PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

HANS GRAUERT

Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 5 (1960), p. 5-64
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1960__5__5_0>

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES
SCIENTIFIQUES

EIN THEOREM DER ANALYTISCHEN GARBENTHEORIE UND DIE MODULRÄUME KOMPLEXER STRUKTUREN

von Hans GRAUERT

1960

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES, N° 5

5, ROND-POINT BUGEAUD — PARIS (XVI^e)

DÉPOT LÉGAL
1re édition .. .. .. 3e trimestre 1960

Einleitung

1. Seit den grundlegenden Publikationen B. RIEMANNS über abelsche Funktionen hat man versucht, in der Menge M der kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht p in natürlicher Weise eine Topologie und eine komplexe Struktur einzuführen, so daß M zu einem komplexen Raum M_p wird, den schon RIEMANN als den *Modulraum* der Riemannschen Flächen vom Geschlecht p bezeichnete. Darüber hinaus hat man versucht, die Menge $R_p = \bigcup_{R \in M_p} R$ zu einem komplexen Raum zu machen. Die natürliche Projektion $\pi : R_p \to M_p$ sollte dabei zu einer holomorphen Abbildung werden. Außerdem möchte man M_p und R_p kompaktifizieren.

Bis heute ist die Lösung dieser Aufgabe nur teilweise gelungen. Die Ideen O. TEICHMÜLLERS haben zur Konstruktion einer $(3p-3)$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit M_p^* und einer komplexen Mannigfaltigkeit R_p^* geführt, die durch eine eigentliche holomorphe Abbildung π^* auf M_p^* bezogen ist [1]. Als Urbild der Punkte aus M_p^* erhält man alle Riemannschen Flächen vom Geschlecht p. Allerdings ist die Zuordnung zu den Punkten von M_p^* nicht eineindeutig. Sie wird es erst dann, wenn man den Begriff « Riemannsche Fläche » durch « Riemannsche Fläche mit ausgezeichneter Basis der 1. Fundamentalgruppe » ersetzt.

2. Im Falle höherer Dimensionen sind bislang nur wenige Untersuchungen bekannt geworden. K. KODAIRA und D. C. SPENCER veröffentlichten im vergangenen Jahre eine Arbeit [9], in der sie (außer differenzierbaren) *komplex-analytische Scharen* kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten betrachten. Sie verstehen darunter eine komplexe Mannigfaltigkeit X, die durch eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung $\pi : X \to M$ auf eine komplexe Mannigfaltigkeit M bezogen ist. Der Rang der Funktionalmatrix von π ist überall gleich $\dim_c M$. Die kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten $X_y = \pi^{-1}(y)$, $y \in M$, werden als die Scharelemente angesehen. Wie man unmittelbar sieht, sind alle Räume X_y differenzierbar äquivalent, die komplexe Struktur kann dagegen von $y \in M$ abhängen.

Bei der Untersuchung dieser komplex-analytischen Scharen erwies es sich nun, daß die komplex-analytische Garbentheorie besonders geeignet ist. Nach K. KODAIRA und D. C. SPENCER wird auf X mit Θ die Garbe der Keime von lokalen holomorphen Feldern von solchen Vektoren bezeichnet, die in Richtung der Fasern X_y zeigen. Die beiden Autoren ordnen der Schar X nach einer angegebenen Vorschrift eine Kohomologieklasse $\xi \in H^1(X, \Theta)$ zu und zeigen durch Integration :

X ist genau dann ein komplex-analytisches Faserbündel, wenn das Leraysche Bild von ξ in $H^0(M, \pi_1(\Theta))$ die Nullschnittfläche in $\pi_1(\Theta)$, der 1. Lerayschen Bildgarbe von Θ, ist.

Da jedes Faserbündel nach Definition « lokal trivial » ist, bedeutet das inbesondere, daß dann die komplexe Struktur von X_y nicht von y abhängt.

Natürlich möchte man einfachere Bedingungen kennen, unter denen $X \to M$ ein komplex-analytisches Faserbündel ist. Zu dem Zwecke wurden unter Benutzung der Theorie der harmonischen Integrale in [9] folgende Sätze hergeleitet :

(1) *Die Funktion* $r_\nu(y) = \dim_C H^\nu(X_y, \Theta_y)$ *ist halbstetig nach oben (d.h.* $\overline{\lim_{y \to y_0}}\, r_\nu(y) \leq r_\nu(y_0)$*).*

Dabei bezeichnet Θ_y die Garbe der Keime von lokalen holomorphen Vektorfeldern auf X.

(2) *Ist* $r_\mu(y)$ *unabhängig von* y *für* $\mu \leq \nu$, *so ist* $\pi_\nu(\Theta)$ *eine freie Garbe. Bezeichnet* F_ν *ein Vektorraumbündel über* M, *so daß* $\pi_\nu(\Theta)$ *isomorph zu der Garbe* $\underline{F}_\nu$ *der Keime von lokalen holomorphen Schnitten in* F_ν *ist, so kann man die Punkte von* F_ν *über* $y \in M$ *(in natürlicher Weise) mit den Kohomologieklassen aus* $H^\nu(X_y, \Theta_y)$ *identifizieren* (1).

Aus (1) und (2) folgt ein schon von A. Fröhlicher und A. Nijenhuis [5] bewiesenes Resultat :

(3) *Ist* $\dim_C H^1(X_y, \Theta_y) = 0$, *so ist* $X \to M$ *in einer Umgebung von* y *ein komplex-analytisches Faserbündel.*

3. Der Verf. der vorl. Arbeit bemerkte, daß diese und ähnliche Sätze aus [9] sehr eng mit der Frage verknüpft sind, ob die analytischen Bildgarben kohärenter Garben über X kohärente Garben über M sind. Die Sätze ergeben sich zum Teil unmittelbar durch eine einfache, rein algebraische Ableitung, wenn die Kohärenz gesichert ist. Darüber hinaus folgen aus den Kohärenzaussagen weitere interessante Eigenschaften analytischer Scharen komplexer Strukturen, die nicht mit Hilfe der Theorie harmonischer Integrale hergeleitet werden konnten.

In [6] wurde gezeigt :

(A) Es seien Y *ein komplexer Raum,* P^n *der komplex n-dimensionale projektive Raum,* τ *die eigentliche holomorphe Produktabbildung* $Y \times P^n \to Y$, S *eine kohärente analytische Garbe über* $Y \times P^n$. *Dann sind die Bildgarben* $\tau_\nu(S)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, *kohärente analytische Garben über* Y.

---

(1) Die beiden Autoren leiten die Aussagen (1) und (2) m.m. sogar her, wenn M nur eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\pi : X \to M$ eine differenzierbare Schar von komplexen Mannigfaltigkeiten X_y und Θ eine beliebige freie Garbe über X ist. — Der in § 7 angedeutete Beweis der Aussagen (1) und (2) ist, da er auf die Hauptsätze I und II aufbaut, bedeutend schwieriger als der von Kodaira und Spencer angegebene. Jedoch gelingt es hier, (1) und (2) wesentlich allgemeiner zu beweisen (vgl. die Sätze 3 und 5 in § 7). Unter der Voraussetzung, daß $X \to Y$ eine komplexe Schar ist und die auf X gegebene Garbe S frei ist, würde sich der Beweis der Sätze 3 und 5 allerdings wesentlich vereinfachen. Ebenso lassen sich die Hauptsätze I, II unter diesen Voraussetzungen mit rein garbentheoretischen Methoden ziemlich einfach herleiten.

Machen wir für unsere komplex-analytische Schar $X \to M$ die Voraussetzung :

(∗) *Zu jedem Punkt $y \in M$ gibt es eine Umgebung $U(y)$ und eine biholomorphe Abbildung*

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \overset{in}{\to} U \times P^n,$$

so kann man leicht zeigen, daß die Aussage (A) auch für $X \to M$ gilt [1].

Allerdings impliziert (∗), daß jede Fasermenge X_y eine projektiv algebraische Mannigfaltigkeit ist. Das ist natürlich sehr einschränkend, besonders auch deswegen, weil die Untersuchungen von Kodaira und Spencer zu zeigen scheinen, daß einfache Gesetzmäßigkeiten in der Berechnung der Dimension von Modulräumen nur dann bestehen, wenn man auf die Algebraizität der komplexen Strukturen verzichtet. Andererseits genügt es keineswegs, nur komplexe Mannigfaltigkeiten zu untersuchen. Man muß Mannigfaltigkeiten mit singulären Punkten (d.h. in unserem Falle : komplexe Räume) in die Betrachtung einbeziehen, um auch nur zu einigermaßen befriedigenden Ergebnissen zu gelangen. In der vorl. Arbeit wird deshalb gezeigt :

(I) Es seien X, Y komplexe Räume, $\pi : X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, S eine kohärente analytische Garbe über X. Dann sind alle Bildgarben von S kohärente analytische Garben über Y.

Der Beweis von (I) ist bedeutend schwieriger als der in [6] gegebene semialgebraische Beweis für (A). Da X, Y komplexe Räume mit nicht-uniformisierbaren Punkten sind, ist es auch nicht möglich, die potentialtheoretischen Methoden von Kodaira und Spencer zu verwenden. Es muß ein besonderer Weg beschritten werden. Es handelt sich dabei vor allem um eine verfeinerte Anwendung von Potenzreihen. Zweckmäßig, jedoch nicht unbedingt notwendig ist auch die Verwendung eines neuen *allgemeineren* Begriffes des *komplexen Raumes*. Wir werden diese neuen Räume einfach « komplexe Räume » nennen. Die von H. Cartan und J. P. Serre definierten komplexen Räume werden in der vorl. Arbeit « reduzierte komplexe Räume » heißen. Allgemeine komplexe Räume können in ihren lokalen Ringen nilpotente Elemente enthalten. Ihre Analoga in der algebraischen Geometrie sind seit einiger Zeit bekannt. Sie wurden m.W. zum ersten Male von A. Grothendieck angegeben.

4. Es sei noch eine kurze Übersicht über den Inhalt der vorl. Arbeit gegeben. Im § 1 werden die neuen komplexen Räume eingeführt. Der § 2 beschäftigt sich mit der analytischen Garbentheorie auf diesen Räumen. Der § 3 bringt Untersuchungen über kartesische Produkte $\mathfrak{G} = G \times K(\rho)$, wobei $G \subset C^d$ ein Gebiet und $K(\rho)$ einen m-dimensionalen Polyzylinder bezeichnet. Ist S eine kohärente analytische Garbe über $\mathfrak{G}$, so werden in dem Vektorraum der Koketten über $\mathfrak{G}$ mit Koeffizienten in S Pseudonormen definiert. Es werden Beschränktheitsaussagen für diese Pseudonormen hergeleitet. Im § 4 werden die Pseudonormen und die Beschränktheitsaussagen auf

[1] Man braucht dabei nicht vorauszusetzen, daß $\pi : X \to M$ eine komplex-analytische Schar ist. Es genügt, daß X, M komplexe Räume sind, daß π eine eigentliche holomorphe Abbildung ist und daß (∗) erfüllt ist.

komplexe Räume X ausgedehnt, die durch eine eigentliche holomorphe Abbildung π in einen Polyzylinder $K(\mathfrak{p})$ abgebildet sind. Es werden in X Meßatlanten, Meßüberdeckungen etc. definiert, aus denen sich dann die Pseudonormen ableiten. Im § 5 wird schließlich ein wichtiges Lemma für einen Fall ν_0 hergeleitet. Dazu müssen Induktionsannahmen gemacht werden, die u.a. die Kohärenz der Bildgarben $\pi_\nu(S)$, $\nu > \nu_0$ enthalten, wenn S eine gewisse kohärente analytische Garbe über X bezeichnet. Im § 6 wird sodann gezeigt, daß aus dem Lemma für ν_0 die Kohärenz von $\pi_{\nu_0}(S)$ folgt. Da $\pi_\nu(S)$ für sehr großes ν gleich null und somit kohärent ist, wird dadurch eine vollständige Induktion gegeben, die den vorne angegebenen Satz (I) beweist (vgl. Hauptsatz I in § 6). Neben dem Hauptsatz I werden im § 6 noch weitere Aussagen hergeleitet, die einen Zusammenhang zwischen der Kohomologie der Fasern $\pi^{-1}(y), y \in Y$ und den Bildgarben $\pi_\nu(S)$ liefern (Vgl. Hauptsätze II, IIa). Der § 7 zeigt noch, wie sich die Resultate (1), (2) von KODAIRA und SPENCER in verallgemeinerter Form aus der in der vorl. Arbeit durchgeführten Theorie ergeben. Ferner wird dort aus dem Hauptsatz I der bekannte Remmertsche Satz über eigentliche holomorphe Projektionen analytischer Mengen abgeleitet [1]. Dieser Satz ist damit aufs Neue bewiesen und in eine größere Theorie eingeordnet (Hauptsatz I kann als ein Ergebnis über analytische Projektion mit « Vielfachheit » gedeutet werden).

§ 1. Ein neuer Begriff des komplexen Raumes.

1. Die grundlegenden Begriffe der Garbentheorie seien als bekannt vorausgesetzt. Wir bezeichnen mit X einen beliebigen topologischen Raum. $A = A(X)$ sei eine Garbe von komplexen Algebren über X, alle Halme A_x, $x \in X$ von A seien kommutativ, assoziativ und mögen ein Einselement 1_x besitzen, die Abbildung $x \to 1_x$ sei stetig.

Wir nennen im folgenden einen topologischen Raum X, über dem eine Garbe A definiert ist, einen (komplex) beringten Raum. $A = A(X)$ heißt die *Strukturgarbe* von X. Ein beringter Raum muß also als ein Paar (X, A) angesehen werden. Wir schreiben jedoch einfach X, wenn das nicht zu Mißverständnissen führt. Beringte Räume wurden in [11], [6] eingehend untersucht. Wir werden deshalb hier die Terminologie aus [6] übernehmen, jedoch werde folgende in [6] nicht enthaltene Definition getroffen :

Definition 1. *Es seien $(X, A(X))$, $(Y, A(Y))$ beringte Räume. Eine morphe Abbildung Ψ von X in Y ist ein Paar (ψ_0, ψ_1) einer stetigen Abbildung $\psi_0 : X \to Y$ und einer stetigen Abbildung $\psi_1 : X \oplus_{\psi_0} A(Y) = \{(x, \sigma) : x \in X, \sigma \in A_y(Y), y = \psi_0(x)\} \to A(X)$, die jede Algebra $(x, A_y(Y))$ homomorph in die Algebra $A_x(X), y = \psi_0(x)$ abbildet* [2]. *Ψ heißt eine bimorphe (surjektive) Abbildung, wenn ψ_0, ψ_1 topologische Abbildungen sind und ψ_1 stets die Algebren $(x, A_y(Y))$ isomorph auf die Algebren $A_x(X), y = \psi_0(x)$ projiziert.*

(1) Vgl. Remmert [10].
(2) Wir setzen dabei voraus, daß dieser Homomorphismus nicht entartet ist, also nicht ganz $(x, A_y(Y))$ auf das Nullelement von $A_x(X)$ abbildet.

Man kann ein einfaches Beispiel eines beringten Raumes betrachten. Es sei G ein Teilgebiet des n-dimensionalen komplexen Zahlenraumes C^n, $O = O(G)$ bezeichne über G die Garbe der Keime von lokalen holomorphen Funktionen. Offenbar ist O eine Garbe von komplexen Algebren, G mit der Strukturgarbe O also ein komplex beringter Raum.

Wir bezeichnen mit $A \subset G$ eine analytische Teilmenge, mit $I^* \subset O$ eine kohärente Untergarbe von Idealen, deren Nullstellenmenge mit A übereinstimmt. Die Quotientengarbe $'H = O/I^*$ besitzt über $G - A$ nur Halme, die aus Nullmoduln bestehen. Betrachtet man nur die Halme von $'H$, die über A liegen, so erhält man über A eine Garbe $H = H(A)$ von lokalen Ringen. Wird A mit dieser Strukturgarbe versehen, so ist A ein beringter Raum. Wie man leicht sieht, werden i.a. die Halme H_x, $x \in A$ nilpotente Elemente enthalten.

Durch die Quotientenabbildung $O \to {}'H$ wird jedem Element $\sigma \in O_x$, $x \in A$ ein Element $\hat{\sigma} \in H_x$ zugeordnet. Wir nennen $\hat{\sigma}$ die Beschränkung von σ auf (A, H) (in Zeichen $\hat{\sigma} = \sigma \mid (A, H)$). Ebenso wird jeder Schnittfläche $s \in \Gamma(G, O(G))$ durch $O \to {}'H$ eine Schnittfläche $\hat{s} \in \Gamma(A, H)$ zugeordnet. Auch $\hat{s}$ werde mit « Beschränkung von s auf (A, H) » bezeichnet ($\hat{s} = s \mid (A, H)$).

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn I^* die Garbe der Keime aller lokalen holomorphen Funktionen ist, die auf A verschwinden. Wir bezeichnen im folgenden diese Garbe stets mit $I = I(A)$. Nach einem bekannten Satz von H. Cartan ist I kohärent. Offenbar gilt stets $I^* \subset I$, wenn I^* eine allgemeine kohärente Idealgarbe ist, deren Nullstellenmenge mit A übereinstimmt. Es werde mit $O(A)$ die Beschränkung der Garbe $O(G)/I$ auf A bezeichnet. $O(A)$ kann in natürlicher Weise als eine Untergarbe der Garbe $C(A)$ der Keime stetiger Funktionen auf A angesehen werden. Die Schnittflächen in $O(A)$ sind also spezielle stetige Funktionen über A. Da $I^* \subset I$ gilt, gibt es den durch Quotientenbildung kanonisch definierten Homomorphismus red : $H(A) \to O(A)$.

Definition 2. *Ein beringter Raum $(X, A(X))$ heißt ein komplexer Raum, wenn folgendes gilt :*

1) *X ist ein Hausdorffscher Raum.*

2) *Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U(x)$, einen beringten Raum $(A, H(A))$, der auf die vorhin beschriebene Weise definiert ist, und eine bimorphe surjektive Abbildung $\Psi : U(x) \to A$.*

(X, A(X)) heißt ein reduzierter komplexer Raum, wenn X hausdorffsch und $U(x)$ stets zu einem beringten Raum (A, O(A)) bimorph äquivalent ist. Offenbar ist ein komplexer Raum genau dann ein reduzierter komplexer Raum, wenn die Halme $A_x(X)$ seiner Strukturgarbe keine nilpotenten Elemente enthalten.

2. Es seien $A_\nu \subset G_\nu \subset C^{n_\nu}$ analytische Mengen, H_ν, O_ν Strukturgarben über A_ν, die wie vorhin definiert sind, red_ν seien die Projektionen $H_\nu \to O_\nu$, $\nu = 1,2$; ferner sei

$\Psi = (\psi_0, \psi_1)$ eine morphe Abbildung des beringten Raumes (A_1, H_1) in den beringten Raum (A_2, H_2). Wir zeichnen Untergarben von H_ν, $\nu = 1,2$ aus :

$H_\nu^{(1)}$ sei die Menge der Elemente σ von H_ν, für die folgendes gilt :

Es gibt zu σ eine offene Menge $U \subset A_\nu$ und eine Schnittfläche $s = s(x) \in \Gamma(U, H_\nu)$, so daß

1) $\sigma \in s$,

2) $s(x)$ für alle $x \in U$ im maximalen Ideal von $(H_\nu)_x$ enthalten ist.

Offenbar ist $H_\nu^{(1)}$ nichts anderes als die Kerngarbe des Homomorphismus red_ν. Da aber $H_\nu^{(1)}$ durch eine innere Eigenschaft der Garbe H_ν definiert ist, bildet ψ_1 den Raum $A_1 \oplus_{\psi_0} H_2^{(1)}$ in $H_1^{(1)}$ homomorph ab. Daraus folgt insbesondere, daß ψ_1 eine Abbildung $\psi_1^* : O_2 \oplus_{\psi_0} A_1 \to O_1$ definiert. $\Psi^* = (\psi_0, \psi_1^*)$ ist eine morphe Abbildung des komplexen Raumes (A_1, O_1) in den komplexen Raum (A_2, O_2).

Nun kann O_ν als Untergarbe von $C(A_\nu)$ gedeutet werden, $\nu = 1,2$. Ordnet man einem beliebigen Funktionskeim $f \in C(A_2)$ den Funktionskeim $f \circ \psi_0 \in C(A_1)$ zu, so erhält man eine stetige Abbildung $\lambda : A_1 \oplus_{\psi_0} C(A_2) \to C(A_1)$. Das Diagramm :

$$\begin{array}{ccc} C(A_1) & \leftarrow & A_1 \oplus_{\psi_0} C(A_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \to & A_2 \end{array}$$

ist kommutativ. Wir zeigen :

Satz 1. λ *bildet* $A_1 \oplus_{\psi_0} O_2$ *in* O_1 *ab. Es gilt* $\lambda = \psi_1^*$.

Beweis. Da ψ_1^* ein Ringhomomorphismus ist, bildet ψ_1^* stets das Einselement $1_y \in (O_2)_y$, $y = \psi_0(x)$, $x \in A_1$ ab auf das Einselement $1_x \in (O_1)_x$. Da ferner ψ_1^* ein Homomorphismus von komplexen Algebren ist, folgt, daß ψ_1^* eine Abbildung der konstanten Funktionen aus $\Gamma(V, O_2)$ in die konstanten Funktionen aus $\Gamma(U, O_1)$ erzeugt [1] (mit $U = \psi_0^{-1}(V)$, $V \subset A_2$ eine offene Menge). Die Funktion $f \equiv c$ geht in die Funktion $g \equiv c$ über.

Es seien nun $x_0 \in A_1$ ein beliebiger Punkt, $y_0 = \psi_0(x_0) \in A_2$ und $\sigma \in (O_2)_{y_0}$ ein Garbenelement. Man kann eine Umgebung $V(y_0) \subset A_2$ und eine komplexe Funktion $f \in \Gamma(V, O_2)$ finden, die in y_0 den Keim σ erzeugt. Das ψ_1^*-Bild von f sei mit g bezeichnet $(g \in \Gamma(U, O_1), U = \psi_0^{-1}(V))$. Durch ψ_1^* wird $f - f(y)$ auf die Funktion $g - f(y)$ abgebildet (mit $y \in V$ festgewählt). Der Keim von $f - f(y)$ gehört zum maximalen Ideal von $(O_2)_y$. Also muß der Keim von $g - f(y)$ in jedem Punkt $x \in \psi_0^{-1}(y)$ zum maximalen Ideal von $(O_1)_x$ gehören. Das heißt $f(y) = g(x)$. Also gilt : $g = f \circ \psi_0$. Daraus folgt aber unmittelbar die Behauptung von Satz 1.

3. Es sei $\hat{\psi}^*$ eine holomorphe Abbildung eines Gebietes $G_1^* \subset C^{n_1^*}$ in ein Gebiet $G_2^* \subset C^{n^*}$, die eine analytische Menge $A_1^* \subset G_1^*$ in eine analytische Menge $A_2^* \subset G_2^*$ abbildet.

---

[1] Wir werden im folgenden stets eine Abbildung, die durch eine Abbildung α erzeugt ist, auch mit α bezeichnen. In unserem Falle steht also auch für die erzeugte Abbildung ψ_1^*.

Es sei H_ν^* eine Strukturgarbe über A_ν^*, die durch Beschränkung einer Quotientengarbe $'H_\nu^* = O(G_\nu^*)/I_\nu^*$ definiert ist, $\nu = 1,2$. $\hat{\psi}^*$ erzeugt dann eine Abbildung

$$\varphi : G_1^* \oplus_{\hat{\psi}^*} I_2^* \to O(G_1^*).$$

Bildet φ die Garbe $G_1^* \oplus_{\hat{\psi}^*} I_2^*$ in I_1^* ab, so erhalten wir außerdem einen Homomorphismus $\psi_1^* : A_1^* \oplus_{\hat{\psi}^*} H_2^* \to H_1^*$. $(\hat{\psi}^* | A_1^*, \psi_1^*)$ ist eine morphe Abbildung. Wir sagen, daß sie von $\hat{\psi}^*$ erzeugt ist. — Wir verwenden die gleiche Bezeichnungsweise wie im vorigen Abschnitt und zeigen:

Satz 2. *Es gibt zu jedem Punkt $x \in A_1$ eine in G_1 offene Umgebung $U(x) \subset G_1$ und eine holomorphe Abbildung $\hat{\psi} : U \to G_2$, die die morphe Abbildung $\Psi | U \cap A_1$ erzeugt.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $z_1, \ldots, z_{n_2}$ komplexe Koordinaten in G_2, f_ν sei die durch die Quotientenprojektion $O(G_2) \to {}'H_2$ definierte Bildschnittfläche von z_ν aus $\Gamma(A_2, H_2)$, ferner sei g_ν das ψ_1-Bild von f_ν in $\Gamma(A_1, H_1)$, $\nu = 1, \ldots, n_2$. Ist die Umgebung $U(x)$, $x \in A_1$, hinreichend klein gewählt, so kann man holomorphe Funktionen $\hat{g}_\nu$ über U bestimmen, die vermöge der Quotientenprojektion $O(G_1) \to {}'H_1$ die Schnittflächen g_ν definieren. Es sei dann $\hat{\psi}$ die durch $(g_1, \ldots, g_{n_2})$ bestimmte holomorphe Abbildung. Aus Satz 1 folgt: $\hat{\psi} | U \cap A_1 = \psi_0 | U \cap A_1$.

Es seien $y_0 \in \hat{\psi}(U \cap A_1)$ ein beliebiger Punkt, $f_{y_0} \in (H_2)_{y_0}$ ein beliebiges Garbenelement. Ist $V(y_0)$ eine hinreichend kleine, in G_2 offene Umgebung von y_0, so gibt es eine holomorphe Funktion $\hat{\hat{f}}$ aus $\Gamma(V, O(V))$, die f_{y_0} definiert. Wir setzen $W = \hat{\psi}^{-1}(V)$, $\hat{g} = \hat{f} \circ \hat{\psi}$. $\hat{g}$ ist eine in W holomorphe Funktion. Wir haben zu zeigen, daß $\hat{g}$ das Element $g_{x_0} = \psi_1(f_{y_0}) \in (H_1)_{x_0}$, $x_0 \in \hat{\psi}^{-1}(y_0)$ bestimmt. Dazu ist es notwendig, einen Hilfssatz heranzuziehen, der ein Spezialfall des in § 3 bewiesenen Satzes 2 ist.

Hilfssatz 1. *Es sei $O_{\mathfrak{D}}$ der Ring der Keime holomorpher Funktionen in einem Punkte $\mathfrak{D} \in C^n$, $I_{\mathfrak{D}}$ sei ein Ideal in $O_{\mathfrak{D}}$. Ist dann $f \in O_{\mathfrak{D}}$ ein Keim einer holomorphen Funktion und gibt es zu jeder natürlichen Zahl k ein Element $h \in I_{\mathfrak{D}}$, so daß der holomorphe Funktionskeim $f - h$ in $\mathfrak{D}$ eine Nullstelle k-ter Ordnung hat, so gilt $f \in I_{\mathfrak{D}}$.*

Wir verzichten hier darauf, Hilfssatz 1 zu beweisen und führen den Beweis von Satz 2 fort.

Es sei k eine vorgegebene natürliche Zahl. Man kann dann ein Polynom $Q = Q(z_1, \ldots, z_{n_2})$ finden, so daß die Funktion $\hat{f}' = \hat{f} - Q$ im Punkte y_0 mindestens von der Ordnung k verschwindet. Wir setzen $P = Q \circ \hat{\psi}$ und bezeichnen mit $\hat{g}_{x_0}$ bzw. P_{x_0} den von $\hat{g}$ bzw. P in x_0 erzeugten holomorphen Funktionskeim. f'_{y_0} sei das von $\hat{f}'$ definierte Element aus $(H_2)_{y_0}$, g'_{x_0} sei sein ψ_1-Bild in $(H_1)_{x_0}$. Ferner seien $\tilde{g}_{x_0}$ bzw. $\tilde{g}'_{x_0}$ holomorphe Funktionskeime in x_0, die g_{x_0} bzw. g'_{x_0} definieren. Offenbar kann man $\tilde{g}'_{x_0}$ so wählen, daß der Funktionskeim in x_0 eine Nullstelle k-ter Ordnung hat. Ebenso hat $\hat{g}_{x_0} - P_{x_0}$ in x_0 eine Nullstelle der Ordnung k. Offenbar ist $(\hat{g}_{x_0} - \tilde{g}_{x_0}) - (\hat{g}_{x_0} - P_{x_0}) + \tilde{g}'_{x_0}$ in der zur Definition von $'H_1$ verwendeten Idealgarbe I_1^* enthalten, weil

$$P_{x_0} | (A_1, H_1) = \psi_1(Q_{y_0}) | (A_2, H_2)$$

ist. Da k beliebig sein kann, folgt aus Hilfssatz 1 : $\hat{g}_{x_0} - \tilde{g}_{x_0} \in (I_1^*)_{x_0}$, $\hat{g}$ definiert also das Element g_{x_0}, q.e.d.

4. Wir behalten die Terminologie des Abschnittes 2 bei. Es seien $f_1, \ldots, f_q \in \Gamma(A_2, H_2)$ endlich viele Schnittflächen. Durch die Projektion $H_2 \to O_2(A_2)$ erhalten wir in Zuordnung zu den Schnittflächen f_ν q komplex-wertige Funktionen aus $\Gamma(A_2, O_2(A_2))$, die eine stetige Abbildung $\varphi_0 : A_2 \to C^q$ definieren. Man kann φ_0 in kanonischer Weise zu einer morphen Abbildung ergänzen.

Wir bezeichnen die Punkte des C^q mit $z = (z_1, \ldots, z_q)$, $y_0 \in A_2$ sei ein beliebiger Punkt. Wir setzen $z_0 = \varphi_0(y_0) = (z_1^{(0)}, \ldots, z_q^{(0)})$. Nach Definition der Garbe H_2 kann man eine Umgebung $U(y_0) \subset G_2$ und in U holomorphe Funktionen $\hat{f}_\nu$ finden, deren Beschränkung auf $(A_2 \cap U, H_2)$ mit $f_\nu | A_2 \cap U$ übereinstimmt. Die Funktionen $\hat{f}_\nu$ definieren eine holomorphe Abbildung $\hat{\varphi}_0 : U \to C^q$, deren Beschränkung auf $A_2 \cap U$ die Abbildung $\varphi_0 | A_2 \cap U$ ist. $\hat{\varphi}_0$ definiert in natürlicher Weise einen Homomorphismus der Algebra $O_{z_0}(C^q)$ in die Algebra $O_{y_0}(G_2)$. Nach Anwendung der Quotientenabbildung $O(G_2) \to H_2$ erhält man sodann einen Homomorphismus $\varphi_{1y_0} : O_{z_0}(C^q) \to (H_2)_{y_0}$. Offenbar ist φ_{1y_0} von der Wahl der Funktionen $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_q$ unabhängig. Die Menge $\varphi_1 = \{\varphi_{1y}\}$ kann man schließlich als eine Abbildung $A_2 \oplus_{\varphi_0} O(C^q) \to H_2$ auffassen und $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1)$ ist die gesuchte morphe Abbildung.

Es sei $g_\nu \in \Gamma(A_1, H_1)$ das ψ_1-Bild der Schnittflächen f_ν, $\nu = 1, \ldots, q$. Die Schnittflächen $(g_1, \ldots, g_q)$ definieren wieder eine morphe Abbildung $A_1 \to C^q$, die wir mit $\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1)$ bezeichnen wollen. Aus Satz 2 folgt unmittelbar :

Satz 3. *Das Diagramm :*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\tilde{\Phi}"'] & & A_2 \arrow[dl, "\Phi"] \\ & C^q & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

5. Die Sätze 1-3 führen zu einfachen Folgerungen für komplexe Räume :

(1) *Es sei (X, H) ein komplexer Raum. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Untergarbe $O = O(X) \subset C(X)$ von komplexen Algebren, so daß (X, O) ein reduzierter komplexer Raum ist. Es ist kanonisch eine Abbildung red : $H \to O$ definiert, so daß das Diagramm :*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "red"] \arrow[dr] & & O \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Bezeichnet i die Identität, so ist (i, red) eine morphe Abbildung von (X, O) auf (X, H).

Wir werden im folgenden (X, O) die *Reduktion* von (X, H) nennen.

(2) *Es seien* (X, H) *ein komplexer Raum,* $f_1, \ldots, f_q$ *endlich viele Schnittflächen aus* $\Gamma(X, H)$. *Dann definieren* $f_1, \ldots, f_q$ *eine morphe Abbildung* $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1)$ *von* X *in den* q*-dimensionalen komplexen Zahlenraum* C^q.

(3) *Es seien* (X_ν, H_ν), $\nu = 1,2,3$ *komplexe Räume,* $\Phi_1 = (\varphi_0^{(1)}, \varphi_1^{(1)})$ *bzw.* $\Phi_2 = (\varphi_0^{(2)}, \varphi_1^{(2)})$ *sei eine morphe Abbildung von* (X_1, H_1) *in* (X_2, H_2) *bzw. von* (X_2, H_2) *in* (X_3, H_3). *Es werde* $\varphi_1 : X_1 \oplus_{\varphi_0^{(2)} \circ \varphi_0^{(1)}} H_3 \to H_1$ *so definiert, daß gilt :*

$$\varphi_1 \mid (x_1, (H_3)_{x_3}) = (\varphi_1^{(1)} \mid (x_1, (H_2)_{x_2})) \circ (\varphi_1^{(2)} \mid (x_2, (H_3)_{x_3})),$$

wenn $x_\nu \in X_\nu$, $\nu = 1,2,3$ *Punkte sind, die in der Beziehung :* $x_3 = \varphi_0^{(2)}(x_2)$, $x_2 = \varphi_0^{(1)}(x_1)$ *stehen. Dann ist* $\Phi_3 = (\varphi_0, \varphi_1)$ *mit* $\varphi_0 = \varphi_0^{(2)} \circ \varphi_0^{(1)}$ *eine morphe Abbildung von* (X_1, H_1) *in* (X_3, H_3), *die auch mit* $\Phi_2 \circ \Phi_1$ *bezeichnet werde. Den morphen Abbildungen* Φ_ν *entsprechen morphe Abbildungen* Φ_ν^* *der zugeordneten reduzierten Räume* (X_ν, O_ν). *Man hat* $\Phi_3^* = \Phi_2^* \circ \Phi_1^*$. *Das Diagramm :*

$$\begin{array}{ccccc}
(H_1)_{x_1} & \leftarrow & (H_2)_{x_2} & \leftarrow & (H_3)_{x_3} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(O_1)_{x_1} & \leftarrow & (O_2)_{x_2} & \leftarrow & (O_3)_{x_3}
\end{array}$$

ist kommutativ.

Wir geben noch einige weitere elementare Eigenschaften komplexer Räume an :

(4) *Es sei* (X, H) *ein komplexer Raum,* $U \subset X$ *eine offene Teilmenge. Dann ist* $(U, H \mid U)$ *ebenfalls ein komplexer Raum.*

(5) *Sind* (X_1, H_1), (X_2, H_2) *komplexe Räume, so ist auf dem kartesischen Produkt* $X_1 \times X_2$ *in kanonischer Weise eine Strukturgarbe definiert, die* $X_1 \times X_2$ *zu einem komplexen Raum macht.*

Man erhält die Strukturgarbe von $X_1 \times X_2$ auf folgender Weise. Es sei $U_\nu \subset X_\nu$, $\nu = 1,2$ je eine offene Menge, die durch eine bimorphe Abbildung Ψ_ν auf eine analytische Menge $A_\nu \subset G_\nu$ abgebildet ist, die mit einer Strukturgarbe $H_\nu^* = O(G_\nu)/I_\nu^*$ versehen sei. Mit $I_z \subset O_z$, $z = (z_1, z_2) \in G = G_1 \times G_2$ werde sodann das Ideal bezeichnet, das durch die Funktionskeime $f \in O_{z_1}(G_1)$ oder $\in O_{z_2}(G_2)$ erzeugt wird. Man sieht sofort [1], daß $I^* = \{I_z\}$ eine kohärente Garbe ist, die genau $A_1 \times A_2$ zur Nullstellenmenge hat. $H^* = O(G)/I^*$ ist dann eine Strukturgarbe über $A_1 \times A_2$, die durch $\psi_0^{(1)} \times \psi_0^{(2)}$ nach $U_1 \times U_2$ zu einer Strukturgarbe H übertragen werden kann. Wählt man andere analytische Mengen und andere bimorphe Abbildungen, so erhält man zwar eine andere Strukturgarbe H' über $U_1 \times U_2$, jedoch auch einen natürlichen Isomorphismus $H \approx H'$. Das bedeutet, daß eine Strukturgarbe über $X_1 \times X_2$ eindeutig bestimmt ist, q.e.d.

Man zeigt leicht unter Verwendung von Orthogonalreihen, daß die so definierte komplexe Struktur von $X_1 \times X_2$ mit der von J. P. Serre eingeführten Struktur übereinstimmt, wenn X_1, X_2 reduzierte komplexe Räume sind.

---

[1] Es werden im folgenden die Grundtatsachen der analytischen Garbentheorie über reduzierten komplexen Räumen als bekannt vorausgesetzt. Man vgl. die Publikationen von H. Cartan und K. Oka über diesen Gegenstand.

(6) *Jeder komplexe Raum ist lokal zusammenhängend, er zerfällt in offene zusammenhängende Komponenten. Zu jedem seiner Punkte gibt es beliebig kleine Umgebungen, die in sich auf den Punkt zusammenziehbar sind.*

Da zu jedem komplexen Raum (X, H) ein reduzierter komplexer Raum (X, O) gehört, gelten für den topologischen Raum X alle Eigenschaften, die von den komplexen Räumen des alten Sprachgebrauchs her bekannt sind. Man kann den Begriff der komplexen Dimension erklären. Wir werden im folgenden X reindimensional nennen, wenn diese Dimension in allen Punkten von X die gleiche ist. Ferner kann man die irreduziblen Komponenten von X definieren (sofern man diese nur als topologische Unterräume auffaßt). Wir werden von diesen und ähnlichen Begriffen ausgiebig Gebrauch machen.

