mathscr{L}^\pm_{x'}$ est une fonction sommable de support le demi-conoïde.

Considérons une solution φ de classe C^{k+2} *à support compact* dans Ω de l'équation :

$$L\varphi = \psi$$

où $\psi \in \mathscr{D}^k_\Omega$. Cette solution vérifie :

$$<\sigma^-_{x'}, \psi> = <\sigma^-_{x'}, L\varphi> = <L^*\sigma^-_{x'}, \varphi> = <\delta_{x'}, \varphi> - \int_{V^-} \mathscr{L}^-_{x'}(x)\varphi(x)\, dS_x$$

où V^- est dans le domaine de $\Gamma^-_{x'}$ intérieur à Ω et où dS_x est l'élément d'aire induit sur le conoïde. On obtient ainsi la relation intégrale

(6.2) $$\varphi(x') = \int_{V^-} \mathscr{L}^-_{x'}(x)\varphi(x)\, dS_x + <\sigma^-_{x'}, \psi>$$

(1) Voir Y. Fourès-Bruhat, *Solutions élémentaires d'équations du 2e ordre*, Coll. sur les équations aux dérivées partielles C.N.R.S. (Nancy) [2].

Cette équation intégrale à l'inconnue φ peut être résolue par itération. Sa solution unique est donnée par une opération linéaire continue sur ψ qui définit un scalaire-distribution $E^-_{x'}$ et l'on peut écrire :

(6.3) $$\varphi(x') = \langle E^-_{x'}(x), \psi(x) \rangle$$

Ainsi, quel que soit $\varphi \in \mathscr{D}^{k+2}_\Omega$:

(6.4) $$\varphi(x') = \langle E^-_{x'}(x), L\varphi(x) \rangle$$

On voit sur la relation intégrale que $E^-_{x'}(x)$ est *un scalaire-distribution dans* Ω *à support dans et sur* $\Gamma^-_{x'}$. C'est bien une solution élémentaire en x' de L dans Ω; en effet, quel que soit $\varphi \in \mathscr{D}^{k+2}_\Omega$, on a d'après (6.4) :

$$\langle L^* E^-_{x'}(x), \varphi(x) \rangle = \langle E^-_{x'}(x), L\varphi(x) \rangle = \varphi(x')$$

soit :

$$\langle L^* E^-_{x'}(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta_{x'}(x), \varphi(x) \rangle$$

Il en résulte

(6.5) $$L^* E^-_{x'}(x) = \delta_{x'}(x)$$

Si $\psi(x', x) \in \mathscr{D}^k_{\Omega \times \Omega}$, on peut définir un scalaire-distribution $E^-(x', x)$ dans $\Omega \times \Omega$ par la formule :

$$\langle E^-(x', x), \psi(x', x) \rangle_{\Omega \times \Omega} = \langle E^-_{x'}(x), \psi(x', x) \rangle_{\Omega \times \Omega}$$

On montre à l'aide de théorèmes de G. de Rham que $E^-(x', x)$ définit pour chaque x un scalaire-distribution local en x'; $E^-(x', x)$ est un *noyau élémentaire*; (6.5) pourra être écrit sous la forme :

(6.6) $$L^*_x E^-(x', x) = \delta(x, x')$$

En substituant au demi-conoïde $\Gamma^-_{x'}$ le demi-conoïde $\Gamma^+_{x'}$, on construit de même un second noyau élémentaire $E^+(x', x)$ qui, pour chaque x', définit un scalaire-distribution dont le support est dans et sur $\Gamma^+_{x'}$. Nous établirons dans un instant, indépendamment, l'*unicité de ces noyaux élémentaires*, unicité que nous admettrons pour le moment.

b) Sur la variété riemannienne V_n de dimension n, soit μ *une isométrie laissant invariant l'opérateur différentiel* L. L'isométrie μ laisse invariant le biscalaire δ de Dirac puisque si $\varphi \in \mathscr{D}^k_{V_n}$:

$$\langle \delta(\mu x, \mu x'), \varphi(x') \rangle = \langle \delta(\mu x, z), \varphi(\mu^{-1} z) \rangle = \varphi(x)$$

De l'unicité des noyaux élémentaires, résulte alors leur invariance par μ :

(6.7) $$E^\pm(\mu x', \mu x) = E^\pm(x', x)$$

c) Supposons la variété riemannienne envisagée V_{2n-1} de dimension impaire et soit ds^2 sa métrique. La méthode de descente permet d'établir dans ce cas l'existence des noyaux élémentaires. Considérons la variété produit $\hat{V}_{2n} = V_{2n-1} \times R$ et désignons par p la projection canonique de $\hat{V}_{2n}$ sur V_{2n-1}. Nous munirons $\hat{V}_{2n}$ de la métrique :

(6.8) $$\widehat{ds}^2 = -(dx^0)^2 + p^*(ds^2)$$

où x^0 est la coordonnée canonique de R.

Désignons par $y=(x^0, x)$ — où $x \in V_{2n-1}$ — un point de $\hat{V}_{2n}$. L'opérateur L étant défini sur V_{2n-1}, d'après (5.3), à partir du laplacien Δ et des formes b et c respectivement de degré 1 et 0, considérons l'opérateur $\hat{L}$ défini sur $\hat{V}_{2n}$ par le laplacien $\hat{\Delta}$ associé à (6.8) et par les formes p^*b et p^*c. Cet opérateur $\hat{L}$ est invariant par les isométries μ_h de $\hat{V}_{2n}$ définies par :

$$\mu_h : x^0 \to x^0 + h; \quad x \to x \quad (h \in R)$$

Si $\psi \in \mathscr{D}^k_{V_{2n-1}}$, son image inverse $p^*\psi$ sur $\hat{V}_{2n}$ satisfait :

(6.9) $$\hat{L}p^*\psi = p^*L\psi$$

Cela posé, soit $\hat{E}^-_{y'}(y)$ une solution élémentaire de $\hat{L}$ dans le produit $\hat{\Omega}$ d'une boule ouverte Ω de V_{2n-1} par un intervalle ouvert. Pour chaque y', on déduit de cette solution un scalaire-distribution $K_{y'}(x)$ dans Ω par la formule

$$<K_{y'}(x), \psi(x)>_\Omega = <\hat{E}^-_{y'}(y), (p^*\psi)(y)>_{\hat{\Omega}}$$

où $\psi \in \mathscr{D}^k_\Omega$ et où, compte tenu du support de $\hat{E}^-_{y'}(y)$, le second membre a un sens, bien que $p^*\psi$ ne soit pas à support compact dans $\hat{\Omega}$. De (6.7) et de l'invariance de $p^*\psi$ il résulte que :

$$K_{\mu_h y'}(x) = K_{y'}(x)$$

et que par suite K ne dépend que de $x' = py'$. A chaque x' correspond ainsi un scalaire-distribution $E^-_{x'}(x)$ qui, d'après sa définition, a son support dans et sur $\Gamma^-_{x'}$ et satisfait

(6.10) $$p^*<E^-_{x'}(x), \psi(x)>_\Omega = <\hat{E}^-_{y'}(y), p^*\psi>_{\hat{\Omega}}$$

D'autre part, d'après (5.5) et compte tenu des supports de $\hat{E}^-_{y'}(y)$ et de $p^*\psi$:

$$<\hat{L}^*\hat{E}^-_{y'}(y), (p'\psi)(y)>_{\hat{\Omega}} = <\hat{E}^-_{y'}(y), \hat{L}p^*\psi>_{\hat{\Omega}}$$

soit d'après (6.9) et (6.10)

(6.11) $$<\hat{L}^*\hat{E}^-_{y'}(y), (p'\psi)(y)>_{\hat{\Omega}} = <\hat{E}^-_{y'}(y), p^*L\psi>_{\hat{\Omega}} = p^*<E^-_{x'}(x), L\psi>_\Omega$$

Or, d'après la définition de $\hat{E}^-_{y'}(y)$:

$$<\hat{L}^*\hat{E}^-_{y'}(y), (p^*\psi)(y)>_{\hat{\Omega}} = (p^*\psi)(y')$$

De (6.11) il résulte ainsi

$$<L^*E^-_{x'}(x), \psi(x)>_\Omega = \psi(x')$$

et $E^-_{x'}(x)$ est solution élémentaire de L dans Ω.

On peut ainsi établir l'existence des deux noyaux élémentaires $E^\pm(x', x)$ dans le cas où la dimension est impaire.

7. Théorème d'unicité. Solutions de l'équation avec second membre.

a) Dans la boule ouverte Ω de la variété riemannienne V_n, considérons un scalaire-distribution v solution de l'équation homogène

$$Lv = 0$$

et dont le support $S(v)$ soit *compact dans le futur.*

A toute fonction $\psi \in \mathcal{D}^k_\Omega$ faisons correspondre la fonction φ définie par :

(7.1) $$\varphi(x) = \langle E^+(x', x), \psi(x') \rangle$$

Cette fonction a son support $S(\varphi)$ dans le futur $\mathcal{E}_+(S(\psi))$ du support $S(\psi)$ de la fonction ψ et satisfait

$$L^*_x \varphi(x) = \langle L^*_x E^+(x', x), \psi(x') \rangle = \langle \delta(x, x'), \psi(x') \rangle = \psi(x)$$

C'est donc une solution de l'équation

(7.2) $$L^* \varphi = \psi$$

$S(v)$ étant compact dans le futur, $\mathcal{E}_+(S(\psi)) \cap \mathcal{E}_-(S(v))$ est compact; nous désignerons cette intersection par K. Soit α une fonction à support compact dans $\Omega (\alpha \in \mathcal{D}^k_\Omega)$, égale à 1 sur un voisinage compact de K. Comme $Lv = 0$

$$\langle Lv, \alpha\varphi \rangle = 0$$

Il en résulte :

$$\langle v, L^*(\alpha\varphi) \rangle = \langle v, L^* \varphi \rangle = 0$$

De (7.2) on déduit

$$\langle v, \psi \rangle = 0$$

quelle que soit $\psi \in \mathcal{D}^k_\Omega$. On a ainsi $v = 0$. Nous énoncerons :

Théorème d'unicité. — Tout scalaire-distribution v dans Ω, solution de l'équation homogène $Lv = 0$ *et à support compact vers le futur (ou vers le passé) est nécessairement nul.*

Il en résulte en particulier que les deux solutions élémentaires $E^+_{x'}(x)$ et $E^-_{x'}(x)$ (à supports dans $\mathcal{E}_+(x')$ et $\mathcal{E}_-(x')$), ainsi que les noyaux élémentaires correspondants, sont bien uniquement déterminés par les conditions du théorème du § 6, *a*.

b) Dans la boule ouverte Ω, considérons l'équation :

(7.3) $$L\varphi = \psi$$

où ψ est une fonction arbitraire de $\mathcal{D}^k_\Omega$.

Toute solution φ de classe C^{k+2} *de l'équation* (7.3) *à support compact dans le futur est nécessairement la fonction donnée par*

(7.4) $$\varphi(x') = \langle E^+(x', x), \psi(x) \rangle$$

En effet, l'intersection $\mathcal{E}_-(S(\psi)) \cap \mathcal{E}_+(x')$ est vide ou est un compact K. Soit α une fonction à support compact $(\alpha \in \mathcal{D}^k_\Omega)$ égale à 1 dans un voisinage compact de K. Pour x' dans le passé de $S(\psi)$, on a :

$$\langle E^+(x', x), \psi(x) \rangle = \langle E^+(x', x), L_x \varphi(x) \rangle = \langle E^+(x', x), L_x(\alpha\varphi) \rangle$$

Soit

$$\langle E^+(x', x), \psi(x) \rangle = \langle L^*_x E^+(x', x), \alpha(x)\varphi(x) \rangle = \varphi(x')$$

ce qui démontre la propriété.

c) Plus généralement, *étant donnée une distribution v à support compact dans le futur,* *le noyau élémentaire* $E^+(x', x)$ *nous permet de construire une distribution à support compact dans le futur*, solution de l'équation

(7.5) $$Lu = v$$

En effet, considérons la composition au sens de Volterra et par rapport au point x du noyau $E^+(x', x)$ et de la distribution $v(x)$: si ψ est une fonction arbitraire de $\mathscr{D}^k_\Omega$, la distribution composée u est définie par :

(7.6) $$<u(x'), \psi(x')> = <v(x), \varphi(x)>$$

où φ est la fonction déduite de ψ par la formule (7.1), c'est-à-dire la solution unique de $L^*\varphi = \psi$ à support compact dans le passé. Comme $\mathscr{E}_+(S(\psi)) \cap \mathscr{E}_-(S(v))$ est compact, le second membre de (7.6) a un sens quel que soit ψ. Nous noterons cette composition

(7.7) $$u(x') = \int E^+(x', x) v(x) \eta(x)$$

D'après sa définition, u est tel que $S(u)$ est dans $\mathscr{E}_-(S(v))$, donc est à support compact dans le futur.

La distribution u vérifie (7.5). En effet, si φ est une fonction à support compact dans Ω :

$$<Lu, \varphi> = <u, L^*\varphi> = <u, \psi>$$

donc d'après (7.6)

$$<Lu, \varphi> = <v, \varphi>$$

et (7.5) est vérifiée au sens des distributions.

En particulier, si v est une fonction ψ à support compact dans le futur, u est nécessairement la solution usuelle φ donnée par (7.4).

8. Relations entre les noyaux élémentaires. Propagateurs.

a) Désignons par $E^{*\pm}(x', x)$ les noyaux élémentaires associés à l'opérateur L^* adjoint de L et considérons la fonction ($\psi \in \mathscr{D}^k_\Omega$) :

(8.1) $$\varphi_1(x') = <E^{*-}(x, x'), \psi(x)>$$

Son support est dans le passé du support de ψ et l'on a :

$$L_{x'} \varphi_1(x') = <L_{x'} E^{*-}(x, x'), \psi(x)> = <\delta(x, x'), \psi(x)> = \psi(x')$$

Ainsi, quelle que soit $\psi \in \mathscr{D}^k_\Omega$, la fonction φ_1 définie par (8.1) coïncide avec la fonction φ définie par (7.4). Il en résulte :

(8.2) $$E^{*-}(x, x') = E^+(x', x)$$

et de même

(8.3) $$E^{*+}(x, x') = E^-(x', x)$$

Ainsi

(8.4) $$L_{x'} E^{\pm}(x', x) = \delta(x, x')$$

b) Introduisons le scalaire-distribution défini dans $\Omega \times \Omega$ par :

(8.5) $$G(x, x') = E^+(x', x) - E^-(x', x)$$

Pour chaque $x' \in \Omega$, il définit un scalaire-distribution dans Ω dont le support est dans et sur le conoïde $\Gamma_{x'}$. De plus il satisfait, relativement à x, à l'équation homogène

(8.6) $$L_x^* G(x, x') = 0$$

Au noyau G nous donnerons le nom de *propagateur scalaire* relatif à l'opérateur L.

A l'opérateur adjoint L^* correspond le propagateur :

$$G^*(x, x') = E^{*+}(x', x) - E^{*-}(x', x)$$

qui satisfait, relativement à x, à l'équation homogène :

$$L_x G^*(x, x') = 0$$

De (8.2), (8.3) il résulte :

$$G^*(x, x') = E^-(x, x') - E^+(x, x')$$

soit

(8.7) $$G^*(x, x') = -G(x', x)$$

Le propagateur $G(x, x')$ satisfait ainsi, relativement à x', l'équation homogène :

(8.8) $$L_{x'} G(x, x') = 0$$

c) Supposons auto-adjoint l'opérateur L :

$$Lu = (\Delta + c)u$$

On a alors d'après (8.2) et (8.3) :

(8.9) $$E^+(x, x') = E^-(x', x)$$

et de (8.7) il résulte :

(8.10) $$G(x, x') = -G(x', x)$$

Ainsi, pour tout opérateur auto-adjoint L, le propagateur G est un noyau anti-symétrique satisfaisant :

(8.11) $$L_x G(x, x') = 0$$

d) Envisageons en particulier l'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte et l'opérateur Δ, hyperbolique normal, relatif à la métrique de cet espace. Si $D_0^-(x', x)$ et $D_0^+(x', x)$ sont les noyaux élémentaires correspondants, $D_0^-(x', x)$ satisfait pour chaque x'

$$\Delta_x D_0^-(x', x) = \delta(x, x')$$

et pour chaque x' a son support dans le passé de x'. De même :

$$\Delta_x D_0^+(x', x) = \delta(x, x')$$

et $D_0^+(x', x)$ a, pour chaque x', son support dans le futur de x'.