Es seien noch einige weitere Definitionen getroffen :

Definition 3. *Ein komplexer Raum (X, H) heißt normal, wenn jeder lokale Ring H_x, $x \in X$ normal, d.h. ganz abgeschlossen in seinem Quotientenring ist.*

Definition 4. *Ein komplexer Raum (X, H) heißt regulär, wenn jeder lokale Ring H_x isomorph zu einem lokalen Ring eines kartesischen Produktes $P \times G$ ist. Dabei bezeichnet $G \subset C^n$ ein Gebiet, $P \in C^m$ einen Punkt, der mit einer Strukturgarbe $O_P(C^m)/I_P$ versehen ist, wobei I_P ein Ideal bezeichnet, das P zur genauen Nullstellenmenge hat* (1).

Offenbar ist ein reduzierter komplexer Raum genau dann regulär, wenn er eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

Definition 5. *Ein komplexer Raum (X, H) heißt ein holomorph-vollständiger (holomorph-konvexer, K-vollständiger) Raum, wenn seine Reduktion (X, O) holomorph-vollständig (holomorph-konvex, K-vollständig) ist.*

Für holomorph-vollständige Räume werden wir im nächsten Paragraphen interessante garbentheoretische Resultate herleiten.

Definition 6. *Es sei (X, H) ein komplexer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt eine analytische (Teil-)Menge von (X, H), wenn A eine analytische Menge in der Reduktion (X, O) ist.*

Wir nennen fortan morphe Abbildungen zwischen komplexen Räumen holomorph, Schnittflächen aus $\Gamma(X, H)$ seien mit « holomorphe Funktionen » bezeichnet.

6. Es sei (X, H) ein allgemeiner komplexer Raum. Wir verstehen wie in Abschnitt 2 unter $H^{(1)}$ die Kerngarbe der Abbildung red : $H \to O(X)$. $H^{(1)}$ ist eine Untergarbe von Idealen über X. $H^{(\nu)}$, $\nu = 1,2,3, \ldots$ sei diejenige Untergarbe von Idealen von H, die von den Elementen $\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_\nu$ mit $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu \in H^{(1)}$ erzeugt wird. Offenbar gilt $H^{(0)} =_{\text{Def.}} H \supset H^{(1)} \supset H^{(2)} \supset \ldots \supset H^{(\nu)} \supset H^{(\nu+1)} \supset \ldots$.

---

(1) Der Begriff « regulär » weicht hier von der üblichen Definition ab. Im folgenden wird sich öfter zeigen, daß aus der Algebra bekannte Begriffe in unserer Theorie nicht sinnvoll sind (vgl. auch die Definition des Torsionselementes in § 7).

Es folgt sofort :

Satz 4. *Zu jedem relativkompakten Teilbereich* $B \subset\subset X$ *gibt es eine natürliche Zahl* $k = k(B)$, *so daß* $H^{(k)} = 0$ *ist.*

Beweis. Offenbar braucht man diesen Satz nur lokal und für den Fall zu beweisen, daß $\mathrm{X} = \mathrm{A} \subset \mathrm{G} \subset \mathrm{C}^n$ eine analytische Menge und $\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \mathrm{H}(\mathrm{A}) = \mathrm{O}(\mathrm{G})/\mathrm{I}^*$ der Quotient der Garbe $\mathrm{O}(\mathrm{G})$ und einer in G kohärenten Idealgarbe I^* ist, die A zur genauen Nullstellenmenge hat. Die Garbe $\mathrm{I} = \mathrm{I}(\mathrm{A})$ der Keime holomorpher Funktionen, die auf A verschwinden, ist ebenfalls kohärent (nach einem Satz von H. CARTAN). Wegen der lokalen Natur unseres Satzes dürfen wir sodann annehmen, daß über G endlich viele Schnittflächen $s_1, \ldots, s_q \in \Gamma(\mathrm{G}, \mathrm{I})$ existieren, die in jedem Punkte $x \in \mathrm{G}$ den Halm I_x erzeugen.

Die Halme $\mathrm{H}_x^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ werden nun von Elementen erzeugt, die in den Schnittflächen $s_{\mu_1} \cdot \ldots \cdot s_{\mu_\nu} | (\mathrm{A}, \mathrm{H})$, $1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_\nu \leq q$, enthalten sind. Da jede Schnittfläche s_μ, $\mu = 1, \ldots, q$ die Nullstellenmenge der Idealgarbe I^* umfaßt, folgt aus dem Hilbertschen Nullstellensatz, daß es zu jedem Punkt $x \in \mathrm{A}$ eine natürliche Zahl $k = k(x)$ gibt, so daß jeder Keim, der in x von einem Produkt $\pi = s_{\mu_1} \cdot \ldots \cdot s_{\mu_k}$ definiert wird, in I_x^* enthalten ist. Nach dem Cartan-Rückertschen Basissatz ist dann π eine Schnittfläche in I^* über einer ganzen Umgebung von x. Ist $\mathrm{B} \subset\subset \mathrm{A}$ eine relativkompakte Teilmenge und k hinreichend groß gewählt, so ist jedes Produkt $s_{\mu_1} \cdot \ldots \cdot s_{\mu_k}$ eine Schnittfläche in I^* über einer offenen Umgebung von B. Das heißt aber $\mathrm{H}^{(k)} | \mathrm{B} = 0$, q.e.d.

§ 2. Garbentheorie.

1. Wir werden im diesem Paragraphen die Theorie analytischer Garben über komplexen Räumen entwickeln.

Definition 1. *Es sei* (X, H) *ein komplexer Raum. Eine Garbe* S *von abelschen Gruppen über* X *heißt eine analytische Garbe, wenn jeder Ring* H_x, $x \in X$ *auf dem Halm* S_x *operiert, so daß die dadurch definierte Abbildung* $\bigcup_x H_x \oplus S_x \to S$ *eine stetige Abbildung ist.*

Zwischen analytischen Garben kann man wie üblich *analytische Garbenhomomorphismen* definieren. Wir nennen einen analytischen Homomorphismus einfach einen Homomorphismus, wenn das nicht zu Mißverständnissen führt. Es werde definiert :

Definition 2. *Es seien* (X_1, H_1), (X_2, H_2) *komplexe Räume,* $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1) : X_1 \to X_2$ *eine holomorphe Abbildung,* S_1 *bzw.* S_2 *eine analytische Garbe über* X_1 *bzw.* X_2. *Dann heißt eine stetige Abbildung* $\lambda : X_1 \oplus_{\varphi_0} S_2 \to S_1$ *ein Garbenhomomorphismus* $S_2 \to S_1$ *(über* Φ*), wenn folgendes gilt :*

1) λ *bildet jeden Halm* (x, S_{2y}) *homomorph in* S_{1x} *ab,*
2) *man hat :* $\lambda(x, s_y \cdot f_y) = \lambda(x, s_y) \cdot \varphi_1(f_y)$, $s_y \in S_{2y}$, $f_y \in H_{2y}$, $y = \varphi_0(x)$.

Wie im Falle reduzierter komplexer Räume kann man *direkte Summen* und *Tensorprodukte* von analytischen Garben erklären. Wir bezeichnen mit S^p, H^p usw. die p-fache direkte Summe der Garben S, H usw. mit sich selbst. $S^{\underline{p}}$, $H^{\underline{p}}$ usw. sei die p-fache Tensorpotenz. Man kann ferner den Begriff der Kohärenz analytischer Garben definieren :

Definition 3. *Eine analytische Garbe S über einem komplexen Raum (X, H) heißt kohärent, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U(x)$ und über U eine exakte Garbensequenz : $H^p \to H^q \to S \to 0$ gibt.*

In [6], § 1 wurde eine etwas andere Definition der Kohärenz gegeben. Aus einem Satz von K. Oka über die Relationengarbe eines Systems $f_1, \ldots, f_k$ von q-tupeln holomorpher Funktionen folgt jedoch, daß H im Sinne von [6] kohärent ist. Daraus ergibt sich dann die Äquivalenz der Definition 3 mit der Definition 1 in [6].

Wie in [6] gewinnt man folgende Aussagen :

(a) In einer exakten analytischen Sequenz $0 \to S' \to S \to S'' \to 0$ von analytischen Garben über einem komplexen Raum (X, H) sind alle drei Garben kohärent, wenn wenigstens zwei von ihnen kohärent sind.

(b) Es sei $\varphi : S_1 \to S_2$ ein analytischer Homomorphismus zwischen zwei kohärenten Garben über X. Dann sind der Kern, der Kokern, das Bild von φ kohärente analytische Garben.

(c) Die direkte Summe $S_1 \oplus S_2$, das Tensorprodukt (über H) $S_1 \otimes S_2$, die Garbe $Hom(S_1, S_2)$ sind kohärente analytische Garben, wenn S_1, S_2 kohärent sind.

(d) Es seien S eine kohärente analytische Garbe über (X, H), $M \subset S$ eine analytische Untergarbe von S. Dann ist M bereits dann kohärent, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U(x)$ gibt, so daß die Schnittflächen aus $\Gamma(U, M)$ jeden Halm M_x, $x \in U$ erzeugen.

2. Es sei $I \subset H$ eine analytische Untergarbe. Offenbar ist dann jeder Halm I_x ein Ideal im Ring H_x. Wir nennen die Menge der Punkte $x \in X$, in denen $I_x \neq H_x$ gilt, die *Nullstellenmenge der Idealgarbe I* (in Zeichen $N(I)$).

Es werde nun $X^* = N(I)$ gesetzt. Als Teilmenge von X ist X^* ein Hausdorffscher Raum. Wir versehen X^* mit der Strukturgarbe $H^* = (H/I) | X^*$. Es folgt :

Satz 1. *(X^*, H^*) ist ein komplexer Raum, $X^* \subset X$ eine analytische Menge.*

Bevor wir Satz 1 beweisen können, muß eine allgemeine Betrachtung durchgeführt werden. Wir machen dazu die Annahme, daß (X^*, H^*) ein komplexer Raum, $X^* \subset X$ eine analytische Menge ist. Es sei S^* eine analytische Garbe über X^*. Man kann S^* trivial zu einer Garbe $'S^* = S$ über X fortsetzen : Die Halme von S stimmen über X^* mit den Halmen von S^* überein, über $X - X^*$ hat S nur Nullhalme. Man zeigt leicht :

Satz 2. *S ist genau dann kohärent, wenn S^* kohärent ist.*

Der Beweis von Satz 2 kann wie in [6] geführt werden (vgl. § 2 *(c)*). Es sei deshalb hier auf ihn verzichtet. — Wir werden im folgenden S^* und die triviale Fortsetzung von S^* als gleiche Garben behandeln, wenn das nicht zu Mißverständnissen führt.

Beweis von Satz 1. Man braucht Satz 1 nur für den Fall zu beweisen, daß $X = A \subset G \subset C^n$ eine analytische Menge und $H = O(G)/I^*$ die im vorigen Paragraphen beschriebene Quotientengarbe ist. Wir bezeichnen mit $\widetilde{I} \subset O(G)$ die kohärente Kerngarbe des Homomorphismus $O(G) \to H/I$. Offenbar stimmt die Nullstellenmenge von $\widetilde{I}$ mit $X^* \subset X = A$ überein, und es gilt : $H^* = H/I = O(G)/\widetilde{I}$, $X^* \subset X$ ist eine analytische Teilmenge, q.e.d.

Wir nennen fortan einen Raum (X^*, H^*) einen *komplexen Unterraum* von (X, H).

Es sei S eine kohärente analytische Garbe über X. Durch die Festsetzung $S^* = S/S \cdot I | X$ erhält man eine kohärente analytische Garbe über X^*. S^* heiße die analytische Beschränkung von S auf X^* (in Zeichen $S^* = S|_a X$ oder einfach $S^* = S|X$). Durch die Quotientenabbildung $S \to S^*$ wird jedem Garbenelement $\sigma \in S_x$, $x \in X^*$ ein Garbenelement $\sigma^* \in S^*_x$ zugeordnet, in analoger Weise erhält man zu jeder Schnittfläche $s \in \Gamma(U, S)$, $U \cap X^* \neq 0$ eine Schnittfläche $s^* \in \Gamma(U \cap X^*, S^*)$. Wir nennen σ^* bzw. s^* die analytische Beschränkung von σ bzw. s auf X^*. In den folgenden Paragraphen werden wir das Wort « analytisch » i.a. fortlassen.

3. In [6] wurde die Godementsche Kohomologietheorie mit Koeffizienten in Garben von abelschen Gruppen entwickelt. Wir werden in dieser Arbeit im wesentlichen nur parakompakte Räume untersuchen und können uns deshalb auf die Chechsche Definition der Kohomologiegruppen beschränken. Wir betrachten nur Koketten, Kozyklen etc., die antikommutativ in ihren Indices sind (d.h. $f_{\iota_0 \ldots \iota_a \ldots \iota_b \ldots \iota_r} = -f_{\iota_0 \ldots \iota_b \ldots \iota_a \ldots \iota_r}$). Dadurch ergeben sich wesentliche Vereinfachungen in der Rechnung. Die Struktur der Kohomologiegruppen ändert sich jedoch nicht.

Für holomorph-vollständige Räume ergeben sich interessante Aussagen :

Satz 3. *(Analogon zum Theorem B von H. Cartan). Es seien (X, H) ein holomorph-vollständiger komplexer Raum, S eine kohärente analytische Garbe über X. Dann gilt $H^\nu(X, S) = 0$ für $\nu > 0$.*

Beweis. Wir definieren $H^{(\nu)}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ wie in § 1, Abschnitt 6 und setzen $S^{(\nu)} = S \cdot H^{(\nu)}$. Es ist $S^{(0)} = S$. Die Garben $S^{(\nu-1)}/S^{(\nu)}$ kann man als analytische Garben über der Reduktion (X, O) auffassen. Wie man leicht sieht, ist $S^{(\nu-1)}/S^{(\nu)}$ kohärent.

Man hat exakte Sequenzen : $0 \to S^{(\nu)} \to S^{(\nu-1)} \to S^{(\nu-1)}/S^{(\nu)} \to 0$, zu denen Kohomologiesequenzen : $H^\mu(X, S^{(\nu)}) \to H^\mu(X, S^{(\nu-1)}) \to H^\mu(X, S^{(\nu-1)}/S^{(\nu)})$ gehören. Da aber (X, O) ein holomorphvollständiger Raum ist, folgt aus [3], théorème B, daß

$$(*)\ H^\mu(X, S^{(\nu)}) \to H^\mu(X, S^{(\nu-1)}) \to 0, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

exakt ist.

Wir schöpfen X durch eine aufsteigende Folge $X_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$ relativkompakter Teilbereiche aus. Nach § 1, Satz 4 gibt es zu jedem $\varkappa$ eine natürliche (kleinste Zahl) $k(\varkappa)$, so daß $S^{(k(\varkappa))} | X_\varkappa = 0$ ist. Es sei $U = \{U_\iota\}$ eine beliebige offene Überdeckung von X, $\xi \in Z^\mu(U, S)$ sei ein Kozyklus, $\mu > 0$. Ist V eine Verfeinerung von U, τ die Abbildung der zugehörigen Indexmengen, so bezeichne $\tau\xi$ das induzierte Bild von ξ in $Z^{\mu}(V, S)$ (1). Wegen der exakten Sequenz $(*)$ gibt es nun eine Verfeinerung V_1 und eine Kokette $\eta_1 \in C^{\mu-1}(V_1, S)$, so daß $\xi_1 = \tau\xi - \delta\eta_1 \in Z^{\mu}(V_1, S^{(k(1))})$ gilt. Durch nochmalige Anwendung von $(*)$ kann man sodann eine Verfeinerung V_2 von V_1 und eine Kokette $\eta_2 \in C^{\mu-1}(V_2, S^{(k(1))})$ finden, so daß $\xi_2 = \tau\xi_1 - \delta\eta_2 \in Z^{\mu}(V_2, S^{(k(2))})$ gilt. Man hat $\eta_2 | X_1 = 0$. So kann man beliebig fortfahren. Man erhält eine Verfeinerungsfolge $V_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$, für die man annehmen darf, daß $V_\varkappa | X_{\varkappa-2} = V_{\varkappa-1} | X_{\varkappa-2}$ ist. Es gibt daher eine Überdeckung V von X, die feiner als alle Überdeckungen $V_\varkappa$ ist. V ist auch eine Verfeinerung von U. Man kann das Bild $\tau\eta_\varkappa \in C^{\mu-1}(V, S)$ der zu den Überdeckungen konstruierten Koketten betrachten. Da $\tau\eta_\varkappa | X_{\varkappa-1} = 0$ ist, läßt sich die Summe $\eta = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \tau\eta_\varkappa$ definieren. Es folgt $\tau\xi = \delta\eta$, d.h. jeder Kozyklus aus $Z^{\mu}(U, S)$ repräsentiert die Nullkohomologieklasse. Somit gilt $H^{\mu}(X, S) = 0$, q.e.d.

Es gilt auch ein Analogon zu [3], théorème A :

Satz 4. *Es seien (X, H) ein holomorph-vollständiger komplexer Raum, S eine kohärente analytische Garbe über X. Dann erzeugen die Schnittflächen aus $\Gamma(X, S)$ über der Operatorgarbe H jeden Halm von S.*

Beweis. Wir betrachten wie vorhin die Folge $S = S^{(0)} \supset S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset \ldots$ kohärenter Garben über (X, H). Wegen Satz 3 bestehen die exakten Sequenzen :

$$\binom{*}{*} \quad H^0(X, S^{(\nu-1)}) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, S^{(\nu-1)}/S^{(\nu)}) \to 0$$

Es sei $\sigma \in S_x$, $x \in X$ ein Garbenelement. Da (X, O) ein holomorphvollständiger reduzierter komplexer Raum ist, folgt aus [3], théorème A, daß es endlich viele Schnittflächen $s_{\mu}^{(1)}$, $\mu = 1, \ldots, q_1$ aus $\Gamma(X, S/S^{(1)})$ gibt, so daß $\sigma | (X, O) = \Sigma (s_{\mu}^{(1)})_x \cdot f_{\mu}^{(1)}$ mit $f_{\mu}^{(1)} \in O_x$ ist. Es sei red die Projektion $H \to O$. Man kann Garbenelemente $\hat{f}_{\mu}^{(1)} \in H_x$ finden, deren red-Bild $f_{\mu}^{(1)}$ ist. Wegen $\binom{*}{*}$ gibt es Schnittflächen $\hat{s}_{\mu}^{(1)} \in \Gamma(X, S)$ mit $\alpha(\hat{s}_{\mu}^{(1)}) = s_{\mu}^{(1)}$. Offenbar ist $\sigma_1 = \sigma - \sum_{\mu} (\hat{s}_{\mu}^{(1)})_x \hat{f}_{\mu}^{(1)}$ in $S^{(1)}$ enthalten. Man kann nun das gleiche Verfahren auf σ_1 und das Bild von σ_1 in $S^{(1)}/S^{(2)}$ anwenden und so fortfahren. Man erhält Folgen $\sigma_\varkappa \in S^{(\varkappa)}$ und Darstellungen $\sigma_\varkappa = \sigma_{\varkappa-1} - \sum_{\mu} (\hat{s}_{\mu}^{(\varkappa)})_x \hat{f}_{\mu}^{(\varkappa)}$ mit $\hat{f}_{\mu}^{(\varkappa)} \in H_x$ und $\hat{s}_{\mu}^{(\varkappa)} \in \Gamma(X, S^{(\varkappa-1)})$. Ist k hinreichend groß gewählt, so gilt $S^{(k)} = 0$ in einer Umgebung von x und mithin $\sigma_k = 0$. Also folgt : $\sigma = \sum_{\varkappa} \sum_{\mu} (\hat{s}_{\mu}^{(\varkappa)})_x \hat{f}_{\mu}^{(\varkappa)}$, q.e.d.

4. Es sei $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1) : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung einen komplexen Raumes $(X, H(X))$ in einem komplexen Raum $(Y, H(Y))$. S sei eine analytische Garbe über X. Nach J. Leray ist S eine Folge $\Phi_\nu(S)$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ von analytischen Bildgarben über Y zugeordnet. Man kann jede Garbe $\Phi_\nu(S)$ leicht durch ein analytisches Garbendatum definieren.

(1) Wir bezeichnen mit τ stets die Verfeinerungsabbildung. Wir werden jedoch im folgenden das τ fast immer fortlassen und anstelle von $\tau\xi$ einfach ξ setzen.

Definition 4. Ein analytisches Garbendatum über einem komplexen Raum $(Y, H(Y))$ ist ein System $\{(M(U), r_V^U) : V \subset U, U, V \in T(Y)\}$, in dem $T(Y)$ die Menge der offenen Mengen von Y, $M(U)$ einen der offenen Menge U zugeordneten Modul über $I(U)$, dem Ring der in U holomorphen Funktionen, bezeichnen und r_V^U Homomorphismen $M(U) \to M(V)$ sind, die den Relationen $r_U^U =$ Identität, $r_{U_3}^{U_2} r_{U_2}^{U_1} = r_{U_3}^{U_1}$ genügen.

Ein analytisches Garbendatum definiert in der wohlbekannten Weise stets eine analytische Garbe über Y. Zur Definition der Bildgarben $\Phi_\nu(S)$ wählen wir das Garbendatum : $M_\nu = \{(H^\nu(\varphi_0^{-1}(U), S), r_V^U) : V \subset U \in T(Y)\}$. Dabei bezeichnet r_V^U den natürlichen Beschränkungshomomorphismus $H^\nu(\varphi_0^{-1}(U), S) \to H^\nu(\varphi_0^{-1}(V), S)$. Wie im Falle reduzierter komplexer Räume sind alle Kohomologiegruppen $H^\nu(\varphi_0^{-1}(U), S)$ Moduln über dem Ring der in $\varphi_0^{-1}(U)$ holomorphen Funktionen. Da durch die Abbildung φ_1 der Ring $I(U)$ in $I(\varphi_0^{-1}(U))$ homomorph abgebildet wird, ist $H^\nu(\varphi_0^{-1}(U), S)$ erst recht ein Modul über $I(U)$ und somit M_ν ein Garbendatum. In analoger Weise zu [6], § 2. ergeben sich folgende Aussagen :

(a) Es sei $U = \{U_\iota\}$ *eine offene Überdeckung von* X, $\xi \in Z^\nu(U, S)$ *sei ein Kozyklus. Dann definiert* ξ *eine Schnittfläche* $\Phi_\nu(\xi) \in \Gamma(Y, \Phi_\nu(S))$. $\Phi_\nu(\xi)$ *hängt dabei nur von der Kohomologieklasse von* ξ *ab.*

Es ist also auch jeder Kohomologieklasse $\eta \in H^\nu(X, S)$ eine Schnittfläche aus $\Gamma(Y, \Phi_\nu(S))$ zugeordnet. Wir werden im folgenden diese Schnittfläche auch mit $\Phi_\nu(\eta)$ bezeichnen.

(b) Die $I(Y)$*-Moduln* $\Gamma(X, S)$ *und* $\Gamma(Y, \Phi_0(S))$ *sind unter der Abbildung* $\Phi_0 : \Gamma(X, S) \to \Gamma(Y, \Phi_0(S))$ *isomorph. Man kann jede Schnittfläche aus* $\Gamma(Y, \Phi_0(S))$ *als Schnittfläche aus* $\Gamma(X, S)$ *auffassen.*

(c) Sind alle Garben $\Phi_\nu(S) = 0$ *für* $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, *so besteht sogar ein kanonischer Isomorphismus :* $H^\nu(X, S) \approx H^\nu(Y, \Phi_0(S))$.

(d) Ist $0 \to S' \to S \to S'' \to 0$ *eine exakte Sequenz analytischer Garben über X, so besteht eine kanonisch zugeordnete Bildsequenz :* $0 \to \Phi_0(S') \to \Phi_0(S) \to \Phi_0(S'') \to \Phi_1(S') \to \ldots$.

(e) Ist $X \xrightarrow{\Phi'} Y \xrightarrow{\Phi''} Z$ *eine Folge holomorpher Abbildungen zwischen komplexen Räumen* $(X, H(X))$, $(Y, H(Y))$, $(Z, H(Z))$, *und ist S eine analytische Garbe über X, so gilt* $(\Phi'' \circ \Phi')_0(S) = \Phi_0''(\Phi_0'(S))$. *Verschwinden die Garben* $\Phi_\nu'(S)$, $\nu > 0$, *so hat man außerdem :* $(\Phi'' \circ \Phi')_\mu(S) = \Phi_\mu''(\Phi_0'(S))$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots$.

Besonders einfach werden die analytischen Bildgarben, wenn $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1) : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes $(X, H(X))$ in einen komplexen Raum $(Y, H(Y))$ ist, bei der das φ_0-Urbild einer jeden diskreten Menge in Y eine diskrete Menge in X ist. Wir nennen solche Abbildungen nirgends entartet. Es folgt sofort (vgl. [7]) :

(f) Ist $\Phi : X \to Y$ *eine nirgends entartete holomorphe Abbildung und S eine analytische Garbe über X, so gilt* $\Phi_\nu(S) = 0$, $\nu > 0$.

Es sei nun $\Phi : X \to Y$ eine biholomorphe Abbildung von X auf Y. Ist dann S eine analytische Garbe über X, so wird jeder Halm S_x durch Φ zu einem Halm über $y = \varphi_0(x)$ verpflanzt. Man erhält eine analytische Garbe S^* über Y. Wie man sofort sieht, gilt $S^* = \Phi_0(S)$.

Man kann holomorphe Abbildungen $\Phi^* = (\varphi_0, \varphi_1^*) : X \to Y^*$ eines komplexen Raumes $(X, H(X))$ in einen komplexen Unterraum $(Y^*, H(Y^*))$ eines komplexen Raumes $(Y, H(Y))$ betrachten. Ist S eine analytische Garbe über X, so lassen sich die Bildgarben $\Phi_\nu^*(S)$ in Y trivial fortsetzen. Ferner definiert die Abbildung Φ^* eine morphe Abbildung $\Phi : X \to Y$. Es gilt $'\Phi_\nu^*(S) = \Phi_\nu(S)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Wir werden je nach Bedarf mit $\Phi_\nu^*(S)$ die Garbe über Y^* oder die triviale Fortsetzung in Y verstehen.

Im folgenden wird besonders der Fall interessieren, daß $\Phi : X \to Y^*$ eine surjektive biholomorphe Abbildung ist. Wir nennen eine solche Abbildung eine biholomorphe Abbildung von X in Y. Man hat die Aussage :

(g) Es sei S eine analytische Garbe über X, $\Phi : X \to Y$ eine biholomorphe Abbildung. Dann ist $\Phi_0(S)$ genau dann kohärent, wenn S kohärent ist.

5. Wir werden im § 6 einen Satz benötigen, der in enger Beziehung zu der Aussage *(c)* des vorigen Abschnittes steht.

Satz 5. *Es seien X, Y komplexe Raume, $\Phi : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung und S eine analytische Garbe über X. Ferner werde vorausgesetzt, daß alle Bildgarben $\Phi_\nu(S)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ kohärente analytische Garben über Y sind und daß Y ein holomorph-vollständiger Raum ist. Dann ist $\Phi_\nu : H^\nu(X, S) \to \Gamma(Y, \Phi_\nu(S))$ ein (surjektiver) Isomorphismus.*

Beweis. Wir wählen eine exakte Auflösung :

$$0 \to S \xrightarrow{\varepsilon} W_0 \xrightarrow{\alpha_0} W_1 \xrightarrow{\alpha_1} W_2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$$

von S mit welken Garben $W_\varkappa$, $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ (vgl. [6], § 1 und § 2). Es gilt $H^\nu(X, S) = \operatorname{Ker} \alpha_\nu / \alpha_{\nu-1}(\Gamma(X, W_{\nu-1}))$. Die Bildsequenz :

$$0 \to \Phi_0(S) \to \Phi_0(W_0) \xrightarrow{a_0} \Phi_0(W_1) \xrightarrow{a_1} \Phi_0(W_2) \xrightarrow{a_2} \ldots$$

ist zwar noch eine welke Auflösung von $\Phi_0(S)$, jedoch i.a. nicht mehr an den Stellen $\Phi_0(W_\varkappa)$, $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$ exakt. Wir setzen : $B_\varkappa = \operatorname{Im} a_{\varkappa-1}$, $K_\varkappa = \operatorname{Ker} a_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$. Man hat natürliche Isomorphien :

$$\Gamma(Y, \Phi_0(W_\varkappa)) \approx \Gamma(X, W_\varkappa),$$
$$\Gamma(Y, K_\varkappa) \approx \operatorname{Ker} \Gamma(X, W_\varkappa),$$
$$\Gamma(Y, \operatorname{Ker} a_0) \approx \Gamma(Y, \Phi_0(S)) \approx \Gamma(X, S)$$

und exakte Sequenzen :

$$0 \to B_\varkappa \to K_\varkappa \to \Phi_\varkappa(S) \to 0, \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$0 \to K_{\varkappa-1} \to \Phi_0(W_{\varkappa-1}) \to B_\varkappa \to 0, \quad \varkappa = 2, 3, 4, \ldots,$$
$$0 \to \Phi_0(S) \to \Phi_0(W_0) \to B_1 \to 0.$$

Unter Benutzung von Satz 3 folgt sodann durch Induktion, daß alle Garben $B_\varkappa$, $K_\varkappa$, azyklysch sind (B-Garben). Durch Übergang zu den Kohomologiesequenzen erhält man :

$$\Gamma(Y, \Phi_\nu(S)) \approx \Gamma(Y, K_\nu)/\Gamma(Y, B_\nu) \approx \Gamma(Y, K_\nu)/a_{\nu-1}\Gamma(Y, \Phi_0(W_{\nu-1})) \approx$$
$$\operatorname{Ker}\Gamma(X, W_\nu)/\alpha_{\nu-1}\Gamma(X, W_{\nu-1}) \approx H^\nu(X, S).$$

Man sieht leicht, daß die Isomorphie $H^\nu(X, S) \approx \Gamma(Y, \Phi_\nu(S))$ mit dem Homomorphismus Φ_ν übereinstimmt. Gleiches gilt für $\Gamma(X, S) \approx \Gamma(Y, \Phi_0(S))$. Damit ist Satz 5 beweisen.

6. Es sei (X, H) ein komplexer Raum. Unter einer Karte in X verstehen wir ein Tripel (W, Φ, G), in dem $W \subset X$ eine offene Menge, $G \subset C^n$ ein Gebiet und $\Phi : W \to G$ eine biholomorphe Abbildung von W in G bezeichnet. Ein Quintupel $\mathfrak{W} = (W, \Phi, G, G', \Gamma : O^q \xrightarrow{\alpha} \Phi_0(S) \to 0)$ heißt eine Meßkarte (1. Art) bzgl. einer kohärenten Garbe S über X, wenn (W, Φ, G) eine Karte, G ein Holomorphiegebiet, $G' \subset G$ ein Teilgebiet und Γ eine exakte Garbensequenz über G ist. Durch jede Messkarte W wird in $\Gamma(X, S)$ eine Pseudonorm definiert : Ist $s \in \Gamma(X, S)$ eine Schnittfläche, so gibt es, da G ein Holomorphiegebiet ist, ein q-tupel holomorpher Funktionen $f \in \Gamma(G, O^q)$, so daß $\alpha(f) = \Phi_0(s \mid W)$ ist. Wir setzen dann : $\|s\|_{\mathfrak{W}} = \min\limits_f \sup |f(G')|$. Dabei ist $f = (f_1, \ldots, f_q)$ und $|f(z)| = \max |f_\nu(z)|$. Gilt $G' \subset\subset G$, so ist $\|s\|_{\mathfrak{W}}$ stets endlich, $\|s\|_{\mathfrak{W}}$ also eine Norm [1].

Natürlich ist der komplexe Vektorraum $\Gamma(X, S)$ nicht vollständig, wenn er mit der durch unsere Pseudonorm induzierten Topologie versehen wird. Ist aber X ein holomorph-vollständiger Raum, so läßt sich in $\Gamma(X, S)$ eine Metrik einführen, die $\Gamma(X, S)$ sogar zu einem Fréchetschen Raum macht. Wir gehen folgendermaßen vor :

1) Wir schöpfen X durch eine Folge (offener) analytischer Polyeder $\hat{P}_\nu \subset\subset X$ aus mit $\hat{P}_\nu \subset\subset \hat{P}_{\nu+1}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

2) Wir definieren biholomorphe Abbildungen $\Phi_\nu : \hat{P}_\nu \to \hat{Z}_\nu$ der Polyeder $\hat{P}_\nu$ in Polyzylinder $\hat{\hat{Z}}_\nu \subset C^{n_\nu}$.

3) Wir wählen einen Polyzylinder Z'_ν, so daß $\Phi_\nu(\hat{P}_{\nu-1}) \subset Z'_\nu$, konstruieren über einem Polyzylinder Z_ν mit $Z'_\nu \subset\subset Z_\nu \subset\subset \hat{Z}_\nu$ eine exakte Sequenz $\Gamma_\nu : O^{q_\nu} \xrightarrow{\alpha_\nu} \Phi_{\nu 0}(S) \to 0$ (Anwendung des Theorem A von Cartan) für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.

4) Wir setzen $P_\nu = \Phi_\nu^{-1}(Z_\nu)$, $\mathfrak{W}_\nu = (P_\nu, \Phi_\nu, Z_\nu, Z'_\nu, \Gamma_\nu)$.

5) Wir definieren die Metrik : $\operatorname{dist}(s_1, s_2) = 1/\pi \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} \operatorname{arctg} \|s_1 - s_2\|_{\mathfrak{W}_\nu}$, die, wie man leicht sieht, $\Gamma(X, S)$ zu einem Fréchetschen Raum macht.

7. Wir zeigen folgenden Satz :

Satz 6. *Es seien (X, H) ein kompakter komplexer Raum, S eine kohärente analytische Garbe über X. Dann gilt $\dim_C H^\nu(X, S) < \infty$ für $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und $\dim_C H^\nu(X, S) = 0$ für $\nu \geq \nu_0$.*

---

(1) Wir verwenden im folgenden für den Begriff « Pseudonorm » auch häufig das Wort « Norm ».

Beweis. Wir definieren die Garbenfolge $H = H^{(0)} \supset H^{(1)} \supset H^{(2)} \supset \ldots$ wie in § 1, Abschnitt 6. Da X kompakt ist, folgt : $H^{(\nu)} = 0$ für $\nu \geq \nu_0$. Wir setzen : $S^{(\nu)} = S \cdot H^{(\nu)}$. Über X hat man dann die exakten Sequenzen :

$$(*) \quad 0 \to S^{(\nu)} \to S^{(\nu-1)} \to S^{(\nu-1)}/S^{(\nu)} \to 0.$$

Die Reduktion (X, O) ist ein komplexer Unterraum von (X, H). Man kann deshalb $S^{(\nu-1)}/S^{(\nu)}$ auf (X, O) beschränken. Die Beschränkung sei mit A_ν bezeichnet. Offenbar ist die triviale Fortsetzung von A_ν zu $S^{(\nu-1)}/S^{(\nu)}$ kanonisch isomorph. Aus (*) ergeben sich also die exakten Kohomologiesequenzen :

$$\binom{*}{*} \quad 0 \to H^0(X, S^{(\nu)}) \to H^0(X, S^{(\nu-1)}) \to H^0(X, A_\nu) \to H^{(1)}(X, S^{(\nu)}) \to \ldots .$$

Nun ist Satz 6 nach [4] für reduzierte komplexe Räume gültig. Aus $\binom{*}{*}$ folgt : Der Satz 6 ist für $S^{(\nu-1)}$ richtig, wenn er für $S^{(\nu)}$ gilt. Da $S^{(\nu_0)} = 0$ ist, ergibt sich unser Satz durch vollständige Induktion.

8. Für die Untersuchungen in den folgenden Paragraphen ist es bequem, eine vereinfachende Redeweise einzuführen. Wir bezeichnen mit F_1, F_2 zwei komplexe Vektorräume, die mit Pseudonormen $||x||_1$ bzw. $||y||_2$ ausgerüstet seien. $R(x, y)$, $x \in F_1, y \in F_2$ sei eine Relation zwischen den Vektoren von F_1 und F_2 (im logischen Sinne). Wir nennen $R(x, y)$ linear beschränkt (in der Richtung $F_2 \to F_1$), wenn es eine von y unabhängige Konstante c gibt und zu jedem Vektor y, $||y||_2 < a < \infty$ ein $x \in F_1$ gehört mit $R(x, y) =$ « wahr » und $||x||_1 < c \cdot a$. Hängen die Räume F_1, F_2 und die Relation $R(x, y)$ noch von einem Parameter ρ ab und kann c unabhängig von ρ gewählt werden, so sagen wir, daß $R(x, y)$ unabhängig von ρ linear beschränkt ist.

Es seien (X, H) ein kompakter komplexer Raum, $U = \{U_\iota : \iota = 1, \ldots, \iota_*\}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von X. Wir setzen $i = (\iota_0, \ldots, \iota_\nu)$. Nach Satz 3 gilt $H^\mu(U_i, S) = 0$, $\mu > 0$, wenn S eine kohärente analytische Garbe über X bezeichnet. Aus einem Satz von Leray (vgl. § 4, Abschnitt 6) folgt daher :

Es existiert ein kanonischer Isomorphismus :

$$H^\mu(U, S) \approx H^\mu(X, S).$$

Man kann deshalb Kozyklen $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^\mu(U, S)$ finden, deren Bilder bzgl. der Abbildung $\lambda : Z^\mu(U, S) \xrightarrow{q} H^\mu(U, S) \to H^\mu(X, S)$ den komplexen Vektorraum $H^\mu(X, S)$ aufspannen.

Nun ist jedes U_i, $i = (\iota_0, \ldots, \iota_\mu)$ ein holomorph-vollständiger Raum. Wir führen nach Abschnitt 6 in $\Gamma(U_i, S)$ eine Metrik $\operatorname{dist}_i(s_1, s_2)$ ein und setzen für zwei Koketten $\eta_\varkappa = \{\eta_i^{(\varkappa)}\} \in C^\mu(U, S)$: $\operatorname{dist}(\eta_1, \eta_2) = \max\limits_i \operatorname{dist}_i(\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)})$. Offenbar wird $C^\mu(U, S)$ durch diese Metrik zu einem Fréchetschen Raum. Durch die Relativ- bzw. Produkttopologie (und -metrik) werden ebenfalls $Z^\mu(U, S)$ und $C^s \times C^{\mu-1}(U, S)$ zu Fréchetschen Räumen. Die Abbildung $\beta : ((a_1, \ldots, a_s), \eta) \to \delta\eta + \sum\limits_{\nu=1}^{s} a_\nu \xi_\nu : C^s \times C^{\mu-1}(U, S) \to Z^\mu(U, S)$

ist surjektiv und stetig. Aus einem Satz von Banach ([2], chap. 1, § 3) folgt deshalb :

(*) β ist eine offene Abbildung.

Wir werden aus (*) eine einfache Aussage herleiten. Wir nehmen dazu an, daß jedes U_i in einer offenen Teilmenge $\hat{U}_i \subset X$ enthalten ist, die Träger einer Meßkarte $\mathfrak{W}_{1i} = (\hat{U}_i, \Phi_i, G_i, G_i, \Gamma_i)$ ist. Ferner seien $U' = \{U'_i\}$ eine Steinsche Überdeckung von X, die eine Verfeinerung von U ist, $\mathfrak{W}_{2i} = (\hat{U}'_i, \Phi_{\tau i}, G'_i, G'_i, \Gamma_{\tau i})$ eine weitere Kollektion von Meßkarten mit $G'_i \subset\subset G_{\tau i}$, $\hat{U}'_i = \Phi_{\tau i}^{-1}(G'_i)$, $U'_i \subset \hat{U}'_i$. Es gelte $\hat{U}'_i \subset\subset U_{\tau i}$. Wir definieren in $C^\mu(U, S)$ bzw. $C^\mu(U', S)$ die Pseudonormen : $||\eta||_1 = \min_{\hat{\eta}_i} \max_i ||\hat{\eta}_i||_{\mathfrak{W}_{1i}}$, $||\eta'||_2 = \min_{\hat{\eta}'_i} \max_i ||\hat{\eta}'_i||_{\mathfrak{W}_{2i}}$. Dabei sind $\eta = \{\eta_i\}$, $\eta' = \{\eta'_i\}$, $\hat{\eta}_i \in \Gamma(\hat{U}_i, S)$ mit $\hat{\eta}_i | U_i = \eta_i$, $\hat{\eta}'_i \in \Gamma(U'_i, S)$ mit $\hat{\eta}'_i | U'_i = \eta'_i$. Aus (*) folgt unmittelbar :

Satz 7. *Es seien* $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^\mu(U, S)$ *Kozyklen, so daß die Kohomologieklassen* $\lambda(\xi_\varkappa)$ *eine Basis von* $H^\mu(X, S)$ *bilden. Dann gibt es zu jedem Kozyklus* $\xi \in Z^\mu(U, S)$ *eine Kokette* $\eta \in C^{\mu-1}(U, S)$ *und komplexe Zahlen* $a_1, \ldots, a_s$ *so daß* $\xi = \sum_{\varkappa=1}^{s} a_\varkappa \xi_\varkappa + \delta\eta$ *gilt. Die Zuordnung* $\xi \to a_1, \ldots, a_s$, *ist in bezug auf die Normen* $||\xi||_1$, $||\eta||_2$, $|a_\varkappa|$ *linear beschränkt.*

In der Tat ! Die Kozyklen $\xi \in Z^\mu(U, S)$ mit $||\xi||_1 < \varepsilon$ sind für $\varepsilon \to 0$ in beliebig kleinen Umgebungen von $0 \in Z^\mu(U, S)$ (in bezug auf dist) enthalten. Die Koketten $\eta \in C^{\mu-1}(U, S)$ mit $||\eta||_2 < 1$ bilden jedoch eine Umgebung von $0 \in C^{\mu-1}(U, S)$. Nach (*) ist daher $\xi \in Z^\mu(U, S)$, $||\xi||_1 < \varepsilon$ im β-Bild des Raumes

$$\{(a_1, \ldots, a_s, \eta) \ : \ |a_\nu| < 1, \ ||\eta||_2 < 1\}$$

enthalten, wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist. Daraus ergibt sich die Behauptung von Satz 7.

9. Wir werden im nächsten Paragraphen Folgen von Untergarben von kohärenten analytischen Garben betrachten müssen. Es werde deshalb gezeigt :

Satz 8. *Es seien* (X, H) *ein komplexer Raum, S eine kohärente Garbe über X und* S_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, *eine Folge von kohärenten Untergarben von S, für die* $S_\nu \subset S_{\nu+1}$ *gilt. Dann kann man zu jedem relativ-kompakten Teilbereich* $B \subset\subset X$ *eine natürliche Zahl* ν_0 *finden, so daß* $S_\nu = S_{\nu_0}$ *für* $\nu \geq \nu_0$ *ist.*

Beweis. Offenbar ist der Satz lokaler Natur. Man darf deshalb annehmen, daß X ein komplexer Unterraum eines Holomorphiegebietes $G \subset C^n$ ist. Da man die Garben S, S_ν trivial zu kohärenten Garben nach G fortsetzen kann, ist es sogar möglich, ohne Einschränkung der Allgemeinheit vorauszusetzen, daß $X = G$ ist und daß über G eine exakte Garbensequenz $O^p \to O^q \to S \to 0$ erklärt ist. Wir setzen $O_\nu = \mathrm{Ker}(O^q \to S/S_\nu)$ und brauchen nur noch zu zeigen, daß zu jedem relativ-kompakten Teilbereich $B \subset\subset G$ eine natürliche Zahl ν_0 existiert, so daß $O_\nu = O_{\nu_0}$ für $\nu \geq \nu_0$ gilt.

Nun sind alle Garben $O_\nu \subset O^q$ kohärent, ferner hat man $O_\nu \subset O_{\nu+1}$. Da nach bekannten Sätzen jeder Ring O_x, $x \in G$ ein noetherscher Ring ist, folgt aus dem Teilerkettensatz, daß für $\nu \geq \nu(x)$ gilt : $(O_\nu)_x = (O_{\nu(x)})_x$.

Wir setzen $O^* = \bigcup_\nu O_\nu$. Da G ein Holomorphiegebiet ist, wird O_ν von den Schnittflächen aus $\Gamma(G, O_\nu)$ erzeugt. Mithin wird auch O^* von $\Gamma(G, O^*)$ erzeugt und ist deshalb kohärent. Da O^* lokal schon von endlich vielen Schnittflächen $s \in \Gamma(G, O^*)$ erzeugt wird und mit Hilfe des Cartan-Rückertschen Basissatzes aus $s(x) \in (O_{\nu(x)})_x$ für eine volle Umgebung $V'(x)$ folgt : $s|V' \in \Gamma(V', O_{\nu(x)})$, hat sich ergeben, daß eine Umgebung $V(x)$ existiert, für die gilt : $O_\nu|V = O_{\nu(x)}|V$, $\nu \geq \nu(x)$. Damit ist Satz 8 bewiesen.

§ 3. Garben in Gebieten des komplexen Zahlenraumes.

1. Es bezeichne $\mathfrak{p} = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$ ein m-tupel positiver reeller Zahlen, $\mathfrak{t} = (t_1, \ldots, t_m)$ ein m-tupel komplexer Zahlen, $\mathfrak{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ ein m-tupel natürlicher Zahlen, die auch $+\infty$ sein dürfen. Wir setzen $t_\nu^\infty = 0$ und verstehen unter $I(\mathfrak{d}) \subset O(C^m)$ diejenige kohärente Idealgarbe, die von den holomorphen Funktionen $t_\nu^{d_\nu} \in \Gamma(C^m, O(C^m))$, $\nu = 1, \ldots, m$ erzeugt wird. $K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d})$ sei sodann der komplexe Raum, der den Polyzylinder $K_1 = \{\mathfrak{t} : |t_\nu| < \rho_\nu,\ \nu = 1, \ldots, m\} \cap \{I(\mathfrak{d}) = 0\}$ als Trägerraum und $H(\mathfrak{d}) = O(C^m)/I(\mathfrak{d})$ als Strukturgarbe besitzt. Ferner sei $\mathfrak{p}_0 = (\rho_1^{(0)}, \ldots, \rho_m^{(0)})$ ein festgewähltes m-tupel positiver Zahlen. Es seien folgende abkürzende Bezeichnungen eingeführt : $\mathfrak{d}_\infty = (\infty, \ldots, \infty)$, $K(\mathfrak{d}) = K(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{d})$, $K(\mathfrak{p}) = K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_\infty)$, $K = K(\mathfrak{p}_0)$. Wir nennen $\mathfrak{p} \underset{(-)}{<} \mathfrak{p}_0$, wenn für alle ν : $\rho_\nu \underset{(-)}{<} \rho_\nu^{(0)}$ gilt und betrachten Polyzylinder $K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d})$ mit $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}_0$.

Ist $G \subset C^n$ ein Gebiet, so trägt das kartesische Produkt $G \times K(\mathfrak{d})$ eine natürliche Strukturgarbe $\hat{H}(\mathfrak{d})$. $G \times K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d})$ ist also ein komplexer Raum. Es werde in $\Gamma = \Gamma(G \times K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}), \hat{H}^p(\mathfrak{d}))$ eine Pseudonorm eingeführt, $p = 1, 2, 3, \ldots$: Jede Schnittfläche $f \in \Gamma$ kann durch Beschränkung eines p-tupels $\tilde{f}$ in $G \times K(\mathfrak{p})$ holomorpher Funktionen erhalten werden. f läßt sich daher in eine Potenzreihe $f = \sum_{\varkappa=0}^{\mathfrak{d}-1} f_\varkappa \left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{p}}\right)^\varkappa$ entwickeln, bei der $\mathfrak{d} - 1 = (d_1 - 1, \ldots, d_m - 1)$, $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m)$ und

$$\left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{p}}\right)^\varkappa = \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^{\varkappa_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^{\varkappa_m}$$

ist. Die $f_\varkappa$ sind p-tupel in G holomorpher Funktionen. Wir setzen $\|f_\varkappa\|_G = \sum_\nu \sup |f_\nu^{(\varkappa)}(G)|$, $f_\varkappa = (f_1^{(\varkappa)}, \ldots, f_p^{(\varkappa)})$ und $\|f\|_{G\mathfrak{p}}^{\mathfrak{d}} = \sup_\varkappa \|f_\varkappa\|_G$. $\|f_\varkappa\|_{G\mathfrak{p}}^{\mathfrak{d}}$ ist auf einem Untervektorraum von Γ endlich und macht diesen zu einem vollständigen Banach'schen Raum [1].

Wie man leicht sieht, kann man jeden über $K(\mathfrak{d})$ definierten analytischen Garbenhomomorphismus $h : H^p(\mathfrak{d}) \to H^q(\mathfrak{d})$ durch Beschränkung eines analytischen Homomorphismus $\tilde{h} : O^p(K) \to O^q(K)$ erhalten. Wir brauchen also nur Homomorphismen $\tilde{h}$ zu untersuchen. Es werde zunächst die Annahme gemacht, daß $G = O$ ein

[1] Wir werden das $\mathfrak{d}$ in der Bezeichnung dieser und der später zu definierenden Normen häufig fortlassen.

Punkt, also $G \times K(\rho, \mathfrak{d}) = K(\rho, \mathfrak{d})$ ist. Wir setzen in diesem Falle $||f||^{\mathfrak{d}}_{G\rho} = ||f||^{\mathfrak{d}}_{\rho}$.

Es werde beachtet : Gilt $\mathfrak{d}_1 \leq \mathfrak{d}$ (d.h. $d^{(1)}_\nu \leq d_\nu$), so ist $K(\rho, \mathfrak{d}_1)$ ein komplexer Unterraum von $K(\rho, \mathfrak{d})$. Jede Schnittfläche $f \in \Gamma(K(\rho, \mathfrak{d}_1), H^p(\mathfrak{d}_1))$ läßt sich in eine Potenzreihe $P : f = \sum_{\varkappa=0}^{\mathfrak{d}_1 - 1} f_\varkappa \left(\frac{\mathfrak{t}}{\rho}\right)^\varkappa$ entwickeln, in der $f_\varkappa$ p-tupel komplexer Zahlen sind. Man kann P aber auch als Potenzreihenentwicklung einer Schnittfläche

$$^*f \in \Gamma(K(\rho, \mathfrak{d}), H^p(\mathfrak{d}))$$

auffassen. Wir bezeichnen $^*f$ als die Polynomfortsetzung von f. Es gilt stets $^*f \,|\, K(\rho, \mathfrak{d}_1) = f$ (aber nicht umgekehrt $^*(g \,|\, K(\rho, \mathfrak{d}_1)) = g$, $g \in \Gamma(K(\rho, \mathfrak{d}), H^p(\mathfrak{d}))$. Wir werden im folgenden f und $^*f$ mit gleichen Symbolen bezeichnen, wenn das nicht zu Mißverständnissen führt.

Es werde mit $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots, e_m)$, $e_\nu < \infty$, stets ein m-tupel natürlicher Zahlen bezeichnet.

Satz 1. *Es seien $h : O^p(K) \to O^q(K)$ ein analytischer Garbenhomomorphismus, $\mathfrak{d}$ ein m-tupel natürlicher Zahlen (einschl. ∞), $h(\mathfrak{d})$ die Beschränkung von h auf $K(\mathfrak{d})$. Ist dann ρ hinreichend klein $(\rho < \rho_1(d_2, \ldots, d_m, h) \leq \rho_0)$ (1), so gibt es zu jeder endlichen Schnittfläche $f \in \Gamma(K(\rho, \mathfrak{d}), H^q(\mathfrak{d}))$, mit $f \,|\, K(\mathfrak{e}) \in h(\mathfrak{e}) \circ H^p(\mathfrak{e})$ für alle $\mathfrak{e} \leq \mathfrak{d}$, eine endliche Schnittfläche $g \in \Gamma(K(\rho, \mathfrak{d}), H^p(\mathfrak{d}))$ mit $f = h(\mathfrak{d}) \circ g$, so daß die Zuordnung $f \to g$ unabhängig von d_1 linear beschränkt ist.*

Beweis. Wir schwächen Satz 1 zunächst ab : Wir machen eine zusätzliche Voraussetzung : « Die Zahlen $d_{s+1}, \ldots, d_m$ seien endlich », so dann eine Abschwächung des Resultates : « Die Zuordnung $f \to g$ ist von d_1 unabhängig linear beschränkt, wenn $s \neq 0$ ist. » Die so erhaltene Aussage sei mit Satz 1_s bezeichnet.

Für $s = 0$ sind die Räume $\Gamma(K(\rho, \mathfrak{d}), H^p(\mathfrak{d}))$, $\Gamma(K(\rho, \mathfrak{d}), H^q(\mathfrak{d}))$ endlich dimensionale komplexe Vektorräume. Satz 1_0 ist also trivial. Ferner stimmt Satz 1_m mit Satz 1 überein. Zeigen wir, daß (bei festem Homomorphismus h) aus der Gültigkeit von Satz 1_s für $s < s_0$ seine Gültigkeit für $s = s_0$ folgt, so ist Satz 1 bewiesen. Es sei deshalb fortan die Induktionsannahme gemacht, daß Satz 1_s, $s < s_0$ bewiesen ist.

Es müssen einige Bezeichnungen eingeführt werden. Wir setzen :

(a) $\mathfrak{d}_* = (\infty, d_2, \ldots, d_m)$,

(b) $M = h(O^p)$, $M(\mathfrak{d}) = h(\mathfrak{d}) \circ H^p(\mathfrak{d}) = M \,|\, K(\mathfrak{d})$,

(c) $\lambda =$ denjenigen Homomorphismus $H^q(\mathfrak{d}_*)/M(\mathfrak{d}_*) \to H^q(\mathfrak{d}_*)/M(\mathfrak{d}_*)$, der durch die Zuordnung $\sigma \to t_1 \cdot \sigma$ erzeugt wird,

(d) $d_1^+ =$ kleinste natürliche Zahl, so daß der Homomorphismus λ den Halm $t_1^{d_1^+ - 1} \cdot (H^q(\mathfrak{d}_*)/M(\mathfrak{d}_*))_0$, mit $O \in K$ Nullpunkt, injektiv abbildet (2),

(e) $\mathfrak{d}^+ = (d_1^+, d_2, \ldots, d_m)$.

---

(1) ρ hinreichend klein bedeutet stets, daß ein $\rho_1 \leq \rho_0$ existiert, so daß für $\rho < \rho_1$ die btrf. Aussage gilt.

(2) Die Existenz der natürlichen Zahlt d_1^+ ergibt sich auf folgende Weise : Wir setzen $Q = H^q(\mathfrak{d}_*)/M(\mathfrak{d}_*)$. Die Garben $Q_\nu = \{\sigma \in Q : t_1^\nu \cdot \sigma = 0\}$ bilden eine aufsteigende Folge von kohärenten Untergarben von Q. Nach Satz 8, § 2 gilt : $(Q_\nu)_0 = (Q_{\nu_0})_0$ für $\nu \geq \nu_0$. Mithin wird $t_1^{\nu_0} \cdot Q_0$ durch λ injektiv abgebildet.

Es sei nun $\mathfrak{p}<\rho_1$, $\rho_1<\rho_0$ sehr klein, $f\in\Gamma(\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}), \mathrm{H}^q(\mathfrak{d}))$, eine endliche Schnittfläche mit $||f||_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{d}}<\mathfrak{M}$ und $f\,|\,\mathrm{K}(\mathfrak{e})\in\mathrm{M}(\mathfrak{e})$ für alle $\mathfrak{e}\leq\mathfrak{d}$. Gilt $d_1\leq d_1^+$, so ergibt eine Anwendung von Satz 1_{s_0-1} das gewünschte Resultat. Da es nur endlich viele natürliche Zahlen $d_1\leq d_1^+$ gibt, ist die Relation $f\to g$ unabhängig von $d_1\leq d_1^+$ linear beschränkt.

Es sei daher fortan $d_1>d_1^+$. Es folgt :

($*$) Es sei $f=\sum\limits_{\varkappa=l}^{d_1-1} f_\varkappa\left(\dfrac{t_1}{\rho_1}\right)^\varkappa\in\Gamma(\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}), \mathrm{H}^q(\mathfrak{d}))$, $l\geq d_1^+$. Es gelte $f\,|\,\mathrm{K}(\mathfrak{e})\in\mathrm{M}(\mathfrak{e})$ für alle $\mathfrak{e}\leq\mathfrak{d}$ und $||f_\varkappa||_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{d}'}<\mathfrak{M}_\varkappa$ mit $f_\varkappa\in\Gamma(\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}'), \mathrm{H}^q(\mathfrak{d}'))$, $\mathfrak{d}'=(1, d_2, \ldots, d_m)$. Dann gibt es eine Schnittfläche $g^*\in\Gamma(\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_*), \mathrm{H}^p(\mathfrak{d}_*))$, derart, daß

$$f-\left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^{l-d_1^++1}\cdot h(\mathfrak{d})\circ g^*=\sum_{\varkappa=l+1}^{d_1-1} f_\varkappa^*\left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\varkappa$$

und $||g^*||_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{d}_*}<c_1\mathfrak{M}_l$, $||f_\varkappa^*||_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{d}'}<c_2\mathfrak{M}_l\varepsilon^{\varkappa-l}+\mathfrak{M}_\varkappa$ gilt. Die Konstanten c_1, $c_2\geq 1$ sind von d_1 und c_2 sogar von (d_1, ρ_1) unabhängig. $\varepsilon=\varepsilon(\rho_1)$ wird mit ρ_1 beliebig klein. Ist $d_1^+=1$, so ist auch c_1 von (d_1, ρ_1) unabhängig.

Beweis von ($*$). Wir definieren $f^0=f_l\cdot\left(\dfrac{t_1}{\rho_1}\right)^{d_1^+-1}$ und setzen $\mathfrak{p}^0=(\rho_1^0, \rho_2, \ldots, \rho_m)$. $\mathfrak{p}^0$ sei hinreichend klein im Sinne von Satz 1_{s_0-1}. Es gilt $||f^0||_{\mathfrak{p}^0}^{\mathfrak{d}^+}<\left(\dfrac{\rho_1^0}{\rho_1}\right)^{d_1^+-1}\mathfrak{M}_l$. Da Satz 1_{s_0-1} voraussgesetzt und $f^0\,|\,\mathrm{K}(\mathfrak{e})\in\mathrm{M}(\mathfrak{e})$ ist ([1]), kann man eine Schnittfläche $g^*\in\Gamma(\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_*), \mathrm{H}^p(\mathfrak{d}_*))$ finden mit $||g^*||_{\mathfrak{p}^0}^{\mathfrak{d}_*}<c_0\mathfrak{M}_l\left(\dfrac{\rho_1^0}{\rho_1}\right)^{d_1^+-1}$ und $h(\mathfrak{d}^+)\circ g^*=f^0$. Dabei ist $c_0>1$ von f, d_1, ρ_1, l unabhängig. Wie man leicht sieht, gibt es eine weitere von g^*, $\mathfrak{d}_*$, $\mathfrak{d}\leq\mathfrak{d}_*$, unabhängige Konstante $c'>1$, so daß $||h(\mathfrak{d})\circ g^*||_{\mathfrak{p}^0}^{\mathfrak{d}}<c'||g^*||_{\mathfrak{p}^0}^{\mathfrak{d}_*}$ gilt. Daraus folgt sofort, daß $f-\left(\dfrac{t_1}{\rho_1}\right)^{l-d_1^++1}h(\mathfrak{d})\circ g^*=\sum\limits_{\varkappa=l+1}^{d_1-1} f_\varkappa^*\left(\dfrac{t_1}{\rho_1}\right)^\varkappa$ mit

$$||f_\varkappa^*||_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{d}}<\mathfrak{M}_\varkappa+c_0\mathfrak{M}_l c'\left(\frac{\rho_1}{\rho_1^0}\right)^{\varkappa-l}$$

ist, q.e.d.

Es sei fortan $\rho_1^{(1)}$ so klein gewählt, daß für $\mathfrak{p}<\rho_1$ die Zahl $c_2\varepsilon<1/4$ ist. Wir wählen eine beliebige Schnittfläche $f=\sum\limits_{\varkappa=d_1^+}^{d_1-1} f_\varkappa\left(\dfrac{t_1}{\rho_1}\right)^\varkappa\in\Gamma(\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}), \mathrm{H}^q(\mathfrak{d}))$ mit $f\,|\,\mathrm{K}(\mathfrak{e})\in\mathrm{M}(\mathfrak{e})$ für alle $\mathfrak{e}\leq\mathfrak{d}$ und $||f_\varkappa||_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{d}'}<\mathfrak{M}$. Nach ($*$) gibt es eine Schnittfläche $g_1\in\Gamma(\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_*), \mathrm{H}^p(\mathfrak{d}_*))$, derart, daß

$$||g_1||_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{d}_*}<c_1\mathfrak{M},\ f^{(1)}=f-\left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^1\cdot h(\mathfrak{d})\circ g_1=\sum_{\varkappa=d_1^++1}^{d_1-1} f_\varkappa^{(1)}\left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\varkappa,$$
$$||f_\varkappa^{(1)}||_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{d}'}<\mathfrak{M}\cdot(1+4^{-\varkappa+d_1^+}).$$

---

[1] Es gilt $f^0|\mathrm{K}(\mathfrak{e})\in\mathrm{M}(\mathfrak{e})$ für $\mathfrak{e}\leq\mathfrak{d}^+$ aus folgenden Gründen : Zunächst folgt aus Satz 1_{s-1} : $f\,|\,\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \tilde{\mathfrak{d}})=h(\tilde{\mathfrak{d}})\circ g$ mit $\tilde{\mathfrak{d}}=(l+1, d_2, \ldots, d_m)$, $\tilde{g}\in\Gamma(\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \tilde{\mathfrak{d}}), \mathrm{H}^p(\tilde{\mathfrak{d}}))$, wenn $\mathfrak{p}$ hinreichen klein ist. Also ist

$$\tilde{f}=h(\mathfrak{d}_*)\circ\tilde{g}\in\Gamma(\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_*), \mathrm{M}(\mathfrak{d}_*))$$

und mithin liegt der Keim von $\tilde{f}^0=\tilde{f}/t_1^{l-d_1^++1}$ über O in $\mathrm{M}(\mathfrak{d}_*)$. Es ist aber $f\,|\,\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \tilde{\mathfrak{d}})=\tilde{f}\,|\,\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \tilde{\mathfrak{d}})$ und daher $f^0=\tilde{f}^0\,|\,\mathrm{K}(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}^+)$, woraus $f_0^0\in\mathrm{M}(\mathfrak{d}^+)$ folgt, q.e.d.

Durch Anwendung von $(*)$ auf $f^{(1)}$ gewinnt man sodann eine Schnittfläche $g_2 \in \Gamma(\mathrm{K}(\rho, \mathfrak{d}_*), \mathrm{H}^p(\mathfrak{d}_*))$ mit

$$||g_2||_\rho^{\mathfrak{d}_*} < c_1 \mathfrak{M}(1+4^{-1}), \quad f^{(2)} = f^{(1)} - \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^2 h(\mathfrak{d}) \circ g_2 = \sum_{\varkappa = d_1^+ + 2}^{d_1 - 1} f_\varkappa^{(2)} \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\varkappa,$$

$$||f_\varkappa^{(2)}||_\rho^{\mathfrak{d}} < \mathfrak{M}(1 + 4^{d_1^+ - \varkappa} + 4^{d_1^+ + 1 - \varkappa} \cdot (1 + 4^{-1})) = \mathfrak{M}(1 + 4^{d_1^+ + 1 - \varkappa} + 2 \cdot 4^{d_1^+ - \varkappa}).$$

Durch Fortsetzung des Verfahrens gelingt es, Schnittflächen

$$g_\nu \in \Gamma(\mathrm{K}(\rho, \mathfrak{d}_*), \mathrm{H}^p(\mathfrak{d}_*)), \quad f^{(\nu)} = f^{(\nu-1)} - \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\nu \cdot h(\mathfrak{d}) \circ g_\nu \in \Gamma(\mathrm{K}(\rho, \mathfrak{d}), \mathrm{H}^q(\mathfrak{d}))$$

zu konstruieren. Immer bleibt $||f^{(\nu)}|| < 2\mathfrak{M}$ und mithin $||g_\nu||_\rho^{\mathfrak{d}_*} < 2 c_1 \mathfrak{M}$. Für $g = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\nu g_\nu$ gilt : $h(\mathfrak{d}) \circ g = f$.

Ist $f \in \Gamma(\mathrm{K}(\rho, \mathfrak{d}), \mathrm{H}^q(\mathfrak{d}))$ mit $f | \mathrm{K}(\mathfrak{e}) \in \mathrm{M}(\mathfrak{e})$ und $||f||_\rho^{\mathfrak{d}} < \mathfrak{M}$ eine beliebige Schnittfläche, so kann man $f^+ = f | \mathrm{K}(\rho, \mathfrak{d}^+)$ bilden. Nach den Überlegungen zu Anfang des Beweises gibt es dann eine Schnittfläche $g^+ \in \Gamma(\mathrm{K}(\rho, \mathfrak{d}_*), \mathrm{H}^p(\mathfrak{d}_*))$ mit $||g^+||_\rho^{\mathfrak{d}_*} < c\mathfrak{M}$ und $h(\mathfrak{d}^+) \circ g^+ = f^+$. Wir setzen $f^* = f - h(\mathfrak{d}) \circ g^+$, es gilt wieder $f^* | \mathrm{K}(\mathfrak{e}) \in \mathrm{M}(\mathfrak{e})$ für alle $\mathfrak{e} \leq \mathfrak{d}$, aber darüber hinaus : $f^* = \sum_{\varkappa = d_1^+}^{d_1 - 1} f_\varkappa^* \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\varkappa$. Also läßt sich das letzte Resultat anwenden. Satz 1 ist damit bewiesen.

Im Falle, daß $d_1^+ = 1$ ist, vereinfacht sich der Beweis von Satz 1 etwas. Es folgt dann :

Zusatz I. *Die Zuordnung $f \to g$ ist sogar von (ρ_1, d_1) unabhängig linear beschränkt.*

Offenbar ist d_1^+ genau dann gleich 1, wenn der Homomorphismus λ die Garbe $\mathrm{S} = \mathrm{H}^q(\mathfrak{d}_*)/\mathrm{M}(\mathfrak{d}_*)$ über $\mathrm{K}(\rho_1, \mathfrak{d}_*)$, $\rho_1 \ll \rho_0$ injektiv abbildet ([1]). Wir werden später solche Garben torsionsrecht nennen. Wie man leicht sieht, ist i.a. $f \to g$ nicht von $\rho_1 < \rho_1^{(1)}$ unabhängig linear beschränkt.

Wir definieren noch :

a) Eine Folge $\mathfrak{e}_\nu = (e_1^{(\nu)}, \ldots, e_m^{(\nu)})$ von m-tupeln natürlicher Zahlen konvergiert gegen ∞, wenn jede Komponentenfolge $e_\mu^{(\nu)}$ gegen ∞ konvergiert.

b) $\min(\mathfrak{e}, \mathfrak{d}) = (\min(e_1, d_1), \ldots, \min(e_m, d_m))$.

Zusatz II. *Es gibt eine von f und $\rho < \rho_1$ unabhängige Funktion $f(\mathfrak{e}) \leq \mathfrak{e}$, deren Werte und Argumente m-tupel natürlicher Zahlen sind, so daß folgendes gilt :*

1) $\lim\limits_{\mathfrak{e} \to \infty} f(\mathfrak{e}) = \infty$,

2) *Ist $f | K(\min(\mathfrak{e}, \mathfrak{d})) = 0$, so kann man g so wählen, daß $g | K(\min(f(\mathfrak{e}), \mathfrak{d})) = 0$ und die Zuordnung $f \to g$ unabhängig von d_1 linear beschränkt ist.*

([1]) Der Träger T der Garbe Ker λ ist eine analytische Menge, da Ker λ kohärent ist (vgl. § 7). Es gilt $\mathrm{O} \notin \mathrm{T}$. Daraus folgt die Aussage.

Der Beweis von Zusatz II ergibt sich unmittelbar, wenn man dem Gang des Beweises von Satz I folgt.

Man erhält nun unmittelbar eine Aussage, in der § 1, Hilfssatz I enthalten ist :

Satz 2. *Es seien* $M'_{\mathfrak{D}}$, $M_{\mathfrak{D}} \subset O^q_{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{D} \in K =$ *Nullpunkt, Untermoduln. Zu jedem m-tupel* $\mathfrak{e}$ *natürlicher Zahlen und zu jedem Element* $f \in M_{\mathfrak{D}}$ *gebe es ein Element* $f' \in M'_{\mathfrak{D}}$ *mit* $f - f' \in O^q_{\mathfrak{D}} \cdot I(\mathfrak{e})$. *Dann gilt* $M_{\mathfrak{D}} \subset M'_{\mathfrak{D}}$.

Beweis. Nach dem Rückertschen Basissatz gibt es Basen $f'_1, \ldots, f'_p, f_1, \ldots, f_\nu$ von $M'_{\mathfrak{D}}$ bzw. $M_{\mathfrak{D}}$. Ist ρ_0 hinreichend klein, so sind alle diese Funktionen in K holomorph, durch die Zuordnung $(a_1, \ldots, a_p) \to \Sigma a_\nu f'_\nu$ erhält man dann einen Homomorphismus $h : O^p \to O^q$. Nach Satz I gilt $f_\nu | K(\rho) \in \Gamma(K(\rho), h(O^p))$, wenn $\rho \leqslant \rho_0$ und mithin $M_{\mathfrak{D}} \subset M'_{\mathfrak{D}}$.

2. Es seien $G \subset C^n$ ein Holomorphiegebiet, π die Produktprojektion $G \times K \to G$, F ein q-rangiges komplex-analytisches Vektorraumbündel über $G \times K$. Es ergibt sich :

Satz 3. *F ist analytisch äquivalent zu der Liftung* $\pi^{-1}(\overset{\circ}{F})$ *eines q-rangigen komplex-analytischen Vektorraumbündels* $\overset{\circ}{F}$ *über G.*

Beweis. Wir setzen $\overset{\circ}{F} = F | G \times o$ (mit $o =$ Nullpunkt aus K) und erhalten ein Vektorraumbündel über G, da $G \times o \approx G$ ist. Weil $G \times K$ auf $G \times o$ zusammenziehbar ist, sind F und $\pi^{-1}(\overset{\circ}{F})$ topologisch äquivalent, weil ferner $G \times K$ ein holomorph-vollständiger Raum ist, folgt nach [8], Satz I die analytische Äquivalenz $\pi^{-1}(\overset{\circ}{F}) \approx F$.

Man braucht zwischen analytisch äquivalenten Bündeln nicht zu unterscheiden und darf deshalb voraussetzen, daß $F = \pi^{-1}(\overset{\circ}{F})$ ist.

Es sei $T = \{T_\iota, \iota \in I\}$ eine hinreichend feine Steinsche Überdeckung von G. $\overset{\circ}{F}$ kann dann durch einen Kozyklus $\Phi = \{\Phi_{\iota_1 \iota_2}(z) : \iota_1, \iota_2 \in I\} \in Z^1(T, GL(q, C))$ gegeben werden. Die Ausdrücke $\Phi_{\iota_1 \iota_2}(z)$ sind holomorphe Abbildungen $T_{\iota_1 \iota_2} = T_{\iota_1} \cap T_{\iota_2} \to GL(q, C)$ und werden wie üblich « transition functions » genannt. Das Bündel F entsteht durch Verheftung der kartesischen Produkte $T_\iota \times C^q = \{(\iota, z, w) : z \in T_\iota, w \in C^q\}$ vermöge der biholomorphen Abbildungen : $T_{\iota_1 \iota_2} \times C^q \to T_{\iota_1 \iota_2} \times C^q : (\iota_2, z, w) \to (\iota_1, z, \Phi_{\iota_1 \iota_2}(z) \circ w)$.

Wir setzen $\hat{T} = \{\hat{T}_\iota = T_\iota \times K : \iota \in I\}$, $\hat{\Phi} = \{\hat{\Phi}_{\iota_1 \iota_2} = \Phi_{\iota_1 \iota_2} \circ \pi\} \in Z^1(\hat{T}, GL(q, C))$. Es folgt sofort, daß F durch den Kozyklus $\hat{\Phi}$ gegeben wird. Da F durch Verheftung entstanden ist, gibt es kanonische holomorphe Abbildungen $\hat{\psi}_\iota : \hat{\varphi}^{-1}(\hat{T}_\iota) \to \hat{T}_\iota \times C^q$, die durch Liftung der kanonischen Abbildungen $\psi_\iota : \varphi^{-1}(T_\iota) \to T_\iota \times C^q$ erhalten sind. Dabei bezeichnen φ, $\hat{\varphi}$ die Bündelprojektionen $\overset{\circ}{F} \to G$, $F \to G \times K$.

Ist $s \in \Gamma(B, \underline{F})$, $B \subset \hat{T}_\iota$ eine Schnittfläche, so wird s durch $\hat{\psi}_\iota$ auf eine Schnittfläche in dem trivialen Bündel $\hat{T}_\iota \times C^q$ abgebildet, die man als ein q-tupel holomorpher Funktionen deuten kann. Wir bezeichnen dieses q-tupel mit $\hat{\psi}_\iota(s)$.

Es sei nun $U = \{U_i : i \in J\}$ eine offene Überdeckung von G. Wir nehmen an, daß U eine « eigentliche Verfeinerung » von T ist (in Zeichen $U \subset\subset T$). Das bedeutet folgendes : Zu jedem Element $i \in J$ ist ein Element $\tau(i) \in I$ definiert, so daß aus $\iota = \tau(i)$ folgt : $U_i \subset\subset T_\iota$.

Wir greifen auf die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes zurück und setzen $\hat{U}(\rho) = \{U_i \times K(\rho)\}$ und führen in $C^\nu(\hat{U}(\rho), \underline{F})$ eine Pseudonorm ein. Ist $\xi = \{\xi_{i_0 \ldots i_\nu}\} \in C^\nu(\hat{U}(\rho), \underline{F})$ eine Kokette, so setzen wir:

$$||\xi||_{U\rho} = \sup_{i_0, \ldots, i_\nu, \mu, \iota = \tau(i_\mu)} ||\hat{\psi}(\xi_{i_0 \ldots i_\nu})||^{\mathfrak{d}\infty}_{U_{i_0 \ldots i_\nu}\rho} \quad \mathfrak{d}\infty = (\infty, \ldots, \infty).$$

Wir untersuchen zunächst den Fall, wo $K = 0$ ein Punkt ist, und setzen in diesem Falle anstelle von $||\xi||_{U\rho}$ einfach $||\xi||_U$. Es gilt $F = \overset{0}{F}$. Wir setzen fortan voraus, daß U eine Steinsche Überdeckung von G ist. Ein Satz von Leray besagt dann, daß $H^\nu(U, \underline{F}) = H^\nu(G, \underline{F})$ ist, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Aus dem Theorem B von H. Cartan folgt deshalb : $H^\nu(U, \underline{F}) = 0$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Wir zeigen darüber hinaus :

Hilfssatz 1. *Es seien $G' \subset\subset G$ ein Teilgebiet, $V = \{V_i\}$ eine offene endliche Überdeckung von G', die eine eigentliche Verfeinerung der Überdeckung U ist. Dann gibt es zu jedem Kozyklus $\xi \in \mathcal{Z}^\nu(U, \underline{F})$, $\nu \geq 1$ eine Kokette $\eta \in C^{\nu-1}(V, \underline{F})$, so daß $\xi | G' = \delta\eta$ ist. Die Zuordnung $\xi \to \eta$ ist in bezug auf die Normen $||\xi||_U$, $||\eta||_V$ linear beschränkt.*

Beweis. Die Gruppen $C^\nu(U, \underline{F})$, $Z^\nu(U, \underline{F})$ lassen sich als komplexe Vektorräume auffassen. Versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz sind sie Fréchetsche Räume. Da $\delta : C^{\nu-1}(U, \underline{F}) \to Z^\nu(U, \underline{F})$ stetig, linear, surjektiv ist, folgt aus einem Satz von Banach ([2]), daß δ eine offene Abbildung ist. Daraus ergibt sich aber unmittelbar die Behauptung des Hilfssatzes (vgl. § 2, Abschnitt 8, wo ein ähnlicher Schluss durchgeführt ist).

Die Aussage von Hilfssatz 1 überträgt sich unmittelbar auf unsere Produktgebiete $G \times K(\rho)$:

Satz 4. *Es seien $G' \subset\subset G$ ein Teilgebiet, $V = \{V_i\}$ eine offene endliche Überdeckung von G', die eine eigentliche Verfeinerung der Überdeckung U ist. Dann gibt es zu jedem Kozyklus $\xi \in \mathcal{Z}^\nu(\hat{U}(\rho), \underline{F})$, $\nu \geq 1$ eine Kokette $\eta \in C^{\nu-1}(\hat{V}(\rho), \underline{F})$, so daß $\xi | G' \times K(\rho) = \delta\eta$ ist. Die Relation $\xi \to \eta$ ist in bezug auf die Normen $||\xi||_{U\rho}$, $||\eta||_{V\rho}$ unabhängig von ρ linear beschränkt.*

Der Beweis ergibt sich durch Potenzreihenentwicklung von ξ nach den Variablen $\mathfrak{t}$ von $K(\rho)$.