On sait que le *scalaire-distribution* $D_0(x)$ *de Jordan-Pauli* peut s'écrire

$$D_0(x) = D^{ret}(x) - D^{av}(x)$$

où D^{ret} a son support sur le demi-cône futur de l'origine et D^{av} sur le demi-cône passé de l'origine et où, avec notre définition de l'opérateur Δ,

$$\Delta D^{ret}(x) = -\delta(x) \qquad \Delta D^{av}(x) = -\delta(x)$$

Posons maintenant :

$$D^{ret}(x, x') = D^{ret}(x - x') \qquad D^{av}(x, x') = D^{av}(x - x')$$

et

(8.12) $$D_0(x, x') = D_0(x - x')$$

On a :

$$\Delta_x D^{ret}(x', x) = \delta(x', x') \qquad \Delta_x D^{av}(x', x) = \delta(x, x')$$

où, pour chaque x', $D^{ret}(x', x)$ a son support sur le demi-cône passé de x' et $D^{av}(x', x)$ sur le demi-cône futur de x'. Du théorème d'unicité il résulte :

$$D^{ret}(x', x) = D_0^-(x', x) \qquad D^{av}(x', x) = D_0^+(x', x)$$

Il vient par suite :

$$D_0(x', x) = D_0^-(x', x) - D_0^+(x', x)$$

soit d'après l'antisymétrie de $D_0(x, x')$:

(8.13) $$D_0(x, x') = D_0^+(x', x) - D_0^-(x', x)$$

Ainsi $D_0(x, x')$ *est le propagateur scalaire associé sur l'espace-temps de Minkowski à l'opérateur* Δ. *C'est le « propagateur de Jordan-Pauli ».*

8 *bis*. Solutions d'équations-homogènes. Problème de Cauchy.

a) Soit ψ une fonction à support compact dans Ω. Considérons le scalaire-distribution u défini par composition au sens de Volterra du propagateur G et d'un scalaire-distribution v. D'après la définition de cette composition

(8 *bis*-1) $$u(x') = \int G(x, x') v(x) \eta(x)$$

on a

(8 *bis*-2) $$\langle u, \psi \rangle = \langle v, \varphi \rangle$$

où la fonction

(8 *bis*-3) $$\varphi(x) = \langle G(x, x'), \psi(x') \rangle$$

satisfait $L^* \varphi = 0$. La distribution u est définie si (8 *bis*-2) est définie quelle que soit $\psi \in \mathscr{D}_\Omega^k$, en particulier, d'après l'étude qui précède, si v est *à support compact dans le passé et le futur.*

Si ψ est à support compact, on a :

$$<\mathrm{L}u, \psi> = <u, \mathrm{L}^*\varphi> = <v, \varkappa>$$

où

$$\varkappa(x) = <\mathrm{G}(x, x'), \mathrm{L}_{x'}\psi(x')> = <\mathrm{L}^*_{x'}\mathrm{G}(x, x'), \psi(x')> = 0$$

Par suite, au sens des distributions,

(8 *bis*-4) $$\mathrm{L}u = 0$$

Inversement, soit u un scalaire-distribution dans Ω solution de (8 *bis*-4). Considérons un recouvrement de Ω par deux sous-ensembles fermés Ω_+ et Ω_- respectivement compacts dans le passé ou dans le futur. Un tel recouvrement peut être réalisé par partage par une section d'espace. D'après Schwartz, on sait que

$$u = u_1 + u_2$$

où $\mathrm{S}(u_1) \subset \Omega_+$ et $\mathrm{S}(u_2) \subset \Omega_-$. Posons :

$$\mathrm{L}u_1 = -v \qquad \mathrm{L}u_2 = v$$

où $\mathrm{S}(v)$ est dans l'intersection $\Omega_+ \cap \Omega_-$, donc est compact dans le passé et dans le futur. D'après la propriété de support de u_1, on a, en vertu de (7.7),

$$u_1(x') = -\int \mathrm{E}^-(x', x)v(x)\eta(x)$$

et, d'après la propriété de support de u_2, on a de même en vertu de (7.7) :

$$u_2(x') = \int \mathrm{E}^+(x', x)v(x)\eta(x)$$

Il en résulte :

$$u(x') = \int \mathrm{G}(x, x')v(x)\eta(x)$$

Ainsi :

Théorème. — Toute solution distribution d'une équation homogène dans Ω peut être obtenue par composition au sens de Volterra du propagateur G *avec un scalaire-distribution qu'on peut choisir à support compact dans le passé et dans le futur* [1].

b) Soit v un scalaire-distribution à support compact dans le passé et le futur, et supposons qu'il existe une solution u à support compact dans le passé et dans le futur pour l'équation :

(8 *bis*-5) $$\mathrm{L}u = v$$

u étant à support compact dans le passé, on a :

$$u(x') = \int \mathrm{E}^-(x', x)v(x)\eta(x)$$

---

[1] Ce théorème est dû à Y. Fourès-Bruhat, *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 251, p. 29-31 (1960) [3].

u étant à support compact dans le futur, on a :

$$u(x') = \int E^+(x', x)v(x)\eta(x)$$

Il en résulte que, nécessairement :

(8 *bis*-6) $$\int G(x, x')v(x)\eta(x) = 0$$

Inversement, si (8 *bis*-6) est satisfaite, le scalaire-distribution :

$$u(x') = \int E^-(x', x)v(x)\eta(x) = \int E^+(x', x)v(x)\eta(x)$$

est solution de (8 *bis*-5) et son support est compact dans le passé et le futur, puisque sous-ensemble fermé respectivement du futur de $S(v)$ et du passé de $S(v)$. Ainsi :

Théorème. — Pour que l'équation

$$Lu = v$$

où v est un scalaire-distribution à support compact dans le passé et le futur, admette une solution à support compact dans le passé et le futur, il faut et il suffit que :

$$\int G(x, x')v(x)\eta(x) = 0$$

c) Le propagateur G intervient aussi de manière simple dans la solution du *problème général de Cauchy.*

Considérons le bitenseur-distribution, 1-tenseur en x et scalaire en x', défini par :

(8 *bis*-7) $$A^-(\varphi) = E^-(x', x)d_x\varphi(x) - \varphi(x)d_x E^-(x', x) - b\varphi(x)E^-(x', x)$$

où b est le 1-tenseur en x apparaissant dans l'expression de L_x et où φ est une fonction arbitraire de classe C^{k+2}. Pour x' fixé, on a $S[A^-(\varphi)] \subset \mathscr{E}_-(x')$ et la relation (5.5) donne :

(8 *bis*-8) $$-\delta_x A^-(\varphi) = \delta(x, x')\varphi(x) - E^-(x', x)L_x\varphi(x)$$

Soit Σ une hypersurface orientée dans l'espace, définissant dans Ω deux composantes connexes ouvertes Ω' et Ω'' telles que $\overline{\Omega}' = \Omega' \cup \Sigma$ soit compacte vers le passé et $\overline{\Omega}'' = \Omega'' \cup \Sigma$ compacte vers le futur. Si $\psi \in \mathscr{D}^k_\Omega$, considérons le vecteur $\omega^-(\varphi)$ défini en x par :

$$\omega^-(\varphi) = \langle A^-(\varphi), \psi(x') \rangle$$

Son support est dans le passé du support de ψ. Si nous introduisons le flux de ce vecteur à travers Σ orientée de Ω'' vers Ω', l'application linéaire continue

$$\psi \to \mathrm{flux}_\Sigma \omega^-(\varphi)$$

définit un scalaire-distribution en x'

(8 *bis*-9) $$\mathrm{flux}_\Sigma A^-(\varphi)$$

qui ne dépend que des données de Cauchy définies par φ sur Σ. Si ψ a son support dans Ω'', il est clair que $\mathrm{flux}_\Sigma \omega^-(\varphi)$ est nul. Par suite (8 *bis*-9) a son support dans $\overline{\Omega}'$.

(8 *bis*-9) peut aussi être défini de la manière suivante : considérons la composition au sens de Volterra de $\delta_x A^-(\varphi)$ et de la distribution ε' défini par une fonction égale à 1 dans Ω', à 0 dans Ω'' :

$$u(x') = \int \delta_x A^-(\varphi)\varepsilon'(x)\eta(x)$$

Si $\psi \in \mathscr{D}^k_\Omega$, on a :

$$<u, \psi> = <\varepsilon', \chi>$$

où

$$\chi(x) = <\delta_x A^-(\varphi), \psi(x')> = \delta_x \omega^-(\varphi)$$

Par suite, d'après la formule de Stokes :

$$<u, \psi> = \int_{\Omega'} \chi(x)\eta(x) = \int_{\Omega'} \delta_x \omega^-(\varphi)\eta(x) = \text{flux}_\Sigma \omega^-(\varphi)$$

Ainsi :

(8 *bis*-10) $$\text{flux}_\Sigma A^-(\varphi) = \int \delta_x A^-(\varphi)\varepsilon'(x)\eta(x)$$

Nous désignons par $A^+(\varphi)$ le bitenseur-distribution qui se déduit de $A^-(\varphi)$ par la substitution de $E^+(x', x)$ à $E^-(x', x)$. Avec des définitions et notations symétriques des précédentes, on voit que :

$$\text{flux}_\Sigma A^+(\varphi) = -\int \delta_x A^+(\varphi)\varepsilon''(x)\eta(x)$$

a son support dans $\overline{\Omega}''$. Introduisons le bitenseur-distribution $B(\varphi) = A^+(\varphi) - A^-(\varphi)$ dans $\Omega \times \Omega$. Avec la même définition pour le flux, il vient :

$$\text{flux}_\Sigma B(\varphi) = \text{flux}_\Sigma A^+(\varphi) - \text{flux}_\Sigma A^-(\varphi)$$

d) Soit φ une fonction de classe C^{k+2} dans Ω solution de l'équation homogène :

(8 *bis*-11) $$L_x \varphi(x) = 0$$

Si $\psi \in \mathscr{D}^k_\Omega$, il résulte de (8 *bis*-8)

$$\varphi(x) <\delta(x, x'), \psi(x')> = -<\delta_x A^-(\varphi), \psi(x')>$$

Soit

(8 *bis*-12) $$\varphi(x)\psi(x) = -\delta_x \omega^-(\varphi)$$

Soit φ' (resp. φ'') une fonction égale à φ dans Ω' (resp. Ω''), à 0 dans Ω'' (resp. Ω'). De (8 *bis*.12), il résulte par intégration

$$\int_\Omega \varphi'(x)\psi(x)\eta(x) = -\text{flux}_\Sigma \omega^-(\varphi)$$

On en déduit qu'au sens des distributions dans Ω :

$$\varphi'(x) = -\text{flux}_\Sigma A^-(\varphi)$$

De même, compte tenu de l'orientation de Σ :

$$\varphi''(x) = \text{flux}_\Sigma A^+(\varphi)$$

Mais *au sens des distributions dans* Ω, $\varphi = \varphi' + \varphi''$. Il en résulte qu'*au même sens* :

(8 *bis*.13) $$\varphi(x') = \mathrm{flux}_\Sigma B(\varphi)$$

où $B(\varphi)$ est le bitenseur-distribution construit à partir du *propagateur* G au moyen de la formule

(8 *bis*.14) $$B(\varphi) = G(x, x')d_x\varphi(x) - \varphi(x)d_x G(x, x') - b\varphi(x)G(x, x')$$

de telle sorte que le second membre de (8 *bis*.13) est manifestement solution de l'équation homogène. Cette formule fournit ainsi une expression de la solution unique du problème général de Cauchy relatif à Σ et à l'équation homogène $L\varphi = 0$.

9. Opérateurs différentiels linéaires sur les tenseurs.

a) Soit toujours V_n une variété différentiable orientée de classe C^{h+1} munie d'une métrique riemannienne $(g_{\alpha\beta})$ *de type hyperbolique normal*, de classe C^h.

Considérons l'opérateur différentiel linéaire $\overline{\Delta}$ du second ordre, sur les tenseurs T d'ordre p, défini par :

(9.1) $$(\overline{\Delta}T)_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = -\nabla^\rho\nabla_\rho T_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = -g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$$

qui transforme tout tenseur de classe C^{k+2} $(0 \leqslant k \leqslant h-2)$ en un tenseur de classe C^k. Cet opérateur admet pour cône caractéristique en x le cône isotrope C_x de la variété riemannienne.

Si U est un autre tenseur d'ordre p de classe C^{k+2}, on a :

$$(\overline{\Delta}T, U) = -U^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\nabla^\rho\nabla_\rho T_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = -\nabla^\rho(U^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\nabla_\rho T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}) + \nabla^\rho U^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\nabla_\rho T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$$

Désignons par $V(T, U)$ le vecteur :

(9.2) $$V_\rho(T, U) = U^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\nabla_\rho T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$$

Avec cette notation, il vient :

(9.3) $$(\overline{\Delta}T, U) = (\nabla T, \nabla U) + \delta V(T, U)$$

De (9.3) on déduit :

(9.4) $$(\overline{\Delta}T, U) - (T, \overline{\Delta}U) = \delta\{V(T, U) - V(U, T)\}$$

et le premier membre de (9.4) est une divergence dans V_n.

Si U est un tenseur et T est un tenseur-distribution dans V_n tels que $S(U) \cap S(T)$ soit compact, on déduit de (9.4) par le même raisonnement qu'au § 5 :

(9.5) $$<\overline{\Delta}T, U> = <T, \overline{\Delta}U>$$

b) Plus généralement, donnons-nous sur V_n un champ C d'opérateurs linéaires C_x sur les tenseurs d'ordre p et un champ B d'applications linéaires des tenseurs d'ordre $(p+1)$ dans les tenseurs d'ordre p, tous deux de classe C^{h+2}. Une telle application linéaire en x peut être définie par l'ensemble de n opérateurs linéaires B^ρ_x $(\rho = 1, \ldots, n)$ sur les tenseurs d'ordre p en ce point. Nous désignons par $B_x^{*\rho}$ et C_x^* les opérateurs transposés par rapport à la métrique ou au produit scalaire noté $(\ ,\ )$ correspondant.

Nous pouvons introduire l'opérateur différentiel linéaire du second ordre sur les tenseurs T d'ordre p défini par :

$$\text{(9.6)} \qquad LT = \overline{\Delta}T + B^\rho \nabla_\rho T + CT$$

qui transforme tout tenseur de classe C^{k+2} en un tenseur de classe C^k.

L'opérateur *adjoint* L^* de L se trouve défini par :

$$\text{(9.7)} \qquad L^*U = \overline{\Delta}U - \nabla_\rho(B^{*\rho}U) + C^*U$$

Pour que L soit *auto-adjoint*, il faut et il suffit que :

$$B^{*\rho} = -B^\rho \qquad C^* = C - \nabla_\rho B^\rho$$

Il en est en particulier ainsi en l'absence de termes en dérivées premières $(B^\rho = 0)$ si $C^* = C$.