3. Wir zeigen jetzt, indem wir die Bezeichnungsweise des vorigen Abschnittes beibehalten :

Satz 5. *Es seien F_1, F_0 zwei komplex-analytische Vektorraumbündel über $G \times K$, h ein analytischer Homomorphismus der Garbe $\underline{F_1}$ in die Garbe $\underline{F_0}$. Ferner seien $V \subset\subset U \subset\subset T$, $\hat{V}$, $\hat{U}$ die im vorigen Abschnitt definierten Überdeckungen. Ist dann $\rho < \rho_0$ hinreichend klein, so gibt es zu jedem Kozyklus $\xi = \{\xi_{i_0 \ldots i_\nu}\} \in \mathcal{Z}^\nu(\hat{U}(\rho), \underline{F_0})$ mit $\xi_{i_0 \ldots i_\nu} \in \Gamma(\hat{U}_{i_0 \ldots i_\nu}(\rho), M)$, $M = h(\underline{F_1})$ einen Kozyklus $\eta \in \mathcal{Z}^\nu(\hat{V}(\rho), \underline{F_1})$, so daß $\xi | G' \times K(\rho) = h(\eta)$ ist. Die Zuordnung $\xi \to \eta$ ist linear beschränkt.*

Zum Beweis von Satz 5 zeigen wir zunächst :

(*) Es gibt zu F_0, F_1 ein Holomorphiegebiet P mit $G' \subset\subset P \subset\subset G$ und zu jedem $\rho < \rho_0$ ein ρ_1 mit $\rho < \rho_1 < \rho_0$, so daß über $P \times K(\rho_1)$ eine exakte Garbensequenz $0 \to \underline{F}_l \xrightarrow{h_{l-1}} \underline{F}_{l-1} \xrightarrow{h_{l-2}} \dots \xrightarrow{h_1} \underline{F}_1 \xrightarrow{h_0} \underline{F}_0$ existiert, in der F_ν, $\nu = 0, 1, \dots,$ komplex-analytische Vektorraumbündel vom Range p_ν bezeichnen und $h_0 = h$ ist.

Beweis von (*). Wir wählen ein (offenes) analytisches Polyeder P mit $G' \subset\subset P \subset\subset G$ und ein m-tupel ρ_1, $\rho < \rho_1 < \rho_0$. Ist M_1 der Kern der Abbildung h_0, so wird jeder Halm von M_1 über einer Umgebung $U(\overline{P} \times \overline{K}(\rho_1))$ durch festgewählte Schnittflächen $s_1, \dots, s_{p_2} \in \Gamma(G \times K, M_1)$ erzeugt. $h_1 : (a_x^{(1)}, \dots, a_x^{(p_2)}) \to \Sigma a_x^{(\nu)} s_\nu$ ist dann ein analytischer Homomorphismus von $\underline{F}_2 = O^{p_2}(U)$ auf $M_1 \mid U \subset \underline{F}_1 \mid U$, die Sequenz (1) : $\underline{F}_2 \xrightarrow{h_1} \underline{F}_1 \xrightarrow{h_0} \underline{F}_0$ somit über U exakt. Da es beliebig kleine Holomorphiegebiete P' mit $P \subset\subset P'$ gibt, kann man das geiche Verfahren auf $M_2 = \operatorname{Ker} h_1$ anwenden und so beliebig fortfahren. Nach dem Hilbertschen Syzygiensatz gibt es eine Zahl $l \leq n + m$, so daß M_{l-1} eine freie Garbe ist. Wir definieren dann : $\underline{F}_l = M_{l-1}$ und erhalten damit die exakte Sequenz (*).

Satz 5 läßt sich nun durch Induktion über l beweisen. Wegen (*) kann man fortan ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß über $G \times K$ eine exakte Sequenz :

$$0 \to \underline{F}_l \to \underline{F}_{l-1} \to \dots \xrightarrow{h_1} \underline{F}_1 \xrightarrow{h_0} \underline{F}_0$$

gegeben ist. Wir betrachten zunächst den Fall der Kozyklen vom Grade $\nu = 0$ und führen folgende Bezeichnungen ein :

1) Es sei $G_\varkappa$, $\varkappa = 0, 1, 2, 3$ eine Folge von Holomorphiegebieten mit $G_0 = G$, $G' \subset G_3$, $G_{\varkappa+1} \subset\subset G_\varkappa$.

2) Es seien $U_\varkappa = \{U_\iota^{(\varkappa)}\}$, $\varkappa = 0, 1, 2, 3$ Steinsche für $\varkappa \neq 0$ endliche Überdeckungen von $G_\varkappa$ bzw. von $\overline{G}_1$ im Falle $\varkappa = 1$. Es gelte $U_0 = U$, $V \subset U_3$, $U_{\varkappa+1}$ sei eigentliche Verfeinerung von $U_\varkappa$. Alle Elemente $U_\iota^{(1)} \in U_1$ seien Polyzylinder und so klein gewählt, daß für sehr kleines ρ für den Polyzylinder $\hat{U}_\iota^{(1)} = U_\iota^{(1)} \times K(\rho)$ die Aussage von Satz 1 gilt.

Wir dürfen voraussetzen, daß ρ unabhängig von ι « hinreichend » klein gewählt ist. Wir setzen $\hat{U}_\iota^{(\varkappa)} = U_\iota^{(\varkappa)} \times K(\rho)$, $\hat{U}_\varkappa = \{\hat{U}_\iota^{(\varkappa)}\}$.

Es sei nun $\xi \in \Gamma(G, \underline{F}_0)$, $\|\xi\|_{U\rho} < \mathfrak{M}$ vorgegeben. Nach Satz 1 gibt es Schnittflächen $\xi_\iota \in \Gamma(\hat{U}_\iota^{(1)}, \underline{F}_1)$ mit $\|\xi_\iota\|_{U_\iota^{(1)}\rho} < c_1 \mathfrak{M}$ und $h(\xi_\iota) = \xi$. Für den Kozyklus $\eta = \delta\{\xi_\iota\} \in Z^1(\hat{U}_1, \underline{F}_1)$ gilt $\|\eta\|_{U_1\rho} < 2\, c_1 \mathfrak{M}$. Nach Induktionsvoraussetzung läßt sich ein Kozyklus $\eta^* \in Z^1(\hat{U}_2, \underline{F}_2)$ mit $h_1(\eta^*) = \eta$, $\|\eta^*\|_{U_2\rho} < c_2 \mathfrak{M}$ finden. Satz 4 ergibt :

$$\eta^* = -\delta\gamma,\ \gamma \in C^0(\hat{U}_3, \underline{F}_2),\ \|\gamma\|_{U_3\rho} < c_3 \mathfrak{M}.$$

Es ist $\xi^* = h_1(\gamma) + \{\xi_\iota\} \in \Gamma(G_3, \underline{F}_1)$ unabhängig von ι definiert, es gilt

$$h(\xi^*) = \xi,\ \|\xi^*\|_{V\rho} < c_4 \mathfrak{M},\quad \text{q.e.d.}$$

In ähnlicher Weise folgt aus der Induktionsvoraussetzung die allgemeine Aussage des Satzes. Zunächst seien wieder einige Bezeichnungen eingeführt :

1) Es sei $G_\varkappa$, $\varkappa = 0, 1, 2, 3$ eine Folge von Holomorphiegebieten mit $G_0 = G$, $G' \subset G_3$, $G_{\varkappa+1} \subset\subset G_\varkappa$.

2) Es seien $U_\varkappa = \{U_\iota^{(\varkappa)}\}$ Steinsche Überdeckungen von $G_\varkappa$, $\varkappa = 0, 1, \ldots, 3$. Es gelte $U_0 = U$, $U_\iota^{(\varkappa+1)} \subset\subset U_\iota^{(\varkappa)}$, $V \subset U_3$. Die Überdeckungen $U_\varkappa$, $\varkappa \neq 0$ seien endlich.

Es sei wieder ρ hinreichend klein gewählt und $\xi = \{\xi_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}\} \in Z^\nu(\hat{U}_0, \underline{F}_0)$, $||\xi||_{U_0\rho} < \mathfrak{M}$ vorgegeben. Wie vorhin gezeigt, lassen sich Schnittflächen $\xi^*_{\iota_0 \ldots \iota_\nu} \in \Gamma(\hat{U}^{(1)}_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}, \underline{F}_1)$, $||\xi^*_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}||_{U^{(1)}_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}\rho} < c_1 \mathfrak{M}$ bestimmen. Wir setzen $\eta = \delta\{\xi^*_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}\} \in Z^{\nu+1}(\hat{U}_1, \underline{F}_1)$ und wählen ein $\eta^* \in Z^{\nu+1}(\hat{U}_2, \underline{F}_2)$ mit $h_1(\eta^*) = \eta$ und ein $\gamma \in C^\nu(\hat{U}_3, \underline{F}_2)$ mit $\delta\gamma = \eta^*$. Es gilt $||\gamma||_{U_3\rho} < c_3 \mathfrak{M}$. $\xi' = \{\xi^*_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}\} - h_1(\gamma) \in Z^\nu(U_3, \underline{F}_1)$ ist ein Kozyklus, für den $h(\xi') = \xi$, $||\xi'||_{V\rho} < c_4 \mathfrak{M}$ gilt, q.e.d.

Damit ist der Induktionsschluß durchgeführt. Um die Induktionsbasis zu gewinnen, müssen wir exakte Sequenzen (2) $0 \to F_1 \to F_0$ betrachten. Da man aber (2) durch $0 \to 0 \to F_1 \to F_0$ ersetzen darf, genügt es die Sequenzen $0 \to 0 \to F_0$ zu untersuchen. Für diesen Fall ist jedoch die Aussage von Satz 5 trivial.

Aus dem Beweis zu Satz 5 und dem Zusatz 1 zu Satz 1 folgt :

Zusatz zu Satz 5. *Es sei $S = \underline{F}_0 / h(\underline{F}_1)$ torsionsrecht. Dann ist die Zuordnung $\xi \to \eta$ von $\rho_1 < \rho_1^{(1)}$ unabhängig linear beschränkt, wenn ρ_1 sehr klein ist.*

Dabei nennen wir eine Garbe S über einem Gebiet $G \times K$ torsionsrecht, wenn der Homomorphismus $\lambda : S_{\hat{0}} \to S_{\hat{0}} : \sigma \to t_1 \cdot \sigma$ injektiv ist. $S_{\hat{0}}$ bezeichnet die Menge der Halme von S über $G \times O$, $O \in K$.

Korollar zu Satz 5. Es sei $M \subset O^q(G \times K)$ eine kohärente Untergarbe. Ist dann $\rho < \rho_0$ hinreichend klein gewählt, so gibt es zu jedem Kozyklus $\xi \in Z^\nu(\hat{U}(\rho), M)$ eine Kokette $\eta \in C^{\nu-1}(\hat{V}(\rho), M)$ mit $\xi | G' \times K(\rho) = \delta\eta$. Die Zuordnung $\xi \to \eta$ ist linear beschränkt. Ist O^q/M torsionsrecht, so ist $\xi \to \eta$ sogar von ρ_1 unabhängig linear beschränkt.

Beweis. Es seien P_1 ein analytisches Polyeder mit $G' \subset\subset P_1 \subset\subset G$ und $\rho_1 < \rho_0$ ein m-tupel positiver Zahlen. Man kann über $P_1 \times K(\rho_1)$ eine exakte Sequenz $O^p \to M \to 0$ definieren. Das Korollar ergibt sich sofort durch Anwendung von Satz 4 und Satz 5.

4. Wir werden im folgenden Satz 5 nur für den Fall benutzen, daß $\underline{F}_1 = O^p$, $\underline{F}_0 = O^q$ ist. Es sei fortan T stets die triviale Überdeckung $T = \{G\}$ von G. Wir fahren mit der Verallgemeinerung von Satz 1 fort :

Satz 6. *Es seien $h : O^p(G \times K) \to O^q(G \times K)$ ein analytischer Homomorphismus, $\hat{U}$, $\hat{V}$ die in Abschnitt 2 definierten Steinschen Überdeckungen von $G \times K$, bzw. $G' \times K$, $\mathfrak{d}$ ein m-tupel von Zahlen 1, 2, 3, ..., ∞. Ist dann $\rho < \rho_0$ hinreichend klein gewählt, so gibt es zu jedem Kozyklus $\xi = \{\xi_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}\} \in Z^\nu(\hat{U}(\rho), M(\mathfrak{d}))$ mit $M(\mathfrak{d}) = h(\mathfrak{d}) \circ O^p$ einen Kozyklus $\eta \in Z^\nu(\hat{V}(\rho), H^p(\mathfrak{d}))$, so daß $\xi = h(\mathfrak{d}) \circ \eta$ ist. Die Zuordnung $\xi \to \eta$ ist in bezug auf die Normen $||\xi||_{U\rho}$, $||\eta||_{V\rho}$ linear beschränkt.*

Beweis. Wir definieren über $G \times K$ eine kohärente Untergarbe $M_{\mathfrak{d}}$ von $O^q(G \times K)$, indem wir :

1) $M_{\mathfrak{d}} \mid G \times (K - K(\mathfrak{d})) = O^q(G \times K) \mid G \times (K - K(\mathfrak{d}))$,

2) $f_x \in (M_{\mathfrak{d}})_x \Leftrightarrow f_x \mid G \times K(\mathfrak{d}) \in (M(\mathfrak{d}))_x$, $x \in G \times K(\mathfrak{d})$

fordern. Es seien

$k_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $k_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $k_q = (0, \ldots, 0, 1) \in \Gamma(G \times K, O^q(G \times K))$ q-tupel holomorpher Funktionen. Es werde $k_{\nu\mu} = t_\nu^{d_\nu} \cdot k_\mu$ gesetzt. Ferner sei l_ν, $\nu = 1, \ldots, p$ das h-Bild der Schnittfläche $\underbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)}_{1 = \nu - te \text{ Stelle}} \in \Gamma(O^p(G \times K))$. Bezeichnet dann $h_{\mathfrak{d}}$: $O^{p+qm}(G \times K) \to O^q(G \times K)$ denjenigen Homomorphismus, der durch die Zuordnung $\sigma = (\sigma_\nu, \sigma_{\nu\mu}) \to \Sigma \sigma_{\nu\mu} k_{\nu\mu} + \Sigma \sigma_\nu l_\nu$ erzeugt wird, so bildet $h_{\mathfrak{d}}$: $O^{p+qm}(G \times K)$ auf $M_{\mathfrak{d}}$ ab. Schreiben wir $O^{p+qm}(G \times K) = O^p \oplus O^{qm}$, so wird O^p durch $h_{\mathfrak{d}}$ auf M und O^{qm} auf $O^q \cdot I(\mathfrak{d})$ abgebildet, wobei $I(\mathfrak{d})$ die von den Funktionen $t_\nu^{d_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, m$ erzeugte Idealgarbe bezeichnet.

Ist nun $\xi \in Z^\nu(\hat{U}(\rho), M(\mathfrak{d}))$ ein Kozyklus, so wenden wir auf jeden Koeffizienten $\xi_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}$ die im Abschnitt 1 beschriebene Polynomfortsetzung an und erhalten einen Kozyklus $\xi^* = \{\xi^*_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}\} \in Z^\nu(\hat{U}(\rho), M_{\mathfrak{d}})$. Nach Satz 5 gibt es einen Kozyklus

$$\eta^* \in C^{\nu-1}(\hat{V}(\rho), O^{p+qm})$$

mit $\xi^* = h_{\mathfrak{d}}(\eta^*)$. Wir bezeichnen mit η das Bild von η^* in $C^{\nu-1}(\hat{V}(\rho), H^p(\mathfrak{d}))$, das dort durch die natürliche Abbildung $O^p \oplus O^{qm} \to O^p \to H^p(\mathfrak{d})$ definiert wird. Offenbar gilt $h(\mathfrak{d}) \circ \eta = \xi$, die Zuordnung $\xi \to \eta$ ist linear beschränkt, q.e.d.

In den folgenden Paragraphen wird benutzt werden, daß die Zuordnung $\xi \to \eta$ sogar von d_1 unabhängig linear beschränkt ist. Wir zeigen zunächst :

Satz 7'. *Es seien $h : O^p(G \times K) \to O^q(G \times K)$ ein analytischer Homomorphismus, $G' \subset\subset G$ ein relativ-kompaktes Teilgebiet, $\mathfrak{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ ein m-tupel von Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \infty$. Ist dann $\rho < \rho_0$ hinreichend klein, so gibt es zu jeder Schnittfläche $s \in \Gamma(G \times K(\rho, \mathfrak{d}), M(\mathfrak{d}))$ eine Schnittfläche $\tilde{s} \in \Gamma(G' \times K(\rho, \mathfrak{d}), H^p(\mathfrak{d}))$ mit $s \mid G' \times K(\rho, \mathfrak{d}) = h(\mathfrak{d}) \circ \tilde{s}$. Die Zuordnung $s \to \tilde{s}$ ist unabhängig von d_1 linear beschränkt.*

Beweis. Da man mit Hilfe der Methoden des Beweises von Satz 6 zu $M_{\mathfrak{d}_*}$, $\mathfrak{d}_* = (\infty, d_2, \ldots, d_m)$ übergehen kann, darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $d_\nu = \infty$, $\nu = 2, \ldots, m$ ist.

Wir überdecken einen abgeschlossenen Polyzylinder $\overline{P}$, $G' \subset\subset P \subset\subset G$ mit kleinen Polyzylindern $Z_\iota \subset G$ und wählen ρ so klein, daß für die Polyzylinder $Z_\iota \times K(\rho)$ der Satz 1 gilt. Über $Z_\iota \times K(\rho)$ lassen sich sodann Schnittflächen $\tilde{s}_\iota$ in O^p bestimmen, so daß $h(\mathfrak{d}) \circ \tilde{s}_\iota = s \mid Z_\iota \times K(\rho, \mathfrak{d})$ ist. Die Zuordnung $s \to \tilde{s}_\iota$ ist unabhängig von d_1 in bezug auf die Normen $\|s\|^{\mathfrak{d}}_{G\rho}$, $\|\tilde{s}_\iota\|^{\mathfrak{d}_*}_{Z_\iota \rho}$ linear beschränkt. Wir setzen $\tilde{s}_{\iota_1 \iota_2} = h(\tilde{s}_{\iota_2} - \tilde{s}_{\iota_1})$. Es folgt : $\tilde{s}_{\iota_1 \iota_2} \mid Z_{\iota_1 \iota_2} \times K(\rho, \mathfrak{d}) = 0$. Wir dürfen wegen Satz 6 voraussetzen, daß $d_1 \geq d_1^+$ und $t_1^{d_1^+ - 1} \cdot O^q/M$ torsionsrecht ist. Bezeichnet $\tilde{M} \supset M$ die kohärente Untergarbe der

Keime $s_x \in O^q$ mit $t_1^{d_1^+-1} \cdot s_x \in M$, so gilt $s^*_{\iota_1 \iota_2} = \widetilde{s}_{\iota_1 \iota_2} / t_1^{d_1} \in \Gamma(Z_{\iota_1 \iota_2} \times K(\rho), \widetilde{M})$. Durch Anwendung des Korollars zu Satz 5 folgt : Es gibt eine Kokette $\{s^*_\iota\}$, $s^*_\iota \in \Gamma(Z'_\iota \times K(\rho), \widetilde{M})$ mit $\delta\{s^*_\iota\} = \{s^*_{\iota_1 \iota_2}\}$. Dabei bezeichnet $Z' = \{Z'_\iota\}$ eine Polyzylinderüberdeckung von $\overline{P}$, die eine eigentliche Verfeinerung der Überdeckung $Z = \{Z_\iota\}$ ist. Die Zuordnung $\{s^*_{\iota_1 \iota_2}\} \rightarrow \{s^*_\iota\}$ ist linear beschränkt.

Man kann nun nach Satz 1 Schnittflächen $s_\iota \in \Gamma(Z'_\iota \times K(\rho), O^p)$ bestimmen, so daß $h(s_\iota) = t_1^{d_1} . s^*_\iota$ ist. $s_{\iota_1 \iota_2} = \widetilde{s}_{\iota_2} - \widetilde{s}_{\iota_1} + s_{\iota_1} - s_{\iota_2}$ ist ein Kozyklus aus $Z^1(Z'_\iota \times K(\rho), \operatorname{Ker} h)$. Es gilt nach dem Korrollar zu Satz 5 : $\{s_{\iota_1 \iota_2}\} = \delta\{\eta_\iota\}$, $\eta_\iota \in \Gamma(Z''_\iota \times K(\rho), \operatorname{Ker} h)$. Dabei ist $Z'' = \{Z''_\iota\}$ eine endliche offene Überdeckung von $\overline{P}$, die eine eigentliche Verfeinerung von Z' ist. Setzen wir $\widetilde{s} = \widetilde{s}_\iota - \eta_\iota - s_\iota$, so erhalten wir die gewünschte Schnittfläche. Man sieht sofort, daß die Zuordnung $s \rightarrow \widetilde{s}$ unabhängig von d_1 linear beschränkt ist

Es folgt sofort :

Zusatz zu Satz 7'. *Ist $H^q(\mathfrak{d}_*)/h(\mathfrak{d}_*) \circ H^p(\mathfrak{d}_*)$ torsionsrecht, so ist $s \rightarrow \widetilde{s}$ sogar von (ρ_1, d_1) unabhängig linear beschränkt.*

Unter Benutzung von Satz 7' und der Methoden des Beweises von Satz 7' ergibt sich sofort :

Satz 7. *In Satz 6 ist die Zuordnung $\xi \rightarrow \eta$ sogar von d_1 unabhängig linear beschränkt.*

Zusatz. *Ist $H^q(\mathfrak{d}_*)/h(\mathfrak{d}_*) \circ H^p(\mathfrak{d}_*)$ torsionsrecht, so ist $\xi \rightarrow \eta$ sogar von (ρ_1, d_1) unabhängig linear beschränkt.*

Die Durchführung des Beweises sei dem Leser überlassen.

5. Es sei S eine kohärente analytische Garbe über $G \times K$. Da $G \times K$ ein Holomorphiegebiet ist, kann man über jeder kompakten Teilmenge von $G \times K$ eine exakte Sequenz $\Gamma : O^q \rightarrow S \rightarrow 0$ definieren. Wir nehmen im folgenden an, daß Γ über ganz $G \times K$ erklärt ist.

Man kann die analytische Garbe und ebenso die Auflösung Γ auf jeden Unterraum $G \times K(\mathfrak{d})$ beschränken. Die Beschränkungen seien mit $S(\mathfrak{d})$ bzw. $\Gamma(\mathfrak{d}) : H^q(\mathfrak{d}) \xrightarrow{\alpha} S(\mathfrak{d}) \rightarrow 0$ bezeichnet. $\Gamma(\mathfrak{d})$ ist wieder exakt.

Ist $B \subset G$ eine offene Teilmenge, so können wir in $\Gamma(B \times K(\rho, \mathfrak{d}), S(\mathfrak{d}))$ eine Pseudonorm einführen. Wir setzen für $s \in \Gamma(B \times K(\rho, \mathfrak{d}), S(\mathfrak{d}))$: $||s||_{B\rho} = \inf_{\alpha(\mathfrak{d}) \circ f = s} ||f||_{B\rho}$. Dabei durchläuft f die Schnittflächen aus $\Gamma(B \times K(\rho, \mathfrak{d}), H^q(\mathfrak{d}))$ mit $\alpha(\mathfrak{d}) \circ f = s$. Gibt es keine Schnittfläche f mit $\alpha(\mathfrak{d}) \circ f = s$, so sei $||s||_{B\rho} = \infty$.

Eine ähnliche Norm läßt sich für die Koketten definieren. Es sei wieder $U = \{U_\iota\}$ eine offene Überdeckung von G, $\hat{U}(\rho)$ die in Abschnitt 2 definierte Überdeckung von $G \times K(\rho)$, die wir auch als Überdeckung von $G \times K(\rho, \mathfrak{d})$ auffassen. Ist dann $\xi = \{\xi_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}\} \in C^\nu(\hat{U}(\rho), S(\mathfrak{d}))$ eine Kokette, so setzen wir : $||\xi||_{U\rho} = \max_{\iota_0 \ldots \iota_\nu} ||\xi_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}||_{U_{\iota_0 \ldots \iota_\nu}\rho}$.

Es seien nun wieder U eine Steinsche Überdeckung von G, $V = \{V_\iota\}$ eine endliche offene Überdeckung von $G' \subset\subset G$, die eine eigentliche Verfeinerung von U ist. Wir zeigen :

Satz 8. *Ist* $\mathfrak{p} \ll \mathfrak{p}_0$ *hinreichend klein gewählt, so gibt es zu jedem Kozyklus* $\xi \in \mathcal{Z}^\nu(\hat{U}(\mathfrak{p}), S(\mathfrak{d}))$ *eine Kokette* $\eta \in C^{\nu-1}(\hat{V}(\mathfrak{p}), S(\mathfrak{d}))$ *mit* $\delta\eta = \xi | G'$. *Die Zuordnung* $\xi \to \eta$ *ist in bezug auf die Normen* $||\xi||_{U\mathfrak{p}}$, $||\eta||_{V\mathfrak{p}}$ *unabhängig von* (ρ_1, d_1), $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}_1 \ll \mathfrak{p}_0$ *linear beschränkt.*

Es ist zweckmässig zum Beweise von Satz 8 zunächst drei Hilfsaussagen herzuleiten :

Analog zu Satz 4 folgt aus Hilfsatz 1 :

Satz 4 a. *Es sei* $\xi \in \mathcal{Z}^\nu(\hat{U}(\mathfrak{p}), H^q(\mathfrak{d}))$ *ein Kozyklus. Dann gibt es eine Kokette* $\eta \in C^{\nu-1}(\hat{V}(\mathfrak{p}), H^q(\mathfrak{d}))$ *mit* $\delta\eta = \xi | G'$. *Die Zuordnung* $\xi \to \eta$ *ist unabhängig von* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{d})$ *linear beschränkt.*

Wir zeigen ferner :

Hilfssatz 2. *Es sei* $M(\mathfrak{d}) \subset H^q(\mathfrak{d})$ *eine kohärente Untergarbe. Ist dann* $\mathfrak{p} \ll \mathfrak{p}_0$ *hinreichend klein, so gibt es zu jedem Kozyklus* $\xi \in \mathcal{Z}^\nu(\hat{U}(\mathfrak{p}), M(\mathfrak{d}))$ *eine Kokette* $\eta \in C^{\nu-1}(\hat{V}(\mathfrak{p}), M(\mathfrak{d}))$ *mit* $\delta\eta = \xi | G'$. *Die Zuordnung* $\xi \to \eta$ *ist linear beschränkt.*

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von Satz 6 zu $M_\mathfrak{d} \subset O^q$ über. Unser Hilfsatz ergibt sich sodann unmittelbar aus dem Korollar zu Satz 5.

Es folgt weiter :

Hilfssatz 3. *Es sei* $M(\mathfrak{d}_*)$ *eine kohärente Untergarbe von* $H^q(\mathfrak{d}_*)$ *über* $G \times K(\mathfrak{d}_*)$, $\mathfrak{d}_* = (\infty, d_2, \ldots, d_m)$. $M(\mathfrak{d})$ *bezeichne die Beschränkung von* $M(\mathfrak{d}_*)$ *auf* $G \times K(\mathfrak{d})$. *Ist dann* $\mathfrak{p} \ll \mathfrak{p}_0$ *hinreichend klein gewählt, so gibt es zu jedem Kozyklus* $\xi \in \mathcal{Z}^\nu(\hat{U}(\mathfrak{p}), M(\mathfrak{d}))$ *eine Kokette* $\eta \in C^{\nu-1}(\hat{V}(\mathfrak{p}), M(\mathfrak{d}))$ *mit* $\delta\eta = \xi | G'$. *Die Zuordnung* $\xi \to \eta$ *ist in bezug auf die Normen* $||\xi||_{U\mathfrak{p}}$, $||\eta||_{V\mathfrak{p}}$ *unabhängig von* (ρ_1, d_1), $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}_1 \ll \mathfrak{p}_0$ *linear beschränkt.*

Beweis. Wir bezeichnen mit M_μ die Garbe $M(\mathfrak{d}_*) \cap t_1^\mu \cdot H^q(\mathfrak{d}_*)$. Man zeigt leicht :

(1) *Alle Garben* M_μ *sind kohärent.*

Es werde $\widetilde{M}_\mu = t_1^{-\mu} M_\mu$ gesetzt. Alle Garben $\widetilde{M}_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ sind ebenfalls kohärente Untergarben von $H^q(\mathfrak{d}_*)$. Es gilt $M(\mathfrak{d}_*) = \widetilde{M}_0 \subset \widetilde{M}_1 \subset \ldots$. Wegen § 2, Satz 8 dürfen wir annehmen, daß eine natürliche Zahl μ_0 existiert, so daß $\widetilde{M}_\mu = \widetilde{M}_{\mu_0}$ für $\mu \geq \mu_0$ gilt. d_1^+ sei die kleinste der Zahlen μ_0. Wir zeigen :

(2) *Die Zuordnung* $\xi \to \eta$ *ist für* $d_1 < \infty$ *unabhängig von* ρ_1 *linear beschränkt.*

Für $d_1 = 1$ ist das trivial. Es ist also nur zu zeigen, daß aus der Gültigkeit der Aussage für den Fall $d_1 < d_1^{(0)}$ ihre Gültigkeit für den Fall $d_1 = d_1^{(0)}$ folgt.

Es seien $G_\varkappa$, $\varkappa = 1,2$ Holomorphiegebiete mit $G' \subset\subset G_2 \subset\subset G_1 \subset\subset G$, $V_\varkappa$ mit $V \subset\subset V_2 \subset\subset V_1 \subset\subset U$ endliche Steinsche Überdeckungen von $G_\varkappa$. Wir beschränken den Kozyklus $\xi \in Z^\nu(\hat{U}(\mathfrak{p}), M(\mathfrak{d}_0))$, $\mathfrak{d}_0 = (d_1^{(0)}, d_2, \ldots, d_m)$ auf

$$G \times K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}_0'), \ \mathfrak{d}_0' = (d_1^{(0)} - 1, d_2, \ldots, d_m)$$

und bestimmen eine Kokette $\eta_1 \in C^{\nu-1}(\hat{V}_1(\mathfrak{p}), M(\mathfrak{d}'_0))$ mit $\delta\eta_1 = \xi | G_1 \times K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}'_0)$. Nach Satz 7 kann man eine Kokette $\eta_1^* \in C^{\nu-1}(\hat{V}_2(\mathfrak{p}), H^p(\mathfrak{d}'_0))$ finden, so daß, $h(\mathfrak{d}'_0)\circ\eta_1^* = \eta_1$ gilt. Dabei ist $h: O^p \to O^q$ ein Garbenhomomorphismus, so daß $h(\mathfrak{d}_*)\circ H^p(\mathfrak{d}_*) = M(\mathfrak{d}_*)$ ist. Es gibt eine von $(\rho_1, d_1^{(0)})$ unabhängige Konstante c, derart, daß $||\eta_1^*||_{V_2\mathfrak{p}^*} < c\,||\eta_1||_{V_1\mathfrak{p}^*} < c\left(\frac{\rho_1^*}{\rho_1}\right)^{d_1^{(0)}-1} \cdot ||\eta_1||_{V_1\mathfrak{p}}$ gilt (mit $\mathfrak{p}^* = (\rho_1^*, \rho_2, \ldots, \rho_m)$). Wir setzen $\eta_2 = h(\mathfrak{d}_0)\circ\eta_1^*$. Es folgt $||\eta_2||_{V_2\mathfrak{p}} < c'\,||\eta_1||_{V_1\mathfrak{p}}$, wenn $\mathfrak{p}$ sehr klein ist.

Es ist $\xi_1 = (\xi - \delta\eta_2) \Big/ \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^{d_1^{(0)}-1} \in Z^\nu(\hat{V}_2(\mathfrak{p}), \widetilde{M}_{d_1^{(0)}-1}(1, d_2, \ldots, d_m))$ ein Kozyklus. Man kann nach Hilfssatz 2 eine Kokette $\eta_3 \in C^{\nu-1}(\hat{V}(\mathfrak{p}), \widetilde{M}_{d_1^{(0)}-1}(1, d_2, \ldots, d_m))$ finden, so daß $\delta\eta_3 = \xi_1$ ist. Es folgt für $\eta = \eta_2 + \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^{d_1^{(0)}-1} \eta_3$ die Gleichheit $\xi | G' = \delta\eta$. Man sieht sofort, daß $\eta \to \xi$ unabhängig von ρ_1 linear beschränkt ist, q.e.d.

Nach dem vorstehenden ist klar, daß Hilfssatz 3 gilt, wenn $H^q(\mathfrak{d}_*)/M(\mathfrak{d}_*)$ torsionsrecht ist. Um ihn zu beweisen dürfen wir jetzt annehmen, daß $d_1 > d_1^+$ gilt. Wir beschränken den Kozyklus ξ auf $G \times K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}^+)$. Wie wir gezeigt haben, kann man eine Kokette $\eta^+ \in C^{\nu-1}(\hat{V}_1(\mathfrak{p}), M(\mathfrak{d}^+))$ finden, so daß $\delta\eta^+ = \xi | G_1 \times K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}^+)$ gilt. Wie vorhin kann man η^+ zu einer Kokette $\eta^* \in C^{\nu-1}(\hat{V}_2(\mathfrak{p}), M(\mathfrak{d}))$ fortsetzen. Die Zuordnung $\eta^+ \to \eta^*$ ist unabhängig von (ρ_1, d_1) linear beschränkt. Es folgt

$$\xi^+ = (\xi - \delta\eta^*) \Big/ \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^{\mathfrak{r}} \in Z^\nu(\hat{V}_2(\mathfrak{p}), \widetilde{M}_{d_1^+}(\mathfrak{d}))$$

und mithin $\xi^+ = \delta\gamma$, wobei $\xi^+ \to \gamma$ unabhängig von (ρ_1, d_1) linear beschränkt ist, da $M_{d_1^+}$ torsionsrecht ist. Für $\eta = \eta^* + \gamma \cdot \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^{d_1^+}$ gilt : $\delta\eta = \xi | G'$, was den Beweis des Hilfssatzes abschließt.

Der Beweis von Satz 8 ist nun nicht mehr schwer. Wir bezeichnen mit $M(\mathfrak{d}_*)$ die Kerngarbe der Abbildung $\alpha(\mathfrak{d}_*) : H^q(\mathfrak{d}^*) \to S(\mathfrak{d}^*)$, G_1 sei wieder ein Holomorphiegebiet mit $G' \subset\subset G_1 \subset\subset G$ und V_1 eine Steinsche Überdeckung, wie im letzten Beweis. Ist $\xi \in Z^\nu(\hat{U}(\mathfrak{p}), S(\mathfrak{d}))$ endlich, so gibt es eine endliche Kokette $\eta_1 \in C^\nu(\hat{U}(\mathfrak{p}), H^q(\mathfrak{d}))$ mit $\alpha(\mathfrak{d})\circ\eta_1 = \xi$. Der Kozyklus $\delta\eta_1$ liegt in $Z^{\nu+1}(\hat{U}(\mathfrak{p}), M(\mathfrak{d}))$. Es gibt also eine Kokette $\eta_2 \in C^\nu(\hat{V}_1(\mathfrak{p}), M(\mathfrak{d}))$ mit $\delta\eta_2 = \delta\eta_1$. $\xi_1 = \eta_1 - \eta_2 \in Z^\nu(\hat{V}_1(\mathfrak{p}), H^q(\mathfrak{d}))$ ist also ein Kozyklus. Nach Satz 4 a gilt : $\xi_1 = \delta\gamma$, $\gamma \in C^{\nu-1}(\hat{V}(\mathfrak{p}), H^q(\mathfrak{d}))$. Also hat sich ergeben : $\xi = \delta\eta$ für $\eta = \alpha(\mathfrak{d})\circ\gamma$ und es ist klar, daß die Zuordnung $\xi \to \eta$ unabhängig von (ρ_1, d_1) linear beschränkt ist.

In analoger Weise folgt aus Hilfssatz 3 leicht der folgende Satz :

Satz 9. Ist $\mathfrak{p} \ll \mathfrak{p}_0$ hinreichend klein, so ist die Zuordnung

$$s \to s' = s | G' \times K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}),\ s \in \Gamma(G \times K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}), S(\mathfrak{d}))$$

in bezug auf die Normen $||s||_{U\mathfrak{p}}$, $||s'||_{G'\mathfrak{p}}$ unabhängig von (d_1, ρ_1) linear beschränkt.

Der Beweis sei dem Leser überlassen.

6. Unsere Norm für die Schnittflächen in $S(\mathfrak{d})$ wird im wesenlichen durch die Auflösung $\Gamma(\mathfrak{d}) : H^q(\mathfrak{d}) \to S(\mathfrak{d}) \to 0$ bestimmt. Im nächsten Paragraphen wird besonders das Verhalten dieser Norm bei Änderung der Auflösung interessieren. Es werde deshalb folgende Betrachtung durchgeführt :

Es seien $G_\varkappa \times K$, $\varkappa = 1,2$ zwei Holomorphiegebiete über denen kohärente analytische Garben $S_\varkappa$ und Auflösungen $\Gamma_\varkappa : O^{q_\varkappa} \to S_\varkappa \to 0$ gegeben sind. ψ_0 sei eine holomorphe Abbildung von $G_2 \times K$ in $G_1 \times K$, die die Punkte $(z_2, \mathfrak{t}) \in G_2 \times K$ auf Punkte $(z_1, \mathfrak{t}) \in G_1 \times K$ abbildet, also in $\mathfrak{t}$ die Identität ist. Über dieser Abbildung möge eine stetige Abbildung $\psi_1 : S_1 \oplus_{\psi_0} G_2 \times K \to S_2$ gegeben sein, die die Moduln $(S_1)_x$ operatorverträglich in $(S_2)_y$, $x = \psi_0(y)$ abbildet, also ein Garbenhomomorphismus ist [1]. Das Diagramm :

$$\begin{array}{ccc} S_2 & \xleftarrow{\psi_1} & S_1 \oplus_{\psi_0} G_2 \times K \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_2 \times K & \xrightarrow[\psi_0]{} & G_1 \times K \end{array}$$

ist kommutativ.