Si T et U sont des tenseurs d'ordre p, de classe C^{k+2}, on a :

$$(LT, U) - (T, L^*U) = (\overline{\Delta}T, U) - (T, \overline{\Delta}U) + (B^\rho\nabla_\rho T, U) + (T, \nabla_\rho(B^{*\rho}U)) + (CT, U) - (T, C^*U)$$

B_x^ρ et $B_x^{*\rho}$ étant transposés, il vient :

$$(B^\rho\nabla_\rho T, U) + (T, \nabla_\rho(B^{*\rho}U)) = (\nabla_\rho T, B^{*\rho}U) + (T, \nabla_\rho(B^{*\rho}U)) = \nabla_\rho(T, B^{*\rho}U) = \nabla_\rho(B^\rho T, U)$$

Désignons par W(T, U) le vecteur défini par :

$$\text{(9.8)} \qquad W^\rho(T, U) = (B^\rho T, U)$$

C_x et C_x^* étant transposés, on obtient ainsi, compte tenu de (9.4)

$$\text{(9.9)} \qquad (LT, U) - (T, L^*U) = \delta\{V(T, U) - V(U, T) - W(T, U)\}$$

Si U est un tenseur et T un tenseur-distribution dans V_n tels que $S(U) \cap S(T)$ soit compact, il résulte bien de (9.9) que :

$$\text{(9.10)} \qquad \langle LT, U\rangle = \langle T, L^*U\rangle$$

10. L'opérateur laplacien sur un tenseur.

a) Restreignons-nous d'abord aux tenseurs *antisymétriques*. Sur ces tenseurs, le laplacien Δ de Georges de Rham se trouve défini par la formule :

$$\text{(10.1)} \qquad \Delta T = (d\delta + \delta d)T$$

Si l'on explicite cet opérateur en termes de dérivées covariantes, il vient (1) :

$$(\Delta T)_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = -\nabla^\rho\nabla_\rho T_{\alpha_1\ldots\alpha_p} + \frac{1}{(p-1)!}\varepsilon^{\lambda\beta_2\ldots\beta_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} R_{\lambda\mu} T^\mu{}_{\beta_2\ldots\beta_p} - \frac{1}{(p-2)!}\varepsilon^{\lambda\mu\beta_3\ldots\beta_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} R_{\lambda\rho,\mu\sigma} T^{\rho\sigma}{}_{\beta_3\ldots\beta_p}$$

(1) Voir LICHNEROWICZ [1], p. 2.

où ε est le tenseur-indicateur de Kronecker. La formule précédente peut être mise sous la forme :

(10.2) $$(\Delta T)_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = -\nabla^\rho \nabla_\rho T_{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \sum_k R_{\alpha_k \mu} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\mu}{}_{\dots \alpha_p} - \sum_{k \neq l} R_{\alpha_k \rho, \alpha_l \sigma} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\rho \dots \sigma}{}_{\dots \alpha_p}$$

où dans le deuxième terme du second membre μ occupe la k^e place, dans le troisième terme ρ et σ respectivement les k^e et l^e places.

b) Pour tout tenseur T (antisymétrique ou non), *nous appelons laplacien du tenseur* T *et désignons par* ΔT *le tenseur défini par la formule* (10.2). L'opérateur qui coïncide ainsi sur les tenseurs antisymétriques avec le laplacien introduit par Georges de Rham est *auto-adjoint*. En effet, posons :

(10.3) $$(\Gamma T)_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \sum_k R_{\alpha_k \mu} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\mu}{}_{\dots \alpha_p} - \sum_{k \neq l} R_{\alpha_k \rho, \alpha_l \sigma} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\rho \dots \sigma}{}_{\dots \alpha_p}$$

Si U est un tenseur arbitraire d'ordre p :

$$(\Gamma T, U) = \sum_k R_{\mu\nu} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\mu}{}_{\dots \alpha_p} U^{\alpha_1 \dots \nu \dots \alpha_p} - \sum_{k \neq l} R_{\mu\rho, \nu\sigma} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\rho \dots \sigma}{}_{\dots \alpha_p} U^{\alpha_1 \dots \mu \dots \nu \dots \alpha_p}$$

où, dans la première somme, les indices μ et ν occupent la k^e place dans T et U et, dans la deuxième somme, les indices μ et ρ occupent la k^e place, les indices ν et σ la l^e place. Des propriétés de symétrie du tenseur de courbure il résulte

$$(\Gamma T, U) = (T, \Gamma U)$$

c'est-à-dire $\Gamma^* = \Gamma$, ce qui démontre le caractère auto-adjoint de Δ.

Sur l'expression (10.2), on voit que si le tenseur T d'ordre p présente une symétrie ou une antisymétrie par rapport à un couple d'indices, il en est de même pour ΔT. *Ainsi* Δ *respecte les symétries du tenseur sur lequel il opère.*

On vérifie enfin aisément que l'*opérateur* Δ *commute avec la contraction.* En effet

$$g^{\alpha_1\alpha_2} \sum_k R_{\alpha_k \mu} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\mu}{}_{\dots \alpha_p} = 2\, R_{\mu\nu} T^{\mu\nu}{}_{\alpha_3 \dots \alpha_p} + \sum_{k \geqslant 3} R_{\alpha_k \mu} T^{\nu}{}_{\nu \alpha_3 \dots}{}^{\mu}{}_{\dots \alpha_p}$$

De même :

$$g^{\alpha_1\alpha_2} \sum_{k \neq l} R_{\alpha_k \rho, \alpha_l \sigma} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\rho \dots \sigma}{}_{\dots \alpha_p} = 2\, R_{\rho\sigma} T^{\rho\sigma}{}_{\alpha_3 \dots \alpha_p} + 2 \sum_{l \geqslant 3} R_{\nu\rho, \alpha_l \sigma} (T^{\nu\rho}{}_{\alpha_3 \dots}{}^{\sigma}{}_{\dots \alpha_p} + T^{\rho\nu}{}_{\alpha_3 \dots}{}^{\sigma}{}_{\dots \alpha_p}) + \sum_{\substack{k, l \geqslant 3 \\ k \neq l}} R_{\alpha_k \rho, \alpha_l \sigma} T^{\nu}{}_{\nu \alpha_3 \dots}{}^{\rho \dots \sigma}{}_{\dots \alpha_p}$$

où le deuxième terme du second membre est nul par raison de symétrie. Par suite :

$$g^{\alpha_1\alpha_2} (\Gamma T)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} = \sum_{k \geqslant 3} R_{\alpha_k \mu} T^{\nu}{}_{\nu \alpha_3 \dots}{}^{\mu}{}_{\dots \alpha_p} - \sum_{\substack{k, l \geqslant 3 \\ k \neq l}} R_{\alpha_k \rho, \alpha_l \sigma} T^{\nu}{}_{\nu \alpha_3 \dots}{}^{\rho \dots \sigma}{}_{\dots \alpha_p}$$

Ainsi, si nous posons :

$$T'_{\alpha_3 \dots \alpha_p} = T^{\nu}{}_{\nu \alpha_3 \dots \alpha_p}$$

il vient :

$$g^{\alpha_1\alpha_2} (\Gamma T)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} = (\Gamma T')_{\alpha_3 \dots \alpha_p}$$

ce qui démontre la commutation de Δ avec la contraction.

c) Pour un tenseur T d'ordre 2, on a :

(10.4) $$(\Delta T)_{\alpha\beta} = -\nabla^{\rho}\nabla_{\rho} T_{\alpha\beta} + R_{\alpha\rho} T^{\rho}{}_{\beta} + R_{\beta\rho} T_{\alpha}{}^{\rho} - 2\, R_{\alpha\rho,\beta\sigma} T^{\rho\sigma}$$

Supposons la variété riemannienne V_n telle que son *tenseur de Ricci soit à dérivée covariante nulle* :

(10.5) $$\nabla_{\gamma} R_{\alpha\beta} = 0$$

Nous nous proposons d'établir sous cette hypothèse deux formules qui nous seront utiles dans la suite. T étant un tenseur d'ordre 2, étudions le tenseur $\delta\Delta T$. De (10.4) on déduit, compte tenu de (10.5) :

(10.6) $$(\delta\Delta T)_{\beta} = \nabla^{\alpha}\nabla^{\rho}\nabla_{\rho} T_{\alpha\beta} - R_{\alpha\rho}\nabla^{\alpha} T^{\rho}{}_{\beta} - R_{\beta\rho}\nabla^{\alpha} T_{\alpha}{}^{\rho} + 2\, R_{\alpha\rho,\beta\sigma}\nabla^{\alpha} T^{\rho\sigma}$$

De l'identité de Ricci, il résulte :

$$\nabla^{\alpha}\nabla^{\rho}\nabla_{\rho} T_{\alpha\beta} = \nabla^{\rho}\nabla^{\alpha}\nabla_{\rho} T_{\alpha\beta} - R^{\sigma}{}_{\rho,}{}^{\alpha\rho}\nabla_{\sigma} T_{\alpha\beta} - R^{\sigma}{}_{\alpha,}{}^{\alpha\rho}\nabla_{\rho} T_{\sigma\beta} - R^{\sigma}{}_{\beta,}{}^{\alpha\rho}\nabla_{\rho} T^{\rho\sigma}$$

Soit :

$$\nabla^{\alpha}\nabla^{\rho}\nabla_{\rho} T_{\alpha\beta} = \nabla^{\rho}\nabla^{\alpha}\nabla_{\rho} T_{\alpha\beta} - R_{\alpha\rho,\beta\sigma}\nabla^{\alpha} T^{\rho\sigma}$$

En appliquant de nouveau l'identité de Ricci, on a :

$$\nabla^{\alpha}\nabla^{\rho}\nabla_{\rho} T_{\alpha\beta} = \nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\nabla^{\alpha} T_{\alpha\beta} - \nabla^{\rho}(R^{\sigma}{}_{\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\rho} T_{\sigma\beta} + R^{\sigma}{}_{\beta,}{}^{\alpha}{}_{\rho} T_{\alpha\sigma}) - R_{\alpha\rho,\beta\sigma}\nabla^{\alpha} T^{\rho\sigma}$$

Soit :

$$\nabla^{\alpha}\nabla^{\rho}\nabla_{\rho} T_{\alpha\beta} = \nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\nabla^{\alpha} T_{\alpha\beta} + R_{\alpha\sigma}\nabla^{\alpha} T^{\sigma}{}_{\beta} - 2\, R_{\alpha\rho,\beta\sigma}\nabla^{\alpha} T^{\rho\sigma}$$

De (10.6) on déduit ainsi :

$$(\delta\Delta T)_{\beta} = \nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\nabla^{\alpha} T_{\alpha\beta} - R_{\beta\rho}\nabla^{\alpha} T_{\alpha}{}^{\rho} = -\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}(\delta T)_{\beta} + R_{\beta\rho}(\delta T)^{\rho}$$

c'est-à-dire la formule :

$$\delta\Delta T = \Delta\delta T$$

Si A est une forme linéaire arbitraire, considérons son laplacien :

$$(\Delta A)_{\beta} = -\nabla^{\rho}\nabla_{\rho} A_{\beta} + R_{\beta\rho} A_{\rho}$$

et prenons sa dérivée covariante :

$$\nabla_{\alpha}(\Delta A)_{\beta} = -\nabla_{\alpha}\nabla^{\rho}\nabla_{\rho} A_{\beta} + R_{\beta\rho}\nabla_{\alpha} A^{\rho}$$

De l'identité de Ricci, on déduit :

$$\nabla_{\alpha}\nabla^{\rho}\nabla_{\rho} A_{\beta} = \nabla^{\rho}\nabla_{\alpha}\nabla_{\rho} A_{\beta} - R_{\alpha\sigma}\nabla^{\sigma} A_{\beta} + R_{\alpha\rho,\beta\sigma}\nabla^{\rho} A^{\sigma}$$

soit en appliquant une seconde fois l'identité de Ricci :

$$\nabla_{\alpha}\nabla^{\rho}\nabla_{\rho} A_{\beta} = \nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\nabla_{\alpha} A_{\beta} - R_{\alpha\sigma}\nabla^{\sigma} A_{\beta} + 2\, R_{\alpha\rho,\beta\sigma}\nabla^{\rho} A^{\sigma}$$

Nous obtenons :

$$\nabla_{\alpha}(\Delta A)_{\beta} = -\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\nabla_{\alpha} A_{\beta} + R_{\alpha\rho}\nabla^{\rho} A_{\beta} + R_{\beta\rho}\nabla_{\alpha} A^{\rho} - 2\, R_{\alpha\rho,\beta\sigma}\nabla^{\rho} A^{\sigma}$$

Ainsi :

$$\nabla\Delta A = \Delta\nabla A$$

Nous énoncerons :

Théorème. — Sur une variété riemannienne V_n *dont le tenseur de Ricci est à dérivée covariante nulle, si* T *est un tenseur d'ordre* 2 *et* A *un tenseur d'ordre* 1, *on a les formules* :

$$\delta\Delta T = \Delta\delta T \tag{10.7}$$

et

$$\nabla\Delta A = \Delta\nabla A \tag{10.8}$$

11. Noyaux élémentaires et propagateurs tensoriels.

Sur la variété riemannienne V_n, les opérateurs différentiels envisagés sur les tenseurs d'ordre p peuvent s'écrire :

$$LT = \Delta T + B^\rho \nabla_\rho T + CT \tag{11.1}$$

Les considérations développées pour les noyaux élémentaires et propagateurs dans le cas scalaire, s'étendent d'elles-mêmes sans modification aux opérateurs tensoriels précédents.

a) Étant donnée une boule ouverte Ω, il existe dans $\Omega \times \Omega$ deux noyaux élémentaires $E^{(p)\pm}(x', x)$, c'est-à-dire, pour chaque $x' \in \Omega$, deux systèmes de distributions dans Ω à support respectivement dans et sur $\Gamma^+_{x'}$, ou dans et sur $\Gamma^-_{x'}$ et vérifiant l'équation :

$$L^*_x E^{(p)\pm}(x', x) = (\overset{p}{\otimes}\tau)\delta(x, x') \tag{11.2}$$

où le second membre est le bitenseur de Dirac d'ordre p introduit au § 4.

A chaque point de Ω attachons un repère et désignons par (e_α) le repère en x et par $(e_{\lambda'})$ le repère en x'; $E^{(p)+}(x', x)$ est défini par le système

$$E^{(p)+}_{\alpha_1 \dots \alpha_p \lambda'_1 \dots \lambda'_p}(x', x) \tag{11.3}$$

de distributions dans $\Omega \times \Omega$. De l'unicité de (11.3) pour ces repères et du caractère tensoriel en x' du second membre de (11.2), il résulte que les $E^{(p)+}_{\alpha_1 \dots \alpha_p \lambda'_1 \dots \lambda'_p}$ présentent le caractère tensoriel relativement aux changements de base en x'.

D'autre part, pour chaque $x \in \Omega$, on obtient un système de distributions dans Ω vérifiant l'équation

$$L_{x'} E^{(p)\pm}(x', x) = (\overset{p}{\otimes}\tau)\delta(x, x')$$

et les $E^{(p)\pm}_{\alpha_1 \dots \alpha_p \lambda'_1 \dots \lambda'_p}$ présentent aussi le caractère tensoriel relativement aux changements de base en x. Nous pouvons résumer les résultats essentiels dans les énoncés suivants :

Théorème. — Étant donnée une boule ouverte Ω, *il existe pour l'opérateur* L *sur les tenseurs d'ordre* p *deux noyaux élémentaires* $E^{(p)\pm}(x', x)$ *dans* $\Omega \times \Omega$, *c'est-à-dire deux bitenseurs-distributions d'ordre* p, *satisfaisant relativement à* x *l'équation aux dérivées partielles*

$$L^*_x E^{(p)\pm}(x', x) = (\overset{p}{\otimes}\tau)\delta(x, x') \tag{11.4}$$

et à supports pour chaque x' respectivement dans et sur $\Gamma^+_{x'}$ et $\Gamma^-_{x'}$. Ces noyaux satisfont relativement à x'

$$\mathrm{L}_{x'}\mathrm{E}^{(p)\pm}(x', x) = (\overset{p}{\otimes}\tau)\delta(x, x'); \tag{11.5}$$

ces noyaux élémentaires sont uniques.

Théorème d'unicité. — *Tout tenseur-distribution* T *dans* Ω *qui est solution de l'équation homogène* $\mathrm{LT} = 0$ *et dont le support est compact dans le futur (ou le passé) est nécessairement nul.*

b) Introduisons le bitenseur-distribution défini dans $\Omega \times \Omega$ par :

$$\mathrm{E}^{(p)}(x, x') = \mathrm{E}^{(p)+}(x', x) - \mathrm{E}^{(p)-}(x', x) \tag{11.6}$$

Pour chaque $x' \in \Omega$, le support dans Ω est dans et sur le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$. De plus il satisfait, relativement à x, l'équation homogène :

$$\mathrm{L}^*_x\mathrm{E}^{(p)}(x, x') = 0 \tag{11.7}$$

Au noyau $\mathrm{E}^{(p)}$ nous donnons le nom de *propagateur tensoriel* relatif à l'opérateur L.

A l'opérateur adjoint L^* correspond le propagateur tensoriel $\mathrm{E}^{*(p)}(x, x')$ qui satisfait relativement à x l'équation homogène :

$$\mathrm{L}_x\mathrm{E}^{*(p)}(x, x') = 0$$

Entre $\mathrm{E}^{(p)}$ et $\mathrm{E}^{*(p)}$ on a la relation :

$$\mathrm{E}^{*(p)}(x, x') = -\mathrm{E}^{(p)}(x', x) \tag{11.8}$$

Supposons l'opérateur L *auto-adjoint.* On a alors :

$$\mathrm{E}^{(p)+}(x, x') = \mathrm{E}^{(p)-}(x', x)$$

et le propagateur tensoriel $\mathrm{E}^{(p)}(x, x')$ est *un noyau antisymétrique en* (x, x').

Les considérations développées pour les propagateurs dans le cas scalaire, relativement aux solutions de l'équation homogène, s'étendent sans modifications aux propagateurs tensoriels associés aux opérateurs L précédents.

12. Propagateurs antisymétriques associés à l'opérateur $(\Delta + \mu)$ sur les formes.

a) Considérons l'opérateur auto-adjoint sur les tenseurs T d'ordre p défini par :

$$(\Delta + \mu)\mathrm{T}$$

où Δ est le laplacien introduit au § 10 et μ un *scalaire constant.*

A tout tenseur antisymétrique, l'opérateur $(\Delta + \mu)$ fait correspondre un tenseur antisymétrique. Ainsi $(\Delta + \mu)$ *opère sur les p-formes.* En antisymétrisant les noyaux élémentaires $\mathrm{E}^{(p)\pm}(x', x)$ relatifs à notre opérateur, on voit qu'il existe deux *noyaux antisymétriques* $\mathrm{G}^{(p)\pm}(x', x)$ qui, pour chaque x', satisfont relativement à x l'équation aux dérivées partielles :

$$(\Delta_x + \mu)\mathrm{G}^{(p)\pm}(x', x) = \delta^{(p)}(x, x') \qquad (p = 0, 1, \ldots, n) \tag{12.1}$$

et sont à supports respectivement dans et sur $\Gamma_{x'}^{+}$ et $\Gamma_{x'}^{-}$. Pour chaque x, ces noyaux définissent deux solutions dans Ω relativement à x' de :

(12.2) $$(\Delta_{x'} + \mu) G^{(p)\pm}(x', x) = \delta^{(p)}(x, x')$$

Ces noyaux sont uniques et

$$G^{(p)+}(x, x') = G^{(p)-}(x', x)$$

b) Nous appelons propagateur antisymétrique d'ordre p relatif à l'opérateur $(\Delta + \mu)$ la bi-p-forme distribution définie par

(12.3) $$G^{(p)}(x, x') = G^{(p)+}(x', x) - G^{(p)-}(x', x)$$

Pour chaque x' dans Ω, le support est dans et sur le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$. $G^{(p)}$ satisfait, relativement à x, l'équation homogène :

(12.4) $$(\Delta_x + \mu) G^{(p)}(x, x') = 0$$

Enfin, le noyau $G^{(p)}(x, x')$ est antisymétrique en x et x'.

c) Les opérateurs Δ_x et $d_{x'}$ commutent sur les formes. De (12.1) on peut donc déduire :

(12.5) $$(\Delta_x + \mu) d_{x'} G^{(p)\pm}(x', x) = d_{x'} \delta^{(p)}(x, x')$$

D'autre part, les opérateurs Δ_x et δ_x, commutant, on a :

(12.6) $$(\Delta_x + \mu) \delta_x G^{(p+1)\pm}(x', x) = \delta_x \delta^{(p+1)}(x, x')$$

De la relation (4.12) soit :

$$\delta_x \delta^{(p+1)}(x, x') = d_{x'} \delta^{(p)}(x, x') \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-1)$$

on déduit par soustraction de (12.5) et (12.6)

$$(\Delta_x + \mu)(\delta_x G^{(p+1)\pm} - d_{x'} G^{(p)\pm}) = 0$$

où, pour chaque x' de Ω

$$\delta_x G^{(p+1)\pm}(x', x) - d_{x'} G^{(p)\pm}(x', x)$$

a son support dans et sur un demi-conoïde caractéristique. Du théorème d'unicité, il résulte ainsi :

(12.7) $$\delta_x G^{(p+1)\pm}(x', x) = d_{x'} G^{(p)\pm}(x', x) \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Par soustraction, on voit que les propagateurs antisymétriques des différents ordres satisfont aux relations différentielles [1]

(12.8) $$\delta_x G^{(p+1)}(x, x') = d_{x'} G^{(p)}(x, x') \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-1)$$

d) Des relations différentielles (12.7) on tire une conséquence simple concernant la composition de Volterra. Soit U une p-forme-distribution $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$ à

(1) LICHNEROWICZ [2].

support *compact dans le futur*. La composition au sens de Volterra (voir § 7) du noyau $G^{(p)+}(x', x)$ et de $U(x)$ ayant un sens, considérons la p-forme-distribution T définie par :

(12.9) $$T(x') = \int G^{(p)+}(x', x) U(x) \eta(x)$$

et étudions sa différentielle extérieure. Celle-ci se déduisant par antisymétrisation de la dérivée covariante, on a pour toute $(p+1)$-forme V *à support compact* :

(12.10) $$< d_{x'} T(x'), V(x') > = (p+1) < T(x'), \delta_{x'} V(x') >$$

Or, d'après la définition de la composition de Volterra :

(12.11) $$< T(x'), \delta_{x'} V(x') > = < U(x), R(x) >$$

où l'on a posé :

$$R(x) = < G^{(p)+}(x', x), \delta_{x'} V(x') >$$

qui peut aussi s'écrire

$$R(x) = \frac{1}{p+1} < d_{x'} G^{(p)+}(x', x), V(x') >$$

soit, en vertu des relations différentielles (12.7) :

$$R(x) = \frac{1}{p+1} < \delta_x G^{(p+1)+}(x', x), V(x') >$$

En posant

$$S(x) = < G^{(p+1)+}(x', x), V(x') >$$

où le support de S est contenu dans $\mathscr{E}_+[S(V)]$, on a d'après (12.10) et (12.11) :

$$< d_{x'} T(x'), V(x') > = < U(x), \delta_x S(x) >$$

L'intersection $\mathscr{E}_+[S(V)] \cap \mathscr{E}_-[S(U)]$ où S(V) est compact et S(U) compact vers le futur est un compact K. Soit α une fonction suffisamment différentiable à support compact, égale à 1 sur un voisinage compact de K. On a :

$$< U(x), \delta_x S(x) > = < U(x), \delta_x \{\alpha(x) S(x)\} > = \frac{1}{p+1} < d_x U(x), \alpha(x) S(x) >$$

Ainsi :

$$< U(x), \delta_x S(x) > = \frac{1}{p+1} < d_x U(x), S(x) >$$

Nous obtenons ainsi, quelle que soit la $(p+1)$-forme V à support compact :

(12.12) $$< d_{x'} T(x'), V(x') > = \frac{1}{p+1} < d_x U(x), S(x) >$$

avec

(12.13) $$S(x) = < G^{(p+1)+}(x', x), V(x') >$$

Les relations (12.12), (12.13) expriment que $d_{x'}T(x')$ est la composition au sens de Volterra de $G^{(p+1)+}(x', x)$ et de $(1/p+1)d_x U(x)$. La p-forme distribution T définie par (12.9) admet donc comme différentielle extérieure :

(12.14) $$d_{x'}T(x') = \frac{1}{p+1}\int G^{(p+1)+}(x', x)d_x U(x)\eta(x) \quad (p=0, 1, \ldots, n-1)$$

e) D'après l'extension aux opérateurs du théorème du § 8 *bis*, toute p-forme distribution T, solution de l'équation homogène

$$(\Delta + \mu)T = 0$$

peut s'écrire au moyen de la composition de Volterra

$$T(x') = \int G^{(p)}(x, x')\, U(x)\eta(x)$$

où $U(x)$ est une p-forme distribution à support compact dans le passé et le futur. Nous dirons que T dérive de la source U.

De

$$T(x') = \int G^{(p)+}(x', x)U(x)\eta(x) - \int G^{(p)-}(x', x)U(x)\eta(x)$$

on déduit d'après (12.14) :

$$d_{x'}T(x') = \frac{1}{p+1}\left\{\int G^{(p+1)+}(x', x)d_x U(x)\eta(x) - \int G^{(p+1)-}(x', x)d_x U(x)\eta(x)\right\}$$

Par suite :

$$d_{x'}T(x') = \frac{1}{p+1}\int G^{(p+1)}(x, x')d_x U(x)\eta(x)$$

et dT, solution de l'équation homogène associée à $(\Delta+\mu)$, dérive de la source $(1/p+1)dU$.

13. Propagateur symétrique associé à l'opérateur $(\Delta + \mu)$ sur les tenseurs symétriques d'ordre 2.

a) L'opérateur auto-adjoint $(\Delta + \mu)$ $(\mu = \text{const.})$ opère sur les *tenseurs symétriques* d'ordre 2.

D'après (10.4) :

(13.1) $$(\Delta T)_{\alpha\beta} + \mu T_{\alpha\beta} = -\nabla^\rho\nabla_\rho T_{\alpha\beta} + R_{\alpha\rho}T^\rho{}_\beta + R_{\alpha\rho}T_\alpha{}^\rho - 2\, R_{\alpha\rho,\beta\sigma}T^{\rho\sigma} + \mu T_{\alpha\beta}$$

Par symétrisation des noyaux élémentaires $E^{(2)\pm}(x', x)$ relatifs à notre opérateur, on voit qu'il existe deux *noyaux symétriques* $K^\pm(x', x)$ ou bi-2-tenseurs-distributions symétriques d'ordre 2, satisfaisant relativement à x

(13.2) $$(\Delta_x + \mu)K^\pm(x', x) = (S^2\tau)\delta(x, x')$$

où τ vérifie (4.1) et où $S^2\tau$ est le bitenseur symétrique :

(13.3) $$(S^2\tau)_{\alpha\beta,\lambda'\mu'} = \tau_{\alpha\lambda'}\tau_{\beta\mu'} + \tau_{\alpha\mu'}\tau_{\beta\lambda'}$$

Pour chaque x' ils sont à supports respectivement dans et sur $\Gamma^{+}_{x'}$ et $\Gamma^{-}_{x'}$. Par rapport à x' ces noyaux vérifient :

(13.4) $$(\Delta_{x'} + \mu)K^{\pm}(x', x) = (S^2\tau)\delta$$

Nous appelons *propagateur symétrique* relatif à $(\Delta + \mu)$ le bi-2-tenseur-distribution symétrique défini par :

$$K(x, x') = K^{+}(x', x) - K^{-}(x', x)$$

Par rapport à x, ce propagateur satisfait l'équation homogène :

(13.5) $$(\Delta_x + \mu)K(x, x') = 0$$

b) (13.2) s'écrit explicitement en coordonnées locales :

(13.6) $$(\Delta_x + \mu)K^{\pm}_{\alpha\beta, \lambda'\mu'} = (\tau_{\alpha\lambda'}\tau_{\beta\mu'} + \tau_{\alpha\mu'}\tau_{\beta\lambda'})\delta$$

Désignons par $K^{\pm}_{\lambda'\mu'}$ et $K_{\lambda'\mu'}$ les contractés en x de $K^{\pm}_{\alpha\beta, \lambda'\mu'}$ et $K_{\alpha\beta, \lambda'\mu'}$:

$$K^{\pm}_{\lambda'\mu'} = g^{\alpha\beta}K^{\pm}_{\alpha\beta, \lambda'\mu'} \qquad K_{\lambda'\mu'} = g^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta, \lambda'\mu'}$$

Ce sont des bitenseurs-distributions scalaires en x et tenseurs symétriques d'ordre 2 en x'. Par contraction de (13.6), il vient, l'opérateur Δ commutant avec la contraction (voir § 10)

$$(\Delta_x + \mu)K^{\pm}_{\lambda'\mu'} = 2\ \tau_{\alpha\lambda'}\tau^{\alpha}_{\mu'}\delta$$

Or :

$$\tau_{\alpha\lambda'}\tau^{\alpha}_{\mu'}\delta = g_{\lambda'\mu'}(x')\delta$$

Il vient ainsi :

(13.7) $$(\Delta_x + \mu)K^{\pm}_{\lambda'\mu'} = 2\ g_{\lambda'\mu'}\delta$$

D'autre part, si $G^{(0)\pm}$ sont les noyaux scalaires relatifs à l'opérateur $\Delta + \mu$ de :

$$(\Delta_x + \mu)G^{(0)\pm} = \delta$$

on déduit par multiplication par $2\ g_{\lambda'\mu'}$, tenseur en x' :

(13.8) $$(\Delta_x + \mu)(2\ g_{\lambda'\mu'}G^{(0)\pm}) = 2\ g_{\lambda'\mu'}\delta$$

En retranchant (13.8) de (13.7) et appliquant le théorème d'unicité, on obtient :

(13.9) $$K^{\pm}_{\lambda'\mu'}(x', x) = 2\ g_{\lambda'\mu'}(x')G^{(0)\pm}(x', x)$$

On en déduit pour les propagateurs correspondants la relation [1] :

(13.10) $$K_{\lambda'\mu'}(x, x') = 2\ g_{\lambda'\mu'}(x')G^{(0)}(x, x')$$

c) Étant donné, sur la variété riemannienne V_n, un vecteur A, *nous désignerons dans la suite par* $\mathscr{D}$A *le tenseur symétrique d'ordre* 2 *obtenu par symétrisation de la dérivée covariante de* A

(13.11) $$(\mathscr{D}A)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta + \nabla_\beta A_\alpha$$

---

[1] LICHNEROWICZ [3].

soit

$$\mathscr{D}\mathrm{A} = \mathscr{L}(\mathrm{A})g$$

où $\mathscr{L}(\mathrm{A})$ est l'opérateur de transformation infinitésimale relatif à A et g le tenseur métrique.

Avec ces notations, proposons-nous d'évaluer $\delta_{x'}[(\mathrm{S}^2\tau)\delta]$. Le résultat ne dépendant pas du choix de τ astreint à satisfaire (4.1), on peut astreindre provisoirement τ à satisfaire en outre (4.11). Il vient :

$$\{\delta_{x'}[(\mathrm{S}^2\tau)\delta]\}_{\alpha\beta\mu'} = -\nabla^{\lambda'}\{(\tau_{\alpha\lambda'}\tau_{\beta\mu'} + \tau_{\alpha\mu'}\tau_{\beta\lambda'})\delta\}$$

soit d'après (4.7) :

$$\{\delta_{x'}[(\mathrm{S}^2\tau)\delta]\}_{\alpha\beta\mu'} = \tau_{\beta\mu'}\nabla_\alpha\delta + \tau_{\alpha\mu'}\nabla_\beta\delta$$

On obtient ainsi *pour tout bitenseur τ satisfaisant* (4.1) :

$$\{\delta_{x'}[(\mathrm{S}^2\tau)\delta]\}_{\alpha\beta\mu'} = \nabla_\alpha(\tau_{\beta\mu'}\delta) + \nabla_\beta(\tau_{\alpha\mu'}\delta)$$

puisque les deux membres ne dépendent pas du choix de τ, soit :

(13.12) $$\delta_{x'}[(\mathrm{S}^2\tau)\delta] = \mathscr{D}_x(\tau\delta)$$

d) Cela posé, supposons la variété riemannienne V_n telle que *son tenseur de Ricci soit à dérivée covariante nulle.* Si $\mathrm{G}^{(1)\pm}$ sont les noyaux élémentaires associés à l'opérateur $(\Delta+\mu)$ sur les formes linéaires, on a :

$$(\Delta_x+\mu)\mathrm{G}^{(1)\pm}(x', x) = \tau\delta(x, x')$$

Sous l'hypothèse faite, ∇_x commute avec Δ_x (voir § 10) et il vient :

$$(\Delta_x+\mu)\nabla_x\mathrm{G}^{(1)\pm}(x', x) = \nabla_x(\tau\delta)$$

En symétrisant, on obtient :

(13.13) $$(\Delta_x+\mu)\mathscr{D}_x\mathrm{G}^{(1)\pm}(x', x) = \mathscr{D}_x(\tau\delta)$$

D'autre part $\delta_{x'}$ commute avec Δ_x et de (13.2) il résulte :

(13.14) $$(\Delta_x+\mu)\delta_{x'}\mathrm{K}^{\pm}(x', x) = \delta_{x'}[(\mathrm{S}^2\tau)\delta]$$

Par soustraction de (13.13) et (13.14) et compte tenu de (13.2), on obtient :

$$(\Delta_x+\mu)(\delta_{x'}\mathrm{K}^{\pm} - \mathscr{D}_x\mathrm{G}^{(1)\pm}) = 0$$

Soit, en vertu du théorème d'unicité,

$$\delta_{x'}\mathrm{K}^{\pm}(x', x) = \mathscr{D}_x\mathrm{G}^{(1)\pm}(x', x)$$

Ainsi, *si V_n est telle que son tenseur de Ricci soit à dérivée covariante nulle, le propagateur* K *relatif à l'opérateur* $(\Delta+\mu)$ *sur les tenseurs symétriques d'ordre 2 satisfait la relation différentielle* (Lichnerowicz [3])

(13.15) $$\delta_{x'}\mathrm{K}(x, x') = \mathscr{D}_x\mathrm{G}^{(1)}(x, x')$$

soit, sous forme explicite,

$$-\nabla^{\lambda'}\mathrm{K}_{\alpha\beta,\lambda'\mu'} = \nabla_\alpha\mathrm{G}^{(1)}_{\beta\mu'} + \nabla_\beta\mathrm{G}^{(1)}_{\alpha\mu'}$$

14. Propagateurs tensoriels relatifs à l'espace-temps de Minkowski.

Nous avons vu que si la variété riemannienne envisagée est l'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte, le propagateur scalaire relatif à l'opérateur Δ n'est autre que le propagateur D_0 de Jordan-Pauli. Proposons-nous d'étudier pour cet espace-temps les propagateurs tensoriels relatifs à l'opérateur Δ.