Weil $G_2 \times K$ ein Holomorphiegebiet ist, kann man über $G_2 \times K$ eine stetige Abbildung $\psi_2 : O^{q_1}(G_1 \times K) \oplus_{\psi_0} G_2 \times K \to O^{q_2}(G_2 \times K)$ bestimmen, so daß (ψ_0, ψ_2) ein Garbenhomomorphismus und das Diagramm :

$$\begin{array}{ccc} O^{q_2} & \xleftarrow{\psi_2} & O^{q_1} \oplus_{\psi_0} G_2 \times K \\ {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow \\ S_2 & \xleftarrow[\psi_1]{} & S_1 \oplus_{\psi_0} G_2 \times K \end{array}$$

kommutativ ist.

Es seien nun $B_\nu \subset\subset G_\nu$, $\nu = 1,2$ offene Teilmengen, ψ_0 bilde $\hat{B}_2 = B_2 \times K$ in $\hat{B}_1 = B_1 \times K$ ab. Wir zeigen :

Hilfssatz 4. *Es sei $f \in \Gamma(B_1 \times K(\rho, \mathfrak{d}), H^{q_1}(\mathfrak{d}))$, $\rho < \rho_1 < \rho_0$ eine Schnittfläche. Dann ist die Zuordnung $f \to g = f \circ \psi_0 | B_2 \times K(\rho, \mathfrak{d})$ unabhängig von $(\rho, \mathfrak{d})$ linear beschränkt.*

Beweis. Wir setzen zunächst voraus, daß f von $\mathfrak{t}$ unabhängig ist. Es ist dann f noch in $B_1 \times K(\mathfrak{d})$ holomorph und es gilt $\|f\|_{B_1 \rho} = \|f\|_{B_1 \rho_0} = \mathfrak{M}$. Für die Potenzreihenentwicklung $g = \sum_{\varkappa=0}^{\mathfrak{d}} g_\varkappa \left(\frac{\mathfrak{t}}{\rho}\right)^\varkappa$ hat man deshalb

$$|g_\varkappa| < q_1 \mathfrak{M} \left(\frac{\rho_1}{\rho_1^{(0)}}\right)^{\varkappa_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\rho_m}{\rho_m^{(0)}}\right)^{\varkappa_m} < q_1 \mathfrak{M} a^{|\varkappa|}, \quad |\varkappa| = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_m, \quad a = \max_\nu \rho_\nu^{(1)}/\rho_\nu^{(0)} < 1.$$

Ist f beliebig, so folgen für $f \circ \psi_0 \,|B_2 \times K(\rho) = g = \sum_{\varkappa=0}^{\mathfrak{d}} g_\varkappa \left(\frac{\mathfrak{t}}{\rho}\right)^\varkappa$ die Ungleichungen $|g_\varkappa| < q_1 \mathfrak{M} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a^{|\varkappa|} = \mathfrak{M}\left(\frac{1}{1-a}\right)^m$, wenn $\mathfrak{M} = \|f\|_{B_1 \rho}$ ist, q.e.d.

---

[1] ψ_1 müßte, genau genommen, als Paar (ψ_0, ψ_1) definiert werden. Vgl. die Definition in § 1.

Durch ψ_2 werden die Schnittflächen $f_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $f_2=(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots$, $f_{q_1}=(0, \ldots, 0, 1) \in \Gamma(G_1 \times K, O^{q_1})$ auf Schnittflächen $f'_\nu \in \Gamma(G_2 \times K, O^{q_1})$ abgebildet, $\nu=1, \ldots, q_1$. Über $B_2 \times K(\mathfrak{p}) \subset\subset G_2 \times K$ gilt : $f'_\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} {'f}^{(\nu)}_\varkappa \left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{p}}\right)^\varkappa$ mit

$$|{'f}^{(\nu)}_\varkappa| < c \cdot a^{|\varkappa|}, \; a<1, \; c>1.$$

Ist $f=\sum_{\nu=1}^{q_1} k_\nu f_\nu \in \Gamma(B_1 \times K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}), H^{q_1}(\mathfrak{d}))$ eine Schnittfläche mit $||f||_{B_1\mathfrak{p}} = \sum_\nu ||k_\nu||_{B_1\mathfrak{p}} = \mathfrak{M}$, so hat man für $g=\sum_{\nu=1}^{q_1} (k_\nu \circ \psi_0) f'_\nu$ die Beziehung

$$g=\sum_{\nu=1}^{q_1} \sum_{\varkappa=0}^{\mathfrak{d}} \sum_\mu k^{(\nu)}_\varkappa \left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{p}}\right)^\varkappa {'f}^{(\nu)}_\mu \left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{p}}\right)^\mu = \sum_{\varkappa=0}^{\mathfrak{d}} \left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{p}}\right)^\varkappa \sum_{\mu \le \varkappa} \sum_\nu k^{(\nu)}_{\varkappa-\mu} {'f}^{(\nu)}_\mu,$$

wobei $k_\nu \circ \psi_0 = \sum_{\varkappa=0}^{\mathfrak{d}} k^{(\nu)}_\varkappa \left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{p}}\right)^\varkappa$ gesetzt ist. Nach dem Hilfssatz gilt : $|k^{(\nu)}_\varkappa| < c_0 \mathfrak{M}$. Somit folgt : $||g||_{B_2\mathfrak{p}} < q_1 \cdot c_0 c \cdot \left(\frac{1}{1-a}\right)^m \mathfrak{M}$, wobei sämtliche Konstanten von $(\mathfrak{d}, \mathfrak{p})$ unabhängig sind. — Damit ist gezeigt :

Satz 10. Es sei $\mathfrak{p}<\mathfrak{p}_1<\mathfrak{p}_0$. Die Schnittflächen aus $\Gamma(B_1 \times K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}), S(\mathfrak{d}))$ seien mit s bezeichnet. Dann ist die Zuordnung $s \to s' = \psi_1(s) | B_2 \times K(\mathfrak{p}, \mathfrak{d})$ in bezug auf die Normen $||s||_{B_1\mathfrak{p}}$, $||s'||_{B_2\mathfrak{p}}$ unabhängig von $(\mathfrak{p}, \mathfrak{d})$ linear beschränkt.

Unsere Pseudonormen sind also von der Wahl der Auflösung Γ und der Lage der Ebenen $\mathfrak{t}=$ const. im wesentlichen unabhängig.

In den folgenden Paragraphen werden wir nur die Sätze 8, 9, 10 anwenden.

§ 4. Messatlanten.

1. Es seien X ein komplexer Raum, K, $K(\mathfrak{p})$ Polyzylinder im Sinne des vorigen Paragraphen. Ferner sei $\pi : X \to K$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Wir setzen :

1) $X(\mathfrak{p}) = \pi^{-1}(K(\mathfrak{p}))$, $\mathfrak{p} \le \mathfrak{p}_0$.

2) $U(\mathfrak{p}) = U \cap X(\mathfrak{p}) = \{U_\iota \cap X(\mathfrak{p})\}$, wenn $U=\{U_\iota\}$ eine offene Überdeckung von X ist.

3) S für eine kohärente analytische Garbe über X.

Definition 1. *Eine Meßkarte in $X(\mathfrak{p})$ (in bezug auf S) ist ein Quintupel*

$$\mathfrak{W} = (W, W', \Phi, \mathfrak{G} = G \times K(\mathfrak{p}), \Gamma : O^q \xrightarrow{\alpha} \Phi_0(S) \to 0)$$

für das folgendes gilt :

1) *W, W' sind offene Teilmengen von $X(\mathfrak{p})$, die abgeschlossene Hülle $\overline{W'} \cap X(\mathfrak{p})$ ist in W enthalten.*

2) *G ist ein Gebiet eines komplexen Zahlenraumes C^n.*

3) *$\Phi : W \to \mathfrak{G}$ ist eine biholomorphe Abbildung von W auf einen komplexen Unterraum $A \subset \mathfrak{G}$, derart, daß das Diagramm :*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathfrak{G} \arrow[d, "p"] \\ & K(\rho) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wenn p die Produktprojektion $\mathfrak{G} \to K(\rho)$ bezeichnet.

4) *$\Gamma : O^q \xrightarrow{\alpha} \Phi_0(S) \to 0$ ist eine über $\mathfrak{G}$ definierte exakte Garbensequenz.*

Man kann $\Phi_0(S)$ trivial zu einer analytischen Garbe über $G \times K(\rho)$ fortsetzen. $\Phi_0(S)$ werde deshalb auch als analytische Garbe über $G \times K(\rho)$ aufgefaßt.

Wir wollen Meßkarten zu Meßatlanten vereinigen. Zu dem Zwecke werde zunächst eine einfache Operation definiert.

Es sei $M \subset G \times K$ eine beliebige Teilmenge. Wir projizieren M durch $\mathfrak{G} \to G$ auf G und erhalten eine Menge $M^* \subset G$. Es bezeichne $H_r(M)$, $r > 0$, den offenen Kern des Durchschnittes aller Holomorphiegebiete $\widetilde{G} \subset C^n$, die M^* enthalten und deren Rand $\delta\widetilde{G}$ von M^* mindestens den Abstand r hat. Wir setzen dann :

$$\mathrm{sat}_{r\rho}(M) = H_r(M) \times K(\rho).$$

$\mathrm{sat}_{r\rho}(M)$ ist eine offene, holomorph-vollständige Teilmenge von $C^n \times K(\rho)$, die M enthält. Ist M relativ-kompakt in $\mathfrak{G}$ enthalten und $\mathfrak{G}$ ein Holomorphiegebiet, so gilt für kleines $r > 0$: $\mathrm{sat}_{r\rho}(M) \subset \mathfrak{G}$.

Man kann nun die Verträglichkeit zweier Meßkarten in $X(\rho)$ definieren :

Definition 2. *Zwei Meßkarten*

$$\mathfrak{W}_\nu = (W_\nu, W'_\nu, \Phi_\nu, \mathfrak{G}_\nu = G_\nu \times K(\rho), \Gamma_\nu : O^{q_\nu}_\nu \to \Phi_{\nu 0}(S) \to 0)$$

in $X(\rho)$ heißen miteinander verträglich, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind :

1) *Ist $W'_{12} = W'_1 \cap W'_2 \neq 0$, so ist für eine hinreichend kleine positive Zahl r die Menge $\mathrm{sat}_{r\rho}\Phi_2(W'_{12})$ in $G_2 \times K(\rho)$ enthalten und es ist über $\mathrm{sat}_{r\rho}\Phi_2(W'_{12})$ ein Homomorphismus $\Psi = (\psi, \psi')$ der analytischen Garbe $\Phi_1(S)$ in die analytische Garbe $\Phi_2(S)$ definiert.*

2) *Es gilt : $\psi \circ \Phi_2 = \Phi_1$, $\psi' \circ \Phi_{10} = \Phi_{20}$, $p_1 \circ \psi = p_2$ (mit $p_\nu : \mathfrak{G}_\nu \to K(\rho)$).*

Es wird also nicht verlangt, daß $\dim_c G_1 = \dim_c G_2$ ist, auch braucht die Abbildung $\psi : \mathrm{sat}_{r\rho}\Phi_2(W'_{12}) \to G_1 \times K(\rho)$ keine biholomorphe Abbildung zu sein. Unsere Verträglichkeitsrelation ist nicht kommutativ, Meßkarten brauchen nicht notwendig mit sich selbst verträglich sein.

Definition 3. *Eine endliche Menge*

$$\mathfrak{W} = \{\mathfrak{W}_\iota = (W_\iota, W'_\iota, \mathfrak{G}_\iota = G_\iota \times K(\rho), \Gamma_\iota), \iota = 1, \ldots, \iota_*\}$$

von Meßkarten in $X(\rho)$ heißt ein Meßatlas in $X(\rho)$, wenn :

1) *$\mathfrak{W}_{\iota_1}$ stets mit $\mathfrak{W}_{\iota_2}$ verträglich ist, $\iota_1, \iota_2 \in I = \{1, \ldots, \iota_*\}$.*

2) *$\bigcup_I W'_\iota = X(\rho)$ gilt.*

Ist ein Meßatlas in $X(\rho)$ gegeben, so kann man natürlich r unabhängig von (ι_1, ι_2) wählen. Ein solches r sei fest gegeben und mit $r_* = r_*(\mathfrak{W})$ bezeichnet. Ferner seien immer feste Homomorphismen $\Psi_{\iota_1\iota_2} = (\psi_{\iota_1\iota_2}, \psi'_{\iota_1\iota_2})$ definiert. Wir setzen stets voraus, daß alle Abbildungen $\Psi_{\iota\iota}$ die identischen Homomorphismen sind.

2. Wir müssen noch die Existenz von Meßkarten und Meßatlanten nachweisen. Zunächst zeigen wir :

Satz 1. *Es gibt zu jedem Punkt* $x \in X_0 = \pi^{-1}(O)$, *mit* $O \in K =$ *Nullpunkt, eine Meßkarte* $\mathfrak{W} = (W, W', \Phi, \mathfrak{G} = G \times K(\rho), \Gamma : O^q \to \Phi_0(S) \to 0)$ *in* $X(\rho)$, *für die* $x \in W'$ *gilt (wenn* $\rho \ll \rho_0$*).*

Beweis. Nach Definition des komplexen Raumes kann man eine Umgebung $W^*(x)$ durch eine biholomorphe Abbildung Φ^* auf einen komplexen Unterraum A^* eines Gebietes $G^* \subset C^n$ abbilden. Das kartesische Produkt $\Phi = \Phi^* \times \pi$ bildet W^* biholomorph auf einen komplexen Unterraum $A' \subset G^* \times K$ ab : Wird die zu A^* gehörende Idealgarbe in einem Punkte $z_0 \in G^*$ von den holomorphen Funktionskeimen h_ν, $\nu = 1, \ldots, k$, aufgespannt, so wird die Idealgarbe von A' in jedem Punkte (z_0, t_0), $t_0 \in K$ von den Funktionskeimen h_ν, $g_\mu - (t_\mu)_{(z_0, t_0)}$, $\nu = 1, \ldots, k$, $\mu = 1, \ldots, m$ erzeugt. Dabei sind die g_μ holomorphe Funktionskeime in $z_0 \in G^*$, deren Beschränkung auf A^* gleich $(t_\mu \circ \pi \circ (\Phi^*)^{-1})_{z_0}$ ist. — Die Garbe S wird durch Φ nach A' übertragen. Die triviale Fortsetzung der übertragenen Garbe stimmt mit $\Phi_0(S)$ überein. Also ist $\Phi_0(S)$ kohärent. Man kann eine holomorph-vollständige Umgebung $G \times K(\rho)$ von $\Phi(x)$ finden $(\rho \ll \rho_0)$, über der sich eine exakte Sequenz : $\Gamma : O^q \to \Phi_0(S) \to 0$ definieren läßt. Wir setzen noch $W = \Phi^{-1}(G \times K(\rho)) \subset W^*$, $A = A' \cap (G \times K(\rho))$ und wählen für W' eine in W relativ-kompakt enthaltene offene Menge und haben damit Satz 1 bewiesen.

Für die Existenz von Meßatlanten gilt folgende Aussage :

Satz 2. *Es sei* $\rho \ll \rho_0$ *hinreichend klein gewählt. Dann gibt es einen Meßatlas in* $X(\rho)$.

Beweis. Wir wählen zunächst eine endliche Menge von Meßkarten

$$\mathfrak{W}_\iota = (W_\iota, W'_\iota, \Phi_\iota, \mathfrak{G}_\iota = G_\iota \times K(\rho_\iota), \Gamma_\iota : O_\iota^{q_\iota} \to \Phi_{\iota 0}(S) \to 0), \quad \iota = 1, \ldots, \iota_*,$$

derart, daß $X_0 \subset \bigcup_\iota W_\iota$. Da X_0 regulär ist, gibt es sodann relativkompakte Teilgebiete $G'''_\iota \subset\subset G''_\iota \subset\subset G_\iota$, so daß die offenen Mengen $W'''_\iota = \Phi_\iota^{-1}(G'''_\iota \times K(\rho_\iota))$ noch X_0 überdecken. Offenbar kann man nun eine Überdeckung $\{G_{\iota\nu}, \nu = 1, \ldots, \nu_\iota\}$ der abgeschlossenen Hülle von G'''_ι mit Gebieten $G_{\iota\nu} \subset\subset G''_\iota$, ein ρ, $0 < \rho < \rho_\iota$ und ein $r > 0$ mit folgender Eigenschaft finden : Gilt $(G_{\iota\nu} \times K(\rho)) \cap \Phi_\iota(W''_{i}) \neq 0$, so folgt $\mathfrak{G}_{\iota\nu} \subset G_\iota \times K(\rho)$, $\mathfrak{G}_{\iota\nu} \cap A_\iota = \mathfrak{G}_{\iota\nu} \cap \Phi_\iota(W_{\iota i})$, wenn $\mathfrak{G}_{\iota\nu} = \mathrm{sat}_{r\rho}(G_{\iota\nu} \times K(\rho))$ und

$$A_\iota = \Phi_\iota(W_\iota), \; W''_\iota = \Phi_\iota^{-1}(G''_\iota \times K(\rho))$$

gesetzt wird $(\iota = 1, \ldots, \iota_*)$. Wir definieren :

$$M_{\iota i} = \{\nu : \nu = 1, \ldots, \nu_\iota, (G_{\iota\nu} \times K(\rho)) \cap \Phi_\iota(W''_{\iota i}) \neq 0\},$$

$A_{i\iota\nu} = \mathfrak{G}_{\iota\nu} \cap A_\iota$, $\nu \in M_{\iota i}$ und betrachten die biholomorphe Abbildung $\lambda_{i\iota\nu} = \Phi_i \circ \Phi_\iota^{-1}$: $A_{i\iota\nu} \to A_i$. Sind r, ρ und alle Gebiete $G_{\iota\nu}$ sehr klein, so wird auch $\mathfrak{G}_{\iota\nu}$ sehr klein und $\lambda_{i\iota\nu}$ durch Beschränkung einer holomorphen Abbildung $\widetilde{\lambda}_{i\iota\nu} : \mathfrak{G}_{\iota\nu} \to C^{ni} \times K(\rho)$ erhalten, die mit den Produktprojektionen $\mathfrak{G}_{\iota\nu} \to K(\rho)$, $C^{ni} \times K(\rho) \to K(\rho)$ kommutiert. Gilt $i = \iota$, so sei $\widetilde{\lambda}_{i\iota\nu}$ die Identität. Da die Garben $\Phi_{\iota 0}(S)$ außerhalb der Mengen A_ι Nullgarben sind, erhält man eine Abbildung $\widetilde{\lambda}'_{i\iota\nu} : \Phi_{i0}(S) \oplus_{\widetilde{\lambda}_{i\iota\nu}} \mathfrak{G}_{\iota\nu} \to \Phi_{\iota 0}(S)$, so daß $(\widetilde{\lambda}_{i\iota\nu}, \widetilde{\lambda}'_{i\iota\nu})$ ein analytischer Garbenhomomorphismus ist $(\nu \in M_{\iota i})$.

Es werde weiterhin vorausgesetzt, daß r, ρ und die Gebiete $G_{\iota\nu}$ äußerst klein sind. Dann bildet $\widetilde{\lambda}_{i\iota\nu}$ sicher $\mathfrak{G}_{\iota\nu}$ in $G_i \times K(\rho)$ ab, $\nu \in M_{\iota i}$. Ferner ist $\{W'_{\iota\nu}\}$, $W'_{\iota\nu} = \Phi_\iota^{-1}(G_{\iota\nu} \times K(\rho))$ eine offene Überdeckung von $X(\rho)$. Wir setzen $\varkappa = (\iota, \nu)$, $\iota = 1, \ldots, \iota_*$, $\nu = 1, \ldots, \nu_\iota$ und definieren $W_\varkappa = W_\iota \cap X(\rho)$, $\Phi_\varkappa = \Phi_\iota$, $\mathfrak{G}_\varkappa(\rho) = G_\iota \times K(\rho)$, $\Gamma_\varkappa = \Gamma_\iota$, $\Psi_{\varkappa_1\varkappa_2} = (\widetilde{\lambda}_{\iota_1\iota_2\nu_2}, \widetilde{\lambda}'_{\iota_1\iota_2\nu_2})$. Gilt $W'_{\varkappa_1\varkappa_2} \neq 0$, so folgt $\nu_2 \in M_{\iota_2\iota_1}$, mithin ist $\Psi_{\varkappa_1\varkappa_2}$ definiert. Außerdem liegt dann $\mathrm{sat}_{r\rho}\Phi_{\varkappa_2}(W'_{\varkappa_1\varkappa_2}) \subset \mathfrak{G}_{\iota_2\nu_2}$ in $G_{\varkappa_2}(\rho)$. Also ist

$$\{\mathfrak{W}_\varkappa = (W_\varkappa, W'_\varkappa, \Phi_\varkappa, \mathfrak{G}_\varkappa(\rho), \Gamma_\varkappa)\}$$

ein Meßatlas in $X(\rho)$, q.e.d.

Wir setzen im folgenden stets voraus, daß schon ρ_0 hinreichen klein gewählt ist und daß über $X = X(\rho_0)$ ein fester Meßatlas $\mathfrak{W} = \{\mathfrak{W}_\varkappa, \varkappa = 1, \ldots, \varkappa_*\}$ gegeben ist. Die Allgemeinheit unserer Resultate wird dadurch nicht eingeschränkt werden.

3. Es sei $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren :

$$\hat{\mathrm{sat}}_{r\rho\varkappa} M = \Phi_\varkappa^{-1}(\mathrm{sat}_{r\rho}\Phi_\varkappa(M \cap W'_\varkappa)) \subset W_\varkappa \cap X(\rho)$$

für $\rho \leq \rho_0$, $r \leq r_*(\mathfrak{W})$, $\varkappa = 1, \ldots, \varkappa_*$. $\hat{\mathrm{sat}}_{r\rho\varkappa}(M)$ ist stets eine offene holomorph-vollständige Teilmenge von X. Ist $\{U_\iota\}$ eine Umgebungsbasis eines Punktes $x_0 \in X_0 \cap W'_\varkappa$, so ist auch $\{\hat{\mathrm{sat}}_{r\rho\varkappa} U_\iota : \rho < \rho_0, r < r_*\}$ eine Umgebungsbasis von x_0.

Definition 4. *Ein Paar $\mathfrak{U} = (U, r)$, $r = r(\mathfrak{U}) < r_*$ heißt eine Meßüberdeckung von $X(\rho)$, wenn folgendes gilt :*

1) *$U = \{U_\iota : \iota = 1, \ldots, \iota_* = \iota_*(U)\}$ ist eine endliche Steinsche Überdeckung von $X(\rho)$, r ist eine positive Zahl.*

2) *U ist auf $\mathfrak{W}$ bezogen, d.h. : jedem $\iota \in I = \{1, \ldots, \iota_*\}$ sind nicht leere Teilmengen $\mathcal{N}'_\mathfrak{U}(\iota) \subset \mathcal{N}_\mathfrak{U}(\iota) \subset K = \{1, \ldots, \varkappa_*\}$ zugeordnet.*

3) *Es ist $\mathcal{N}'_\mathfrak{U}(\iota_0, \ldots, \iota_l) = \mathcal{N}'_\mathfrak{U}(\iota_0) \cap \ldots \cap \mathcal{N}'_\mathfrak{U}(\iota_l) \neq 0$, wenn $U_{\iota_0 \ldots \iota_l} \neq 0$ ist.*

4) *Es gilt : $U_\iota \subset W'_\varkappa$, $\hat{\mathrm{sat}}_{r\rho\varkappa}(U_\iota) \subset W'_\varkappa$, wenn $\varkappa \in \mathcal{N}_\mathfrak{U}(\iota)$.*

5) *Ist $\varkappa \in \mathcal{N}'_\mathfrak{U}(\iota_0)$, so überdecken die Umgebungen U_ι, $\varkappa \in \mathcal{N}_\mathfrak{U}(\iota)$ die Menge $\hat{\mathrm{sat}}_{r\rho\varkappa}(U_{\iota_0})$, die Mengen U_ι mit $\varkappa \notin \mathcal{N}_\mathfrak{U}(\iota)$ haben mit $\hat{\mathrm{sat}}_{r\rho\varkappa}(U_{\iota_0})$ einen leeren Durchschnitt.*

6) *Jeder Punkt $x \in X(\rho)$ ist in höchstens $A(\mathfrak{W}) = \varkappa_* \cdot \max_\varkappa 2^{2 \cdot \dim_C G_\varkappa}$ Elementen der Überdeckung U enthalten.*

Es sei $\mathfrak{V} = (V, r(\mathfrak{V}))$ eine beliebige weitere Meßüberdeckung von $X(\rho)$. Wir definieren :

Definition 5. *$\mathfrak{V}$ heißt eine zulässige Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ (in Zeichen $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$), wenn folgende Eigenschaften vorhanden sind :*

1) *V ist eine Verfeinerung von U.*
2) *$\mathcal{N}_{\mathfrak{V}}(\iota) = \mathcal{N}_{\mathfrak{U}}(\tau(\iota))$, $\mathcal{N}'_{\mathfrak{V}}(\iota) = \mathcal{N}'_{\mathfrak{U}}(\tau(\iota))$.*
3) *$\hat{sat}_{r(\mathfrak{V})\rho\varkappa}(V_\iota) \subset U_{\tau(\iota)}$, $\varkappa \in \mathcal{N}_{\mathfrak{V}}(\iota)$, $\iota = 1, \ldots, \iota_*(V)$.*
4) *$\psi_{\varkappa_1\varkappa_2}$ bildet stets $\overline{sat_{r(\mathfrak{V})\rho}\Phi_{\varkappa_2}(V_{\iota_0\ldots\iota_l})}$ in $sat_{r(\mathfrak{U})\rho}\Phi_{\varkappa_1}(U_{\tau(\iota_0)\ldots\tau(\iota_l)})$ ab, wenn*
$$\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathcal{N}_{\mathfrak{V}}(\iota_0, \ldots, \iota_l) = \mathcal{N}_{\mathfrak{V}}(\iota_0) \cap \ldots \cap \mathcal{N}_{\mathfrak{V}}(\iota_l).$$

Bei einer zulässigen Verfeinerung wird $\hat{sat}_{r(\mathfrak{U})\rho\varkappa}(U_{\iota_0})$, $\varkappa \in N'_{\mathfrak{U}}(\iota_0)$ sogar von den Mengen V_ι, $\varkappa \in N_{\mathfrak{V}}(\iota)$ überdeckt. — Wir werden im folgenden statt $N'_{\mathfrak{U}}$, $N_{\mathfrak{U}}$, etc., auch N, N', etc., schreiben, wenn das nicht zu Mißverständnissen führt.

Wir zeigen :

Satz 3. *Es sei ν_* eine natürliche Zahl. Ist dann $\rho < \rho_0$ hinreichend klein gewählt, so gibt es Meßüberdeckungen $\mathfrak{U}_\nu = (U_\nu, r_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, \nu_*$ von $X(\rho)$, derart, daß $\mathfrak{U}_\nu$ zulässige Verfeinerung von $\mathfrak{U}_{\nu-1}$ ist, $\nu = 2, \ldots, \nu_*$.*

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine auf $\mathfrak{W}$ bezogene Überdeckung
$$\widetilde{U} = \{\widetilde{U}_\iota : \iota = 1, \ldots, \iota_*\}.$$
Die Träger $W'_\varkappa$ der Meßkarten $\mathfrak{W}_\varkappa$ bilden eine offene Überdeckung von X. Nach dem Schrumpfungssatz kann man offene Mengen $W'''_\varkappa \subset\subset W''_\varkappa \subset\subset W'_\varkappa$ finden, so daß noch $X_0 \subset \bigcup\limits_\varkappa W'''_\varkappa$ gilt. Es sei $\widetilde{U}$ eine endliche Steinsche Überdeckung einer Umgebung von X_0, die so fein ist, daß aus $\overline{W'''_\varkappa} \cap \widetilde{U}_\iota \neq 0$ bzw. $\widetilde{U}_\iota \cap \overline{W''_\varkappa} \neq 0$ folgt : $\hat{sat}_{r\tilde{\rho}\varkappa}(\widetilde{U}_\iota) \subset W''_\varkappa$ bzw. $\hat{sat}_{r\tilde{\rho}\varkappa}(\widetilde{U}_\iota) \subset W'_\varkappa$ und $\widetilde{U}_\iota \subset W'_\varkappa$ (mit r, $\tilde{\rho}$ hinreichend klein unabhängig von ι, $\varkappa$ gewählt). Wir setzen $N'(\iota) = \{\varkappa : \overline{W'''_\varkappa} \cap \widetilde{U}_\iota \neq 0\}$, $N(\iota) = \{\varkappa : \overline{W''_\varkappa} \cap \widetilde{U}_\iota \neq 0\}$. Offenbar wird für kleines $\tilde{\rho}$ die Menge $\hat{sat}_{r\tilde{\rho}\varkappa}(\widetilde{U}_{\iota_0})$, $\varkappa \in N'(\iota_0)$ von den Umgebungen $\widetilde{U}_\iota$, $\varkappa \in N(\iota)$ überdeckt, die Durchschnitte $\hat{sat}_{r\tilde{\rho}\varkappa}(\widetilde{U}_{\iota_0}) \cap \widetilde{U}_\iota$, $\varkappa \notin N(\iota)$ sind leer.

Es gibt nun Steinsche Überdeckungen $\widetilde{U}_\nu = \{\widetilde{U}^{(\nu)}_\iota : \iota = 1, \ldots, \iota_\nu\}$, $\nu = 0, \ldots, \nu_*$ einer Umgebung von X_0 und stark absteigende Folgen reeller Zahlen
$$r_* > r_0 = r > r_1 > \ldots > r_{\nu_*} > 0, \quad \rho_0 > \tilde{\rho} > \rho_1 > \ldots > \rho_{\nu_*} > 0,$$
derart, daß folgendes gilt :

1) $\widetilde{U}_0 = \widetilde{U}$.
2) $\widetilde{U}_\nu$ ist eine Verfeinerung von $\widetilde{U}_{\nu-1}$ (Verfeinerungsabbildung $\tau = \tau^\nu_{\nu-1}$).
3) $\hat{sat}_{r_\nu\rho_\nu\varkappa}(\widetilde{U}^{(\nu)}_\iota) \subset \widetilde{U}^{(\nu-1)}_{\tau(\iota)}$ für $\varkappa \in N_\nu(\iota) = N_{\nu-1}(\tau(\iota))$, $N_0(\iota) = N(\iota)$.
4) $\psi_{\varkappa_1\varkappa_2}\ (sat_{r_\nu\rho_\nu}\Phi_{\varkappa_2}(\widetilde{U}^{(\nu)}_{\iota_0\ldots\iota_l})) \subset\subset sat_{r_{\nu-1}\rho_{\nu-1}}\Phi_{\varkappa_1}(X_0 \cap \widetilde{U}^{(\nu-1)}_{\tau(\iota_0)\ldots\tau(\iota_l)})$, $\varkappa_1, \varkappa_2 \in N_\nu(\iota_0, \ldots, \iota_l)$.
5) Jeder Punkt von X ist in höchstens $A(\mathfrak{W})$ Elementen der Überdeckung $\widetilde{U}_\nu$ enthalten, wenn $\nu \neq 0$ ist.

Die Konstruktion der Steinschen Überdeckungen $\widetilde{U}_\nu$ ist einfach. Um z.B. $\widetilde{U}_1$ zu erhalten, wählt man zunächst Gebiete $G'_\varkappa \subset\subset G_\varkappa$, so daß die Mengen $\Phi_\varkappa^{-1}(G'_\varkappa \times K)$ noch eine Umgebung von X_0 überdecken. Durch eine Unterteilung des $C^{n_\varkappa}$ in rechtwinklige Kästen, deren Seiten zu den reellen Achsen des $C^{n_\varkappa} \approx R^{2n_\varkappa}$ parallel sind, gelingt es sodann eine (beliebig feine) endliche Überdeckung $\{G_{\varkappa\mu}\}$ von $\overline{G}'_\varkappa$ zu konstruieren, die folgende Eigenschaft hat :

1) Alle Elemente $G_{\varkappa\mu}$ sind offene holomorph-vollständige Teilmengen von $G_\varkappa$.
2) Jeder Punkt von $G_\varkappa$ ist in höchstens $2^{2n_\varkappa}$ Elementen $G_{\varkappa\mu}$ enthalten.

Nach dem Schrumpfungssatz gibt es eine offene Überdeckung $U' = \{U'_\iota\}$ einer Umgebung von X_0 mit $U'_\iota \subset\subset U_\iota$. Sind die Mengen $G_{\varkappa\mu}$ und das m-tupel ρ_1 sehr klein gewählt, so gibt es zu jedem $(\varkappa, \mu)$ ein ι, so daß $U^{(1)}_{\varkappa\mu} = \Phi_\varkappa^{-1}(G_{\varkappa\mu} \times K(\rho_1))$ in U'_ι enthalten ist. Wir können deshalb eine Verfeinerungsabbildung $\tau(\varkappa, \mu)$ definieren, so daß stets $U^{(1)}_{\varkappa\mu} \subset U'_{\tau(\varkappa,\mu)}$ gilt. Sind r_1, ρ_1, $G_{\varkappa\mu}$ sehr klein, so sind offenbar für die Überdeckung $\widetilde{U}_1 = \{U^{(1)}_{\varkappa\mu}\}$ alle verlangten Eigenschaften vorhanden.

Die Konstruktion der Überdeckung $\widetilde{U}_2$ geschieht in analoger Weise. Man muß nur $\widetilde{U}_0$ mit $\widetilde{U}_1$ vertauschen. Man kann also $\widetilde{U}_{\nu+1}$ aus $\widetilde{U}_\nu$ konstruieren und erhält dadurch die Kette $\widetilde{U}_\nu$, $\nu = 0, \ldots, \nu_*$.

Wir wählen nun $\rho < \rho_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_*$ so klein, daß alle Überdeckungen $\widetilde{U}_\nu$ die Tube $X(\rho)$ überdecken und setzen $U_\nu = \{U^{(\nu)}_\iota = \widetilde{U}^{(\nu)}_\iota \cap X(\rho) : \iota = 1, \ldots, \iota_\nu\}$. Wie man leicht sieht, sind alle Paare $(U_\nu, r_\nu) = \mathfrak{U}_\nu$ Meßüberdeckungen, $\mathfrak{U}_\nu$ ist eine zulässige Verfeinerung von $\mathfrak{U}_{\nu-1}$, q.e.d.

Wir setzen fortan immer voraus, daß schon ρ_0 so klein gewählt ist, daß über $X = X(\rho_0)$ eine Folge von Meßüberdeckungen $\mathfrak{U}_\nu$, $\nu = 0, \ldots, \nu_*$ im Sinne von Satz 3 existiert. Wir werden uns im folgenden stets auf eine solche festgewählte Folge beziehen. Die Zahl ν_* wird später bestimmt werden.

4. Es sei $\mathfrak{U} = (U = \{U_\iota : \iota = 1, \ldots, \iota_*\}, r)$ eine Meßüberdeckung von X. Wir setzen $U(\rho) = \{U_\iota(\rho) : \iota = 1, \ldots, \iota_*\} = U \cap X(\rho) = \{U_\iota \cap X(\rho) : \iota = 1, \ldots, \iota_*\}$ und ordnen den Koketten $\xi \in C^l(U(\rho), S)$, eine Norm $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}$ zu. Wir setzen zunächst für die Schnittflächen $\xi^* \in \Gamma(^*U, S)$ mit $^*U = U_{\iota_0 \ldots \iota_l}(\rho)$:

$$\|\xi^*\|_{\mathfrak{U}^*U\rho} = \max_{\varkappa \in N(\iota_0 \ldots \iota_l)} \inf_{\eta^*} \|\eta^*\|_{B_\varkappa \rho}.$$

Dabei ist $B_\varkappa = \mathrm{sat}_{r\rho} \Phi_\varkappa(U_{\iota_0 \ldots \iota_l})$ und $\eta^* \in \Gamma(B_\varkappa, \Phi_{\varkappa 0}(S))$ durchläuft die Schnittflächen mit $\eta^* | \Phi_\varkappa(^*U) = \Phi_{\varkappa 0}(\xi^*)$. Gibt es keine solche Schnittfläche, so sei $\|\xi^*\|_{\mathfrak{U}^*U\rho} = \infty$. $\|\eta^*\|_{B_\varkappa\rho}$ ist die in § 3 definierte Norm für die Schnittflächen in einer Garbe über $\mathfrak{G}_\varkappa$.

Die Norm für die Koketten $\xi = \{\xi_{\iota_0 \ldots \iota_l}\} \in C^l(U(\rho), S)$ ergibt sich nun sofort. Wir setzen einfach $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho} = \max_{\iota_0 \ldots \iota_l} \|\xi_{\iota_0 \ldots \iota_l}\|_{\mathfrak{U}U_{\iota_0 \ldots \iota_l}(\rho)\rho}$.

Es gilt :

Satz 4. *Es sei $\mathfrak{V}$ eine Meßüberdeckung von X, die eine zulässige Verfeinerung einer Meßüberdeckung $\mathfrak{U}$ ist. Ist dann $\xi \in C^l(U(\rho), S)$ eine Kokette, so folgt :* $\|\xi\|_{\mathfrak{V}\rho} \leq \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}$.

Der Beweis ist einfach. Er folgt unmittelbar aus vorstehender Definition der Norm.