Pour un tel espace, si U est un tenseur arbitraire :

$$\Delta U = -\nabla^\rho \nabla_\rho U$$

et il est clair que si T est un tenseur à dérivée covariante nulle [1] :

$$\Delta(T \otimes U) = T \otimes \Delta U$$

Cela posé, considérons, avec les notations des §§ 3 et 8, les bi-p-tenseurs :

$$(\otimes^p t) D_0^{\pm}(x', x)$$

où t est le bitenseur de transport qui est à dérivée covariante nulle. On a :

$$\Delta_x[(\otimes^p t) . D_0^{\pm}(x', x)] = (\otimes^p t)\Delta_x D_0^{\pm}(x', x)$$

Soit :

$$\Delta_x[(\otimes^p t) D_0^{\pm}(x', x)] = (\otimes^p t)\delta(x, x')$$

Du théorème d'unicité, on déduit que si $E^{(p)\pm}$ sont les noyaux élémentaires correspondant à l'opérateur Δ sur les tenseurs d'ordre p :

$$E^{(p)\pm}(x', x) = (\otimes^p t) D_0^{\pm}(x', x) \tag{14.1}$$

Il en résulte pour les propagateurs tensoriels correspondants :

$$E^{(p)}(x, x') = (\otimes^p t) D_0(x, x') \tag{14.2}$$

Les propagateurs antisymétriques relatifs à Δ sont donc donnés par :

$$G^{(p)}(x, x') = (\wedge^p t) D_0(x, x') \tag{14.3}$$

et le propagateur symétrique d'ordre 2 par :

$$K(x, x') = (S^2 t) D_0(x, x') \tag{14.4}$$

Ces résultats s'étendent immédiatement aux propagateurs relatifs à l'opérateur $(\Delta + \mu)$ dans l'espace-temps de Minkowski. Si $D(x, x')$ désigne le propagateur scalaire (dit aussi de Jordan-Pauli) relatif à cet opérateur, le même raisonnement montre que le propagateur tensoriel d'ordre p correspondant est $(\otimes^p t) D(x, x')$.

---

[1] Sur une variété riemannienne *arbitraire*, on notera que si T est un tenseur à dérivée covariante nulle, on a

$$\sum_k R_{\alpha_k \rho, \lambda\mu} T_{\alpha_1 \ldots}{}^{\rho}{}_{\ldots \alpha_p} = 0 \tag{1}$$

Par contraction, il en résulte $\Delta T = 0$. Si U est un tenseur quelconque, on déduit de même de (1), $\Delta(T \otimes U) = T \otimes \Delta U$.

II

PROBLÈMES DE QUANTIFICATION EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

15. Commutateur pour le champ électromagnétique libre en présence de terme de masse.

Dans un espace-temps V_4 *de métrique donnée* quelconque, considérons un champ électromagnétique F que nous décrirons au moyen d'une 1-forme potentiel-vecteur φ avec

$$F = d\varphi$$

où d est l'opérateur de différentiation extérieure.

Dans le cas où il existe un terme de masse, φ est astreint à l'équation de champ :

(15.1) $$\delta d\varphi = \varepsilon^2 \varphi \qquad (\varepsilon^2 = \text{const.} \neq 0)$$

ε^2 étant différent de zéro, on déduit de (15.1) par multiplication par $\delta(\delta^2 = 0)$

$$\delta\varphi = 0$$

Par suite (15.1) est équivalente à l'ensemble des deux équations :

(15.2) $$(\Delta - \varepsilon^2)\varphi = 0$$

et

(15.3) $$\delta\varphi = 0$$

φ étant une 1-forme à valeurs dans un espace vectoriel d'opérateurs de l'espace de Hilbert, nous nous proposons d'évaluer le commutateur $[\varphi(x), \varphi(x')]$ $(x, x' \in V_4)$ c'est-à-dire de construire une bi-1-forme distribution **X** à valeurs scalaires, qui pour chaque x' ait son support dans et sur le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$, soit antisymétrique en x et x' et satisfasse relativement à x (ou x') l'équation (15.1) ou le système (15.2), (15.3).

On établit classiquement en relativité restreinte qu'avec nos notations, on a [1] :

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = -\frac{\bar{h}}{i}\left\{ t\mathrm{D}(x, x') - \frac{1}{\varepsilon^2} d_x d_{x'} \mathrm{D} \right\}$$

(1) Voir par exemple Bogolioubov et Chirkov [1], Dunod, Paris, 1960, formule (11.27).

où t est le bitenseur de transport et D le propagateur de Jordan-Pauli relatif à l'opérateur $(\Delta - \varepsilon^2)$. Ceci nous conduit à considérer en relativité générale la bi-1-forme distribution :

$$X = G^{(1)} - \frac{1}{\varepsilon^2} d_x d_{x'} G^{(0)}$$

où $G^{(1)}$ (resp. $G^{(0)}$) est le propagateur d'ordre 1 (resp. 0) associé à l'opérateur $(\Delta - \varepsilon^2)$. Pour chaque x', X a bien son support dans et sur le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$. D'après l'antisymétrie en x, x' de $G^{(1)}$ et $G^{(0)}$ et la commutativité de d_x et $d_{x'}$, X est bien antisymétrique en x, x'.

On a d'autre part :

$$(\Delta_x - \varepsilon^2) X = (\Delta_x - \varepsilon^2) G^{(1)} - \frac{1}{\varepsilon^2} d_x d_{x'} (\Delta_x - \varepsilon^2) G^{(0)}$$

soit

$$(\Delta_x - \varepsilon^2) X = 0$$

et

$$\delta_x X = \delta_x G^{(1)} - \frac{1}{\varepsilon^2} d_{x'} \Delta_x G^{(0)} = \delta_x G^{(1)} - d_{x'} G^{(0)}$$

soit, d'après la relation (12.8), $\delta_x X = 0$. Ainsi (Lichnerowicz [4])

(15.4) $$[\varphi(x), \varphi(x')] = -\frac{\bar{h}}{i} \left(G^{(1)}(x, x') - \frac{1}{\varepsilon^2} d_x d_{x'} G^{(0)}(x, x') \right)$$

nous fournit un commutateur compatible avec le système (15.2), (15.3) et qui se réduit en relativité restreinte au commutateur classique. Comme $d^2 = 0$, (15.4) conduit pour le champ électromagnétique F au commutateur

$$[F(x), F(x')] = -\frac{\bar{h}}{i} d_x d_{x'} G^{(1)}(x, x')$$

16. Commutateur pour le champ électromagnétique libre sans terme de masse.

En l'absence de terme de masse ($\varepsilon^2 = 0$), l'équation (15.1) est invariante par transformation de jauge. Une telle transformation permet d'astreindre φ à la condition de Lorentz (15.3). Nous choisirons alors classiquement, comme équation de champ pour le potentiel-vecteur :

(16.1) $$\Delta \varphi = 0$$

qui entraîne

(16.2) $$\Delta \delta \varphi = 0$$

On peut alors adopter comme commutateur pour le potentiel-vecteur :

(16.3) $$[\varphi(x), \varphi(x')] = -\frac{\bar{h}}{i} G^{(1)}(x, x')$$

où $G^{(1)}$ est le propagateur d'ordre 1 relatif à l'opérateur Δ. De (16.3) il résulte :

$$[\varphi(x), \delta_{x'}\varphi(x')] = -\frac{\bar{h}}{i} d_x G^{(0)}(x, x')$$

et par suite :

(16.4) $$[\delta_x\varphi(x), \delta_{x'}\varphi(x')] = -\frac{\bar{h}}{i}\Delta_x G^{(0)}(x, x') = 0$$

Le commutateur (16.3) est compatible avec (16.1), mais non avec (15.3). Il nous suffit alors d'astreindre les états Φ à la condition supplémentaire $\delta\varphi|\Phi> = 0$ qui, d'après (16.2), ne porte que sur les données initiales d'un problème de Cauchy, ou, en présence d'une définition du vide, à une condition supplémentaire du même type, mais affaiblie.

(16.3) conduit, pour le champ électromagnétique lui-même, au commutateur (Lichnerowicz [2])

$$[F(x), F(x')] = -\frac{\bar{h}}{i} d_x d_{x'} G^{(1)}(x, x')$$

qui correspond formellement au commutateur obtenu au § 15.

On notera que ce commutateur *est compatible avec les équations de Maxwell usuelles*

$$dF = 0 \qquad \delta F = 0$$

On a en effet, d'après les relations différentielles (12.8) :

$$d_x d_{x'} G^{(1)} = d_x \delta_x G^{(2)} = \Delta_x G^{(2)} - \delta_x d_x G^{(2)} = -\delta_x d_x G^{(2)}$$

où $G^{(2)}$ est le propagateur antisymétrique d'ordre 2 relatif à l'opérateur Δ. De $d_x^2 = 0$, $\delta_x^2 = 0$, on déduit que le commutateur est bien compatible avec les équations de Maxwell.

17. Champ gravitationnel varié. Variation du tenseur de courbure.

Sur un espace-temps *donné* V_4, considérons une *variation arbitraire* $h_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique. Nous nous proposons d'établir quelques formules préliminaires relatives à la variation correspondante du tenseur de courbure.

a) Si $\delta g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$, on a :

(17.1) $$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} h_{\rho\sigma} = -h^{\alpha\beta}$$

Pour évaluer le tenseur $X^\gamma_{\alpha\beta} = \delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$, variation des coefficients de la connexion (rapportée à des coordonnées locales), calculons :

$$\delta[\alpha\beta, \rho] = \frac{1}{2}(\partial_\alpha h_{\beta\rho} + \partial_\beta h_{\alpha\rho} - \partial_\rho h_{\alpha\beta})$$

soit :

$$\delta[\alpha\beta, \rho] = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha h_{\beta\rho} + \nabla_\beta h_{\alpha\rho} - \nabla_\rho h_{\alpha\beta}) + h_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$$

Le tenseur X vaut ainsi :

$$X^{\gamma}_{\alpha\beta} = \delta g^{\gamma\rho}[\alpha\beta, \rho] + \frac{1}{2}(\nabla_\alpha h_\beta{}^\gamma + \nabla_\beta h_\alpha{}^\gamma - \nabla^\gamma h_{\alpha\beta}) + h^\gamma{}_\sigma \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$$

soit

$$X^{\gamma}_{\alpha\beta} = -h^\gamma{}_\rho \Gamma^\rho_{\alpha\beta} + h^\gamma{}_\sigma \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\nabla_\alpha h_\beta{}^\gamma + \nabla_\beta h_\alpha{}^\gamma - \nabla^\gamma h_{\alpha\beta})$$

Nous obtenons :

(17.2) $$X^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha h_\beta{}^\gamma + \nabla_\beta h_\alpha{}^\gamma - \nabla^\gamma h_{\alpha\beta})$$

En posant :

(17.3) $$X_{\gamma\alpha\beta} = g_{\gamma\rho} X^\rho_{\alpha\beta}$$

il vient :

(17.4) $$X_{\gamma\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha h_{\beta\gamma} + \nabla_\beta h_{\gamma\alpha} - \nabla_\gamma h_{\alpha\beta})$$

b) Évaluons maintenant la variation du tenseur de courbure dont les composantes s'écrivent en coordonnées locales :

$$R^\alpha{}_{\beta,\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\rho\gamma}\Gamma^\rho_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\rho\delta}\Gamma^\rho_{\beta\gamma}$$

Il vient :

$$\delta R^\alpha{}_{\beta,\gamma\delta} = \partial_\gamma X^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta X^\alpha_{\beta\gamma} + (\Gamma^\alpha_{\rho\gamma} X^\rho_{\beta\delta} - \Gamma^\rho_{\beta\gamma} X^\alpha_{\rho\delta}) - (\Gamma^\alpha_{\rho\delta} X^\rho_{\beta\gamma} - \Gamma^\rho_{\beta\delta} X^\alpha_{\rho\gamma})$$

De :

$$\nabla_\gamma X^\alpha_{\beta\delta} = \partial_\gamma X^\alpha_{\beta\delta} + \Gamma^\alpha_{\rho\gamma} X^\rho_{\beta\delta} - \Gamma^\rho_{\beta\gamma} X^\alpha_{\rho\delta} - \Gamma^\rho_{\delta\gamma} X^\alpha_{\beta\rho}$$

on déduit la formule

(17.5) $$\delta R^\alpha{}_{\beta,\gamma\delta} = \nabla_\gamma X^\alpha_{\beta\delta} - \nabla_\delta X^\alpha_{\beta\gamma}$$

18. Calcul de $\delta R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ et $\delta R^{\alpha\beta,\gamma\delta}$.

Nous considérerons fréquemment dans la suite des tenseurs $H_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ jouissant, comme le tenseur de courbure, des propriétés de symétrie :

(18.1) $$H_{\alpha\beta,\gamma\delta} = -H_{\beta\alpha,\gamma\delta} = -H_{\alpha\beta,\delta\gamma} = H_{\gamma\delta,\alpha\beta}$$

et satisfaisant l'identité :

(18.2) $$\underset{\alpha\beta\gamma}{\mathsf{S}}\, H_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 0$$

où S désigne la sommation après permutation circulaire sur les indices.

L étant un tenseur *arbitraire* d'ordre 4, nous introduirons le symbole $\hat{\Sigma}$, soit $\hat{\Sigma} L_{\alpha\gamma,\beta\delta}$ pour signifier :

$$\hat{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}} L_{\alpha\gamma,\beta\delta} = L_{\alpha\gamma,\beta\delta} + L_{\beta\delta,\alpha\gamma} - L_{\beta\gamma,\alpha\delta} - L_{\alpha\delta,\beta\gamma}$$

Le tenseur obtenu est antisymétrique par rapport au couple (α, β) et par rapport au couple (γ, δ), mais ne jouit pas d'autre propriété de symétrie.

a) Cela posé, évaluons le tenseur

(18.3) $$M_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) = \delta R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$$

qui, d'après sa définition même, vérifie les identités (18.1) et (18.2). On a

$$M_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) = \delta(g_{\alpha\rho} R^{\rho}{}_{\beta,\gamma\delta}) = g_{\alpha\rho}\, \delta R^{\rho}{}_{\beta,\gamma\delta} + h_{\alpha\rho} R^{\rho}{}_{\beta,\gamma\delta}$$

soit d'après (17.5)

(18.4) $$M_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) = \nabla_{\gamma} X_{\alpha\beta\delta} - \nabla_{\delta} X_{\alpha\beta\gamma} + h_{\alpha\rho} R^{\rho}{}_{\beta,\gamma\delta}$$

Or, de (17.4) il résulte :

(18.5) $$2\,(\nabla_{\gamma} X_{\alpha\beta\delta} - \nabla_{\delta} X_{\alpha\beta\gamma}) = \nabla_{\gamma}(\nabla_{\beta} h_{\alpha\delta} + \nabla_{\delta} h_{\alpha\beta} - \nabla_{\alpha} h_{\beta\delta}) - \nabla_{\delta}(\nabla_{\beta} h_{\alpha\gamma} + \nabla_{\gamma} h_{\alpha\beta} - \nabla_{\alpha} h_{\beta\gamma})$$

Désignons par $P(\underline{h})$ l'opérateur sur les tenseurs $\underline{h}$ symétriques d'ordre 2 qui, à un tel tenseur, fait correspondre le tenseur d'ordre 4 défini par :

(18.6) $$P_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) = \widehat{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}} \nabla_{\delta} \nabla_{\beta} h_{\gamma\alpha}$$

De (18.5), il vient :

$$2\,(\nabla_{\gamma} X_{\alpha\beta\delta} - \nabla_{\delta} X_{\alpha\beta\gamma}) = -P_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) + (\nabla_{\gamma}\nabla_{\delta} - \nabla_{\delta}\nabla_{\gamma}) h_{\alpha\beta}$$

soit :

$$2\,(\nabla_{\gamma} X_{\alpha\beta\delta} - \nabla_{\delta} X_{\alpha\beta\gamma}) = -P_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) - h_{\alpha\rho} R^{\rho}{}_{\beta,\gamma\delta} - h_{\beta\rho} R^{\rho}{}_{\alpha,\gamma\delta}$$