Die Brauchbarkeit unserer Norm ergibt sich durch folgende Aussage :

Satz 5. *Es sei* $\mathfrak{U}_\nu = (U_\nu = \{U_\iota^{(\nu)}\}, r_\nu)$, $\nu = -2, -1, 0$ *eine Kette zulässiger Verfeinerungen von Meßüberdeckungen von X. Ist dann* $\rho < \rho_0$, *so wird die Beschränkung* $\xi \,|\, X(\rho)$ *jeder Kohomologieklasse* $\xi \in H^l(X(\rho+\varepsilon), S)$ *durch einen Kozyklus* $\eta \in Z^l(U_0(\rho), S)$ *mit endlicher Norm* $\|\eta\|_{\mathfrak{U}_0\rho}$ *repräsentiert.* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ *ist dabei ein m-tupel beliebig kleiner positiver Zahlen.*

Beweis. Da $U_{-2}(\rho+\varepsilon)$ eine Steinsche Überdeckung ist, wird ξ durch einen Kozyklus $\eta^* \in Z^l(U_{-2}(\rho+\varepsilon), S)$ repräsentiert. Wir betrachten die Schnittflächen

$$\Phi_{\varkappa 0}(\eta^*_{\iota_0 \ldots \iota_l}) \in \Gamma(\Phi_\varkappa(U^{(-2)}_{\iota_0 \ldots \iota_l}(\rho+\varepsilon)), \Phi_{\varkappa 0}(S)), \ \varkappa \in N(\iota_0, \ldots, \iota_l).$$

Ihre Beschränkung auf $\divideontimes = \mathrm{sat}_{r_{-1}\rho+\varepsilon}\Phi_\varkappa(U^{(-1)}_{i_0 \ldots i_l})$ sei mit $\gamma^*_{i_0 \ldots i_l}$ bezeichnet $(\tau(i_\nu) = \iota_\nu)$. Da $\divideontimes$ ein holomorph-vollständiger Raum ist, ist $\gamma^*_{i_0 \ldots i_l}$ unter dem Homomorphismus $\alpha_\varkappa : O_\varkappa^{q_\varkappa} \to \Phi_{\varkappa 0}(S)$ Bild einer Schnittfläche $\tilde{\gamma}^*_{i_0 \ldots i_l} \in \Gamma(\divideontimes, O_\varkappa^{q_\varkappa})$. Die Beschränkung $\gamma_{k_0 \ldots kl}$ von $\tilde{\gamma}^*_{i_0 \ldots i_l}$ auf $\mathrm{sat}_{r_0\rho}\Phi_\varkappa(U^{(0)}_{k_0 \ldots k_l})$ hat dann endliche Norm (wenn $\tau(k_\nu) = i_\nu$).

Setzen wir noch : $\eta = \tau\eta^* \,|\, X(\rho)$, so gilt $\Phi_{\varkappa 0}(\eta_{k_0 \ldots k_l}) = \alpha_\varkappa(\gamma_{k_0 \ldots k_l})$. Also hat η in bezug auf die Meßüberdeckung $\mathfrak{U}_0 = (U_0, r_0)$ endliche Norm. Offenbar erzeugt η die Kohomologieklasse $\xi \,|\, X(\rho)$. Damit ist Satz 5 bewiesen.

5. Es sei $\mathfrak{U}$ eine Meßüberdeckung von X. Eine Meßüberdeckung $\mathfrak{V}$ von X heißt eine hinreichend starke zulässige Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ (in Zeichen $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{U}$), wenn es zwischen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}$ eine für die in Betracht gezogenen Untersuchungen genügend große endliche Anzahl von Meßüberdeckungen $\mathfrak{U}_\nu$, $\nu = 0, \ldots, \nu^*$ gibt, so daß $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_{\nu_*} = \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}_\nu$ eine zulässige Verfeinerung von $\mathfrak{U}_{\nu-1}$ ist, $\nu = 1, \ldots, \nu_*$.

Wir treffen folgende Festsetzungen.

1) Sind $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, etc. Meßüberdeckungen von X, so werde stets

$$\mathfrak{U} = (U = \{U_\iota : \iota = 1, \ldots, \iota_*(U)\}, r(\mathfrak{U})), \ \mathfrak{V} = (V = \{V_\iota\}, r(\mathfrak{V})), \text{ etc.}$$

gesetzt.

2) $*U$ sei stets ein Durchschnitt $U_{i_0 \ldots i_l}(\rho)$.

3) $*V$ sei (bei beliebigen Verfeinerungen V von U) ein Durchschnitt $V_{\iota_0 \ldots \iota_l}(\rho)$ mit $\tau(\iota_\nu) = i_\nu$.

4) $*\hat{U} = \Phi_\varkappa(*U)$ für ein festgewähltes $\varkappa \in N'(i_0, \ldots, i_l)$.

5) $*\tilde{U} = \mathrm{sat}_{r(\mathfrak{U})\rho}\Phi_\varkappa(U_{i_0 \ldots i_l})$.

6) $\hat{V} = \{\hat{V}_\iota = \Phi_\varkappa(V_\iota(\rho)) : \varkappa \in N(\iota)\}$ für das feste $\varkappa$.

7) $\tilde{V} = \{\tilde{V}_\iota = \mathrm{sat}_{r(\mathfrak{V})\rho}\Phi_\varkappa(V_\iota) : \varkappa \in N(\iota)\}$.

Es sei ferner d eine natürliche Zahl, die auch $+\infty$ sein darf. Wir bezeichen mit $\hat{I}_d$, die von der holomorphen Funktion $t_1^d \circ \pi$ in X erzeugte Untergarbe von $H(X)$ und setzen $S_d = S/S \cdot \hat{I}_d$. Die Quotientenabbildung $q(d) : S \to S_d$ ist ein analytischer

Garbenhomomorphismus, der sich auf die Gruppen der Koketten, Kohomologieklassen überträgt. Wir bezeichnen die so gewonnenen Homomorphismen ebenfalls mit $q(d)$. Ferner generiert $q(d)$ Abbildungen $q_\varkappa(d) : \Phi_{\varkappa 0}(S) \to \Phi_{\varkappa 0}(S_d)$. Wir setzen $\alpha_\varkappa(d) = q_\varkappa(d) \circ \alpha_\varkappa$ und $\Gamma_{d\varkappa} : O_\varkappa^{q_\varkappa} \xrightarrow{\alpha_\varkappa(d)} \Phi_{\varkappa 0}(S_d) \to 0$ und erhalten dadurch aus $\mathfrak{W}$ einen Meßatlas $\mathfrak{W}^{(d)}$ für die Garbe S_d. Die in bezug auf $\mathfrak{W}^{(d)}$ gebildeten Normen bezeichnen wir durch Zufügen eines d zu den bei $\mathfrak{W}$ benutzten Symbolen, z.B. $||\xi||^d_{\mathfrak{U}\rho}$, $||\xi^*||^d_{\mathfrak{U}^*\mathfrak{U}\rho}$ usw. Trivialer Weise ist die Abbildung $\xi \to \xi' = q(d) \circ \xi \in C^l(U(\rho), S_d)$, $\xi \in C^l(U(\rho), S)$ in bezug auf die Normen $||\xi||_{\mathfrak{U}\rho}$, $||\xi'||^d_{\mathfrak{U}\rho}$ unabhängig von (ρ, d) linear beschränkt.

Es seien $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$ Meßüberdeckungen von X. Wir führen in den Vektorraum $C^\lambda(^*U \cap V, S)$ eine weitere Pseudonorm ein. Ist $\eta \in C^\lambda(^*U \cap V, S)$ eine Kokette, so werde $\hat{\eta} = \Phi_{\varkappa 0}(\eta) \in C^\lambda(^*\hat{U} \cap \hat{V}, \Phi_{\varkappa 0}(S))$ gesetzt (mit $\varkappa \in N'(_{i_0}, \ldots, _{i_l})$). Man beachte, daß wegen Axiom 5 in Definition 4 $\hat{V}$ eine Überdeckung von $^*\hat{U}$ ist. — Wird nun $\hat{\eta}$ durch Beschränkung einer Kokette $\tilde{\eta} \in C^\lambda(^*\tilde{U} \cap \tilde{V}, \Phi_{\varkappa 0}(S))$ erhalten, so sei $||\hat{\eta}|| = \inf\limits_{\tilde{\eta}} ||\tilde{\eta}||_{^*\tilde{U} \cap \tilde{V}\rho}$. Gibt es keine Kokette $\tilde{\eta}$, so setzen wir wieder $||\hat{\eta}|| = \infty$. Damit haben wir für η die Norm $||\eta||'_{\mathfrak{V}^*\mathfrak{U}\rho} = \max\limits_{\varkappa \in N'(i_0 \ldots i_l)} ||\Phi_{\varkappa 0}(\eta)||$ erhalten.

In gleicher Weise erhält man für die Koketten $\eta \in C^\lambda(^*U \cap V, S_d)$ eine Norm $||\eta||'^d_{\mathfrak{V}^*\mathfrak{U}\rho}$. Die durch $q(d)$ erzeugte Abbildung $C^\lambda(^*U \cap V, S) \to C^\lambda(^*U \cap V, S_d)$ ist unabhängig von (ρ, d) linear beschränkt.

Wir zeigen :

Satz 6. *Es seien* $\mathfrak{V}' \subset\subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}' \subset\subset \mathfrak{U}$ *eine Kette von Meßüberdeckungen von X und* $\xi \in Z^\lambda(^*U \cap V(\rho), S_d)$ *ein (endlicher) Kozyklus,* $\rho \ll \rho_0$ *sei hinreichend klein. Dann gibt es eine Kokette* $\eta \in C^{\lambda-1}(^*U' \cap V'(\rho), S_d)$ *mit* $\delta\eta = \xi | ^*U'$. *Die Zuordnung* $\xi \to \eta$ *ist in bezug auf die Normen* $||\xi||'^d_{\mathfrak{V}^*\mathfrak{U}\rho}$, $||\eta||'^d_{\mathfrak{V}'^*\mathfrak{U}'\rho}$ *unabhängig von* (ρ_1, d) *linear beschränkt.*

Beweis. Wir wählen $\varkappa \in N'(i_0, \ldots, i_l)$. Da $||\xi||'^d_{\mathfrak{V}^*\mathfrak{U}\rho}$ endlich ist, wird $\hat{\xi} = \Phi_{\varkappa 0}(\xi)$ durch Beschränkung einer Kokette $\tilde{\xi} \in C^\lambda(^*\tilde{U} \cap \tilde{V}, \Phi_{\varkappa 0}(S_d))$ erhalten. Wir wählen Meßüberdeckungen $\mathfrak{V}_\nu$, $\mathfrak{U}_\nu$, $\nu = 1,2$ mit $\mathfrak{V}' \subset \mathfrak{V}_2 \subset \mathfrak{V}_1 \subset \mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{U}_1$ zulässige Verfeinerungen von $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}$ sind, ist $\tilde{\xi} | ^*\tilde{U}_1 \cap \tilde{V}_1$ sicher ein Kozyklus (Axiom 3, Definition 5). Natürlich wird im allgemeinen $\tilde{V}_1$ nicht $^*\tilde{U}_1$ überdecken. Sicher wird jedoch wegen Axiom 5, Definition 4 die Menge $\Phi_\varkappa(W_\varkappa) \cap {}^*\tilde{U}_1$ überdeckt. Da die betrachtete Garbe nur hier von null verschieden ist, können wir $^*\tilde{U}_1 \cap \tilde{V}_1$ zu einer Steinschen Überdeckung von $^*\tilde{U}_1$ ergänzen und $\tilde{\xi} | ^*\tilde{U}_1$ als Kozyklus über $^*\tilde{U}_1$ ansehen. Nach § 3, Satz 8 gibt es eine Kokette $\tilde{\eta} \in C^{\lambda-1}(^*\tilde{U}_2 \cap \tilde{V}_2, \Phi_{\varkappa 0}(S_d))$ mit $\delta\tilde{\eta} = \tilde{\xi} | ^*\tilde{U}_2$, so daß die Zuordnung $\tilde{\xi} \to \tilde{\eta}$ unabhängig von (d, ρ_1) linear beschränkt ist. Diese Kokette definiert eine Kokette $\eta^* \in C^{\lambda-1}(^*U_2 \cap V_2, S_d)$. Aus § 3, Satz 10 folgt sodann, daß

$$\eta = \tau\eta^* \in C^{\lambda-1}(^*U' \cap V'(\rho), S_d)$$

die verlangten Eigenschaften hat.

Wir zeigen eine weitere wichtige Aussage :

Satz 7. *Es seien* $\mathfrak{V}' \subset\subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}' \subset\subset \mathfrak{U}$ *Meßüberdeckungen von* X, $\xi \in \mathcal{Z}^0({}^*U \cap V(\rho), S_d)$ *ein endlicher Kozyklus. Dann kann man* ξ *als Schnittfläche aus* $\Gamma({}^*U, S_d)$ *auffassen. Die Zuordnung* $\xi \to \xi \,|\, {}^*U'$ *ist in bezug auf die Normen* $\|\xi\|'^d_{\mathfrak{V}^*U\rho}$, $\|\xi \,|\, {}^*U'\|^d_{\mathfrak{U}'^*U'\rho}$ *unabhängig von* (ρ_1, d) *linear beschränkt (wenn* $\rho \ll \rho_0$*).*

Beweis. Wir gehen wieder zu ${}^*\widetilde{\mathrm{U}}$, $\widetilde{\mathrm{V}}$ über (in bezug auf ein $\varkappa \in \mathrm{N}'(i_0, \ldots, i_l)$) und dürfen voraussetzen, daß $\hat{\xi} \,|\, {}^*\widetilde{\mathrm{U}}_1$ durch Beschränkung eines Kozyklus $\widetilde{\xi} \in \mathrm{Z}^0({}^*\widetilde{\mathrm{U}}_1 \cap \widetilde{\mathrm{V}}_1, \Phi_{\varkappa 0}(\mathrm{S}_d))$ erhalten wird (wenn $\mathfrak{V}' \subset \mathfrak{V}_2 \subset \mathfrak{V}_1 \subset \mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}$). Wir setzen wieder die Überdeckung ${}^*\widetilde{\mathrm{U}}_1 \cap \widetilde{\mathrm{V}}_1$ zu einer Steinschen Überdeckung von ${}^*\widetilde{\mathrm{U}}_1$ fort. Nach § 3, Satz 9 folgt deshalb, daß die Zuordnung $\widetilde{\xi} \to \xi^* = \widetilde{\xi} \,|\, {}^*\widetilde{\mathrm{U}}_2$ in bezug auf die Normen $\|\widetilde{\xi}\|_{\widetilde{\mathrm{V}}_1\rho}$, $\|\xi^*\|_{{}^*\widetilde{\mathrm{U}}_2\rho}$ unabhängig von (d, ρ_1) linear beschränkt ist. Aus § 3, Satz 10 folgt sodann die Behauptung unseres Satzes.

6. J. Leray hat folgenden Satz hergeleitet :

Es seien T *ein topologischer Raum,* A *eine Garbe von abelschen Gruppen über* T, $U = \{U_\iota\}$ *sei eine offene Überdeckung von* T, *die bzgl.* A *azyklisch ist, d.h. die Kohomologiegruppen* $H^\nu(U_{\iota_0 \ldots \iota_l}, A)$ *verschwinden für* $\nu > 0$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. *Dann gilt*

$$H^\nu(U, A) \approx H^\nu(T, A), \; \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Da nach dem Theorem B von H. Cartan jede Steinsche Überdeckung V bzgl. einer kohärenten analytischen Garbe S azyklisch ist, kann man den Lerayschen Satz in der komplexen Analysis verwenden. Es sagt dann insbesondere aus, daß die Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^\nu(\mathrm{V}, \mathrm{S})$ unabhängig von V sind.

Wir werden hier den Lerayschen Satz für unsere Zwecke in einer verschärften Form beweisen müssen :

Satz 8. *Es seien* $\mathfrak{V}' \subset\subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U} \subset\subset \mathfrak{U}'$ *Meßüberdeckungen von* X. *Ist dann* ρ *hinreichend klein* $(\rho < \rho_1 \ll \rho_0)$, *so gibt es zu jedem endlichen Kozyklus* $\xi \in \mathcal{Z}^l(V(\rho), S_d)$ *eine Kokette* $\eta \in C^{l-1}(V'(\rho), S_d)$ *und einen Kozyklus* $\xi^* \in \mathcal{Z}^l(U(\rho), S_d)$, *so daß bzgl. der Überdeckung* $V'(\rho)$ *die Beziehung* $\xi^* = \xi + \delta\eta$ *gilt. Die Zuordnung* $\xi \to \xi^*, \eta$ *ist unabhängig von* (ρ_1, d) *in bezug auf die Normen* $\|\xi\|^d_{\mathfrak{V}\rho}$, $\|\xi^*\|^d_{\mathfrak{U}\rho}$, $\|\eta\|^d_{\mathfrak{V}'\rho}$ *linear beschränkt.*

Beweis. Wir wählen eine Kette zulässiger Verfeinerungen von Meßüberdeckungen von X :

$$\mathfrak{V}' \subset\subset \mathfrak{V}_{2l} \subset\subset \mathfrak{V}_{2l-1} \subset\subset \ldots \subset\subset \mathfrak{V}_0 = \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U} \subset\subset \mathfrak{U}_{2l} \subset\subset \mathfrak{U}_{2l-1} \subset\subset \ldots \subset\subset \mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}'$$

und setzen $\mathrm{U}^{(\nu)}_{i_0 \ldots i_k,\, \iota_0 \ldots \iota_\lambda} = \mathrm{U}^{(\nu)}_{i_0 \ldots i_k}(\rho) \cap \mathrm{V}^{(\nu)}_{\iota_0 \ldots \iota_\lambda}(\rho)$. Eine Kollektion von in den Indizes $i_0, \ldots, i_k$ und $\iota_0, \ldots, \iota_\lambda$ antikommutativen Schnittflächen $\xi_{i_0 \ldots i_k,\, \iota_0 \ldots \iota_\lambda}$ in S_d über $\mathrm{U}^{(\nu)}_{i_0 \ldots i_k,\, \iota_0 \ldots \iota_\lambda}$ werde eine Kokette aus $\mathrm{C}^{k,\lambda}_\nu = \mathrm{C}^{k,\lambda}(\mathrm{U}_\nu(\rho), \mathrm{V}_\nu(\rho))$ genannt. Wir bezeichnen mit δ die Korandoperation in bezug auf die Indizes i_μ, mit ∂ die Korandoperarion in bezug auf die Indizes ι_μ. Offenbar gilt $\delta\delta = \partial\partial = 0$, $\delta\partial = \partial\delta$. $\mathrm{C}^{k,\lambda}_\nu$ ist also für festes ν

ein Doppelkomplex, da alle Durchschnitte $U_{i_0\dots i_k}$, $V_{\iota_0\dots\iota_\lambda}$ holomorph-vollständige Räume sind, folgt aus dem Theorem B von H. Cartan, daß δ und ∂ sogar exakt sind.

Wir definieren für $C_\nu^{k,\lambda}$ eine Pseudonorm. Jede Kokette $\xi=\{\xi_{i_0\dots i_k,\iota_0\dots\iota_\lambda}\}\in C_\nu^{k,\lambda}$ ist, wenn $i_0,\dots,i_k$ festgesetzt werden, eine Kokette $\xi_{i_0\dots i_k}\in C^\lambda({}^*U\cap V_\nu(\rho), S^d)$, ${}^*U=U^{(\nu)}_{i_0\dots i_k}(\rho)$. Wir setzen $||\xi||'^d_{\nu\rho}=\max_{i_0\dots i_k}||\xi_{i_0\dots i_k}||'^d_{\mathfrak{B}_\nu{}^*U\rho}$. Aus Satz 6 folgt sofort :

(1) *Es sei* $\lambda\neq 0$. *Dann gibt es zu jeder endlichen Kokette* $\xi\in C_\nu^{k,\lambda}$ *mit* $\partial\xi=0$ *eine Kokette* $\eta\in C_{\nu+1}^{k,\lambda-1}$, *für die* $\partial\eta=\xi$ *gilt. Die Zuordnung* $\xi\to\eta$ *ist in bezug auf die Normen* $||\xi||'^d_{\nu\rho}$, $||\eta||'^d_{\nu+1,\rho}$ *unabhängig von* (ρ_1, d) *linear beschränkt.*

Satz 7 ergibt :

(2) *Die Zuordnung* $\xi\to\xi'\in C^k(U(\rho), S_d)$ *mit* $\xi\in C_\nu^{k,0}$ *und* $\partial\xi=0$ *ist in bezug auf die Normen* $||\xi||'_{\nu\rho}$, $||\xi'||_{U\rho}$ *unabhängig von* (ρ_1, d) *linear beschränkt.*

Wir definieren :

$$\begin{aligned}
Z_\nu^{k,\lambda}&=\{\xi\in C_\nu^{k,\lambda}\ :\ \delta\xi=\partial\xi=0\},\ k\geq 0,\ \lambda\geq 0,\\
B_\nu^{k,\lambda}&=\delta\partial C_\nu^{k-1,\lambda-1},\ k>0,\ \lambda>0,\\
B_\nu^{0,\lambda}&=\partial\{\xi\in C_\nu^{0,\lambda-1}\ :\ \delta\xi=0\},\ \lambda>0,\\
B_\nu^{k,0}&=\delta\{\xi\in C_\nu^{k-1,0}\ :\ \partial\xi=0\},\ k>0,\\
B_\nu^{0,0}&=\{\xi\in C_\nu^{0,0},\ \delta\xi=\partial\xi=0\}
\end{aligned}$$

und setzen (1)

$$H_\nu^{k,\lambda}=Z_\nu^{k,\lambda}/B_\nu^{k,\lambda}.$$

Es sei $\xi=\{\xi_{\iota_0\dots\iota_l}\}\in Z^l(V(\rho), S_d)$ ein Kozyklus mit $||\xi||^d_{\mathfrak{B}\rho}<M$. Wir definieren einige Folgen von Koketten :

$$\begin{aligned}
\xi_\nu&=\{\xi_{i_0\dots i_\nu,\iota_0\dots\iota_{l-\nu}}\} &&\in Z_{2\nu}^{\nu,l-\nu},\ \nu=0,\dots,l.\\
\tilde\xi_\nu&=\{\tilde\xi_{i_0\dots i_\nu,\iota_0\dots\iota_{l-\nu}}\} &&\in Z_{2\nu}^{\nu,l-\nu}(V_{2\nu}(\rho), V_{2\nu}(\rho)),\ \nu=1,\dots,l.\\
\eta_\nu&=\{\eta_{i_0\dots i_{\nu-1},\iota_0\dots\iota_{l-\nu}}\} &&\in C_{2\nu-1}^{\nu-1,l-\nu},\ \nu=1,\dots,l.\\
\tilde\eta_\nu&=\{\tilde\eta_{i_0\dots i_{\nu-1},\iota_0\dots\iota_{l-\nu}}\} &&\in C^{\nu-1,l-\nu}(V_{2\nu-1}(\rho), V_{2\nu-1}(\rho)),\ \nu=1,\dots,l.\\
\gamma_\nu&=\{\gamma_{i_0\dots i_{\nu-1},\iota_0\dots\iota_{l-\nu-1}}\} &&\in C^{\nu-1,l-\nu-1}(V_{2\nu}(\rho), V_{2\nu}(\rho)),\ \nu=1,\dots,l-1.\\
\gamma_l&=\{\gamma_{i_0\dots i_l}\} &&\in C^l(V_{2l}(\rho)).
\end{aligned}$$

Wir setzen zunächst $\xi_{i_0,\iota_0\dots\iota_l}=\xi_{\iota_0\dots\iota_l}$ und erhalten ξ_0. Es werde dann η_ν so bestimmt, daß $\partial\eta_\nu=\xi_{\nu-1}$ ist. ξ_ν sei $\delta\eta_\nu$. Die Definition von $\tilde\eta_\nu$ ist besonders einfach : $\tilde\eta_\nu=(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}\{\xi_{i_0\dots i_{\nu-1},\iota_0\dots\iota_{l-\nu}}\}$ mit $\xi_{i_0\dots i_{\nu-1},\iota_0\dots\iota_{l-\nu}}=\xi_{\tau i_0\dots\tau i_{\nu-1}\,\tau\iota_0\dots\tau\iota_{l-1}}$. Setzen wir $\tilde\xi_\nu=\delta\tilde\eta_\nu$, so gilt offenbar : $\partial\tilde\eta_\nu=\tilde\xi_{\nu-1}$, $\partial\tilde\eta_1=\xi_0$ (Man beachte, daß alle Koketten antikommutativ in ihren Indizees sind). γ_ν wird so gewählt, daß

$$\partial\gamma_1=\tilde\eta_1-\eta_1,\ \partial\gamma_\nu=\tilde\eta_\nu-\eta_\nu-\delta\gamma_{\nu-1}$$

(1) Die Beweisidee ist, daß wir zeigen :

$$H^k(V(\rho), S_d)\approx H_0^{k,0}\approx H_1^{k-1,1}\approx\dots\approx H_k^{0,k}\approx H^k(U(\rho), S_d).$$

ist. Es folgt $\delta\partial\gamma_\nu = \widetilde{\xi}_\nu - \xi_\nu$, $\delta\xi_\nu = \delta\widetilde{\xi}_\nu = \partial\xi_\nu = \partial\widetilde{\xi}_\nu = 0$. Dabei ist $\partial\gamma_l = \{A_{i_0\ldots i_l,\,\iota_0} = \gamma_{i_0\ldots i_l}\}$ zu setzen.

(1) ergibt sofort : man kann die Kokettenfolgen so bestimmen, daß die Norm der Koketten stets kleiner als $c_1 M$ ist ($c_1 > 1$ eine von ξ und ρ_1, d unabhängige Konstante). Betrachtet man sodann ξ_l als einen Kozyklus ξ^* aus $Z^l(U(\rho), S_d)$, so folgt aus (2) die Beziehung $||\xi^*||_{\mathfrak{U}_\rho} < c_0 M$ (mit $c_0 > 1$ wieder eine von ξ, ρ_1, d unabhängige Konstante). Es ist $\widetilde{\xi}^* = \{\widetilde{\xi}^*_{i_0\ldots i_l} = \xi_{i_0\ldots i_l,\,\iota_0}\} = \tau\xi$ und $\tau\xi^* - \tau\xi = \delta\tau\gamma_l$. Nach (2) hat man ebenfalls $||\tau\gamma_l||_{\mathfrak{B}'_\rho} < \text{const.}\cdot M$. Damit ist Satz 8 bewiesen.

§ 5. Ein Lemma.

1. Es sei wieder X ein komplexer Raum, $K = K(\rho_0) \subset C^m$ ein Polizylinder, $\pi : X \to K$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Ferner sei

$$\mathfrak{W} = \{\mathfrak{W}_\varkappa = (W_\varkappa, W'_\varkappa, \Phi_\varkappa, \mathfrak{G}_\varkappa = G_\varkappa \times K, \Gamma_\varkappa : O_\varkappa^{q_\varkappa} \to \Phi_{\varkappa 0}(S) \to 0) : \varkappa = 1, \ldots, \varkappa_*\}$$

ein Meßatlas in X. Im übrigen sei die gleiche Terminologie wie in § 4 gewählt.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ ein m-tupel natürlicher Zahlen und mit $I(\mathfrak{e})$ bzw. $\hat{I}(\mathfrak{e})$ diejenige kohärente analytische Untergarbe von $O(K)$ bzw. $H(X)$, die von den holomorphen Funktionen $t_\nu^{e_\nu}$ bzw. $t_\nu^{e_\nu}\circ\pi$, $\nu = 1, \ldots, m$ erzeugt wird. Wir setzen $S_\mathfrak{e} = S/S^\mathfrak{e}$, $S^\mathfrak{e} = S\cdot\hat{I}(\mathfrak{e})$. Es gilt über $X - X_0$ mit $X_0 = \pi^{-1}(O)$, $O \in K =$ Nullpunkt, die Gleichheit $S_\mathfrak{e} = 0$.

Durch die Quotientenabbildung $S \xrightarrow{q(\mathfrak{e})} S_\mathfrak{e}$ erhält man einen Homomorphismus $H^l(X(\rho), S) \to H^l(X, S_\mathfrak{e})$, $C^l(U(\rho), S) \to C^l(U, S_\mathfrak{e})$, etc., der auch mit $q(\mathfrak{e})$ bezeichnet sei.

Wir werden im nächsten Paragraphen zeigen, daß die analytischen Bildgarben $\pi_l(S)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ kohärent sind. Der Beweis dieser Aussage benutzt ein an sich interessantes Lemma, dessen Formulierung noch einige weitere Definitionen von Bezeichnungen erfordert.

1) $\lambda : \pi_l(S) \to Q$ sei ein Homomorphismus der Garbe $\pi_l(S)$ in eine kohärente analytische Garbe Q über K.

2) $H^l_\lambda(X(\rho), S)$ sei die Untergruppe derjenigen Kohomologieklassen von $H^l(X(\rho), S)$, deren π_l-Bild eine Schnittfläche in der Garbe $\operatorname{Ker}\lambda\,|\,K(\rho)$ ist.

3) $Z^l_\lambda(U(\rho), S)$ sei die Gruppe der Kozyklen aus $Z^l(U(\rho), S)$ die Kohomologieklassen aus $H^l_\lambda(X(\rho), S)$ repräsentieren. Dabei ist U eine offene Überdeckung von X.

Hauptlemma. *Es seien $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{U} \subset\subset \mathfrak{U}_0$ Meßüberdeckungen von X. Es gibt dann ein $\rho_1 \leq \rho_0$ und endliche Kozyklen $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^l_\lambda(U(\rho_1), S)$ und zu jedem endlichen Kozyklus $\xi \in Z^l_\lambda(U(\rho), S)$, $\rho \leq \rho_1$ eine Kokette $\eta \in C^{l-1}(V(\rho), S)$ und in $K(\rho)$ holomorphe Funktionen $a_\nu(t)$, $\nu = 1, \ldots, s$, so daß $\xi = \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu(t)\cdot\xi_\nu + \delta\eta$ gilt. Die Zuordnung $\xi \to a_\nu(t)$, η ist linear beschränkt in bezug auf die Normen : $||\xi||_{\mathfrak{U}_\rho}$, $||a_\nu(t)||_\rho$, $||\eta||_{\mathfrak{B}_\rho}$.*

Zusatz. *Es gibt eine Funktion $f(\mathfrak{e})$, deren Werte m-tupel natürlicher Zahlen sind, mit $\lim_{\mathfrak{e}\to\infty} f(\mathfrak{e}) = \infty$, so daß folgendes gilt* [1] *: Ist $q(\mathfrak{e})\circ\xi$ kohomolog null, so kann man die Funktionen $a_\nu(\mathfrak{t})$ so wählen, daß sie in $O \in K$ Schnittflächen in der Idealgarbe $I(f(\mathfrak{e}))$ sind.*

Wir bezeichnen mit $n = \mathrm{ach}(S)$ die kleinste ganze Zahl, zu der sich natürliche Zahlen $d_{n+1}, \ldots, d_m < \infty$ finden lassen, so daß die Garbe $S \cdot (t_\nu \circ \pi)^{d_\nu} = 0$ ist, $\nu = n+1, \ldots, m$. n heiße der Achsenrang von S bzgl. π.

In den folgenden Abschnitten dieses Paragraphen werden wir das Hauptlemma für den Fall (l, n) der Kohomologie vom Grade l und $\mathrm{ach}(S) = n$ aus einigen Induktionsannahmen herleiten :

1) $\pi_{l^*}(S)$ ist kohärent, wenn $l^* > l$; $\mathrm{ach}(S) \leqslant n$.
2) Das Hauptlemma und der Zusatz gelten für den Fall (l^*, n^*), $l^* > l$; $n^* \leqslant n$.
3) $\pi_{l^*}(S)$ ist kohärent, wenn $\mathrm{ach}(S) < n$, $l^* = 0, 1, 2, \ldots$.
4) Das Hauptlemma und der Zusatz gelten für (l^*, n^*), $n^* < n$.

Wir setzen bei der Induktion, die erst im nächsten Paragraphen vollständig zu Ende geführt werden wird, voraus, daß X, π, K festgegeben sind. Ebenfalls sei $\mathfrak{W}$ fest vorgegeben, jedoch nicht die Auflösungen $\Gamma_\varkappa$. S sei nicht fest und eine ganz beliebige kohärente analytische Garbe über X.

2. Es müssen zunächst einige Vorbereitungen gemacht werden, u.a. ist es notwendig mehrere Hilfssätze zu beweisen :

Hilfssatz 1. *Gelten Lemma und Zusatz für den Fall (l, n), $Q = 0$, so folgt ihre Gültigkeit für den Fall (l, n), Q beliebig.*

Beweis. Wir wählen zunächst für $Q = 0$ Kozyklen $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_{\tilde{s}} \in Z^l(U(\rho_1), S)$ im Sinne des Hauptlemmas. Durch die Zuordnung $(a_1, \ldots, a_{\tilde{s}}) \to \sum_{\nu=1}^{\tilde{s}} a_\nu \pi_l(\tilde{\xi}_\nu)$ erhalten wir einen Homomorphismus $\tilde{\gamma}: O^{\tilde{s}} \to \pi_l(S)$. Wir setzen $\gamma = \lambda\circ\tilde{\gamma}$ und bezeichnen mit M die Kerngarbe von γ. Da $O^{\tilde{s}}$ und Q kohärente Garben sind, ist auch M kohärent. Wir können ein $\rho_2 < \rho_1$, eine natürliche Zahl s und über $K(\rho_2)$ eine exakte Sequenz $O^s \xrightarrow{\beta} M \to 0$ definieren.

Wir setzen :

$$(b_1^{(i)}, \ldots, b_{\tilde{s}}^{(i)}) = \beta(0, \underbrace{\ldots, 0, 1, 0, \ldots}_{i\text{—te Stelle}}, 0),$$

$$\xi_i = \sum b_\nu^{(i)} \tilde{\xi}_\nu, \; i = 1, \ldots, s.$$

Es sei nun $\xi \in Z^l_\lambda(U(\rho), S)$, $\rho < \rho_2$ ein endlicher Kozyklus, dessen $q(\mathfrak{e})$-Bild kohomolog null ist. ξ läßt sich dann in der Form $\xi = \sum_{\nu=1}^{\tilde{s}} \tilde{a}(\mathfrak{t})\tilde{\xi}_\nu + \delta\eta$ darstellen, in der

(1) Wir verlangen nur, daß $f(\mathfrak{e})$ von ξ und $\rho \leq \rho_1$, nicht aber, daß diese Funktion von ρ_1, ξ_ν, etc., unabhängig ist.

die Funktionen $\widetilde{a}_\nu(t)$ Schnittflächen in der Garbe $I(\widetilde{f}(e))$ sind. Andererseits ist das $\widetilde{s}$-tupel $\widetilde{a}=(\widetilde{a}_1(t), \ldots, \widetilde{a}_{\widetilde{s}}(t))$ eine Schnittfläche in M. Nach Satz 1, § 3 gibt es, wenn ρ sehr klein ist, ein s-tupel $a=(a_1(t), \ldots, a_s(t))$ in $K(\rho)$ holomorpher Funktionen, die Schnittflächen in einer Garbe $I(\widetilde{\widetilde{f}}(\widetilde{f}(e)))$ sind, so daß $\beta(a)=\widetilde{a}$ gilt. Man hat $\xi=\sum_{\nu=1}^{s} a_\nu(t)\xi_\nu+\delta\eta$. Offenbar ist die Zuordnung $\xi\to a_\nu(t), \eta$ linear beschränkt, q.e.d.

Aus dem Hauptlemma ergibt sich ein einfaches Korollar :

Korollar I. *Es sei $l^*>l$, $ach(S)\leqslant n$ oder $ach(S)<n$, $\xi\in\mathcal{Z}^{l^*}(U(\rho), S)$ ein endlicher Kozyklus mit $\pi_{l^*}(\xi)=0$, $\rho<\rho_1$ hinreichend klein. Dann gilt $\xi=\delta\eta$, $\eta\in C^{l^*-1}(V(\rho), S)$. Die Zuordnung $\xi\to\eta$ ist linear beschränkt.*

Beweis. Nach dem Hauptlemma gibt es endliche Kozyklen $\xi_1, \ldots, \xi_s\in Z^{l^*}(U(\rho_1), S)$, so daß $\xi=\sum_\nu a_\nu(t)\xi_\nu+\delta\eta$ und $\pi_{l^*}(\xi_\nu)=0$ gilt (man setze $Q=\pi_{l_*}(\xi)$, $\lambda=$ Identität). Für hinreichend kleines ρ_2 hat man : $\xi_\nu|X(\rho_2)=\delta\eta_\nu$, $\eta_\nu\in C^{l^*-1}(V(\rho_2), S)$, $||\eta_\nu||_{\mathfrak{V}_{\rho_2}}<\mathfrak{M}$ Also ist $\xi=\delta\gamma$, $\gamma=\Sigma a_\nu\eta_\nu+\eta$, q.e.d.

Um ein weiteres Korollar zu gewinnen, bezeichnen wir mit $d<\infty$ eine natürliche Zahl und mit S_d, die in § 4 definierte kohärente analytische Garbe über X. $q(d)$ sei der natürliche Homomorphismus $S\to S_d$, $C^{l^*}(X, S)\to C^{l^*}(X, S_d)$, etc.

Korollar II. *Das Hauptlemma ist in bezug auf S_d, $\mathcal{Z}^l_{\lambda d}(U(\rho), S_d)$ richtig, wenn $ach(S)\leq n$ und $\mathcal{Z}^l_{\lambda d}(U(\rho), S_d)$ — abweichend von der Definition in Abschnitt 1 — die Gruppe der Kozyklen $\xi\in\mathcal{Z}^l(U(\rho), S_d)$ bezeichnet, für die folgendes gilt :*

Ist $t\in K(\rho)\cap\{t_1=0\}$ ein beliebiger Punkt, so gibt es stets eine Umgebung $B(\pi^{-1}(t))$ und einen Kozyklus $\hat{\xi}\in\mathcal{Z}^l(B\cap U(\rho), S)$, so daß $\xi|B=q(d)\circ\hat{\xi}$ ist.

Beweis. Da die Induktionsvoraussetzungen von Abschnitt 1 bestehen ([1]), brauchen wir nur zu zeigen, daß man $Z^l_{\lambda d}(U(\rho), S_d)$ auch wie in Abschnitt 1 definieren kann. Zu dem Zwecke ist eine kohärente analytische Garbe Q_d und ein Homomorphismus $\lambda_d : \pi_l(S_d)\to Q_d$ zu definieren.

Wir setzen $S^d=(t_1^d\circ\pi)\cdot S\subset S$. Offenbar ist S^d eine kohärente analytische Garbe über X. Nach Induktionsvoraussetzung ist das $(l+1)$-Bild kohärenter Garben mit $ach\leqslant n$ kohärent. Also folgt die Kohärenz von $\pi_{l+1}(S^d)$. Nun besteht über X die exakte Sequenz : $0\to S^d\to S\to S_d\to 0$, zu der die exakte Bildsequenz $\pi_l(S)\to\pi_l(S_d)\xrightarrow{c}\pi_{l+1}(S^d)\to\ldots$ gehört. Wir setzen $\lambda_d=c$, $Q_d=\pi_{l+1}(S^d)$. Unter Verwendung des (üblichen) Lerayschen Satzes folgt sofort, daß Q_d, λ_d nach der in Abschnitt 1 angegebenen Vorschrift gerade unsere Gruppe $Z^l_{\lambda d}(U(\rho), S_d)$ definieren.