En reportant dans (18.4), il vient :

(18.7) $$2\, M_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) = -P_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) + h_{\alpha\rho} R^{\rho}{}_{\beta,\gamma\delta} + h_{\beta\rho} R_{\alpha}{}^{\rho}{}_{,\gamma\delta}$$

b) Considérons d'autre part le tenseur :

(18.8) $$N_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) = g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} g_{\gamma\nu} g_{\delta\rho}\, \delta R^{\lambda\mu,\nu\rho}$$

qui vérifie aussi les identités (18.1) et (18.2). De la relation :

$$\delta R^{\alpha\beta,\gamma\delta} = \delta(g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} g^{\gamma\nu} g^{\delta\rho} R_{\lambda\mu,\nu\rho})$$

on déduit

$$\delta R^{\alpha\beta,\gamma\delta} = g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} g^{\gamma\nu} g^{\delta\rho} M_{\lambda\mu,\nu\rho}(\underline{h}) - \Sigma h^{\alpha\lambda} R_{\lambda}{}^{\beta,\gamma\delta}$$

où Σ désigne la somme de quatre termes formés d'une manière évidente. On obtient ainsi :

(18.9) $$N_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) = M_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) - \Sigma h_{\alpha\rho} R^{\rho}{}_{\beta,\gamma\delta}$$

Ainsi le tenseur :

(18.10) $$Q_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) = M_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) + N_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h})$$

qui vérifie toujours les identités (18.1) et (18.2) a la valeur :

(18.11) $$Q_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) = -P_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) - h_{\gamma\rho} R_{\alpha\beta,}{}^{\rho}{}_{\delta} - h_{\delta\rho} R_{\alpha\beta,\gamma}{}^{\rho}$$

L'opérateur $Q(\underline{h})$ défini par (18.6), (18.11) jouera un rôle intéressant dans le cas particulier des espaces à courbure constante.

c) A étant un vecteur arbitraire, nous aurons besoin en particulier d'évaluer $Q(\mathscr{D}A)$. Pour $\underline{h}=\mathscr{D}A$, $M(\mathscr{D}A)$ n'est autre que la dérivée de Lie relativement à A du tenseur $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$. Si $\mathscr{L}(A)$ est l'opérateur de dérivation de Lie

(18.12) $$M_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\mathscr{D}A)=\mathscr{L}(A)R_{\alpha\beta,\gamma\delta}=A^\rho\nabla_\rho R_{\alpha\beta,\gamma\delta}+\Sigma\nabla_\alpha A_\rho R^\rho{}_{\beta,\gamma\delta}$$

D'autre part $N(\mathscr{D}A)$ est fourni par :

$$N^{\alpha\beta,\gamma\delta}(\mathscr{D}A)=\mathscr{L}(A)R^{\alpha\beta,\gamma\delta}=A^\rho\nabla_\rho R^{\alpha\beta,\gamma\delta}-\Sigma\nabla_\rho A^\alpha R_\rho{}^{\beta,\gamma\delta}$$

Il en résulte :

(18.13) $$N_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\mathscr{D}A)=A^\rho\nabla_\rho R_{\alpha\beta,\gamma\delta}-\Sigma\nabla_\rho A_\alpha R^\rho{}_{\beta,\gamma\delta}$$

Par addition de (18.12) et (18.13) on obtient :

(18.14) $$Q_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\mathscr{D}A)=2\,A^\rho\nabla_\rho R_{\alpha\beta,\gamma\delta}+\Sigma(\nabla_\alpha A_\rho-\nabla_\rho A_\alpha)R^\rho{}_{\beta,\gamma\delta}$$

d) Évaluons enfin le tenseur dérivée covariante de $Q_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h})$. En coordonnées locales, on a

$$\nabla_\varepsilon R_{\alpha\beta,\gamma\delta}=\partial_\varepsilon R_{\alpha\beta,\gamma\delta}-\Sigma\Gamma^\rho_{\alpha\varepsilon}R_{\rho\beta,\gamma\delta}$$

Par variation il vient :

$$\delta\nabla_\varepsilon R_{\alpha\beta,\gamma\delta}=\partial_\varepsilon\delta R_{\alpha\beta,\gamma\delta}-\Sigma\Gamma^\rho_{\alpha\varepsilon}\delta R_{\rho\beta,\gamma\delta}-\Sigma X^\rho_{\alpha\varepsilon}R_{\rho\beta,\gamma\delta}$$

On obtient ainsi :

(18.15) $$\nabla_\varepsilon M_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h})=\delta\nabla_\varepsilon R_{\alpha\beta,\gamma\delta}+\Sigma X_{\rho\alpha\varepsilon}R^\rho{}_{\beta,\gamma\delta}$$

On a d'autre part d'après (18.9) :

(18.16) $$\nabla_\varepsilon N_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h})=\nabla_\varepsilon M_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h})-\Sigma\nabla_\varepsilon h_{\alpha\rho}R^\rho{}_{\beta,\gamma\delta}-\Sigma h_{\alpha\rho}\nabla_\varepsilon R^\rho{}_{\beta,\gamma\delta}$$

De (18.15) et (18.16) on déduit, compte tenu de (17.4)

(18.17) $$\nabla_\varepsilon Q_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h})=2\,\delta\nabla_\varepsilon R_{\alpha\beta,\gamma\delta}+\Sigma(\nabla_\alpha h_{\rho\varepsilon}-\nabla_\rho h_{\alpha\varepsilon})R^\rho{}_{\beta,\gamma\delta}-\Sigma h_{\alpha\rho}\nabla_\varepsilon R^\rho{}_{\beta,\gamma\delta}$$

19. Variation du tenseur de Ricci.

a) Proposons-nous d'évaluer la variation $\delta R_{\alpha\beta}$ du tenseur de Ricci qui correspond à la variation $\delta g_{\alpha\beta}=h_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique.

De (17.5) il vient par contraction de α et γ

$$\delta R_{\beta\delta}=\nabla_\rho X^\rho_{\beta\delta}-\nabla_\delta X^\rho_{\rho\beta}$$

En changeant le nom des indices et tenant compte de (17.4), on obtient :

(19.1) $$2\,\delta R_{\alpha\beta}=g^{\rho\sigma}\nabla_\rho(\nabla_\alpha h_{\beta\sigma}+\nabla_\beta h_{\alpha\sigma}-\nabla_\sigma h_{\alpha\beta})-\nabla_\alpha\nabla_\beta h$$

où l'on a posé :

(19.2) $$h=g^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}$$

(19.1) peut encore s'écrire :

$$2\,\delta R_{\alpha\beta} = -\nabla^\rho \nabla_\rho h_{\alpha\beta} + \nabla_\rho \nabla_\alpha h_\beta{}^\rho + \nabla_\rho \nabla_\beta h_\alpha{}^\rho - \nabla_\alpha \nabla_\beta h \tag{19.3}$$

Or, d'après l'identité de Ricci :

$$\nabla_\rho \nabla_\alpha h_\beta{}^\rho = \nabla_\alpha \nabla_\rho h_\beta{}^\rho + R_{\alpha\sigma} h_\beta{}^\sigma - R_{\alpha\rho,\beta\sigma} h^{\rho\sigma}$$

Il en résulte :

$$2\,\delta R_{\alpha\beta} = -\nabla^\rho \nabla_\rho h_{\alpha\beta} + R_\alpha{}^\sigma h_{\sigma\beta} + R_\beta{}^\sigma h_{\alpha\sigma} - 2\,R_{\alpha\rho,\beta\sigma} h^{\rho\sigma} + \nabla_\alpha \nabla_\rho h_\beta{}^\rho + \nabla_\beta \nabla_\rho h_\alpha{}^\rho - \nabla_\alpha \nabla_\beta h \tag{19.4}$$

Dans les 4 premiers termes du second membre, nous reconnaissons le laplacien du tenseur $h_{\alpha\beta}$. Il vient ainsi :

$$2\,\delta R_{\alpha\beta} = \Delta h_{\alpha\beta} + \{\mathscr{D} k(\underline{h})\}_{\alpha\beta} \tag{19.5}$$

où l'on a posé :

$$k_\alpha(\underline{h}) = \nabla_\rho h_\alpha{}^\rho - \frac{1}{2} \nabla_\alpha h \tag{19.6}$$

De (19.5) on déduit par contraction (1)

$$g^{\rho\sigma} \delta R_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \Delta h + \nabla_\alpha k^\alpha(\underline{h}) \tag{19.7}$$

b) Supposons que l'espace-temps envisagé soit un espace d'Einstein. On a

$$R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta} \quad (\lambda = \text{const.})$$

De (19.5) on déduit par produit par ∇^α et compte tenu du § 10, *c)* :

$$2\,\nabla^\alpha \delta R_{\alpha\beta} = \Delta(\nabla_\rho h_\beta{}^\rho) + \nabla^\alpha \nabla_\alpha k_\beta(\underline{h}) + \nabla^\alpha \nabla_\beta k_\alpha(\underline{h}) \tag{19.8}$$

soit d'après la définition de $k(\underline{h})$:

$$2\,\nabla^\alpha \delta R_{\alpha\beta} = \Delta k_\beta(\underline{h}) + \nabla^\alpha \nabla_\alpha k_\beta(\underline{h}) + \nabla^\alpha \nabla_\beta k_\alpha(\underline{h}) + \frac{1}{2} \nabla_\beta \Delta h \tag{19.9}$$

Or, d'après la définition de l'opérateur Δ :

$$-\nabla^\alpha \nabla_\alpha k_\beta(\underline{h}) = \Delta k_\beta(\underline{h}) - \lambda k_\beta(\underline{h})$$

et il résulte de l'identité de Ricci :

$$-\nabla^\alpha \nabla_\beta k_\alpha(\underline{h}) = -\nabla_\beta \nabla_\alpha k^\alpha(\underline{h}) - \lambda k_\beta(\underline{h})$$

(19.9) peut ainsi s'écrire :

$$2\,\nabla^\alpha \delta R_{\alpha\beta} = 2\,\lambda k_\beta(\underline{h}) + \nabla_\beta \left(\frac{1}{2} \Delta h + \nabla_\alpha k^\alpha(\underline{h}) \right) \tag{19.10}$$

Il résulte de (19.7) et (19.10) que pour un espace d'Einstein on a la relation :

$$\nabla^\alpha \left(\delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \delta R_{\rho\sigma} \right) = \lambda k_\beta(\underline{h}) \tag{19.10}$$

relation qui pourrait s'établir aussi par variation de l'identité de conservation d'Einstein.

(1) Les formules (19.5) et (19.7) figurent dans E. BLANCHETON [1] aux notations près.

20. Commutateur du champ gravitationnel varié avec terme de masse.

Sur un espace-temps donné V_4 *satisfaisant aux équations d'Einstein du vide* $R_{\alpha\beta}=\lambda g_{\alpha\beta}$, considérons le champ décrit par une variation arbitraire $h_{\alpha\beta}=\delta g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique et astreignons ce champ $h_{\alpha\beta}$ aux équations

(20.1) $$\delta R_{\alpha\beta}=\mu h_{\alpha\beta} \quad (\mu=\text{const.})$$

Nous allons voir que la théorie d'un tel champ peut être développée en stricte analogie avec celle du champ électromagnétique étudiée aux §§ 15 et 16. Les équations homologues seront systématiquement douées des mêmes numéros.

Si l'on reporte (20.1) dans (19.10), il vient :

$$(\mu-\lambda)k_{\beta}(\underline{h})=0$$

Par suite, *si* $\varepsilon^2=2(\mu-\lambda)$ *est différent de zéro (présence d'un terme de masse)*, on déduit de (20.1)

$$k(\underline{h})=0$$

Ainsi (20.1) est équivalent à l'ensemble des deux équations

(20.2) $$(\Delta-2\,\mu)\underline{h}=0$$

et

(20.3) $$k(\underline{h})=0\,;$$

$\underline{h}$ étant un tenseur à valeurs dans un espace vectoriel d'opérateurs de l'espace de Hilbert, nous nous proposons de construire un commutateur $[\underline{h}(x), \underline{h}(x')]$ compatible avec (20.2), (20.3). Compte tenu des résultats obtenus par Pauli-Fierz dans la théorie du graviton et des résultats obtenus par l'Auteur dans le cas où l'espace-temps envisagé est l'espace-temps de Minkowski [1], nous poserons (Lichnerowicz [4])

(20.4) $$[\underline{h}(x), \underline{h}(x')]=\frac{\bar{h}}{i}\left\{K(x,x')-\underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)}(x,x')-\frac{1}{\varepsilon^2}\mathscr{D}_x\mathscr{D}_{x'}G^{(1)}(x,x')\right\}$$

où les propagateurs sont relatifs à l'opérateur $(\Delta-2\,\mu)$, soit, sous forme explicite :

(20.4) $$[h_{\alpha\beta}(x), h_{\lambda'\mu'}(x')]=$$
$$\frac{\bar{h}}{i}\left\{K_{\alpha\beta,\lambda'\mu'}-g_{\alpha\beta}g_{\lambda'\mu'}G^{(0)}-\frac{1}{\varepsilon^2}(\nabla_\alpha\nabla_{\lambda'}G^{(1)}_{\beta\mu'}+\nabla_\alpha\nabla_{\mu'}G^{(1)}_{\beta\lambda'}+\nabla_\beta\nabla_{\lambda'}G^{(1)}_{\alpha\mu'}+\nabla_\beta\nabla_{\mu'}G^{(1)}_{\alpha\lambda'})\right\}$$

Le commutateur :

$$X(x,x')=K(x,x')-\underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)}(x,x')-\frac{1}{\varepsilon^2}\mathscr{D}_x\mathscr{D}_{x'}G^{(1)}(x,x')$$

pour chaque x' a bien son support dans le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$. D'après l'antisymétrie en (x, x') des propagateurs K, $G^{(0)}$ et $G^{(1)}$ il est bien lui-même antisymétrique

---

[1] Voir LICHNEROWICZ [5], p. 86-94. Nous avons omis un facteur « physique » G/c^2 où G est la constante de la gravitation.

en x et x'. D'après les propriétés de l'opérateur Δ pour un espace d'Einstein (§ 10), notre commutateur est compatible avec (20.2). Nous nous proposons d'établir qu'il est effectivement compatible avec (20.3). En effet, d'après (13.15)

$$\delta_{x'} K(x, x') = \mathscr{D}_x G^{(1)}$$

D'autre part :

$$\delta_{x'}\{\underline{g}(x') G^{(0)}\} = - d_{x'} G^{(0)}$$

Enfin

$$(\delta_{x'} \mathscr{D}_{x'} G^{(1)})_{\beta\mu'} = - (\nabla^{\lambda'} \nabla_{\lambda'} G^{(1)}_{\beta\mu'} + \nabla^{\lambda'} \nabla_{\mu'} G^{(1)}_{\beta\lambda'})$$

Or, de la définition de l'opérateur Δ, il résulte :

$$- \nabla^{\lambda'} \nabla_{\lambda'} G^{(1)}_{\beta\mu'} = \Delta_{x'} G^{(1)}_{\beta\mu'} - \lambda G^{(1)}_{\beta\mu'}$$

et d'après l'identité de Ricci :

$$- \nabla^{\lambda'} \nabla_{\mu'} G^{(1)}_{\beta\lambda'} = - \nabla_{\mu'} \nabla^{\lambda'} G^{(1)}_{\beta\lambda'} - \lambda G^{(1)}_{\beta\mu'}$$

soit d'après (12.8) :

$$- \nabla^{\lambda'} \nabla_{\mu'} G^{(1)}_{\beta\lambda'} = \nabla_{\mu'} \nabla_\beta G^{(0)} - \lambda G^{(1)}_{\beta\mu'}$$

Il en résulte :

$$\delta_{x'} \mathscr{D}_x G^{(1)} = (\Delta_{x'} - 2\lambda) G^{(1)} + d_x d_{x'} G^{(0)}$$

soit, compte tenu de $\Delta_{x'} G^{(1)} = 2\mu G^{(1)}$, et de la définition de ε^2

$$\delta_{x'} \mathscr{D}_{x'} G^{(1)} = \varepsilon^2 G^{(1)} + d_x d_{x'} G^{(0)}$$

On obtient ainsi :

$$\delta_{x'} X = \mathscr{D}_x G^{(1)} + \underline{g}(x) d_{x'} G^{(0)} - \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon^2 \mathscr{D}_x G^{(1)} + \mathscr{D}_x d_x d_{x'} G^{(0)})$$

soit

$$\delta_{x'} X = \underline{g}(x) d_{x'} G^{(0)} - \frac{1}{\varepsilon^2} \mathscr{D}_x d_x d_{x'} G^{(0)}$$

Cette relation peut s'écrire explicitement :

$$\nabla^{\lambda'} X_{\alpha\beta,\,\lambda'\mu'} = - g_{\alpha\beta} \nabla_{\mu'} G^{(0)} + \frac{2}{\varepsilon^2} \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_{\mu'} G^{(0)}$$

Par contraction de X en x' on obtient d'après (13.10) :

$$g^{\rho'\sigma'} X_{\alpha\beta,\,\rho'\sigma'} = 2 g_{\alpha\beta} G^{(0)} - 4 g_{\alpha\beta} G^{(0)} - \frac{2}{\varepsilon^2}(\nabla_\alpha \nabla^{\rho'} G^{(1)}_{\beta\rho'} + \nabla_\beta \nabla^{\rho'} G^{(1)}_{\alpha\rho'})$$

soit d'après (12.8) :

$$g^{\rho'\sigma'} X_{\alpha\beta,\,\rho'\sigma'} = - 2 g_{\alpha\beta} G^{(0)} + \frac{4}{\varepsilon^2} \nabla_\alpha \nabla_\beta G^{(0)}$$

Il en résulte bien :

$$k_{x'}(X)_{\alpha\beta\mu'} = \nabla^{\lambda'} X_{\alpha\beta,\,\lambda'\mu'} - \frac{1}{2} \nabla_{\mu'} (g^{\rho'\sigma'} X_{\alpha\beta,\,\rho'\sigma'}) = 0$$

ce qui démontre la compatibilité avec (20.3) du commutateur choisi.