([1]) Da wir eine Vertauschung $t_1\leftrightarrow t_n$ durchführen können, können wir S_d so behandeln, als ob $ach(S^d)<n$ gilt.

3. Es werde ein weiterer Hilfssatz hergeleitet :

Hilfssatz 2. *Es seien* $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{U}$ *Messüberdeckungen von* X, d *eine natürliche Zahl. Dann gibt es zu jeder Kokette* $\eta \in C^l(U(\rho), S^d)$, $\rho \ll \rho_0$, *eine Kokette* $\tilde{\eta} \in C^l(V(\rho), S)$ *mit* $\left(\left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^d \circ \pi\right) \cdot \tilde{\eta} = \eta$. *Die Zuordnung* $\eta \to \tilde{\eta}$ *ist in bezug auf die Normen* $\|\eta\|_{\mathfrak{U}_\rho}$, $\|\tilde{\eta}\|_{\mathfrak{V}_\rho}$ *unabhängig von* d *linear beschränkt.*

Beweis. Wir wählen Meßüberdeckungen $\mathfrak{V}_\mu$, $\mu = 0, 1, 2$ mit $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_2 \subset\subset \mathfrak{V}_1 \subset\subset \mathfrak{V}_0 = \mathfrak{U}$ und eine feste Funktion $\varkappa = \varkappa(\iota_0, \ldots, \iota_l) \in N'(\iota_0, \ldots, \iota_l)$ und setzen $^*V_\mu = V^{(\mu)}_{\iota_0 \ldots \iota_l}$, $B_\mu = \mathrm{sat}_{r(\mathfrak{V}_\mu)\rho} \Phi_\varkappa(^*V_\mu)$, $\eta^* = \eta_{\iota_0 \ldots \iota_l}$. Wie in § 3, Abschnitt 6 kann man über einer Umgebung von $\overline{B}_1$ die exakte Sequenz $O^{q_\varkappa} \xrightarrow{\alpha_\varkappa} \Phi_{\varkappa 0}(S) \to 0$ zu einer exakten Sequenz :

$$O^p \xrightarrow{h} O^{q_\varkappa} \xrightarrow{\alpha_\varkappa} \Phi_{\varkappa 0}(S) \to 0 \tag{$*$}$$

ergänzen. Wir beschränken $(*)$ auf $B_1 \cap G_\varkappa \times K(\rho, (d, \infty, \ldots, \infty))$ und erhalten das kommutative Diagramm :

$$\begin{tikzcd}
H^p(d) \arrow[r, "h(d)"] & H^{q_\varkappa}(d) \arrow[r, "\alpha_\varkappa(d)"] & \Phi_{\varkappa 0}(S^d) \arrow[r] & 0 \\
O^p \arrow[u, "\mathrm{res}_2"] \arrow[r, "h"] & O^{q_\varkappa} \arrow[u, "\mathrm{res}_1"] \arrow[r, "\alpha_\varkappa"] & \Phi_{\varkappa 0}(S) \arrow[u, "\mathrm{res}_0"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{$**$}$$

in dem die Zeilen exakt sind.

Da η endlich ist, gibt es eine Schnittfläche $\hat{\eta}^* \in \Gamma(B_1, O^{q_\varkappa})$ mit $\alpha_\varkappa(\hat{\eta}^*) = \Phi_{\varkappa 0}(\eta^*)$. Es gilt wegen $\eta \in C^l(V_1(\rho), S^d)$ die Beziehung $\alpha_\varkappa(d) \circ \mathrm{res}_1 \hat{\eta}^* = 0$. Es läßt sich also eine Schnittfläche $\hat{\hat{\eta}}^* \in \Gamma(B_2, O^p)$ finden mit $h(d) \circ \mathrm{res}_2 \hat{\hat{\eta}}^* = \mathrm{res}_1 \hat{\eta}^*$, derart, daß die Zuordnung $\eta \to \hat{\hat{\eta}}^*$ unabhängig von d linear beschränkt ist.

Wir setzen $\hat{\gamma}^* = t_1^{-d}(\hat{\eta}^* - h \circ \hat{\hat{\eta}}^*)$ und $\gamma^* = \alpha_\varkappa(\hat{\gamma}^*)$. Man hat $\Phi_{\varkappa 0}(\eta^*) \,|\, B_2 = t_1^d \cdot \gamma^*$. Wird noch $\tilde{\eta}_{\iota_0 \ldots \iota_l} = \Phi_{\varkappa 0}^{-1}(\gamma^*)$ und $\tilde{\eta} = \{\tilde{\eta}_{\iota_0 \ldots \iota_l}\}$ definiert, so ist $\|\tilde{\eta}\|_{\mathfrak{V}_\rho}$ endlich, die Zuordnung $\eta \to \tilde{\eta}$ ist unabhängig von d in bezug auf die Normen $\|\eta\|_{\mathfrak{U}_\rho}$, $\|\tilde{\eta}\|_{\mathfrak{V}_\rho}$ linear beschränkt. Ferner gilt $t_1^d \cdot \tilde{\eta} = \eta$.

Wir zeigen, daß aus dem Lemma und den Induktionsannahmen der Zusatz folgt :

Hilfssatz 3. *Gilt das Hauptlemma für* (l, n), *so ist auch sein Zusatz für* (l, n) *richtig*.

Beweis. Wegen Hilfssatz 1 können wir uns auf den Fall $Q = 0$ beschränken. Wir wählen eine Kette von Meßüberdeckungen $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{U}_3 \subset\subset \mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{U}_1 \subset\subset \mathfrak{U} \subset\subset \mathfrak{U}_0$. Es sei $\xi \in Z^l(U(\rho), S)$ ein beliebiger endlicher Kozyklus. $q(\mathfrak{e}) \circ \xi$ sei kohomolog null, d eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{e}$ sehr groß ist, u.a. daß $e_1 > d$ gilt.

Nach Induktionsvoraussetzung ist der Zusatz des Hauptlemmas für S_d richtig. Man kann also endliche Kozyklen $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_{\tilde{s}} \in Z^l_{\lambda d}(U(\rho_1), S_d)$ bestimmen, so daß $q(d) \circ \xi = \Sigma a_\nu(\mathfrak{t}) \tilde{\xi} + \delta \tilde{\eta}$ ist. Dabei ist $\tilde{\eta} \in C^{l-1}(U_1(\rho), S_d)$ eine Kokette, die $a_\nu(\mathfrak{t})$ sind holomorphe Funktionen in $K(\rho)$, die Schnittflächen in einer Idealgarbe $I(f_d(\mathfrak{e}))$ sind.

Ist $\rho_2 < \rho_1$ hinreichend klein, so gibt es (genauer : nach Verfeinerung von $\mathfrak{U}$)

endliche Kozyklen $\xi_1, \ldots, \xi_{\tilde{s}} \in Z^l(U(\rho_2), S)$ so daß $q(d)\circ\xi_\nu = \tilde{\xi}_\nu | X(\rho_2)$ gilt, $\nu = 1, \ldots, \tilde{s}$. Ferner kann man zu $\tilde{\eta}$ durch die in § 3 beschriebene Polynomfortsetzung eine endliche Kokette $\eta \in C^{l-1}(U_2(\rho), S)$ finden, für die $q(d)\circ\eta = \tilde{\eta}$ ist.

Wir setzen $\xi^* = \xi - \sum_{\nu=1}^{\tilde{s}} a_\nu(t)\xi_\nu - \delta\eta$ und erhalten einen Kozyklus mit $q(d)\circ\xi^* = 0$, $\rho < \rho_2$. Es sei $d^+ < d$ eine natürliche Zahl, derart, daß S^{d^+} torsionsrecht [1] ist. $\hat{\xi} = \tau\xi^* \Big/ \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^{d-d^+}$ ist dann (bei sehr kleinem ρ) ein Kozyklus aus $Z^l(U_3(\rho), S)$ mit $\|\hat{\xi}\|_{\mathfrak{U}_3\rho} = c\cdot\|\xi^*\|_{\mathfrak{U}_3\rho}$. Aus dem Hauptlemma folgt : Es gibt endliche Kozyklen $\xi_1^*, \ldots, \xi_s^* \in Z^l(U(\rho_2), S)$, so daß $\hat{\xi} = \Sigma b_\nu(t)\xi_\nu^* + \delta\eta^*$ gilt (mit $\eta^* \in C^{l-1}(V(\rho), S)$). Man hat also : $\xi = \Sigma a_\nu\xi_\nu + \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^{d-d^+} \Sigma \overset{\vee}{b}_\nu\xi_\nu^* + \delta\left(\eta + \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^{d-d^+}\eta^*\right)$. Offenbar ist die Zuordnung $\xi \to a_\nu$, b_ν, etc., linear beschränkt. Es folgt, da nun der Zusatz für das Kozyklensystem (ξ_ν, ξ_ν^*) gilt, daß der Zusatz auch für ein beliebiges Kozyklensystem

$$(\xi_1, \ldots, \xi_s) \in Z^l(U(\rho_2), S)$$

richtig ist, das eine Basis von $Z^l(U(\rho), S)$ im Sinne des Hauptlemmas ist, q.e.d.

4. Offenbar kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Voraussetzung machen, daß $\rho_1^{(1)} < 1 < \rho_1^{(0)}$ gilt. Wir bezeichnen mit ρ^* das m-tupel $(1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ und mit $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$ Meßüberdeckungen von X. Man kann nun jeder endlichen Kokette $\eta \in C^l(U(\rho), S)$ eine Zerlegung $\eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\nu \eta_\nu$ zuordnen, in der $\eta_\nu \in C^l(V(\rho^*), S)$ Koketten sind :

Es sei wieder $\varkappa = \varkappa(\iota_0, \ldots, \iota_l) \in N'(\iota_0, \ldots, \iota_l)$ eine beliebige, aber feste Funktion. Wir betrachten die Auflösung $O^{q_\varkappa} \xrightarrow{\alpha_\varkappa} \Phi_{\varkappa 0}(S) \to 0$. $\Phi_{\varkappa 0}(\eta_{\iota_0 \ldots \iota_l})$ wird durch Beschränkung einer Schnittfläche $\eta^* = \eta^*_{\iota_0 \ldots \iota_l} \in \Gamma(B, \Phi_{\varkappa 0}(S))$ erhalten (mit $B = \mathrm{sat}_{r(\mathfrak{U})\rho}\Phi_\varkappa(U_{\iota_0 \ldots \iota_l})$). η^* ist das $\alpha_\varkappa$-Bild einer Schnittfläche $\xi = \xi_{\iota_0 \ldots \iota_l} \in \Gamma(B, O^{q_\varkappa})$. Wir entwickeln ξ in eine Potenzreihe : $\xi = \Sigma\left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\nu \xi_\nu$. ξ_ν kann als eine (nicht von t_1 abhängende) Schnittfläche aus $\Gamma(B', O^{q_\varkappa})$ angesehen werden $(B' = \mathrm{sat}_{r(\mathfrak{U})\rho^*}\Phi_\varkappa(U_{\iota_0 \ldots \iota_l}))$. Wir setzen nun

$$\eta^{(\nu)}_{\iota_0 \ldots \iota_l} = \Phi_{\varkappa 0}^{-1}\alpha_\varkappa(\xi_\nu) \,|\, V_{\iota_0 \ldots \iota_l}$$

und $\eta_\nu = \{\eta^{(\nu)}_{\iota_0 \ldots \iota_l}\}$. Man sieht sofort, daß die Zuordnung $\eta \to \eta_\nu$ unabhängig von ν, ρ_1 in bezug auf die Normen $\|\eta\|_{\mathfrak{U}\rho}$, $\|\eta_\nu\|_{\mathfrak{V}\rho^*}$ linear beschränkt ist.

Wir zeigen :

Hilfssatz 4. *Es seien $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{U} \subset\subset \mathfrak{U}_0$ Messüberdeckungen von X. Ist $\rho_1 \ll \rho_0$ hinreichend klein, so gibt es endliche Kozyklen $\xi_\nu \in \mathcal{Z}^l(U(\rho_1), S)$, so daß folgendes gilt : Ist $\xi \in \mathcal{Z}^l(U(\rho), S)$,*

---

[1] Das bedeutet hier, daß der durch $\sigma \to (t_1 \circ \pi)\cdot\sigma$ erzeugte Homomorphismus $S^{d^+} \to S^{d^+}$ über X_0 injektiv ist. Zur Existenz vgl. Fussnote (2) auf p. 25.

$\rho \leq \rho_1$ *ein endlicher Kozyklus, so lassen sich eine Kokette* $\eta \in C^{l-1}(V(\rho), S)$ *und in* $K(\rho)$ *holomorphe Funktionen* $a_\nu(t)$ *finden, derart, daß die Zuordnung* $\xi \to \eta, a_\nu(t)$, $1/\rho_1 \cdot (\xi - \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu(t)\xi_\nu - \delta\eta)$ *in bezug auf die Normen*

$$||\xi||_{\mathfrak{U}_\rho},\ ||a_\nu(t)||_\rho,\ ||\eta||_{\mathfrak{B}_\rho},\ ||1/\rho_1 \cdot (\xi - \Sigma a_\nu(t)\xi_\nu - \delta\eta)||_{\mathfrak{B}_\rho}$$

und in bezug auf die letztere sogar unabhängig von ρ_1 *linear beschränkt ist.*

Beweis. Wir entwickeln zunächst ξ nach der vorhin angegebenen Vorschrift in eine Potenzreihe $\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\nu \xi'_\nu$, setzen $\eta_{\nu_0} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\nu \xi'_{\nu+\nu_0}$ und definieren

$$\gamma_\nu = \{\gamma^{(\nu)}_{\iota_0 \ldots \iota_{l+1}}\} = t_1^\nu \delta\eta_\nu \cdot \rho_1^{-1} = \delta\left(-\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \rho_1^{\nu-1} \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\mu \xi'_\mu\right).$$

Wir wählen Meßüberdeckungen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_6$ mit $\mathfrak{B} \subset\subset \mathfrak{B}_6 \subset\subset \ldots \subset\subset \mathfrak{B}_1 \subset\subset \mathfrak{U}$. Die Zuordnung $\xi \to \gamma_\nu$ ist dann in bezug auf die Normen $||\xi||_{\mathfrak{U}_\rho}, ||\gamma_\nu||_{\mathfrak{B}_1 \rho^*}$ unabhängig von ν, ρ_1 linear beschränkt. Es gilt $\gamma_\nu \in Z^{l+1}(V_1(\rho^*), S^\nu)$.

Wir bestimmen nach Hilfssatz 2 eine Kokette $\tilde{\gamma}_\nu \in C^{l+1}(V_2(\rho^*), S)$ mit $t_1^\nu \cdot \tilde{\gamma}_\nu = \gamma_\nu$. Es sei d eine natürliche Zahl, so daß S^d torsionsrecht ist. $t_1^d \cdot \tilde{\gamma}_\nu = t_1^d \cdot \rho_1^{-1} \delta\eta_\nu$ ist dann ein Kozyklus aus $Z^{l+1}(\mathfrak{B}_2(\rho^*), S^d)$. Es gilt $\pi_{l+1}(t_1^d \cdot \tilde{\gamma}_\nu) = 0$. Also folgt aus dem Korollar I : $t_1^d \cdot \tilde{\gamma}_\nu = \delta\sigma^*_\nu$ mit $\sigma^*_\nu \in C^l(V_3(\rho^*), S^d)$.

Wir setzen $\hat{\eta}_\nu = q(d+1) \circ (t_1^d \eta_\nu - \rho_1 \sigma_\nu) \in Z^l(V_3(\rho^*), S_{d+1})$ für $\nu > d$, $\hat{\eta}_0 = q(d+1) \circ \xi$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt : $\hat{\eta}_\nu = \sum_\mu a_{\nu\mu}(t)\hat{\xi}_\mu + \delta\hat{\omega}_\nu$, wobei

$$\hat{\xi}_\mu \in Z^l_{\lambda_{d+1}}(U(\rho_1^*), S_{d+1}),\ \hat{\omega}_\nu \in C^{l-1}(V_4(\rho^*), S_{d+1})$$

und die Funktionen $a_{\nu\mu}(t)$ in $K(\rho^*)$ holomorph sind. Ist $\rho_1^* \ll \rho_0$ noch hinreichend klein, so sind $\hat{\xi}_\mu$ $q(d+1)$-Bilder endlicher Kozyklen $\xi_\mu \in Z^l(U(\rho_1^*), S)$ (genauer : nach einer Verfeinerung von $\mathfrak{U}$), ferner ist $\hat{\omega}_\nu$ $q(d+1)$-Bild einer Kokette $\omega_\nu \in C^{l-1}(V_5(\rho^*), S)$. Alle Zuordnungen $\xi \to \omega_\nu$, $a_{\nu\mu}(t)$ sind in bezug auf die Normen

$$||\xi||_{\mathfrak{U}_\rho},\ ||\omega_\nu||_{\mathfrak{B}_5 \rho^*},\ ||a_{\nu\mu}(t)||_{\rho^*},\ \nu > d \text{ bzw. } \rho_1^{-d}||\omega_0||_{\mathfrak{B}_5\rho^*},\ \rho_1^{-d}||a_{0\mu}(t)||_{\rho^*}$$

unabhängig von (ν, ρ_1) linear beschränkt.

Nun ist das $q(d+1)$-Bild der Kokette

$$\mathfrak{o}^*_\nu = t_1^d \cdot \xi'_\nu - \rho_1\sigma^*_\nu - \sum_\mu a_{\nu\mu}(t)\xi_\mu - \delta\omega_\nu,\ \nu > d,\ \mathfrak{o}^*_0 = \sum_{\nu=0}^{d} \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^\nu \xi'_\nu - \Sigma a_{0\mu}\xi_\mu - \delta\omega_0$$

gleich null. Nach Hilfssatz 2 läßt sich eine Kokette

$$\mathfrak{o}_\nu \in C^l(V_6(\rho^*), S),\ \mathfrak{o}_0 \in C^l(V_6(\rho^*), S),\ \sigma_\nu \in C^l(V_6(\rho^*), S)$$

konstruieren, so daß $\mathfrak{o}^*_0 = t_1^{d+1}\mathfrak{o}_0$, $\mathfrak{o}^*_\nu = t_1^{d+1}\mathfrak{o}_\nu$, $\sigma^*_\nu = t_1^d\sigma_\nu$, $\nu = d+1, d+2, \ldots$. Wir setzen

$$\sigma = \sum_{\nu=d+1}^{\infty} \frac{t_1^\nu}{\rho_1^\nu}\sigma_\nu \,|\, X(\rho), \quad a_\mu(t) = \sum_{\nu=d+1}^{\infty} \frac{t_1^{\nu-d}}{\rho_1^\nu} a_{\nu\mu}(t) + a_{0\mu}(t) \,|\, K(\rho),$$

$$\omega = \omega_0 + \sum_{\nu=d+1}^{\infty} \frac{t_1^{\nu-d}}{\rho_1^\nu}\omega_\nu \,|\, X(\rho), \quad \mathfrak{o} = t_1^d \mathfrak{o}_0 + \sum_{\nu=d+1}^{\infty} \frac{t_1^\nu}{\rho_1^\nu}\mathfrak{o}_\nu \,|\, X(\rho).$$

Man hat dann :

$$\xi - \Sigma a_\mu(t)\xi_\mu - \delta\omega = t_1 \cdot \mathfrak{o} + \rho_1 \sigma.$$

Offenbar ist die Zuordnung $\xi \to a_\mu(t), \omega, \mathfrak{o}, \sigma$ in bezug auf die Normen

$$||\xi||_{\mathfrak{U}_\rho}, \; ||\eta||_{\mathfrak{V}_\rho}, \; ||a_\mu||_\rho$$

und in bezug auf $||\mathfrak{o}||_{\mathfrak{V}_\rho}$, $||\sigma||_{\mathfrak{V}_\rho}$ unabhängig von ρ_1 linear beschränkt. Daraus folgt sofort der Hilfssatz 4.

5. Der Beweis des Hauptlemmas kann nunmehr in wenigen Schritten erbracht werden. Wir wenden den Hilfssatz 4 und den Satz 8 aus § 4 an und wählen eine Meßüberdeckung $\mathfrak{V}_1$ mit $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{V}_1 \subset\subset \mathfrak{U}$. Es seien $\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_s \in Z^l(U(\rho_1), S)$ endliche Kozyklen von der Art, wie sie in Hilfssatz 4 auftreten. Ist $\xi \in Z^l(U(\rho), S)$, $||\xi||_{\mathfrak{U}_\rho} < \mathfrak{M}$ ein Kozyklus, so können wir Funktionen $a_\nu^{(0)}(t)$ und eine Kokette $\eta_0 \in C^{l-1}(V_1(\rho), S)$ bestimmen, so daß $||a_\nu^{(0)}(t)||_\rho < c \cdot \mathfrak{M}$, $||\eta_0||_{\mathfrak{V}_{1\rho}} < c \cdot \mathfrak{M}$ und $||\xi_1'||_{\mathfrak{V}_{1\rho}} < \rho_1 c' \cdot \mathfrak{M}$ ist, wenn $\xi_1' \in Z^l(V_1(\rho), S)$ den Kozyklus $\xi_1' = \xi - \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu^{(0)}(t)\widetilde{\xi}_\nu - \delta\eta_0$ bezeichnet. Dabei ist $c > 1$ eine von ξ, c' eine auch von ρ_1 unabhängige Konstante. Nach dem Lerayschen Satz 8 kann man jedoch einen Kozyklus $\xi_1 \in Z^l(U(\rho), S)$, $||\xi_1||_{\mathfrak{U}_\rho} < c_1 c' \rho_1 \mathfrak{M}$ und eine Kokette

$$\eta_0' \in C^{l-1}(V(\rho), S), \; ||\eta_0'||_{\mathfrak{V}_\rho} < c_1 c' \rho_1 \mathfrak{M}$$

bestimmen, so daß $\xi_1 - \xi_1' = \delta\eta_0'$ ist. $c_1 > 1$ ist wieder eine von ρ_1 und ξ unabhängige Konstante.

Wir wenden nun das gleiche Verfahren auf ξ_1 an, konstruieren ξ_2', $a_\nu^{(1)}(t)$, η_1, η_1', ξ_2, wenden dann das Verfahren auf ξ_2 an und fahren so fort. Offenbar konvergieren die Reihen $a_\nu(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\nu^{(\mu)}(t)$, $\eta = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\eta_\mu + \eta_\mu')$, wenn $c_1 c' \rho_1 < 1/2$ ist. Es gilt dann $||a_\nu(t)||_\rho < \text{const}\, \mathfrak{M}$, $||\eta||_{\mathfrak{V}_\rho} < \text{const}\, \mathfrak{M}$ und $\xi = \Sigma a_\nu \widetilde{\xi}_\nu + \delta\eta$. Damit ist das Hauptlemma aus den Voraussetzungen in Abschnitt 1 hergeleitet.

6. Im Falle $\mathrm{ach}(S) = 0$ gibt es natürliche Zahlen $d_1, \ldots, d_m$, so daß über X_0 die Halme der Garben $t_\nu^{d_\nu} \cdot S = 0$ sind, $\nu = 1, \ldots, m$. Man kann S als kohärente analytische Garbe über dem kompakten komplexen Raum $Y = (X_0, H(X)/\hat{I}(d_1, \ldots, d_m))$ auffassen, wobei $\hat{I}(d_1, \ldots, d_m)$ die von den holomorphen Funktionen $t_\nu^{d_\nu} \circ \pi$, $\nu = 1, \ldots, m$ über X definierte Idealgarbe bezeichnet. Das Hauptlemma (und der für diesen Sonderfall triviale Zusatz) folgen also für $(l, 0)$ aus folgenden Satz :

Satz 1. *Es sei X ein kompakter komplexer Raum, der durch eine holomorphe Abbildung $\pi : X \to K$ auf den Nullpunkt eines Polyzylinders $K \subset C^m$ abgebildet ist.* $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{U} \subset\subset \mathfrak{U}_0$ *sei eine*

Folge von Messüberdeckungen von X. Sind dann $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^l(U, S)$ *endliche Kozyklen, die eine Basis der Kohomologiegruppe* $H^l(X, S)$ *bilden, so gibt es zu jeden endlichen Kozyklus* $\xi \in Z^l(U, S)$ *komplexe Zahlen* a_ν, $\nu = 1, \ldots, s$ *und eine Kokette* $\eta \in C^{l-1}(V, S)$, *so daß* $\xi = \Sigma a_\nu \xi_\nu + \delta\eta$ *gilt. Die Zuordnung* $\xi \to a_\nu, \eta$ *ist in bezug auf die Normen* $||\xi||_{\mathfrak{U}_\rho}$, $||\eta||_{\mathfrak{V}_\rho}$, $|a_\nu|$ *linear beschränkt.*

Beweis. Wir wählen zunächst eine feste Funktion $\varkappa = \varkappa(\iota_0, \ldots, \iota_l) \in N(\iota_0, \ldots, \iota_l)$ und setzen $i = (\iota_0, \ldots, \iota_l)$. Wir wählen sodann eine Meßüberdeckung $\mathfrak{U}'$ mit $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{U}' \subset\subset \mathfrak{U}$ und natürliche Zahlen $d_1, \ldots, d_m$, so daß $t_\nu^{d_\nu} \cdot S = 0$ gilt, $\nu = 1, \ldots, m$. Man hat in X die Meßkarten (1. Art) :

$$\mathfrak{W}_{1i} = (\hat{\mathrm{sat}}_{r(\mathfrak{U})\rho\varkappa(i)} U_i,\ \Phi_{\varkappa(i)},\ \mathrm{sat}_{r(\mathfrak{U})\rho} \Phi_{\varkappa(i)}(U_i), \ldots),\ \mathfrak{W}_{2i} = (\hat{\mathrm{sat}}_{r(\mathfrak{U}')\rho\varkappa(\tau i)} U'_i,\ \Phi_{\varkappa(\tau i)}, \ldots).$$

Da auch $t_\nu^{d_\nu} \cdot \Phi_\varkappa(S) = 0$ gilt und wir deshalb bei der Definition der Normen $||\ ||_{\mathfrak{U}_\rho}$, $||\ ||_{\mathfrak{U}'_\rho}$, $||\ ||_1$, $||\ ||_2$ mit Schnittflächen f in $O^{q\varkappa}$ auskommen, die Polynome vom t_ν-Grade $< d_\nu$ sind, folgt, daß die Abbildung $\xi \to \xi$ für $\xi \in Z^l(U, S)$ bzw. $\eta \to \eta$ für $\eta \in C^{l-1}(U', S)$ in bezug auf die Normen $||\xi||_{\mathfrak{U}_\rho} \to ||\xi||_1$ bzw. $||\eta||_2 \to ||\eta||_{\mathfrak{V}_\rho}$ linear beschränkt ist. Also ergibt sich Satz unmittelbar aus Satz 7, § 2.

Ferner ist das Hauptlemma für den Fall (l, n), $l \geq A(\mathfrak{W})$, richtig. Da wir nur alternierende Koketten betrachten, gilt für $l \geq A(\mathfrak{W})$: $C^l(U(\rho), S) = 0$. Darüber hinaus folgt, daß $\pi_l(S)$, $l \geq A(\mathfrak{W})$ gleich null und damit kohärent ist.

§ 6. Die Kohärenz.

1. Es ist zweckmäßig, zunächst das Lemma des vorigen Paragraphen abzuändern. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ ein m-tupel natürlicher Zahlen und mit $H^l_\mathfrak{e}(X, S_\mathfrak{e})$ den komplexen Vektorraum $q(\mathfrak{e}) \circ H^l(X(\rho), S) \subset H^l(X, S_\mathfrak{e})$. ρ sei dabei so klein gewählt, daß $H^l_\mathfrak{e}(X, S_\mathfrak{e})$ maximal ist. Dieses ist stets möglich, da $H^l(X, S_\mathfrak{e})$ als Kohomologiegruppe eines kompakten komplexen Raumes aufgefaßt werden kann und deshalb endliche Dimension hat.

Lemma (*). *Aus den Induktionsvoraussetzungen § 5, Abschnitt 1 folgt : Es gibt ein m-tupel natürlicher Zahlen* $\mathfrak{e}_0$, *so daß folgendes gilt : Sind* $\xi_1, \ldots, \xi_s \in H^l(X(\rho_1), S)$, $\rho_1 \ll \rho_0$ *Kohomologieklassen, derart, daß* $q(\mathfrak{e}_0) \circ \xi_\nu$, $\nu = 1, \ldots, s$ *den komplexen Vektorraum* $H^l_{\mathfrak{e}_0}(X, S_{\mathfrak{e}_0})$ *aufspannen, so gibt es zu jeder Klasse* $\xi \in H^l(X(\rho_1), S)$ *in* $K(\rho)$, $\rho < \rho_1$ *holomorphe Funktionen* $a_\nu(\mathfrak{t})$, $\nu = 1, \ldots, s$, *so daß* $\xi | X(\rho) = \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu(\mathfrak{t}) \xi_\nu | X(\rho)$ *ist. Es gibt eine Funktion* $f(\mathfrak{e}) \leq \mathfrak{e}$ *mit* $\lim_{\mathfrak{e} \to \infty} f(\mathfrak{e}) = \infty$ *und folgender Eigenschaft : Ist* $q(\mathfrak{e}) \circ \xi = 0$, *so kann man die Funktionen* $a_\nu(\mathfrak{t})$ *so wählen, daß sie Schnittflächen in der Idealgarbe* $I(f(\mathfrak{e}))$ *sind* (1).

Beweis. Wir wählen eine Folge $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{U} \subset\subset \mathfrak{U}_0$ von Meßüberdeckungen von X. Nach § 4, Satz 5 gibt es endliche Kozyklen ξ^*, ξ^*_ν aus $Z^l(U(\rho), S)$, die die Kohomologie-

(1) Wir fordern fortan nur, daß $f(\mathfrak{e})$ von ξ, ρ_1, ρ unabhängig ist.

klassen $\xi|X(\rho)$, $\xi_\nu|X(\rho)$ repräsentieren. Ist $\rho_2 > \rho_1$ noch hinreichend klein, so existieren endliche Kozyklen $\gamma_1^*, \ldots, \gamma_p^* \in Z^l(U(\rho_2), S)$, so daß in bezug auf $\gamma_1^*, \ldots, \gamma_p^*$ und jeden endlichen Kozyklus $\xi^* \in Z^l(U(\rho), S)$, $\rho < \rho_1$ die Aussage des Hauptlemmas gilt.

Man kann komplexe Zahlen $c_{\nu\mu}$ finden, so daß $q(\mathfrak{e}_0)\circ(\gamma_\nu - \sum_\mu c_{\nu\mu}\xi_\mu) = 0$ ist. γ_ν bezeichnet dabei die von γ_ν^* repräsentierte Kohomologieklasse. Ist $\mathfrak{e}_0$ hinreichend groß, so hat man in $X(\rho)$ die Darstellungen $\gamma_\nu - \Sigma c_{\nu\mu}\xi_\mu = \sum_{\mu=1}^{p} a_{\nu\mu}(t)\gamma_\mu$, in der $a_{\nu\mu}(t)$ in $K(\rho)$ holomorphe Funktionen sind, die in $0 \in K(\rho)$ verschwinden. Das Gleichungssystem läßt sich deshalb nach γ_ν auflösen: $\gamma_\nu|X(\rho) = \sum_{\mu=1}^{s} b_{\nu\mu}\xi_\mu$.

Nun gilt nach dem Hauptlemma: $\xi|X(\rho) = \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu(t)\gamma_\nu$ und mithin folgt

$$\xi|X(\rho) = \sum_{\nu,\mu} a_\nu(t)\cdot b_{\nu\mu}(t)\xi_\mu|X(\rho),$$

q.e.d.

Die Existenz der Funktion $f(\mathfrak{e})$ ergibt sich unmittelbar aus dem Zusatz des Hauptlemmas.

2. Es seien $t_0 = (t_1^0, \ldots, t_m^0) \in K$ ein beliebiger Punkt, $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ ein m-tupel natürlicher Zahlen, $I(\mathfrak{e}, t_0)$ bzw. $\hat{I}(\mathfrak{e}, t_0)$, die von den Funktionen $(t_\nu - t_\nu^0)^{e_\nu}$ bzw. $(t_\nu - t_\nu^0)^{e_\nu}\circ\pi$, $\nu = 1, \ldots, m$ erzeugte kohärente Idealgarbe über K bzw. X, $S_{\mathfrak{e}t_0} = S/S\cdot\hat{I}(\mathfrak{e}, t_0)$, $q(\mathfrak{e}, t_0)$ die Projektion $S \to S_{\mathfrak{e}t_0}$. Ferner sei $H_*^l(X, S_{\mathfrak{e}t_0})$ die Untergruppe derjenigen Kohomologieklassen $\xi \in H^l(X, S_{\mathfrak{e}t_0})$, zu denen es eine Umgebung $U(\pi^{-1}(t_0))$ und eine Kohomologieklasse $\hat{\xi} \in H^l(U, S)$ mit $q(\mathfrak{e}, t_0)\circ\hat{\xi} = \xi$ gibt.

Es seien in den folgenden Abschnitten 2-4 die Induktionsvoraussetzungen aus § 5, Abschnitt 1 gemacht. Wir leiten daraus einige Sätze her.

Satz 1. *Es sei $\rho \leq \rho_0$ hinreichend klein gewählt. Dann gibt es zu jedem $\mathfrak{e}$ und zu jedem Punkt $t_0 \in K(\rho)$ Kohomologieklassen $\xi_\nu(\mathfrak{e}, t_0) \in H^l(X(\rho), S)$, $\nu = 1, \ldots, s = s(\mathfrak{e}, t_0)$, so daß $q(\mathfrak{e}, t_0)\circ\xi_\nu(\mathfrak{e}, t_0)$ den komplexen Vektorraum $H_*^l(X, S_{\mathfrak{e}t_0})$ aufspannen.*

Beweis. Wir zeigen zunächst folgende Aussage:

($*$) Satz 1 gilt für Garben S^* mit $\mathrm{ach}(S^*) < n$. In diesem Falle kann man sogar $\rho = \rho_0$ setzen.

In der Tat! Wir setzen $S^{\mathfrak{e}t_0} = S\cdot\hat{I}(\mathfrak{e}, t_0)$ und erhalten die exakte Sequenz:

$$0 \to S^{\mathfrak{e}t_0} \to S \to S_{\mathfrak{e}t_0} \to 0.$$

Unter Verwendung von Satz 5, § 2 ergibt sich daraus ein kommutatives Diagramm, dessen Zeilen exakt sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H^l(X, S) & \xrightarrow{\hat{a}} & H^l(X, S_{\mathfrak{e}t_0}) & \xrightarrow{\hat{b}} & H^{l+1}(X, S^{\mathfrak{e}t_0}) & \to \ldots \\
\wr\wr\ \pi_l & & \wr\wr\ \pi_l & & \wr\wr\ \pi_{l+1} & \\
\to \Gamma(K, \pi_l(S)) & \xrightarrow{a} & \Gamma(K, \pi_l(S_{\mathfrak{e}t_0})) & \xrightarrow{b} & \Gamma(K, \pi_{l+1}(S^{\mathfrak{e}t_0})) & \to \ldots .
\end{array}$$

Für jede Klassen $\xi \in H^l_*(X, S_{et_0})$ gilt : $\pi_{l+1}\hat{b}\xi = 0$ und mithin : $\pi_l \xi = a\eta$, $\eta \in \Gamma(K, \pi_l(S))$. Also ist $\xi = \hat{a}\pi_l^{-1}\eta$. Da $H^l(X, S_{et_0})$ endlich dimensional ist, folgt $(*)$.

Der Beweis von Satz 1 ergibt sich nunmehr leicht aus $(*)$. Wir wählen ein $\rho_1 < \rho_0$, so daß folgende Aussage gilt :

$(**)$ Ist $\xi \in H^{l+1}(X(\rho), S)$, $\rho < \rho_1$ eine Kohomologieklasse mit $\pi_{l+1}(\xi) = 0$, so gilt $\xi = 0$.

Nach dem Korollar I aus § 5, Abschnitt 2 existiert ein solches ρ_1. — Es sei nun $t_0 \in K(\rho)$, $\rho < \rho_1$ ein beliebiger Punkt und $\mathfrak{e}$ ein beliebiges m-tupel natürlicher Zahlen. Wir wählen eine natürliche Zahl d so, daß — nach allen biholomorphen Transformationen $\sigma : K(\rho) \to K(\rho)$, $t' \to O$ mit $t' = (t_1^0, t_2', \ldots, t_m') \in K(\rho)$ — die Garben $(t_1 - t_1^0)^d \cdot S, (t_1 - t_1^0)^d \cdot \pi_{l+1}(S)$ torsionsrecht sind, und setzen $S^* = S \cdot (t - t_1^0)^{2d + e_1}$, $S_* = S/S^*$. Es gilt dann $\mathrm{ach}(S_*) < n$ (genauer : nach allen Transformationen σ). Nach $(*)$ gibt es also Klassen $\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_s \in H^l(X(\rho), S_*)$, so daß die Klassen $q(\mathfrak{e}) \circ \hat{\xi}_\nu \in H^l(X, S_{et_0})$ den komplexen Vektorraum $H^l_*(X, S_{et_0})$ erzeugen. Aus der exakten Sequenz :

$$0 \to S^* \to S \to S_* \to 0$$

folgt die Kohomologiesequenz :

$$\to H^l(X(\rho), S) \to H^l(X(\rho), S_*) \xrightarrow{a} H^{l+1}(X(\rho), S^*) \to \ldots.$$

Für jede Klasse $\hat{\xi} \in H^l(X(\rho), S_*)$ ist sicher $a\hat{\xi}/(t_1 - t_1^0)^{e_1 + d}$ eine eindeutig bestimmte Kohomologieklasse aus $H^{l+1}(X(\rho), S)$, es ist

$$(t_1 - t_1^0)^d \pi_{l+1}(a\hat{\xi}/(t_1 - t_1^0)^{e_1 + d}) = \pi_{l+1}(a\hat{\xi}/(t_1 - t_1^0)^{e_1}) = 0.$$

Also folgt $a\hat{\xi}/(t_1 - t_1^0)^{e_1} = 0$, wenn diese Klasse als Kohomologieklasse aus $H^{l+1}(X(\rho), S)$ betrachtet wird.