21. Commutateur du champ gravitationnel varié sans terme de masse.

a) En l'absence de terme de masse ($\varepsilon^2 = 0$), l'équation (20.1) (où $\mu = \lambda$) est *invariante par « transformation de jauge gravitationnelle »*

$$\underline{h} \rightarrow \underline{h} + \mathscr{D}A$$

où A est un vecteur arbitraire.

En effet, si $\underline{h} = \mathscr{D}A$, la variation du tenseur de Ricci n'est autre que :

$$\mathscr{L}(A)R_{\alpha\beta} = R_{\rho\beta}\nabla_\alpha A^\rho + R_{\alpha\rho}\nabla_\beta A^\rho$$

soit

$$\mathscr{L}(A)R_{\alpha\beta} = \lambda(\nabla_\alpha A_\beta + \nabla_\beta A_\alpha) = \lambda(\mathscr{D}A)_{\alpha\beta}$$

ce qui démontre la propriété annoncée.

Cherchons, à l'aide de cette transformation de jauge gravitationnelle à astreindre $\underline{h}$ à la condition (20.3). A cet effet nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme. — Dans un espace d'Einstein ($R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$) *et pour tout vecteur* A, *on a* :

$$(\Delta - 2\lambda)A_\beta = -(\nabla^\alpha\nabla_\alpha A_\beta + \lambda A_\beta)$$

En effet, d'après la définition de Δ,

$$\Delta A_\beta = -\nabla^\alpha\nabla_\alpha A_\beta + R_\beta{}^\rho A_\rho = -\nabla^\alpha\nabla_\alpha A_\beta + \lambda A_\beta$$

Il en résulte la formule cherchée.

Cela posé, considérons le vecteur $k(\mathscr{D}A)$. Il vient :

$$k_\beta(\mathscr{D}A) = \nabla^\alpha(\nabla_\alpha A_\beta + \nabla_\beta A_\alpha) - \nabla_\beta\nabla_\alpha A^\alpha$$

Or, il résulte de l'identité de Ricci :

$$\nabla^\alpha\nabla_\beta A_\alpha - \nabla_\beta\nabla_\alpha A^\alpha = \lambda A_\beta$$

On en déduit :

$$k_\beta(\mathscr{D}A) = \nabla^\alpha\nabla_\alpha A_\beta + \lambda A_\beta$$

soit, d'après la formule du lemme,

$$-k(\mathscr{D}A) = (\Delta - 2\lambda)A$$

Grâce à une solution de l'équation à l'inconnue A :

$$(\Delta - 2\lambda)A = k(\underline{h})$$

on peut donc bien astreindre $\underline{h}$ à la condition (20.3); $\underline{h}$ peut alors subir une transformation de jauge gravitationnelle, A étant astreint à satisfaire

$$(\Delta - 2\lambda)A = 0$$

b) En l'absence de terme de masse ($\varepsilon^2 = 0$), nous sommes ainsi amenés à choisir comme équation de champ pour $\underline{h}$

$$(\Delta - 2\lambda)\underline{h} = 0 \tag{21.1}$$

De cette équation il résulte d'après les propriétés de Δ :

$$(\Delta - 2\lambda)\nabla^{\rho} h_{\rho\beta} = 0$$

et

$$(\Delta - 2\lambda)\nabla_{\beta} h = 0$$

Ainsi (21.1) entraîne

(21.2) $$(\Delta - 2\lambda) k(\underline{h}) = 0$$

L'analogie avec le cas électromagnétique et l'étude du § 20 conduisent à adopter comme commutateur :

(21.3) $$[\underline{h}(x), \underline{h}(x')] = \frac{\bar{h}}{i}\{\mathrm{K}(x, x') - \underline{g}(x)\underline{g}(x')\mathrm{G}^{(0)}(x, x')\}$$

où les propagateurs sont relatifs à l'opérateur $(\Delta - 2\lambda)$; (21.3) qui peut s'écrire

(21.3)' $$[h_{\alpha\beta}(x), h_{\lambda'\mu'}(x')] = \frac{\bar{h}}{i}(\mathrm{K}_{\alpha\beta, \lambda'\mu'} - g_{\alpha\beta} g_{\lambda'\mu'} \mathrm{G}^{(0)})$$

donne

$$[h_{\alpha\beta}, \nabla^{\lambda'} h_{\lambda'\mu'}] = \frac{\bar{h}}{i}\{-(\nabla_{\alpha}\mathrm{G}^{(1)}_{\beta\mu'} + \nabla_{\beta}\mathrm{G}^{(1)}_{\alpha\mu'}) - g_{\alpha\beta}\nabla_{\mu'}\mathrm{G}^{(0)}\}$$

et

$$[h_{\alpha\beta}, g^{\lambda'\mu'} h_{\lambda'\mu'}] = -\frac{\bar{h}}{i} 2\, g_{\alpha\beta}\mathrm{G}^{(0)}$$

Il en résulte :

$$[h_{\alpha\beta}, k_{\mu'}(\underline{h}(x'))] = -\frac{\bar{h}}{i}(\nabla_{\alpha}\mathrm{G}^{(1)}_{\beta\mu'} + \nabla_{\beta}\mathrm{G}^{(1)}_{\alpha\mu'})$$

et d'après l'expression obtenue pour $k(\mathscr{D}\mathrm{A})$, il vient :

(21.4) $$[k_{\beta}(\underline{h}(x), k_{\mu'}(\underline{h}(x'))] = \frac{\bar{h}}{i}(\Delta - 2\lambda)\mathrm{G}^{(1)}_{\beta\mu'} = 0$$

Le commutateur (21.3) est compatible avec (21.1), mais non avec la condition (20.3). Il nous suffit alors d'astreindre les états Φ à la condition supplémentaire $k(\underline{h})|\Phi\rangle = 0$, qui, d'après (21.2) ne porte que sur les données initiales d'un problème de Cauchy, ou, en présence d'une définition du vide, à une condition supplémentaire du même type, mais affaiblie.

22. Les équations du champ gravitationnel d'ordre supérieur.

a) Dans un espace-temps quelconque V_4, considérons sur les tenseurs symétriques d'ordre 2 l'application μ qui, à tout tenseur $\underline{h}$, fait correspondre le tenseur $\underline{f} = \mu(\underline{h})$ défini par :

$$f_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(g^{\lambda\mu} h_{\lambda\mu})$$

On vérifie aisément que cette application est involutive et $\underline{h} = \mu(\underline{f})$; $\underline{h}$ et $\underline{f}$ sont dits *associés* l'un de l'autre. Si R est le tenseur de Ricci de V_4, son tenseur d'Einstein est $S=\mu(R)$.

La métrique de V_4 est en général astreinte à satisfaire aux *équations d'Einstein* suivantes; T étant le tenseur d'impulsion-énergie, elles s'écrivent :

$$L \equiv S - T = 0$$

Si nous posons

$$M = \mu(L) \qquad U = \mu(T)$$

elles peuvent aussi s'écrire :

$$M \equiv R - U = 0$$

Sous ces formes, les équations du champ gravitationnel semblent différer profondément des équations de Maxwell.

b) Soit $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ le tenseur de courbure de l'espace-temps. Ce tenseur satisfait aux identités de Bianchi

$$\underset{\alpha\beta\gamma}{S} \nabla_\alpha R_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0 \tag{22.1}$$

qui entraînent comme conséquence :

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma,}{}^{\alpha}{}_{\mu} = \nabla_\beta R_{\gamma\mu} - \nabla_\gamma R_{\beta\mu} \tag{22.2}$$

D'autre part, il satisfait aux équations d'Einstein :

$$L_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta} = 0 \tag{22.3}$$

qui peuvent aussi s'écrire :

$$M_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - U_{\alpha\beta} = 0 \tag{22.4}$$

De (22.2) on déduit par contraction que $S_{\alpha\beta}$ est conservatif; il résulte de (22.3) qu'il en est de même pour $T_{\alpha\beta}$. Ainsi, $U_{\alpha\beta}$ est le *tenseur associé d'un tenseur conservatif.* D'autre part, de (22.2) et (22.4), il résulte que le tenseur de courbure vérifie les équations :

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma,}{}^{\alpha}{}_{\mu} = \nabla_\beta U_{\gamma\mu} - \nabla_\gamma U_{\beta\mu} \tag{22.5}$$

c) Nous sommes ainsi conduits à considérer un champ décrit par un tenseur d'ordre 4, $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ satisfaisant les identités algébriques (18.1), (18.2) et vérifiant les équations de champ (22.1) et (22.5), *où* U *est le tenseur associé d'un tenseur conservatif* T. De (22.2), conséquence de (22.1) et de (22.5), on déduit par soustraction

$$\nabla_\beta M_{\gamma\mu} - \nabla_\gamma M_{\beta\mu} = 0 \tag{22.6}$$

D'autre part, S étant conservatif d'après (22.2) et T l'étant par hypothèse, il en est de même pour $L \equiv S - T$, et, d'après (22.6), pour M

$$\nabla_\alpha M^{\alpha}{}_{\beta} = 0 \tag{22.7}$$

De (22.6), (22.7), il résulte que, pour le champ envisagé, *les équations d'Einstein* $M=0$ *peuvent être considérées comme de simples conditions initiales.* D'une façon précise, soit Σ une hypersurface de V_4 orientée dans l'espace et sur laquelle $M = 0$. Sous les hypothèses faites, M est aussi nécessairement nul en dehors de Σ; il suffit pour l'établir d'observer que pour $\beta = 0$, $\gamma = u$ ($u = 1, 2, 3$), (22.6) s'écrit :

(22.8)
$$\nabla_0 M_{u\mu} = \nabla_u M_{0\mu}$$

et que pour $\beta = 0$, (22.7) s'écrit :

(22.9)
$$g^{00}\nabla_0 M_{00} = -2\, g^{0u}\nabla_u M_{00} - g^{uv}\nabla_u M_{v0} \quad (u, v = 1, 2, 3)$$

Si Σ a pour équation locale $x^0 = 0$, g^{00} est $\neq 0$ sur Σ et pour une donnée initiale nulle sur Σ, le système (22.8), (22.9) n'admet d'autre solution que la solution nulle.

Le résultat précédent est en particulier applicable au cas où

$$T_{\alpha\beta} = -\lambda g_{\alpha\beta} \qquad U_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta} \quad (\lambda = \text{const.})$$

Les équations (22.5) se réduisent alors à

(22.10)
$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma,}{}^{\alpha}{}_{\mu} = 0$$

Si, sur Σ, on a $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$, il en est encore de même en dehors de Σ.

d) On peut donc considérer qu'un champ gravitationnel peut être décrit par un tenseur $H_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ satisfaisant aux identités algébriques (18.1), (18.2). Étant donné un tenseur conservatif T, le champ H est astreint à satisfaire les « équations gravitationnelles d'ordre supérieur » :

(22.11)
$$\underset{\alpha\beta\gamma}{S}\nabla_\alpha H_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0$$

et

(22.12)
$$\nabla_\alpha H^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu} = \nabla_\lambda U_{\beta\mu} - \nabla_\mu U_{\beta\lambda}$$

où U est le tenseur associé de T. On voit l'analogie présentée par ces équations avec les équations de Maxwell. On peut ajouter la condition supplémentaire

(22.13)
$$H_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}$$

condition qu'il suffit de vérifier sur une hypersurface Σ orientée dans l'espace.

23. Cas de l'espace-temps de Minkowski.

a) Supposons que V_4 soit *l'espace-temps de Minkowski* et rapportons-le d'abord à un repère orthonormé. Nous avons montré [1] que, pour le champ $H_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ satisfaisant aux équations

(23.1)
$$\underset{\alpha\beta\gamma}{S}\partial_\alpha H_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0 \qquad \partial_\alpha H^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu} = 0$$

---

(1) LICHNEROWICZ [5].

le commutateur peut s'écrire (1) :

$$(23.2)\qquad [H_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x), H_{\lambda\mu,\nu\rho}(x')] = \frac{\overline{h}}{4\,i}\left\{\left(\hat{\sum_{\alpha\beta\lambda\mu}}\eta_{\beta\mu}\partial_\lambda\partial_\alpha\right)\left(\hat{\sum_{\gamma\delta\nu\rho}}\eta_{\delta\rho}\partial_\nu\partial_\gamma\right) + \right.$$
$$\left.\left(\hat{\sum_{\gamma\delta\lambda\mu}}\eta_{\delta\mu}\partial_\lambda\partial_\gamma\right)\left(\hat{\sum_{\alpha\beta\nu\rho}}\eta_{\beta\rho}\partial_\nu\partial_\alpha\right) - \left(\hat{\sum_{\lambda\mu\nu\rho}}\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\lambda\right)\left(\hat{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}}\eta_{\beta\delta}\partial_\gamma\partial_\alpha\right)\right\} D_0(x, x')$$

où toutes les dérivations portent sur x et où la notation $\hat{\Sigma}$ a la signification indiquée au § 18.

b) Cherchons comment les relations (23.2) peuvent s'écrire *en repères mobiles arbitraires*. En modifiant l'ordre des sommations et introduisant les dérivées par rapport à x, on a d'abord dans le repère orthonormé initial

$$(23.3)\qquad \left\{\left(\hat{\sum_{\alpha\beta\lambda\mu}}\eta_{\beta\mu}\partial_\lambda\partial_\alpha\right)\left(\hat{\sum_{\gamma\delta\nu\rho}}\eta_{\delta\rho}\partial_\nu\partial_\gamma\right) + \left(\hat{\sum_{\gamma\delta\lambda\mu}}\eta_{\delta\mu}\partial_\lambda\partial_\gamma\right)\left(\hat{\sum_{\alpha\beta\nu\rho}}\eta_{\beta\rho}\partial_\nu\partial_\alpha\right)\right\} D_0(x, x') =$$
$$\hat{\sum_{\lambda\mu\nu\rho}}\partial^{x'}_\nu\partial^{x'}_\lambda \hat{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}}\partial^x_\gamma\partial^x_\alpha\{(\eta_{\beta\mu}\eta_{\delta\rho} + \eta_{\delta\mu}\eta_{\beta\rho})\; D_0(x, x')\}$$

En repères mobiles arbitraires, le terme (23.3) donne

$$(23.4)\qquad \hat{\sum_{\lambda'\mu'\nu'\rho'}}\nabla_{\nu'}\nabla_{\lambda'}\hat{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\{(t_{\beta\mu'}t_{\delta\rho'} + t_{\delta\mu'}t_{\beta\rho'})\; D_0\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des composantes de

$$(23.5)\qquad Q_{x'}Q_x K(x, x')$$

où K est le propagateur symétrique d'ordre 2 associé à l'opérateur Δ et Q_x l'opérateur Q sur les tenseurs d'ordre 2 défini par (18.10) et relatif au point x.