Bezeichnet S^+ die Garbe $S \cdot (t_1 - t_1^0)^{e_1}$ und S_+ die Garbe S/S^+, so erhält man die exakte Sequenz

$$0 \to S^+ \to S \to S_+ \to 0.$$

Ferner hat man Abbildungen : $S^* \to S^+$, $S_* \to S_+$ und mithin ein kommutatives Diagramm :

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H^l(X(\rho), S) & \xrightarrow{c} & H^l(X(\rho), S_*) & \xrightarrow{a} & H^{l+1}(X(\rho), S^*) & \to \ldots \\
\updownarrow & & \downarrow b & & \downarrow b & \\
\to H^l(X(\rho), S) & \xrightarrow{c} & H^l(X(\rho), S_+) & \xrightarrow{d} & H^{l+1}(X(\rho), S^+) & \to \ldots,
\end{array}$$

in dem die Zeilen exakt sind. Es gilt $ba\hat{\xi} = 0$ und also $b\hat{\xi} = c\xi$, $\xi \in H^l(X(\rho), S)$. Ferner ist $q(\mathfrak{e}, t_0) \circ \hat{\xi} = q(\mathfrak{e}, t_0) \circ \xi$. Man kann also Klassen $\xi_\nu \in H^l(X(\rho), S)$ mit

$$q(\mathfrak{e}, t_0) \circ \xi_\nu = q(\mathfrak{e}, t_0) \circ \hat{\xi}_\nu$$

bestimmen, womit Satz 1 bewiesen ist.

3. Wir werden jetzt in mehreren Schritten aus unseren Induktionsvoraussetzungen die Kohärenz der analytischen Bildgarbe $\pi_l(S)$ zeigen $(\mathrm{ach}(S) = n)$. Es sei wieder ρ_1 hinreichend klein gewählt.

Hilfssatz 1. *Es gibt endlich viele Schnittflächen* $s_1, \ldots, s_q \in \Gamma(K(\rho), \pi_l(S))$, *die über* $K(\rho)$ *jeden Halm von* $\pi_l(S)$ *erzeugen*, $\rho < \rho_1$.

Wir wählen ρ_1 so klein, daß das Lemma (*) und der Satz 1 gelten. Es sei $\mathfrak{t}_0 \in K(\rho)$, $\rho < \rho_1$ ein beliebiger Punkt, $\hat{K}' \subset\subset \hat{K} \subset K(\rho)$ sehr kleine Polyzylinder um $\mathfrak{t}_0$. Ist $\mathfrak{e}_0$ ein m-tupel natürlicher Zahlen, so gibt es Klassen $\xi_\nu(\mathfrak{e}_0, \mathfrak{t}_0) \in H^l(X(\rho_1), S)$, derart, daß die Kohomologieklassen $q(\mathfrak{e}, \mathfrak{t}_0) \circ \xi_\nu(\mathfrak{e}_0, \mathfrak{t}_0)$ eine Basis des komplexen Vektorraumes $H^l_*(X, S_{\mathfrak{e}_0\mathfrak{t}_0})$ bilden. Nach Lemma (*) gibt es ferner feste, nicht von $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{t}_0$ abhängende Kohomologieklassen $\xi_1, \ldots, \xi_s \in H^l(X(\rho), S)$, $\rho < \rho_1$, so daß $\xi_\nu(e_0, t_0) = \Sigma a_{\nu\mu}(\mathfrak{e}_0, \mathfrak{t}_0) \cdot \xi_\mu$ gilt.

Wir wählen nun e_0 sehr groß. Ist dann $\hat{K}$ sehr klein, so kann man zu jeder Kohomologieklasse $\hat{\xi} \in H^l(\pi^{-1}(\hat{K}), S)$ in $\hat{K}'$ holomorphe Funktionen $b_\nu(\mathfrak{t})$ finden, so daß $\hat{\xi} \mid \pi^{-1}(\hat{K}') = \Sigma b_\nu(\mathfrak{t}) \xi_\nu$ gilt. Da man zu jedem Element $\gamma \in (\pi_l(S))_{\mathfrak{t}_0}$ ein $\hat{K}$ und ein $\hat{\xi}$ finden kann, so daß $\pi_l(\hat{\xi})_{\mathfrak{t}_0} = \gamma$ ist, folgt, daß die Schnittflächen $s_\nu = \pi_l(\xi_\nu)$ jeden Halm der Garbe $\pi_l(S) \mid K(\rho)$ erzeugen, q.e.d.

Wie man sogleich sieht, ist auch folgender Zusatz richtig :

Zusatz. *Es gibt eine Funktion* $f(\mathfrak{e}, \mathfrak{t}_0) = f(\mathfrak{e}) = (f_1(\mathfrak{e}), \ldots, f_m(\mathfrak{e}))$ *mit* $\lim_{\mathfrak{e} \to \infty} f(\mathfrak{e}) = \infty$, *so daß man die* $b_\nu(\mathfrak{t})$ *so wählen kann, daß sie Schnittflächen in der Idealgarbe* $I(f(\mathfrak{e}), \mathfrak{t}_0)$ *sind.*

Wir benötigen noch einen weiteren Satz :

Satz 2. *Es sei* $\rho_1 \leq \rho_0$ *hinreichend klein gewählt*, $\mathfrak{t}_0 \in K(\rho)$, $\rho < \rho_1$ *ein beliebiger Punkt*, $\xi \in H^l(X(\rho_1), S)$ *eine Kohomologieklasse mit* $q(\mathfrak{e}, \mathfrak{t}_0) \circ \xi = 0$. *Dann gilt eine Darstellunn* $\xi \mid X(\rho) = \sum_{\nu=1}^{s} a^\nu(\mathfrak{t}) \xi_\nu \mid X(\rho)$, *in der* ξ_ν *feste, nicht von* $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{t}_0$, ξ *abhängige Kohomologieklasseg aus* $H^l(X(\rho_1), S)$ *sind und* $a_\nu(\mathfrak{t})$ *über* $K(\rho)$ *Schnittflächen in der Idealgarbe* $I(f(\mathfrak{e}), \mathfrak{t}_0)$ *sind. Dabei ist* $f(\mathfrak{e}) = f(\mathfrak{e}, \mathfrak{t}_0) = (f_1(\mathfrak{e}), \ldots, f_m(\mathfrak{e}))$ *eine Funktion von* $\mathfrak{e}$ *mit* $\lim_{\mathfrak{e} \to \infty} f(\mathfrak{e}) = \infty$.

Beweis. Wir zeigen zunächst :

(*) Ist S^* eine kohärente Garbe über X mit $\mathrm{ach}(S^*) < n$, so gilt Satz 2. Man kann in diesem Falle sogar $\rho_1 = \rho_0 - \varepsilon$ setzen, $\varepsilon > 0$ beliebig klein.

In der Tat! Nach dem Lemma (*) gibt es eine Funktion $f(\mathfrak{e}) = f(\mathfrak{e}, \mathfrak{t}_0)$, so daß $\pi_l(\xi) \in \Gamma(K(\rho_1), \pi_l(S^*) \cdot I(f(\mathfrak{e}), \mathfrak{t}_0))$ gilt. Da $\pi_l(S^*)$ kohärent ist, gibt es endlich viele Schnittflächen $s_1, \ldots, s_q \in \Gamma(K(\rho_1), \pi_l(S^*))$, welche die Garbe $\pi_l(S^*) \mid K(\rho_1)$ erzeugen. Bezeichnet α den Homomorphismus $(a_1, \ldots, a_q) \to \sum_{\nu=1}^{q} a_\nu s_\nu : O^q \to \pi_l(S^*)$, so liegt $(\pi_l(\xi))_{\mathfrak{t}_0}$ im Bild der Garbe ${}^*O^q = \bigoplus_1^q I(f(\mathfrak{e}), \mathfrak{t}_0)$. Es folgt nach Cartan [3] : Es gibt eine Schnittfläche $\sigma \in \Gamma(K(\rho_1), {}^*O^q)$ mit $\alpha(\sigma) = \pi_l(\xi)$. Daraus ergibt sich unmittelbar (*), weil nach Satz 5, § 2 die Beziehung $H^{l^*}(X(\rho), S^*) \approx \Gamma(K(\rho), \pi_{l^*}(S^*))$, $\rho \leq \rho_0$, $l^* = 0, 1, 2, \ldots$ gilt.

Der Beweis von Satz 2 ist nunmehr schnell erbracht. Wir definieren S^*, S_*, S^+, S_+ wie beim Beweis von Satz 1. Nach (*) bestimmen wir Kohomologieklassen

$\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_q \in H^l(X(\rho_1), S_*)$, so daß Satz 2 in bezug auf S_*, $\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_q$ gilt. Wie im Beweis von Satz 1 konstruieren wir dann Kohomologieklassen $\xi_1, \ldots, \xi_q$, derart, daß das b-Bild von ξ_ν in $H^l(X(\rho_1), S_+)$ mit dem b-Bild von $\hat{\xi}_\nu$ übereinstimmt. Ferner seien $\xi_{q+1}, \ldots, \xi_s \in H^l(X(\rho_1), S)$ Kohomologieklassen, für die das Lemma (*) gilt (zur Darstellung von Klassen $\xi' \in H^l(X(\rho_1'), S)$ mit $\rho < \rho_1' < \rho_1$).

Man hat nun :

1) $\hat{\xi} =$ Bild von ξ in $H^l(X(\rho_1), S_*) = \sum_{\nu=1}^{q} a_\nu(t)\hat{\xi}_\nu$
mit $a_\nu(t) \in \Gamma(K(\rho_1'), I(f(e), t_0))$,

2) $(\xi - \sum_{\nu=1}^{q} a_\nu(t)\xi_\nu)/(t_1 - t_1^0)^{e_1 - d} \in H^l(X(\rho_1'), S)$

und mithin gleich $\sum_{\nu=q+1}^{s} a'_\nu(t)\xi_\nu$, wobei die $a'_\nu(t)$ in $K(\rho)$ holomorphe Funktionen sind. Wir setzen $a_\nu(t) = a'_\nu(t) \cdot (t_1 - t_1^0)^{e_1 - d}$ und erhalten $\xi = \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu(t)\xi_\nu$, q.e.d.

Es ist klar, daß der Satz 2 in bezug auf jede Basis $\xi_1, \ldots, \xi_s \in H^l(X(\rho_1), S)$, $\rho_1 \ll \rho_0$ richtig ist, für die das Lemma (*) gilt.

4. Um die Kohärenz von $\pi_l(S)$ über $K(\rho')$, $\rho' \ll \rho_0$ zu zeigen, muß nur noch nachgewiesen werden, daß für eine spezielle im Sinne von Hilfssatz 1 konstruierte Basis $s_1, \ldots, s_q$ auch jeder Halm der Relationengarbe $R(s_1, \ldots, s_q) \,|\, K(\rho')$ von Schnittflächen über $K(\rho')$ erzeugt wird. Wir wählen $\rho' < \rho$ (ρ im Sinne von Hilfssatz 1). Es sei $t_0 \in K(\rho')$ ein beliebiger Punkt, $f_{\nu t_0}$, $\nu = 1, \ldots, q$, q Keime von holomorphen Funktionen in t_0, so daß $\sum_{\nu=1}^{q} s_\nu f_{\nu t_0} = 0$ gilt. Man kann dann einen kleinen Polyzylinder $\hat{K} \subset K(\rho')$ um t_0 und in $\hat{K}$ holomorphe Funktionen f_ν, $\nu = 1, \ldots, q$ finden, die in t_0 den Keim $f_{\nu t_0}$ erzeugen, so daß $\sum_\nu f_\nu s_\nu = 0$ gilt. Wir wählen q in $K(\rho)$ holomorphe Funktionen $f_1^{(e)}, \ldots, f_q^{(e)}$, so daß $f_\nu - f_\nu^{(e)}$ über $\hat{K}$ eine Schnittfläche in $I(e, t_0)$ ist. Dabei ist e ein m-tupel natürlicher Zahlen. Nach Konstruktion von $s_1, \ldots, s_q$ gibt es Kohomologieklassen $\xi_\nu \in H^l(X(\rho), S)$, $\nu = 1, \ldots, q$ mit $\pi_l(\xi_\nu) = s_\nu$. Die Klasse $q(e, t_0) \circ \sum f_\nu^{(e)} \xi_\nu$ ist sicher kohomolog null. Wir dürfen annehmen — wie das nach Konstruktion von $s_1, \ldots, s_q$ im Beweis von Hilfssatz 1 der Fall ist — daß in bezug auf die Kohomologieklassen $\xi_1, \ldots, \xi_q \in H^l(X(\rho), S)$ das Lemma (*) gilt. Es gibt nach Satz 2 holomorphe Funktionen $a_\nu^{(e)}(t) \in \Gamma(K(\rho'), I(f(e), t_0))$ mit $\sum f_\nu^{(e)} \xi_\nu = \sum a_\nu^{(e)}(t)\xi_\nu$. Man hat also

$$((f_1^{(e)} - a_1^{(e)}), \ldots, (f_q^{(e)} - a_q^{(e)})) \in \Gamma_1 = \Gamma(K(\rho'), R(s_1, \ldots, s_q)).$$

Es gilt $(f_\nu^{(e)} - a_\nu^{(e)}) - f_\nu \in I(f(e), t_0)$. Mithin folgt aus dem in § 3 bewiesenen Satz 2, da $f(e)$ beliebig groß sein kann, daß der Halm $(R(s_1, \ldots, s_q))_{t_0}$ von den Schnittflächen aus Γ_1 erzeugt wird.

5. Es ist nun möglich geworden, eine allgemeine Aussage über die Kohärenz der analytischen Bildgarben zu machen. Offenbar kann man jeden Punkt $t_0 \in K$ durch eine biholomorphe Abbildung $K \to K$ auf den Nullpunkt $0 \in K$ transformieren. Jeder

Punkt von K ist also gleichberechtigt. Es folgt daher die Kohärenz von $\pi_l(S)$ über ganz K. Das bedeutet, daß die in den Paragraphen 5 und 6 durchgeführte Induktion vollständig ist. Alle Garben $\pi_l(S)$, $l=0, 1, 2, \ldots$ sind kohärent. Wir zeigen darüber hinaus :

Hauptsatz 1. *Es seien $\pi : X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y und S eine kohärente analytische Garbe über Y. Dann sind die Bildgarben $\pi_l(S)$, $l=0, 1, 2, \ldots$ kohärente analytische Garben über Y.*

Beweis. Der Satz ist in bezug auf Y von lokaler Natur. Wir dürfen daher annehmen, daß Y biholomorph in einen Polyzylinder K eingebettet ist. Man hat also eine eigentliche holomorphe Abbildung $\pi_* : X \to K$. Nun ist $\pi_{*\nu}(S) = {}'\pi_\nu(S)$, die triviale Fortsetzung der Bildgarbe $\pi_\nu(S)$. Ferner ist $\pi_\nu(S)$ genau dann kohärent, wenn ${}'\pi_\nu(S)$ es ist. Damit ist der Hauptsatz I bewiesen.

Wir geben noch eine andere wichtige Aussage an. Es sei $y \in Y$ ein beliebiger Punkt, m das maximale Ideal des lokalen Ringes H_y, m^ν das Unterideal von m, das von den Elementen $f_1 \cdot \ldots \cdot f_\nu$, $f_1, \ldots, f_\nu \in m$ aufgespannt wird, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Ferner sei $\hat{m}^\nu$ der Keim entlang $\pi^{-1}(y)$ der Untergarbe von $H(X)$, der von den Schnittflächen $f \circ \pi$, $f \in m^\nu$ erzeugt wird. Man sieht sofort, daß es einen natürlichen Homomorphismus $\lambda : (\pi_l(S))_y \to \pi_l(S/S \cdot \hat{m}^\nu)_y$ gibt, der durch die Beschränkungsabbildung $S \to S/S \cdot \hat{m}^\nu$ definiert wird.

Hauptsatz II. *Es sei $\xi \in (\pi_l(S))_y$ ein Element, dessen λ-Bild in $(\pi_l(S/S \cdot \hat{m}^\nu)_y$ gleich null ist. Dann gilt : $\xi \in (\pi_l(S) \cdot m^{f(\nu)})_y$. Dabei ist $f(\nu)$ eine von ξ unabhängige Funktion mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(\nu) = \infty$.*

Beweis. Man darf $Y = K$, $y = 0 \in K$ setzen. Da man eine Schnittfläche $\hat{\xi} \in \Gamma(K, \pi_l(S))$ finden kann, so daß $\hat{\xi}_0 - \xi \in (\pi_l(S) \cdot m^\nu)_0$ gilt, folgt der II. Hauptsatz unmittelbar aus dem Lemma (*).

Wir zeigen noch :

Hauptsatz II a. *Es gilt $\lim\limits_{\nu \to \infty} (\pi_l(S/S \cdot \hat{m}^\nu))_y \approx \lim\limits_{\nu \to \infty} (\pi_l(S)/m^\nu \cdot \pi_l(S))_y$.*

Beweis. Wir dürfen uns wieder auf den Fall $Y = K$, $y = 0 \in K$ beschränken. Wir setzen $S_\nu = S/S^\nu$, $S^\nu = S \cdot \hat{m}^\nu$. Man erhält aus der exakten Sequenz $0 \to S^\nu \to S \to S_\nu \to 0$ die exakte Bildsequenz $\to \pi_l(S) \xrightarrow{a} \pi_l(S_\nu) \xrightarrow{r} \pi_{l+1}(S^\nu) \to \ldots$. Es gibt eine natürliche Projektion $q_\nu : \lim\limits_{\nu \to \infty} \pi_l(S_\nu) \to \pi_l(S_\nu)$. Ist $\xi \in \lim\limits_{\nu \to \infty} (\pi_l(S_\nu))_0$ ein beliebiges Element, so gilt sicher $r \circ q_\nu \circ \xi \in$ Bild von $(\pi_{l+1}(S^\mu))_0$, μ beliebig groß. Nach dem Hauptsatz II hat man daher : $r \circ q_\nu \circ \xi \in \pi_{l+1}(S^\nu) \cdot I(f_\nu(\mu))$ und mithin $r \circ q_\nu \circ \xi = 0$ (vgl. § 3, Satz 2). Also gibt es ein Element $\hat{\xi}_\nu \in (\pi^l(S))_0$ mit $a(\hat{\xi}_\nu) = q_\nu \xi$. Die Zuordnung $\xi \to \hat{\xi}_\nu \to \pi_l(S)/\pi_l(S) \cdot I(f(\nu))$ liefert den gesuchten Isomorphismus.

Der Hauptsatz II a wurde in der algebraischen Geometrie von A. Grothendieck hergeleitet.

§ 7. Anwendungen.

In diesem Paragraphen werden einige Resultate angegeben, die sich mit Hilfe der Hauptsätze der vorl. Arbeit herleiten lassen. Die Beweise der so gewonnenen Aussagen können in der vorl. Arbeit teilweise nur angedeutet werden. Sie sind jedoch i.a. nicht schwierig. Ihre vollständige Durchführung muß einer späteren Arbeit überlassen bleiben.

1. Es seien X, Y reduzierte komplexe Räume, $\pi : X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. R. Remmert hat gezeigt [10] :

Satz 1. *$\pi(X) \subset Y$ ist eine analytische Menge.*

Dieser Satz ergibt sich sofort aus unserem Hauptsatz I. Es werde folgende Betrachtung durchgeführt :

Es seien Z ein beliebiger (allgemeiner) komplexer Raum, S eine kohärente analytische Garbe über Z. Wir bezeichnen mit $|S|$ die Menge derjenigen Punkte $z \in Z$, in denen der Halm S_z nicht der Nullhalm ist. Wählt man für I die größte analytische Untergarbe von $H(Z)$, so daß $I \cdot S = 0$ ist, so ist I als Annulatorgarbe (vgl. [6] p. 401) kohärent. Die Nullstellenmenge von I stimmt mit $|S|$ überein. Mithin ist $|S|$ eine analytische Menge.

Wir haben gezeigt :

(1) *Der Träger $|S|$ jeder kohärenten analytischen Garbe S ist eine analytische Menge*

Im Falle von Satz 1 gilt : $\pi(X) = |\pi_0(H(X))|$. Da $\pi_0(H(X))$ nach Hauptsatz I kohärent ist, haben wir Satz 1 bewiesen.

Natürlich ist der Remmertsche Beweis bedeutend einfacher. Unser Beweis zeigt jedoch, daß sich der Satz 1 dem Hauptsatz I unterordnet.

2. Es seien nun X, Y zwei allgemeine komplexe Räume, $\pi : X \to Y$ eine surjektive eigentliche, holomorphe Abbildung, S eine kohärente analytische Garbe über X. Ferner sei $y_0 \in Y$ ein beliebiger Punkt. Wir bezeichnen mit $m = m(y_0)$ die Untergarbe der Funktionskeime aus $H(Y)$, deren Wert in y_0 gleich null ist. $\hat{m} = \hat{m}(y_0)$ sei diejenige analytische Untergarbe von $H(X)$, die von den Funktionskeimen

$$(f \circ \pi)_x \quad \text{mit} \quad f \in m_y, \; y = \pi(x)$$

erzeugt wird. Sowohl $\hat{m}$ als auch m sind kohärente analytische Garben.

Es sei X_y der komplexe Raum, der die Menge $X' = \pi^{-1}(y)$ als Träger und die Garbe $H(X)/\hat{m} \cdot H(X) | X'$ zur Strukturgarbe hat. Wir setzen $S(y) = S/\hat{m} \cdot S | X_y$ und erhalten eine kohärente analytische Garbe über X_y.

Ist $\sigma \in \pi_l(S)_y$ ein beliebiges Garbenelement, so wird σ durch einen Keim $\hat{\sigma}$ einer l-dimensionalen Kohomologieklasse mit Koeffizienten in S repräsentiert. Der Keim $\hat{\sigma}$ ist dabei entlang X_y gebildet. Durch die Beschränkungsabbildung $S \to S(y)$ erhält man sodann eine Kohomologieklasse $\hat{\sigma} | X_y \in H^l(X_y, S(y))$. Offenbar wird jedes Element aus $\pi_l(S)_y \cdot m$ in die Nullklasse abgebildet. Daraus folgt :

(2) *Es gibt zu jedem Punkt* $y \in Y$ *einen natürlichen Homomorphismus*

$$\lambda_y \,:\, \pi_l(S)_y / \pi_l(S)_y \cdot m(y) \to H^l(X_y,\ S(y)).$$

Es läßt sich zeigen :

Satz 2. *Es sei* Y *reduziert. Dann bildet die Menge* M *der Punkte* $y \in Y$, *in denen* λ_y *nicht bijektiv ist, eine niederdimensionale analytische Menge von* Y (1).

Der Beweis sei nur angedeutet. Man zeigt zunächst, daß die Menge nirgends dicht ist. Man betrachtet sodann die Homomorphismen :

$$\pi_l \lambda_y \,:\, \pi_l(\mathrm{S})/m(y)\cdot \pi_l(\mathrm{S}) \xrightarrow{\lambda_y} \mathrm{H}^l(\mathrm{X}_y,\ \mathrm{S}(y)) \xrightarrow{\pi_l} \pi_l(\mathrm{S}(y)).$$

Man kann die Garben $\pi_l(\mathrm{S})/m(y)\cdot\pi_l(\mathrm{S})$, $\pi_l(\mathrm{S}(y))$ und die Homomorphismen $\pi_l \circ \lambda_y$ als je eine kohärente analytische Garbe bzw. als einen Homomorphismus Γ über dem kartesischen Produkt $\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}$ auffassen. Wir sehen Y als Diagonale von $\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}$ an. Da π_l die Gruppe $\mathrm{H}^l(\mathrm{X}_y,\ \mathrm{S}(y))$ bijektiv abbildet, folgt $\mathrm{M} = \mathrm{Y} \cap (|\mathrm{Ker}\,\Gamma| \cup |\mathrm{Coker}\,\Gamma|)$ und damit der Satz 2.

3. Die Garben $\pi_l(\mathrm{S})$ werden im allgemeinen keine freien Garben über Y sein- Jedoch gilt die wohlbekannte Aussage :

(3) *Es seien* Z *ein reduzierter komplexer Raum,* S *eine kohärente analytische Garbe über* Z. *Dann bilden die Punkte* $z \in Z$, *in denen* S_z *kein freier Modul über* $H(Z)_z$ *ist, eine niederdimen. sionale analytische Menge* $F(S) \subset Z$.

Beweis. Es ist $\mathrm{F}(\mathrm{S}) = |\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{H}}(\mathrm{S}, \mathrm{H}/m(z))|$, wobei $\mathrm{H} = \mathrm{H}(\mathrm{Z})$ gesetzt wird und die Garben $m(z)$ als eine kohärente analytische Garbe über $\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}$ und Z als Diagonale betrachtet werden. Also ist $\mathrm{F}(\mathrm{S})$ analytisch. Man zeigt leicht, daß $\mathrm{F}(\mathrm{S})$ nirgends dicht ist (trivial, vgl. [7], p. 306).

Ebenso folgt ziemlich leicht :

(4) *Es seien* Z *ein reduzierter komplexer Raum,* S *eine kohärenteana lytische Garbe über* Z. *Dann ist die Vereinigung* $\bigcup_{z,\sigma_z} \sigma_z$, *wobei* $\sigma_z \in S_z$ *die Torsionselemente des Moduls* S_z *durchläuft, eine kohärente analytische Garbe* $T(S)$ *über* Z. $|T(S)|$ *ist eine niederdimensionale analytische Menge in* Z.

Zum Beweise von (4) konstruiert man unter Verwendung einer lokalen exakten Sequenz $\mathrm{O}^p \to \mathrm{O}^q \to \mathrm{S} \to 0$ zu jedem Punkt $z \in \mathrm{Z}$ eine Umgebung $\mathrm{U}(z)$ und eine in U holomorphe Funktion h, deren Funktionskeime nicht Nullteiler sind, so daß die Garbe $h\cdot\mathrm{S}$ über U keine Torsionselemente enthält. h erzeugt einen Homomorphismus $\alpha : \mathrm{S}\to\mathrm{S} : \sigma \to \sigma\cdot h$. Es gilt $\mathrm{T}(\mathrm{S})\,|\,\mathrm{U} = \mathrm{Ker}\ \alpha$. Daraus folgt die Kohärenz. Daß $|\mathrm{T}(\mathrm{Z})|$ niederdimensional ist, ergibt sich aus (3).

Es sei nun Z ein beliebiger komplexer Raum, Z′ seine Reduktion. Wir nennen

(1) Ist Y nicht reduziert, so kann $\mathrm{M} = \mathrm{Y}$ gelten. M ist jedoch stets eine analytische Menge.

dann ein Garbenelement $\sigma \in S_z$ ein Torsionselement, wenn es einen holomorphen Funktionskeim $f \in (H(Z))_z$ mit $f \cdot \sigma = 0$ gibt, derart, daß $f \mid Z'$ kein Nullteiler ist. Die Vereinigung der Torsionselemente σ sei wieder mit $T(S)$ bezeichnet. Es folgt unter Verwendung von Satz 4, § 1 :

(4′) *Die Aussage* (4) *gilt für* $T(S)$ *sogar, wenn* Z *ein beliebiger komplexer Raum ist.*

Die Aussage (4) wird zum Beweis von Satz 2 herangezogen (um zu zeigen, daß M nirgends dicht ist) [1].

4. Es sei fortan $\pi : X \to Y$ stets eine surjektive, eigentliche holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X in einen reduzierten komplexen Raum Y [2]. S sei wieder eine kohärente analytische Garbe über X. Wir nennen S über einem Punkte $y \in Y$ platt, wenn $\mathrm{Tor}_1^{H(Y)}(S, C) = 0$ ist [3]. S heißt platt über Y, wenn S über allen Punkten von Y platt ist. Man kann zeigen :

(5) *Die Menge* $P(S)$ *der Punkte* $y \in Y$, *über denen S nicht platt ist, bildet eine niederdimensionale analytische Teilmenge von Y.*

Auf einen Beweis sei hier verzichtet.

Wir setzen im folgenden voraus, daß S über Y platt ist.

Satz 3. *Die Funktion* $r_l(y) = \dim_c H^l(X_y, S(y))$ *ist halbstetig nach oben, d.h. es gibt zu jedem Punkt* $y_0 \in Y$ *eine Umgebung* $U(y_0)$, *so daß* $\dim_c H^l(X_y, S(y)) \leq \dim_c H^l(X_{y_0}, S(y_0))$ *für* $y \in U$ *ist* $(l = 0, 1, 2, \ldots)$.

Der Beweis von Satz 3 macht wesentlich davon Gebrauch, daß man die Familie X der komplexen Räume X_y nach komplexen Räumen Y' liften kann, die durch holomorphe Abbildungen $\varphi : Y' \to Y$ in Y abgebildet sind. Zur Definition der Liftung bilden wir das kartesische Produkt $X \times Y'$, definieren in $X \times Y'$ die analytische Menge $X' = \{(x, y') : \pi(x) = \varphi(y')\}$ und versehen X' mit der Strukturgarbe $H(X \times Y')/H^* \mid X'$, wobei H^* diejenige analytische Untergarbe von $H(X \times Y')$ bezeichnet, die von den Funktionskeimen $f \circ \pi - f \circ \varphi$ mit $f \in H(Y)_{\pi(x)}$, $(x, y') \in X'$ beliebig, erzeugt wird. Die Produktprojektion $X \times Y' \to Y'$ bzw. $X \times Y' \to X$ definiert eine eigentliche holomorphe Abbildung $\pi' : X' \to Y'$ bzw. eine holomorphe Abbildung $\hat{\varphi} : X' \to X$. Es gilt : $\varphi \circ \pi' = \pi \circ \hat{\varphi}$. Wir bezeichnen mit S' die analytische Urbildgarbe von S bzgl. $\hat{\varphi}$. S' ist eine kohärente analytische Garbe über X'. Man zeigt leicht unter der Vorausssetzung, daß auch Y' ein reduzierter komplexer Raum ist :

(6) *Die komplexen Räume* X_y *und* $X'_{y'}$ *mit* $y = \varphi(y')$ *sind analytisch äquivalent.*

(7) *Es sei* $y = \varphi(y')$ *und die Garbe S platt über y. Dann ist die Garbe* S' *platt über* y'.

---

(1) (4) ist ein Spezialfall — oder besser — steht in naher Beziehung zu einem von W. Thimm ohne Beweis angegebenen Satze. Vgl. W. Thimm, Math. Annalen (1960).

(2) Analoge Sätze gelten auch, wenn Y nicht reduziert ist. Jedoch ist eine solche Verallgemeinerung nur sinnvoll, wenn man an stelle der Garbe $\{m(y)\}$ der lokalen Ringe $m(y)$ allgemeinere Garben verwendet.

(3) S_x und der komplexe Zahlkörper C können in natürlicher Weise als Modul über $(H(Y))_y$, $y = \pi(x)$ aufgefaßt werden. — Der Begriff platt wurde m.W. von A. Grothendieck eingeführt.

Der Beweis von Satz 3 folgt leicht aus (7) durch Induktion über dim Y. Wie vorne gezeigt, kann man einen niederdimensionalen reduzierten komplexen Unterraum $Y' \subset Y$ finden, so daß $\pi_l(S)$ über $Y - Y'$ eine freie Garbe ist und daß die Homomorphismen λ_y für $y \in Y - Y'$ bijektiv sind. Also ist Satz 3 über $Y - Y'$ richtig. Nach Induktionsvoraussetzung gilt er auch für Y'. Ferner ergibt sich unser Satz unter Verwendung der Hauptsätze leicht, wenn Y eine Riemannsche Fläche ist. Da man zu jedem Punkt $y_0 \in Y'$ und zu jeder der endlich vielen an y_0 grenzenden zusammenhängenden Komponenten von $Y - Y'$ ein Stück $K \subset Y$ einer Riemannschen Fläche finden kann, das y_0 enthält und sonst ganz in $Y - Y'$ verläuft, folgt, daß es eine Umgebung $U(y_0)$ gibt, so daß für $y \in (Y - Y') \cap U$ gilt : $\dim_c H^l(X_y, S(y)) \leq \dim_c H^l(X_{y_0}, S(y_0))$. Das ist dann sogar für $y \in V$ richtig, wenn $V \subset U$ eine hinreichend kleine Umgebung von y bezeichnet. Damit ist der Satz bewiesen.

5. Es werde nun vorausgesetzt, daß $\dim_c H^l(X_y, S(y))$ unabhängig von y ist. Es folgt zunächst :

Satz 4. Die Garben $A_y = \pi_{l+1}(S \cdot \hat{m}^\nu(y))$ sind torsionsfrei, $y \in Y$.

Beweisandeutung. Man zeigt zunächst, daß die natürlichen Abbildungen $S \otimes m^\nu(y) \to S$ injektiv sind. Daraus folgt sodann, daß auch die Abbildungen

$$S_y \otimes_c (m^\nu(y)/m^{\nu+1}(y)) \to S \cdot \hat{m}^\nu(y)/S \cdot \hat{m}^{\nu+1}(y)$$

injektiv sind. Ist ξ ein Keim eines Kozyklus mit Koeffizienten in $S \cdot \hat{m}^\nu(y)$ entlang X_y, so kann man $\xi = \Sigma a_\nu \xi_\nu$ setzen, wobei ξ_ν Koketten mit Koeffizienten in S und a_ν über y linear unabhängige Elemente aus $m^\nu(y)$ sind. $\xi_\nu | X_y$ sind dann Kozyklen. Dadurch wird ein formales Konstruktionsverfahren für Koketten η mit $\delta\eta = \xi$ gegeben. Man leitet damit leicht her :

(a) Satz 4 gilt für allgemeine reduzierte komplexe Räume Y, wenn er in bezug auf normale komplexe Räume Y bewiesen ist.

Man zeigt nun :

(b) Satz 4 folgt für normale komplexe Räume Y, wenn er für allgemeine komplexe Räume von kleinerer Dimension als Y richtig ist.

Für den Fall von Riemannschen Flächen Y läßt sich unser Satz unter der Voraussetzung $\dim_c H^l(X_y, S(y)) = \text{const.}$ sehr leicht nachweisen. Damit ist eine vollständige Induktion gegeben, die unseren Satz beweist.

6. Es folgt nun sofort, daß die Beschränkungsabbildung $H^l(V, S) \to H^l(X_y, S(y))$ mit $V = \pi^{-1}(U)$ surjektiv ist, wenn U eine sehr kleine Umgebung von y bezeichnet. Es seien $\xi_1, \ldots, \xi_q \in H^l(V, S)$ Kohomologieklassen, so daß $\xi_\nu | X_y$, $\nu = 1, \ldots, q$ eine Basis des komplexen Vektorraumes $H^l(X_y, S(y))$ bilden. Man zeigt leicht :

(a) Die Schnittflächen $\eta_\nu = \pi_l(\xi_\nu)$ erzeugen in einer Umgebung von y die Garbe $\pi_l(S)$.

Man braucht dazu nur die Voraussetzung von Lemma (*) für ein beliebiges m-tupel $\mathfrak{e}$ nachzuweisen.

Damit hat sich auch ergeben :

(b) Die Abbildung λ_y *ist bijektiv.*

Ferner sieht man sofort, daß $\dim_c H^l(X_y, S(y))$ nicht von y unabhängig sein kann, wenn die Relationengarbe von $(\eta_1, \ldots, \eta_q)$ von null verschieden ist. Also gilt :

Satz 5. *Die Garbe* $\pi_l(S)$ *ist eine freie Garbe, die Homomorphismen*

$$\lambda_y : \pi_l(S)_y / (\pi_l(S) \cdot m(y))_y \to H^l(X_y, S(y))$$

sind bijektiv.

Beispiele zeigen, daß die Voraussetzungen für die Sätze 3-5 wesentlich sind. Ist z.B. S nicht platt über Y, so braucht die Funktion $\dim_c H^l(X_y, S(y))$ nicht halbstetig nach oben zu sein.

7. Unter der Voraussetzung, daß S platt über Y und Y reduziert und zusammenhängend ist, kann noch eine weitere wichtige Folgerung gezogen werden. Wir setzen $\chi(y) \doteq \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \dim_c H^l(X_y, S(y))$. Die Summe ist natürlich für jedes feste y endlich, d.h. $\chi(y)$ existiert immer. Es folgt :

Satz 6. $\chi(y)$ *hängt nicht von* y *ab.*

Auf den Beweis, der selbstvertändlich nur für den Fall erbracht werden muß, daß Y eine Riemannsche Fläche ist, sei hier verzichtet.

LITERATUR

[1] Ahlfors, L. V. : *Aufsatz im Congressband Funktionentheorietagung Princeton 1957*. Princeton University Press, 1960.

[2] Bourbaki, N. : *Espaces vectoriels topologiques*. Hermann, Paris.

[3] Cartan, H. : *Variétés analytiques complexes et cohomologie*. Coll. de Bruxelles, 41-55 (1953).

[4] Cartan, H. und J.-P. Serre : Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **237**, 128-130 (1953). Vgl. auch Séminaire E.N.S. H. Cartan 1953/54, Exposé 17.

[5] Fröhlicher, A. und A. Nijenhuis : A theorem on stability of complex structures. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **43**, 239-241 (1957).

[6] Grauert, H. und R. Remmert : Bilder und Urbilder analytischer Garben. *Ann. of Math.*, **68**, 393-443 (1958).

[7] Grauert, H. und R. Remmert : Komplexe Räume. *Math. Annalen*, **136**, 245-318 (1958).

[8] Grauert, H. : Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. *Math. Annalen*, **135**, 263-273 (1958).

[9] Kodaira, K. und D. C. Spencer : On Deformations of complex-analytic Structures. Teil I und II : *Ann. of Math.*, **67**, 328-466 (1958), Teil III erscheint in den *Ann. of Math.*, 1959/60.

[10] Remmert, R. : Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. *Math. Annalen*, **133**, 338-370 (1957). Ferner : Projektionen analytischer Mengen. *Math. Annalen*, **130**, 410-441 (1956).

[11] Serre, J.-P. : Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math.*, **61**, 197-278 (1955).

1960. — Imprimerie des Presses Universitaires de France. — Vendôme (France)

ÉDIT. N° 26 038 IMPRIMÉ EN FRANCE IMP. N° 16 257