Le terme restant de (23.3) peut s'écrire en repères mobiles arbitraires

$$\hat{\sum_{\lambda'\mu'\nu'\rho'}}\nabla_{\nu'}\nabla_{\lambda'}\hat{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\{g_{\mu'\rho'}g_{\beta\delta}D_0(x, x')\}$$

et correspond à

$$Q_{x'}Q_x(\underline{g}(x)\underline{g}(x')D_0)$$

La relation (23.2) peut donc s'écrire en repères mobiles arbitraires sous la forme condensée

$$(23.6)\qquad [H(x), H(x')] = \frac{\overline{h}}{4\,i}Q_{x'}Q_x\{K(x, x') - \underline{g}(x)\underline{g}(x')D_0(x, x')\}$$

où D_0 et K sont respectivement les propagateurs scalaires et symétriques d'ordre 2 associés à l'opérateur Δ et où Q est l'opérateur sur les tenseurs d'ordre 2 défini par (18.10).

(1) Nous omettons systématiquement dans la suite un facteur physique G/c^2, où G est la constante de l'attraction universelle.

24. Cas d'un espace à courbure constante.

a) Supposons que l'espace-temps V_4 soit *à courbure constante*

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = c(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \quad (c = \text{const.})$$

V_4 est espace d'Einstein avec $\lambda = 3c$.

Le tenseur de courbure est à dérivée covariante nulle et il est invariant par toute 2-forme F; avec la notation Σ du § 18, on a

$$\Sigma F_{\alpha\rho} R^{\rho}{}_{\beta,\gamma\delta} = 0$$

De (18.14), on déduit alors que pour tout vecteur A

(24.1) $$Q(\mathscr{D}A) = 0$$

De plus de (18.17) il résulte que pour tout tenseur symétrique $\underline{h}$

(24.2) $$\underset{\gamma\delta\varepsilon}{\mathsf{S}} \nabla_\varepsilon Q_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h}) = 0$$

b) Dans V_4 considérons le tenseur obtenu par contraction :

(24.3) $$\{\mathrm{Tr}_x Q_x(h)\}_{\beta\delta} = g^{\alpha\gamma} Q_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h})$$

Nous nous proposons d'établir le lemme suivant :

Lemme. — Si $G^{(0)}$ *et* K *sont respectivement les propagateurs scalaires et symétriques d'ordre* 2 *relatifs à l'opérateur* $(\Delta - 2\mu)$ *dans un espace à courbure constante, on a la formule :*

(24.4) $$\mathrm{Tr}_x Q_x Q_{x'} \{K(x, x') - \underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)}(x, x')\} = \varepsilon^2 Q_{x'}\{K(x, x') - \underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)}\}$$

où $\varepsilon^2 = 2(\mu - \lambda)$.

En effet

$$\{\mathrm{Tr}_x Q_x(\underline{h})\}_{\beta\delta} = g^{\alpha\gamma}\delta R_{\alpha\beta,\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma}\delta R^{\alpha\lambda,\gamma\mu} g_{\lambda\beta} g_{\mu\delta}$$

soit

$$\{\mathrm{Tr}_x Q_x(\underline{h})\}_{\beta\delta} = 2\,\delta R_{\beta\delta} + h^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$$

On obtient ainsi :

(24.5) $$\{\mathrm{Tr}_x Q_x(\underline{h})\}_{\beta\delta} = 2\,\delta R_{\beta\delta} - 2\lambda h_{\beta\delta}$$

soit :

(24.6) $$\{\mathrm{Tr}_x Q_x(\underline{h})\}_{\beta\delta} = (\Delta - 2\lambda)h_{\beta\delta} + \nabla_\beta k_\delta(\underline{h}) + \nabla_\delta k_\beta(\underline{h})$$

Considérons donc :

$$\{k(K - \underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)}\}_{\delta,\lambda'\mu'} = \nabla_\alpha K^{\alpha}{}_{\delta,\lambda'\mu'} - g_{\lambda'\mu'}\nabla_\delta G^{(0)} + g_{\lambda'\mu'}\nabla_\delta G^{(0)}$$

Si $G^{(1)}$ est le propagateur d'ordre 1 associé à $(\Delta - 2\mu)$, on a ainsi :

(24.7) $$k(K - \underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)}) = -\mathscr{D}_{x'} G^{(1)}$$

De (24.6) et (24.7) on déduit :

$$\mathrm{Tr}_x Q_x\{K-\underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)}\}=\varepsilon^2\{K-\underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)}\}-\mathscr{D}_x\mathscr{D}_{x'}G^{(1)}$$

et d'après (24.1) :

$$\mathrm{Tr}_x Q_x Q_{x'}\{K-\underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)}\}=\varepsilon^2 Q_{x'}\{K-\underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)}\}$$

c'est-à-dire (24.4).

c) Plaçons-nous dans les hypothèses du § 20, V_4 étant à courbure constante, et considérons le commutateur (20.4). Par application des opérateurs Q_x et $Q_{x'}$, on obtient, compte tenu de (24.1) :

(24.8) $$[Q_x\underline{h}(x),\ Q_{x'}\underline{h}(x')]=\frac{\bar{h}}{i}Q_{x'}Q_x(K-\underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)})$$

Considérons le tenseur

$$H_{\alpha\beta,\gamma\delta}=\frac{1}{2}Q_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\underline{h})$$

qui satisfait aux identités algébriques (18.1), (18.2). D'après (24.2), il vérifie les équations (22.11). D'autre part, d'après (20.2) et (20.3), on déduit de (24.6)

(24.9) $$2\,H_{\beta\delta}=\varepsilon^2 h_{\beta\delta}$$

Le commutateur

(24.10) $$[H(x),\ H(x')]=\frac{\bar{h}}{4i}Q_{x'}Q_x(K-\underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)})$$

est manifestement compatible avec le système (22.11). D'autre part, d'après (24.5) et (20.4), il vient

$$\mathrm{Tr}_x[Q_x\underline{h}(x),\ Q_{x'}\underline{h}(x')]=\varepsilon^2[h(x),\ Q_{x'}\underline{h}(x')]=\varepsilon^2\frac{\bar{h}}{i}Q_{x'}\{K-\underline{g}(x)\underline{g}(x')G^{(0)}\}$$

ce qui est en plein accord avec (24.4).

d) Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses du § 21 et considérons le commutateur (21.3).

Par application des opérateurs Q_x et $Q_{x'}$, on obtient un commutateur formellement identique à (24.8). Le tenseur H obtenu vérifiant toujours (18.1) et (18.2), satisfait (22.11) et si $\underline{h}$ est astreint à la condition supplémentaire $k(\underline{h})=0$, satisfait :

(24.11) $$\{\mathrm{Tr}_x H\}_{\beta\delta}=H_{\beta\delta}=0$$

Le commutateur (24.10) est manifestement compatible avec (22.11). De plus, ε^2 étant nul, il entraîne d'après (24.4)

$$[\mathrm{Tr}_x H(x),\ H(x')]=0$$

et est par suite compatible avec (24.11).

e) Plaçons-nous enfin dans les hypothèses du § 22. Nous considérons donc un tenseur H vérifiant (18.1), (18.2) et satisfaisant aux équations du champ

(24.12) $$\underset{\alpha\beta\gamma}{S} \nabla_\alpha H_{\beta\gamma,\,\lambda\mu} = 0 \qquad \nabla_\alpha H^\alpha{}_{\beta,\,\lambda\mu} = 0$$

avec éventuellement la condition supplémentaire

(24.13) $$H_{\alpha\beta} = 0$$

(ou $H_{\alpha\beta} = cg_{\alpha\beta}$, $c = \text{const.}$).

Le commutateur (24.10) soit

$$[H(x), H(x')] = \frac{\bar{h}}{4i} Q_{x'} Q_x (K - \underline{g}(x) \underline{g}(x') G^{(0)})$$

est compatible avec les identités (18.1), (18.2), les équations de champ (24.12) et la condition (24.13). Pour un espace-temps de Minkowski, il se réduit bien au commutateur (23.6). Nous avons ainsi étendu aux espaces-temps à courbure constante la théorie élaborée dans le cas de l'espace-temps de Minkowski [1].

[1] Voir Lichnerowicz [5].

APPENDICE

25. Le commutateur de Fierz.

En présence de termes de masse, Fierz a étudié, dans le cas d'un espace-temps de Minkowski, des commutateurs correspondant à une particule de spin quelconque, en particulier de spin 2 ([1]). Nous nous proposons de généraliser le commutateur de Fierz pour une particule de spin 2 dans le cas où l'espace-temps envisagé est un espace d'Einstein $(R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta})$.

Les équations de champ adoptées par Fierz peuvent s'écrire avec nos notations :

(25.1) $$(\Delta - 2\,\mu) h_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\mu \neq \lambda)$$

(25.2) $$k_\beta(\underline{h}) = 0$$

et

(25.3) $$h = g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0$$

L'étude faite par Fierz conduit à considérer la combinaison linéaire X de propagateurs relatifs à l'opérateur $(\Delta - 2\,\mu)$ et de leurs dérivées définies par :

(25.4) $$X_{\alpha\beta,\,\lambda'\mu'} = K_{\alpha\beta,\,\lambda'\mu'} - \frac{1}{\varepsilon^2}(\mathscr{D}_{x'}\mathscr{D}_x G^{(1)})_{\alpha\beta,\,\lambda'\mu'} + a\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)} + b(g_{\alpha\beta}\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)} + g_{\lambda'\mu'}\nabla_\alpha\nabla_\beta G^{(0)}) + c g_{\alpha\beta} g_{\lambda'\mu'} G^{(0)}$$

a) De la formule (13.15) et de (13.10) on déduit immédiatement :

(25.5) $$k_x(K)_{\beta,\,\lambda'\mu'} = -(\mathscr{D}_{x'}G^{(1)})_{\beta,\,\lambda'\mu'} - g_{\lambda'\mu'}\nabla_\beta G^{(0)}$$

et du § 21, *a)* :

(25.6) $$k_x(\mathscr{D}_x G^{(1)})_{\beta\lambda'} = -(\Delta - 2\,\lambda) G^{(1)}_{\beta\lambda'} = -\varepsilon^2 G^{(1)}_{\beta\lambda'}$$

De même du § 21, *a)*, il vient :

(25.7) $$k_x(\nabla_\alpha\nabla_\beta G^{(0)})_\gamma = -\frac{1}{2}(\Delta - 2\,\lambda)\nabla_\gamma G^{(0)} = -\frac{\varepsilon^2}{2}\nabla_\gamma G^{(0)}$$

Enfin on a :

(25.8) $$k_x(g_{\alpha\beta}G^{(0)})_\gamma = \nabla_\gamma G^{(0)} - 2\,\nabla_\gamma G^{(0)} = -\nabla_\gamma G^{(0)}$$

De ces formules il résulte :

(25.9)
$$k_x(X)_{\beta,\,\lambda'\mu'} = -g_{\lambda'\mu'}\nabla_\beta G^{(0)} - a\frac{\varepsilon^2}{2}\nabla_\beta\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)} - b\left(\nabla_\beta\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)} + \frac{\varepsilon^2}{2}g_{\lambda'\mu'}\nabla_\beta G^{(0)}\right) - c g_{\lambda'\mu'}\nabla_\beta G^{(0)}$$

([1]) Voir Fierz [1].

X fournit un commutateur compatible avec (25.1). Pour qu'il soit compatible avec (25.2) il suffit que

(25.10) $$\frac{\varepsilon^2}{2}a+b=0$$

(25.11) $$\frac{\varepsilon^2}{2}b+c=-1$$

Pour $a=b=0$, $c=-1$, on obtient le commutateur introduit au § 20.

b) Évaluons d'autre part la contraction en x de X, soit :

(25.12) $$g^{\alpha\beta}X_{\alpha\beta,\lambda'\mu'}=$$
$$2\,g_{\lambda'\mu'}G^{(0)}+\frac{4}{\varepsilon^2}\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)}-a.2\,\mu\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)}+b(4\,\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)}-2\,\mu g_{\lambda'\mu'}G^{(0)})+4\,cg_{\lambda'\mu'}G^{(0)}$$

Pour que X soit compatible avec (25.3), il suffit que :

(25.13) $$\mu a-2\,b=\frac{2}{\varepsilon^2}$$

(25.14) $$\mu b-2\,c=1$$

De (25.10) et (25.13) il résulte en substituant à μ sa valeur en fonction de λ et ε^2

(25.15) $$a=\frac{4}{\varepsilon^2(2\,\lambda+3\,\varepsilon^2)}\qquad b=-\frac{2}{2\,\lambda+3\,\varepsilon^2}$$

Quant à (25.11) il donne

(25.16) $$c=-\frac{2(\lambda+\varepsilon^2)}{2\,\lambda+3\,\varepsilon^2}$$

On vérifie immédiatement que (25.15) et (25.16) vérifient bien (25.14) de telle sorte que le commutateur obtenu vérifie bien toutes les équations de champ.

Ce commutateur peut se mettre sous la forme

(25.17) $$X_{\alpha\beta,\lambda'\mu'}=K_{\alpha\beta,\lambda'\mu'}-\frac{1}{\varepsilon^2}(\mathscr{D}_{x'}\mathscr{D}_{x}G^{(1)})_{\alpha\beta,\lambda'\mu'}+\frac{2}{\varepsilon^4}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)}-$$
$$2\frac{\lambda+\varepsilon^2}{2\,\lambda+3\,\varepsilon^2}\left(g_{\alpha\beta}g_{\lambda'\mu'}G^{(0)}+\frac{1}{\lambda+\varepsilon^2}(g_{\alpha\beta}\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)}+g_{\lambda'\mu'}\nabla_\alpha\nabla_\beta G^{(0)})+\frac{2\,\lambda+\varepsilon^2}{\varepsilon^4(\lambda+\varepsilon^2)}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)}\right)$$

Pour un espace d'Einstein avec $\lambda=0$, il se réduit à :

(25.18) $$X_{\alpha\beta,\lambda'\mu'}=K_{\alpha\beta,\lambda'\mu'}-\frac{1}{\varepsilon^2}(\mathscr{D}_{x'}\mathscr{D}_{x}G^{(1)})_{\alpha\beta,\lambda'\mu'}+\frac{2}{\varepsilon^4}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)}-$$
$$\frac{2}{3}\left(g_{\alpha\beta}g_{\lambda'\mu'}G^{(0)}+\frac{1}{\varepsilon^2}(g_{\alpha\beta}\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)}+g_{\lambda'\mu'}\nabla_\alpha\nabla_\beta G^{(0)})+\frac{1}{\varepsilon^4}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_{\lambda'}\nabla_{\mu'}G^{(0)}\right)$$

où les propagateurs sont relatifs à l'opérateur $(\Delta-\varepsilon^2)$, qui constitue une généralisation évidente du commutateur introduit par Fierz.

BIBLIOGRAPHIE

E. Blancheton [1], *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 245, p. 284-287 (1957).

Bogolioubov et Chirkov [1], Dunod, Paris (1960).

Costa de Beauregard [1], *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 250, p. 2149-2151 (1960).

Fierz [1], *Helv. Phys. Acta*, t. 12, p. 3-37 (1939).

Y. Fourès-Bruhat [1], *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 242, p. 1566-1569 (1956).

— [2] *Solutions élémentaires d'équations du second ordre*, Coll. int. C.N.R.S. sur les équations aux dérivées partielles (Nancy, 1956).

— [3] *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 251, p. 29-31 (1960).

J. Leray [1], *Hyperbolic differential equations*, Princeton, 1951-1952.

Lichnerowicz [1], *Géométrie des groupes de transformation*, Dunod, Paris (1958).

— [2] *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 249, p. 1329-1331 (1959).

— [3] *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 249, p. 2287-2289 (1959).

— [4] *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 250, p. 3122-3124 (1960).

— [5] Ondes et radiations électromagnétiques et gravitationnelles en relativité générale, *Annali di matematica*, t. 50, p. 1-95 (1960).

— [6] *Propagateurs et quantification du champ*, Séminaire de Mécanique analytique, Paris, miméographié, exposé nº 4 (février 1960).

G. de Rham [1], *Variétés différentiables*, Hermann, Paris (1955).

B. S. DeWitt et Brehme [1], *Inst. of Field Physics Public*, nº 3, The University of North-Carolina (1959).

— [2] *Annals of Physics*, t. 9, p. 220 (1960).

— [3] *Phys. Rev.*, t. 4, p. 317 (1960).

Reçu le 6 mars 1960.

1961. — Imprimerie des Presses Universitaires de France. — Vendôme (France)

ÉDIT. Nº 26 507 IMPRIMÉ EN FRANCE IMP. Nº 16 764